Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Физический институт им. П.Н. Лебедева Российской академии наук

На правах рукописи

Ушаков Кирилл Александрович

Анализ мультичастичных обобщений теорий высших спинов

Специальность 1.3.3 —
«Теоретическая физика»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
Васильев Михаил Андреевич

Москва — 2026

Оглавление

Введение

Актуальность темы. Построение единой теории фундаментальных взаимодействий является одной из нерешенных проблем современной физики. Классическая и квантовая теории электромагнитного взаимодействия, а также теории слабого и сильного взаимодействий хорошо изучены. Эти три взаимодействия удалось объединить в Стандартную модель [1—4], в основе которой лежит симметрия $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$. Последней экспериментально не обнаруженной частицей минимальной Стандартной модели оставался бозон Хиггса, связанный с механизмом Браута—Энглера—Хиггса [5; 6]. Его открытие было объявлено коллаборациями ATLAS и CMS в 2012 году [7; 8], что подтвердило механизм генерации масс электрослабых калибровочных бозонов и фермионов в Стандартной модели.

В то же время общая теория относительности (ОТО), сформулированная Эйнштейном как классическая теория гравитации [9; 10], до сих пор не имеет общепринятой полной квантовой формулировки. Стандартные методы квантования, существующие в рамках квантовой теории поля (КТП) и позволившие проквантовать электромагнитное, слабое и сильное взаимодействия, не позволяют продвинуться в области гравитации. При пертурбативном квантовании ОТО возникает проблема неперенормируемости: устранение всех ультрафиолетовых расходимостей требует введения бесконечного числа независимых контрчленов. Также в этом направлении отсутствует экспериментальная опора, так как квантовые гравитационные эффекты проявляются на сверхмалых расстояниях порядка планковской длины 10^{-35} м, что эквивалентно сверхвысоким энергиям порядка 10^{19} ГэВ. В 2015 году коллаборация LIGO впервые детектировала гравитационные волны [11], являющиеся простейшим предсказанием классической теории гравитации. В настоящее время не существует устройств, позволяющих наблюдать эффекты на планковских масштабах, более того, возможность их построения находится под вопросом.

Одним из наиболее перспективных выходов из сложившейся проблемы является изучение симметрий гипотетической квантовой теории гравитации. Такой подход имеет веские основания в виде проявления симметрий в остальных трех фундаментальных взаимодействиях. Действительно, все взаимодействия, кроме гравитации, объединяются в Стандартную модель, основанную на группе симметрий $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$. Каждая из компонент группы симметрий Стандартной модели является симметрией соответствующего взаимодействия. Так, симметрия $U(1) \times SU(2)$ лежит в основе электрослабой теории и становится явной выше масштаба энергии электрослабого нарушения симметрии, а $SU(3)$ отвечает за сильные взаимодействия. Предполагается, что в случае квантовой гравитации существуют некоторые пока неизвестные симметрии, которые не наблюдаются (нарушаются) при энергиях ниже планковских.

Наиболее успешная реализация подобного симметрийного взгляда на проблему квантования гравитации – это теория струн, основанная на двумерной конформной симметрии мирового листа и рассматриваемая как один из основных кандидатов на объединенное описание гравитации и калибровочных взаимодействий. На текущий момент имеется пять версий теории суперструн: тип I, тип II (IIA и IIB), гетеротические теории $SO(32)$ и $E_8 \times E_8$ [12—14]. Разные теории допускают разные типы струн, а частицы, возникающие при низких энергиях, обладают разной симметрией. В пертурбативном описании теория типа I содержит как открытые, так и замкнутые неориентированные струны, тогда как теории типов IIA и IIB, а также гетеротические теории имеют спектр ориентированных замкнутых струн. Спектр теории струн представляет собой бесконечную башню частиц всех спинов, причем частицы, следующие за гравитоном, имеют массы, пропорциональные $1/\sqrt{\alpha'}$, где α' – обратное натяжение струны. Перечисленные версии теории суперструн объединяются отношениями дуальности, переводящими одну теорию в другую и известными как S-дуальность [15—17], T-дуальность [18], U-дуальность [19] и зеркальная симметрия [20]. Однако непротиворечивость теории струн требует большей размерности пространства-времени, чем наблюдаемые четыре измерения. В связи с этим возникает вопрос о способах компактификации избыточных измерений, так как результирующая четырехмерная физика сильно зависит от этого выбора. Вопрос о выборе способа компактификации до сих пор является открытым и активно исследуется.

Альтернативным кандидатом на единую теорию фундаментальных взаимодействий является калибровочная теория высших спинов (ВС), представляющая собой направление теории поля, связанное с изучением взаимодействующих частиц высших спинов. Важнейшим элементом конструкции калибровочной теории ВС является алгебра высших спинов, выступающая в роли алгебры калибровочных симметрий. Формально алгебра высших спинов $\mathfrak{hs}$ – это фактор универсальной обертывающей алгебры изометрий анти-де Ситтера $\mathfrak{so}(d-1,2)$ по двустороннему идеалу Джозефа [21—28], то есть она является максимальным расширением алгебры изометрий AdS_d, имеющим точное представление на синглетонах (минимальных унитарных неприводимых представлениях $\mathfrak{so}(d-1,2)$). В пространстве AdS_4 алгебра высших спинов строится на основе алгебры $\mathfrak{so}(3,2) \simeq \mathfrak{sp}(4)$. Благодаря этому исключительному изоморфизму можно перейти на язык двухкомпонентных спиноров $Y_A = (y_\alpha, \bar{y}_{\dot{\alpha}})$, где $\alpha, \dot{\alpha} \in \{1,2\}$, и реализовать алгебру высших спинов в терминах произведения Мояла на полиномах от вспомогательных переменных [22; 25].

Первые работы в направлении высших спинов принадлежат Дираку [29], а также Фирцу и Паули [30]. Лагранжева формулировка описания симметричных массивных полей любого спина в пространстве Минковского ($Mink$) была найдена Сингхом и Хагеном [31]. Для бозонного поля спина s минимальный набор тензоров, необходимых для описания, содержит симметричный бесследовый тензор ранга s и конечный набор вспомогательных бесследовых симметричных тензоров рангов $s-2, s-3, \dots, 0$. Позднее Фронсдал и Фанг получили уравнения движения и действия для свободных безмассовых частиц произвольного спина в четырехмерном пространстве Минковского, тем самым обобщив уже известные уравнения Клейна–Гордона, Дирака, Максвелла и линеаризованные уравнения Эйнштейна на безмассовые частицы с любым значением спина [32; 33]. В отличие от массивного случая, в стандартной бозонной формулировке Фронсдала безмассовое поле описывается одним симметричным дважды бесследовым тензором ранга s, где s – величина спина. Эквивалентно его можно представить парой бесследовых тензоров рангов s и $s-2$. В то же время выяснилось, что в пространстве Минковского возникают существенные трудности с построением взаимодействующей теории. Этот факт отражается рядом известных теорем запрета и их современных обобщений [34—37].

Налагаемые теоремами запрета ограничения удается обойти разными способами, рассматривая модели, которые не удовлетворяют тем или иным условиям этих теорем. Наиболее перспективный способ обхода таких ограничений был предложен Фрадкиным и Васильевым [38]. Он заключается в переходе к изучению взаимодействий безмассовых частиц высших спинов в искривленном пространстве, то есть в пространстве с ненулевой космологической постоянной. В то же время в пространстве Минковского также удалось добиться определенных результатов в построении теорий со взаимодействием [39—46]. Однако известные подходы в плоском пространстве достигают согласованности ценой отказа от некоторых стандартных свойств физической теории, например локальности, унитарности, обычной вещественной структуры или нетривиальной S-матрицы.

Многие ограничения, особенно основанные на аналитичности и факторизации S-матрицы, теряют прямую применимость в неплоских пространствах. Для построения матрицы рассеяния необходимо определить асимптотически свободные состояния, с чем возникают трудности в пространствах де Ситтера и анти-де Ситтера. В результате, выбрав пространства де Ситтера (dS) и анти-де Ситтера (AdS), Фрадкин и Васильев показали, предъявив кубические вершины, что взаимодействия безмассовых полей высших спинов могут быть согласованно реализованы в пространстве с ненулевой космологической постоянной [38]. Взаимодействия в такой теории возникают неминимальным образом, каждая вершина содержит линеаризованные тензоры Римана, включающие все большее число производных, размерности которых скомпенсированы отрицательными степенями космологической постоянной, связанной с кривизной пространства. Такое вхождение кривизны пространства в формулы для вершин делает невозможным переход в плоское пространство, что согласуется с выводами теорем запрета. Важно отметить, что в работе Фрадкина-Васильева используется иной подход к описанию частиц высших спинов, известный как реперный подход. Этот формализм возник в результате переформулировки теории Фронсдала на язык дифференциальных форм [47] подобно тому, как гравитация переформулируется в терминах репера и спин-связности в формализме Картана [48—51]. Позднее реперный подход к высшим спинам был обобщен до развернутого формализма [52; 53]. Согласно идее развернутого формализма, широкий класс полевых систем можно путем введения дополнительных полей, иногда бесконечного числа, переписать в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка специального вида.

Одной из трудностей при работе с развернутыми системами является отделение основных (примарных) полей от вспомогательных, а также извлечение дифференциальных полевых уравнений на примарные поля, если они закодированы в развернутых уравнениях (т. е. если система не описывает поля, заведомо лежащие вне массовой оболочки). Для решения этой проблемы было предложено рассматривать когомологии оператора σ_-, выделяемого из развернутых уравнений [54]. Как будет объяснено далее, представители $H(\sigma_-)$ позволяют явно выделить примарные поля, найти калибровочно-инвариантные дифференциальные операторы на примарных полях, включающие полевые уравнения, и определить, лежат ли описываемые поля на массовой оболочке.

В современной формулировке [55—57] теория взаимодействующих безмассовых полей высших спинов представлена тремя мастер-полями и системой уравнений, имеющей вид уравнений нулевой кривизны, ковариантного постоянства и уравнений, задающих алгебру деформированных осцилляторов [25]. Формально эта система кодирует нелинейные взаимодействия безмассовых полей всех спинов, и извлечение локальных вершин в терминах физических полей является отдельной нетривиальной задачей. Пространство AdS возникает в качестве точного решения нелинейной системы, а линеаризация над таким вакуумом воспроизводит известные свободные безмассовые уравнения для частиц высших спинов.

Присутствие бесконечной башни частиц всех спинов в спектре теории высших спинов и теории струн, а также бесконечномерность симметрий, лежащих в основе каждой из них, наводят на мысль о родстве двух теорий. При анализе структуры амплитуд рассеяния теории струн в пределе высоких энергий было обнаружено проявление неизвестной большой симметрии [58; 59]. Существует предположение, что этой симметрией является симметрия высших спинов. Однако в теории высших спинов все состояния являются безмассовыми, в то время как большая часть состояний теории струн является массивной. Этот факт ведет к предположению о том, что теория высших спинов описывает сверхвысокие энергии, а теория струн должна порождаться теорией высших спинов в фазе спонтанно нарушенной симметрии аналогично тому, как работает механизм Хиггса в электрослабой теории.

Таким образом, для продвижения в понимании квантовой гравитации важной задачей является установление перехода от теории высших спинов к теории струн. Организация спонтанного нарушения симметрии высших спинов позволит явно проследить связь этих двух теорий и понять устройство более общей теории, объединяющей теорию струн с теорией высших спинов.

Степень разработанности темы. Как было сказано выше, первые наблюдения значительно большей высокоэнергетической симметрии в рамках теории струн были сделаны Гроссом и Менде в [58; 59]. Это наблюдение привело к возникновению гипотезы о том, что в пределе нулевого натяжения струны (высокие энергии) массивные высшеспиновые состояния становятся безмассовыми и происходит переход в фазу, описываемую некоторой калибровочной теорией высших спинов. Эта гипотеза прошла множество нетривиальных тестов [60—70].

Поиск симметрии высших спинов происходил в контексте голографического соответствия AdS/CFT, а именно связи теории струн IIB на фоне $AdS_5 \times S^5$ и $N = 4$ SYM [60—62]. Например, было показано, что спектр односледовых операторов в свободной теории $N = 4$ SYM собирается в мультиплет алгебры высших спинов [63], а также обсуждалось возникновение аномальных размерностей при включении взаимодействия в SYM, что в голографической интерпретации соответствует нарушению высшеспиновой симметрии и приобретению масс соответствующими bulk-полями [64; 65]. Параллельно велось прямое изучение спектра теории струн в пределе нулевого натяжения, показавшее появление безмассовых частиц всех спинов и возникновение новой большой симметрии [66—68].

Чрезвычайно важными являются результаты работ Габердила и Гопакумара по изучению AdS_3/CFT_2 голографии. Так, в работе [69] они показали, что AdS_3-теория ВС возникает как подсектор теории струн на фоне $AdS_3 \times S^3 \times T^4$ в пределе нулевого натяжения. Более того, полная симметрия оказывается большей, чем одна стандартная алгебра высших спинов. Впоследствии Габердил и Гопакумар обнаружили, что полная алгебра симметрий содержит две некоммутирующие друг с другом алгебры высших спинов [70].

Таким образом, в рамках рассмотрения теории струн в пределе нулевого натяжения удается явно наблюдать возникновение симметрии высших спинов и даже ее расширений. Тем не менее, эти рассмотрения не дают полноценной картины связи между теорией струн и теорией высших спинов.

Со стороны теории высших спинов первым шагом на пути к теории струн является решение вопроса о генерации масс у частиц высших спинов. В настоящее время разрабатываются два пути решения: размерная редукция и расширение спектра за счет увеличения симметрии. Отдельно стоит отметить возможность расширения спектра с помощью метода двойной копии, что было продемонстрировано на примере киральной теории высших спинов в плоском пространстве [71].

Первый путь основывается на идее построения вакуумного решения в d-мерной теории, которое нарушает AdS_d-симметрию до $(d-1)$-мерной симметрии Пуанкаре. Предполагается, что флуктуации над таким вакуумом будут описывать массивные $(d-1)$-мерные частицы всех спинов. Примеры таких вакуумов приведены в работах [72; 73], где рассматривался голоморфный, или самодуальный/киральный, сектор теории высших спинов в терминах недавно предложенной альтернативной развернутой системы [74; 75].

Второй путь связан с поиском расширений стандартной теории высших спинов, которые имели бы значительно больший спектр полей, но по-прежнему включающий в себя башню частиц всех спинов. Ожидается, что в рамках подходящего расширения теории удастся найти точное решение нелинейной системы, нарушающее полную симметрию до пространственно-временной, так что флуктуации над таким вакуумом окажутся массивными частицами высших спинов. Два расширения, предложенные Васильевым [76; 77], эффективно основываются на переходе к описанию в терминах мультичастичных полей. Однако мультичастичность возникает независимым образом в каждом из способов расширения, так что допустимо рассмотрение теории с комбинированным расширением.

Первый способ основывается на переходе от алгебры $\mathfrak{hs}$ к ее так называемому мультичастичному расширению [76]. Если обозначить некоторую ассоциативную звездочную алгебру через A, то мультичастичное расширение $M(A)$ – это алгебра, изоморфная $U(\mathrm{Lie}(A))$, где $\mathrm{Lie}(\bullet)$ сопоставляет ассоциативной алгебре алгебру Ли через коммутатор. Как векторное пространство $M(A)$ является прямой суммой симметризованных тензорных степеней A: $M(A) \simeq \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathrm{Sym}\, A^{\otimes i}$. Таким образом, $M(A)$ действует на пространстве мультичастичных состояний. Эта конструкция появилась в результате анализа алгебры операторных произведений токов трехмерной свободной безмассовой теории [78], так как эти токи порождают симметрии мультичастичных состояний AdS_4 теории высших спинов.

Второй способ расширения теории высших спинов строится на обобщении структуры алгебры деформированных осцилляторов, закодированной в нелинейной системе уравнений на мастер-поля [77]. Таким обобщением являются алгебры Чередника, ассоциированные с различными группами Кокстера $\mathcal{C}$ [79—82]. Теории, ассоциированные с алгеброй Чередника, получили название кокстеровского расширения теории высших спинов (КВС). Идея о возможности построения теории высших спинов на основе алгебр Чередника высказывалась еще в начале 90-х [83], но лишь недавно удалось построить класс самосогласованных нелинейных моделей путем «одевания» алгебры Чередника посредством идемпотентов. Следует подчеркнуть, что требования формальной согласованности, калибровочной симметрии и простые физические условия, такие как Лоренц-ковариантность, существенно ограничивают возможные расширения калибровочных теорий высших спинов, описывающих поля высоких рангов (зависящие от осцилляторов $Y_{A\,i}$, $i \in \{1, \ldots, p\}$, где p – это ранг). Модели, основанные на обрамленных алгебрах Чередника, предоставляют один из наиболее жестко ограниченных и потому потенциально выделенных способов построения моделей, удовлетворяющих этим свойствам.

В работе [77] была выдвинута гипотеза о том, что мультичастичное расширение КВС-теории с группой Кокстера B_2 имеет достаточно богатый спектр для получения массивных частиц высших спинов и установления связи с теорией струн. Эта гипотеза основана на следующих соображениях. Теория B_2-КВС обладает двумя константами связи, соответствующими двум орбитам действия группы B_2 на ассоциированной корневой системе. Предполагается, что одна из них является высшеспиновой константой связи, а вторая интерпретируется как параметр, отвечающий за струнные эффекты и потому естественно сопоставляемый со струнной константой связи α'. Кроме того, мастер-поля B_2-модели описываются в терминах удвоенного набора осцилляторов $Y^A_{1,2}$, образующих представление группы B_2, то есть наивно в модели присутствуют две некоммутирующие стандартные алгебры высших спинов аналогично наблюдениям Габердила и Гопакумара [70] в теории струн.

Исходя из этого, прежде всего требуется изучить содержание мультичастичного расширения теории высших спинов и теорий КВС. В данной диссертации изучается содержание B_2-КВС теории, а именно описываемые $\mathfrak{so}(3,2)$-модули и спектр полей. Как будет обсуждаться далее, B_2-теория задается в терминах двухчастичных полей: один-форм $\omega(Y_1, Y_2)$ и ноль-форм $C(Y_1, Y_2)$.

После, вообще говоря, нелокальных преобразований модули такой теории могут быть сопоставлены с тензорными произведениями присоединенного (adj) и твистованно-присоединенного (tw) модулей стандартной четырехмерной теории высших спинов. Модуль КВС теории, не эквивалентный как представление тензорному произведению стандартных модулей ВС, называется запутанным. В противном случае модуль называется распутываемым. Структура КВС-модулей определяется матрицами отражений $R(k)$, $\bar{R}(\bar{k})$, отвечающими операторам Клейна.

В рамках B_2-модели показано, что запутанные модули можно связать с модулем $(\mathrm{tw} \otimes \mathrm{tw})$ с помощью некоторого нелокального преобразования и замены осцилляторных переменных. Однако эти модули не являются изоморфными как представления. В случае конечной группы Кокстера $\mathcal{C}$ общего положения сформулирован критерий распутываемости модуля, то есть необходимое и достаточное условие причисления модуля к распутываемым. Для B_2-модулей необходимо провести классификацию по критерию существования комплексно-эквивалентных унитарных модулей старшего (младшего) веса, поскольку именно наличие унитарного партнера позволяет интерпретировать соответствующий модуль как пространство физических состояний [84]. Для этого применяется обобщение техники, использовавшейся ранее для доказательства существования унитарного модуля старшего веса, дуального твистованно-присоединенному модулю трехмерной и четырехмерной теории ВС [84; 85]. Модули B_2-теории переформулируются в терминах левых модулей Фока, а затем с помощью комплексного преобразования Боголюбова устанавливается существование или отсутствие унитарного дуального модуля старшего или младшего веса.

Также в диссертации проведен анализ динамического содержания B_2-КВС теории, т. е. получены когомологии $H(\sigma_-)$ для случаев модулей $(\mathrm{adj} \otimes \mathrm{adj})$ и $(\mathrm{tw} \otimes \mathrm{adj})$ (результаты для модуля $(\mathrm{adj} \otimes \mathrm{tw})$ получаются из результатов для $(\mathrm{tw} \otimes \mathrm{adj})$), а также исследована склейка сектора один-форм с сектором нуль-форм, осуществляемая вершинами $\Upsilon(\Omega_{AdS}, \Omega_{AdS}, C)$. Для модуля $(\mathrm{tw} \otimes \mathrm{tw})$ когомологии σ_- были получены в работе [86]. Так как для этого модуля группа $H^2(\sigma_-)$ пуста, то соответствующие поля один-формы являются топологическими. Аналогичные выводы справедливы для полей один-форм, соответствующих запутанным модулям, поскольку существует нелокальное преобразование, приводящее эти модули к $(\mathrm{tw} \otimes \mathrm{tw})$. В анализе динамического содержания этих модулей активно используется алгебра $\mathfrak{sl}(2)\oplus\mathfrak{sl}(2)$, дуальная к $\mathfrak{so}(3,2)$, причем в случае модуля $(\mathrm{adj}\otimes\mathrm{adj})$ эта пара алгебр является Хау-дуальной [87].

Для интерпретации двухчастичных полей в терминах безмассовых симметричных полей всех спинов необходимо установить явный вид представителей классов когомологий $H(\sigma_-)$ в стандартной теории высших спинов [88; 89]. В стандартной теории высших спинов связь между развернутыми уравнениями и описанием симметричных безмассовых полей произвольного спина устанавливается Первой теоремой о массовой оболочке. С точки зрения σ_--когомологий эта теорема означает, что соответствующие классы когомологий выделяют динамически существенные компоненты развернутой системы: примарные поля, калибровочно-инвариантные дифференциальные операторы на них и дифференциальные калибровочные параметры. Частичный анализ σ_--когомологий для d-мерной теории в пространстве Минковского на тензорном языке был приведен в [90]. В работе [91] соответствующие когомологии описаны на уровне диаграмм Юнга как частный случай анализа содержания развернутых уравнений для полей смешанной симметрии. В связи с этим в диссертации предъявляется полный анализ σ_--когомологий для стандартного присоединенного модуля в пространстве Минковского произвольной размерности, а также в пространстве AdS_4. Первый случай рассматривается в терминах тензорных представлений $\mathfrak{so}(d-1,1)$, а второй – в спинорной формулировке, что дает полный список всех представителей классов σ_--когомологий в виде тензорных и мультиспинорных выражений, а также соответствующие им диаграммы Юнга. Результаты получаются с помощью гомотопической леммы (обобщения теории Ходжа) [92], т. е. введения обобщенного оператора Лапласа и нахождения его ядра. Аналогичные методы использовались в работах [86; 93—95].

Цель диссертационного исследования.

Целью данной диссертационной работы является исследование когомологической и теоретико-представленческой структуры стандартных и кокстеровски расширенных развернутых систем теории высших спинов, включающее явное вычисление σ_--когомологий, классификацию модулей B_2-КВС-теории, установление динамического содержания соответствующих уравнений и анализ линейной вершины $\Upsilon(\Omega_{AdS},\Omega_{AdS},C)$, связывающей секторы один-форм и нуль-форм.

Для достижения поставленной цели были сформулированы и решены следующие **задачи**:

1. Построить обобщенный оператор Лапласа Δ для σ_--комплекса, соответствующего стандартному присоединенному модулю в пространствах $Mink_d$ и AdS_4. Найти базис собственных векторов оператора Δ и выделить элементы $\ker \Delta$.
2. Для конечной группы Кокстера $\mathcal{C}$ получить необходимое и достаточное условие распутываемости соответствующего модуля в классе линейных преобразований осцилляторов, то есть его эквивалентности тензорному произведению модулей стандартной четырехмерной теории высших спинов.
3. Реализовать B_2-модули в терминах модулей Фока и установить существование либо отсутствие комплексно-эквивалентного унитарного модуля старшего или младшего веса. Найти способ редукции B_2-системы к унитарному подсектору.
4. Для модулей $(\mathrm{adj} \otimes \mathrm{adj})$ и $(\mathrm{tw} \otimes \mathrm{adj})$ вычислить $H(\sigma_-)$ и интерпретировать полученные результаты в терминах $\mathfrak{so}(3,2)$-полей. Исследовать структуру пространств кратностей представлений $\mathfrak{so}(3,2)$.
5. Проанализировать содержание линейной вершины $\Upsilon(\Omega_{AdS}, \Omega_{AdS}, C)$, используя результаты вычисления $H^2(\sigma_-)$ для модуля $(\mathrm{adj} \otimes \mathrm{adj})$.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Альтернативное доказательство Первой теоремы о массовой оболочке может быть получено с помощью ходжевской процедуры полного вычисления представителей когомологий $H(\sigma_-)$ для присоединенного модуля теории высших спинов в пространствах $Mink_d$ и AdS_4.
2. Для КВС-теории, связанной с произвольной конечной группой Кокстера, необходимым и достаточным условием распутываемости модулей – то есть эквивалентности тензорному произведению модулей стандартной четырехмерной теории высших спинов – в классе линейных преобразований осцилляторов является выполнение равенства $\left(R\bar{R}^T\right)^2 = \mathbf{1}$ для соответствующих матриц отражений.
3. Классификация B_2-модулей по критерию существования комплексно-эквивалентного унитарного модуля старшего или младшего веса. Механизм редукции к унитарному подсектору линеаризованной теории.

4. Полный список представителей младших σ_--когомологий для B_2-модулей $(\mathrm{adj} \otimes \mathrm{adj})$ и $(\mathrm{tw} \otimes \mathrm{adj})$. Поля один-формы со значениями в модуле $(\mathrm{adj} \otimes \mathrm{adj})$ описывают бесконечное число копий безмассовых полей спина $s \geq 1$ и частично-безмассовых полей всех возможных глубин безмассовости, организованных в неприводимые представления $\mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{sl}(2)$.
5. В примерах полей младших спинов содержание вершины $\Upsilon(\Omega_{AdS}, \Omega_{AdS}, C)$ в секторе полей один-форм $(\mathrm{adj} \otimes \mathrm{adj})$ зависит от веса поля $\omega(Y_1, Y_2)$ относительно алгебры $\mathfrak{sl}(2)$, сохраняющей суммарную степень мономов по переменным Y_i. Для полей ненулевого веса вершина содержит все 2-коциклы оператора σ_-, а в случае поля нулевого веса присутствуют только когомологии типа Вейля.

Научная новизна, достоверность и личный вклад автора. Новизна рассматриваемых вопросов, а также достоверность полученных результатов привели к продвижению в понимании устройства кокстеровского расширения теории высших спинов. Проводимое в диссертации явное вычисление когомологий $H(\sigma_-)$ с помощью обобщения теории Ходжа [96] в рамках стандартной теории высших спинов позволяет обосновать вид коциклов, предъявленных в работе [90]. Тем самым предъявляется альтернативное доказательство Первой теоремы о массовой оболочке [25; 53], ранее доказанной в работах [91; 97]. Впервые исследованы структура и свойства представлений теории высших спинов, расширенной группой Кокстера, в частности группой B_2. Анализ динамического содержания уравнений на поля, принимающие значения в модулях $(\mathrm{adj} \otimes \mathrm{adj})$ и $(\mathrm{tw} \otimes \mathrm{adj})$ ранее не проводился. Все представленные в диссертации результаты являются оригинальными и получены автором лично или при его непосредственном участии. Вклад автора в работы [98; 99] является определяющим. Вклад в работу [100] заключается в анализе структуры и теоретико-представленческих свойств модулей КВС-теории, в частности B_2-теории (раздел 4). Достоверность полученных результатов обеспечивается надежностью применяемого в диссертации математического аппарата теоретической физики и согласием с результатами работ других авторов.

Научная и практическая значимость. Изучаемые в диссертации проблемы представляют научный интерес в области теоретической и математической физики. Успешное применение обобщения теории Ходжа к вычислению σ_--когомологий в стандартной теории высших спинов подтверждает эффективность данного метода анализа содержания развернутых уравнений. Классификация B_2-модулей по наличию комплексно-эквивалентного унитарного модуля старшего или младшего веса показала, что в B_2-теории существуют поля, подходящие для описания безмассовых физических состояний. Существование способа редукции к унитарному подсектору линеаризованной теории подтверждает, что B_2-расширение теории высших спинов можно рассматривать как непротиворечивое обобщение стандартной теории. Проделанная в диссертации переформулировка B_2-модулей в терминах модулей Фока и автоморфизмов алгебры осцилляторов может быть полезна для изучения представленческих свойств модулей в рамках иных развернутых систем (в частности для других теорий КВС). Результаты анализа σ_--когомологий для модулей $(\mathrm{adj} \otimes \mathrm{adj})$ и $(\mathrm{tw} \otimes \mathrm{adj})$ отвечают на вопрос о спектре B_2-модели и закладывают основу для дальнейшего продвижения к спонтанному нарушению симметрии и установлению четкой картины связи теорий высших спинов с теорией струн.

Методология и методы исследования. В работе используются методы и понятия из теории развернутых систем, σ_--когомологического анализа, теории представлений алгебр Ли и звездочных алгебр, а также осцилляторные реализации модулей теории высших спинов. Для вычисления когомологий применяется гомотопическая лемма, или обобщение теории Ходжа, сводящее задачу к построению обобщенного оператора Лапласа и нахождению его ядра. При анализе B_2-модулей используются реализации в терминах модулей Фока, комплексные преобразования Боголюбова и автоморфизмы алгебры осцилляторов.

Апробация работы. Основные результаты работы опубликованы в трех статьях [98—100] в журналах, индексируемых Web of Science и Scopus. Кроме того, основные результаты диссертации докладывались на семинарах ОТФ ФИАН и ОТФ МИАН, на 64-й и 66-й Всероссийских научных конференциях МФТИ, на международных конференциях “Supersymmetries and Quantum Symmetries” (SQS’24) в Дубне, “Efim Fradkin Centennial Conference” (ESF-2024) в Москве.

Объем и структура работы.

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и двух приложений. Полный объем диссертации составляет 165 страниц. Диссертация не содержит таблиц и рисунков. Список литературы содержит 151 наименование.

Глава 1
Когомологический анализ системы симметричных полей высших спинов

Глава основана на статье [98]. В разделе 1.1 кратко излагаются теория Фронсдала [32] и формулировки развернутой системы для симметричных безмассовых полей высших спинов в тензорном и спинорном формализмах [88; 89]. Интерпретация σ_--комплекса и обобщение теории Ходжа изложены в разделе 1.2 по работам [90; 94]. Вычисление и интерпретация когомологий в тензорном подходе представлены в разделе 1.3, а в спинорном – в разделе 1.4. Выводы по главе приведены в разделе 1.5.

1.1 Свободные уравнения для симметричных полей высших спинов

В этом разделе приведено краткое изложение фронсдаловского описания симметричных безмассовых полей в $Mink_d$, а также развернутые системы для полей в пространстве $Mink_d$ в тензорных терминах и в пространстве AdS_4 на языке двухкомпонентных спиноров.

1.1.1 Теория Фронсдала

В этом подходе безмассовые поля спина-s задаются с помощью двух симметричных тензорных $\mathfrak{so}(d-1,1)$-полей

$$\phi_1^{a(s)} \equiv \phi_1^{a_1\ldots a_s}, \quad \phi_2^{a(s-2)} \equiv \phi_2^{a_1\ldots a_{s-2}}: \quad {\phi_1}^{a(s-2)b}{}_b = 0, \quad {\phi_2}^{a(s-4)b}{}_b = 0\,. \tag{1.1}$$

Правила работы с индексами приведены в Приложении А.1.

Из тензоров ϕ_i строится дважды бесследовый симметричный тензор, соответствующий полю Фронсдала

$$\varphi^{a(s)} = \phi_1^{a(s)} + \eta^{aa}\phi_2^{a(s-2)}\,. \tag{1.2}$$

С точки зрения $\mathfrak{so}(d-1,1)$ диаграмм Юнга поле Фронсдала раскладывается в сумму двух неприводимых представлений, соответствующих однорядным диаграммам

$$\varphi^{a(s)} \simeq \boxed{\qquad s \qquad} \oplus \boxed{\qquad s-2 \qquad}\;. \tag{1.3}$$

Полевые уравнения в теории Фронсдала имеют вид

$$R^{a(s)}[\varphi] = \Box\varphi^{a(s)} - s\partial^a\partial_k\varphi^{ka(s-1)} + \frac{s(s-1)}{2}\partial^a\partial^a\varphi^{a(s-2)k}{}_k = 0\,. \tag{1.4}$$

Нетрудно убедиться, что полевые уравнения инвариантны относительно калибровочных преобразований

$$\delta\varphi^{a(s)} = \partial^a\varepsilon^{a(s-1)}, \qquad \varepsilon^{a(s-3)k}{}_k = 0\,, \tag{1.5}$$

где калибровочный параметр ε является бесследовым симметричным тензором, что в терминах $\mathfrak{so}(d-1,1)$ диаграмм отвечает однорядной диаграмме

$$\varepsilon^{a(s-1)} \simeq \boxed{\qquad s-1 \qquad}\,. \tag{1.6}$$

Также заметим, что с точки зрения тензорной структуры уравнения Фронсдала $R^{a(s)}[\varphi]$ являются симметричным дважды бесследовым тензором, а значит, уравнения разбиваются на две части: бесследовую часть уравнения Фронсдала и след уравнения Фронсдала

$$R^{a(s)}[\varphi] \simeq \boxed{\qquad s \qquad} \oplus \boxed{\qquad s-2 \qquad}\;. \tag{1.7}$$

1.1.2 Развернутые уравнения

Описание в развернутом формализме предполагает переход к дифференциальным формам. Безмассовые симметричные поля спина-s задаются с помощью один-форм, которые в случае $Mink_d$ имеют вид $\omega^{a(s-1),b(t)} = \mathrm{d}x^\nu\omega_\nu^{a(s-1),b(t)}$, где $t \in \{0,\ldots,s-1\}$. Поля $\omega^{a(s-1),b(t)}$ принимают значения в тензорах, соответствующих двухрядным $\mathfrak{so}(d-1,1)$ диаграммам Юнга в симметричном базисе [89], и вместе образуют $\mathfrak{iso}(d-1,1)$-модуль. Следовательно, заданные один-формы удовлетворяют условию Юнга и условию бесследовости по всем парам индексов (достаточно потребовать бесследовости по индексам первой строки, так как бесследовость по любым другим сверткам автоматически выполнится в силу условия Юнга)

$$\omega^{a(s-1),ab(t-1)} = 0\,, \tag{1.8}$$

$$\omega^{a(s-3)k}{}_{k}{}^{,b(t)} = 0\,. \tag{1.9}$$

С помощью один-форм ω определяются развернутые уравнения, впервые предложенные в [89],

$$R^{a(s-1),b(t)} = \mathrm{d}\omega^{a(s-1),b(t)} + e_m\omega^{a(s-1),b(t)m} = 0, \quad t \in \{0,\dots,s-2\}\,, \tag{1.10}$$

$$R^{a(s-1),b(s-1)} = \mathrm{d}\omega^{a(s-1),b(s-1)} = e_n e_m C^{a(s-1)n,b(s-1)m}\,, \tag{1.11}$$

где $\mathrm{d} = \mathrm{d}x^\mu\partial_\mu$ является дифференциалом де Рама, а e_n – один-форма тетрады. Здесь и далее, как правило, будем опускать знак внешнего произведения для сокращения формул.

Появляющийся в правой части уравнения (1.11) тензор C лоренц-неприводим, т. е. он удовлетворяет условию Юнга и является бесследовым по всем парам индексов

$$C^{a(s),ab(s-1)} = 0\,, \qquad C^{a(s-2)k}{}_{k}{}^{,b(s)} = 0\,. \tag{1.12}$$

С точки зрения $\mathfrak{so}(d-1,1)$ диаграмм Юнга

$$C^{a(s),b(s)} \simeq \begin{array}{|c|}\hline \quad s \quad \\ \hline \quad s \quad \\ \hline \end{array}\;. \tag{1.13}$$

Бесследовый прямоугольный тензор $C^{a(s),b(s)}$ является обобщенным тензором Вейля. При $s = 2$ он совпадает с тензором Вейля линеаризованной гравитации, а для спина $s = 1$ отвечает тензору Фарадея. Вводя вспомогательные поля, соответствующие двухрядным $\mathfrak{so}(d-1,1)$ диаграммам $\mathbb{Y}(s+k,s)$, можно получить развернутые уравнения для полей ноль-форм C [57]. В отличие от случая один-форм ω, для ноль-форм C образуется бесконечная цепочка уравнений, т. е. $k \in \{0,\dots,\infty\}$. Эта цепочка содержит в себе скалярное поле и отвечающее ему уравнение Клейна-Гордона, а также уравнение на поле спина-1 (само поле спина-1 находится в секторе один-форм ω). Как было отмечено в работе [101], правая часть уравнения (1.11) является коциклом Шевалье-Эйленберга [102], связывающим $\mathfrak{so}(d-1,1)$-модуль один-форм и модуль ноль-форм. В высшеспиновой литературе данный коцикл известен как вейлевский, и его присутствие в правой части развернутых уравнений является необходимым для наличия нетривиальной динамики. В противном случае пространство решений развернутых уравнений (1.10) и (1.11) сузится до чистых калибровок в топологически тривиальной ситуации. В данной главе содержание цепочки уравнений на поля C не рассматривается, однако мы получим его в процессе рассмотрения содержания B_2-теории КВС в главе 3.

Несложно убедиться, что уравнения (1.10) и (1.11) обладают калибровочной симметрией

$$\delta\omega^{a(s-1),b(t)} = \mathrm{d}\varepsilon^{a(s-1),b(t)} + e_m \varepsilon^{a(s-1),b(t)m}, \quad t \in \{0, \ldots, s-2\}\,, \tag{1.14}$$

$$\delta\omega^{a(s-1),b(s-1)} = \mathrm{d}\varepsilon^{a(s-1),b(s-1)}\,, \tag{1.15}$$

$$\delta C^{a(s),b(s)} = 0\,, \tag{1.16}$$

где параметр ε – это лоренц-неприводимая ноль-форма, соответствующая двухрядным диаграммам Юнга $\mathbb{Y}(s-1,t)$, где $t \in \{0, \ldots, s-1\}$.

Как было отмечено в (1.3), поле Фронсдала является прямой суммой двух неприводимых представлений, соответствующих диаграммам-строкам длин s и $s-2$. В наборе полей $\omega^{a(s-1),b(t)}$ также присутствуют компоненты с данной однорядной диаграммной структурой. Действительно, рассмотрим один-форму $\omega^{a(s-1)}$. С помощью тетрады можно преобразовать индекс формы, связанный с базовым многообразием, в индекс слоя

$$\omega^{a(s-1)|b} = \omega_\mu^{a(s-1)} e^{\mu b}\,. \tag{1.17}$$

Раскладывая тензор (1.17) по неприводимым $\mathfrak{so}(d-1,1)$-модулям, приходим к

$$\square \;\otimes_{so}\; \boxed{\quad s-1 \quad} \;\cong\; \boxed{\quad s \quad} \;\oplus\; \boxed{\quad s-2 \quad} \;\oplus\; \begin{array}{l}\boxed{\quad s-1 \quad}\\ \square\end{array} \quad . \tag{1.18}$$

Первые две диаграммы разложения дают (1.3), в то время как последняя компонента является избыточным вспомогательным полем. Можно проверить, что тензорное выражение, соответствующее диаграммному разложению (1.18), дается формулой

$$\omega^{a(s-1)|b} = \psi_1^{a(s-1)b} + \beta_1 \eta^{aa} \psi_2^{a(s-3)b} + \beta_2 \eta^{ab} \psi_2^{a(s-2)} + \psi_3^{a(s-1),b}\,, \tag{1.19}$$

где $\psi_{1,2}$ – это бесследовые симметричные Лоренцевы тензоры, а ψ_3 отвечает диаграмме $\mathbb{Y}(s-1,1)$ в симметричном базисе. Отношение множителей β_i фиксируется условием бесследовости $\omega^{a(s-1)|b}$ по индексам a.

Из тензорного выражения следует, что поле Фронсдала идентифицируется с ω посредством симметризации

$$\varphi^{a(s)} := \omega^{a(s-1)|a}\,. \tag{1.20}$$

Дополнительное поле $\psi_3^{a(s-1),b}$ может быть устранено калибровочным преобразованием вида $\delta\omega^{a(s-1)|b} = \varepsilon^{a(s-1),b}$. Остаточное калибровочное преобразование $\delta\omega^{a(s-1)|a} = \partial^a \varepsilon^{a(s-1)}$ согласуется по симметрии с калибровочным преобразованием в теории Фронсдала (1.5).

Можно показать, что развернутые уравнения (1.10) и (1.11) содержат уравнения Фронсдала (1.4) на поле (1.20) (это было подробно проделано в [103]). Более сложный вопрос заключается в том, являются ли поля и уравнения Фронсдала единственными, которые получаются из развернутой системы (1.10) и (1.11). Гипотетически, среди полей $\omega^{a(s-1),b(t)}$ могли бы существовать компоненты, отличные от (1.20) и подчиняющиеся некоторым дифференциальным полевым уравнениям. Однако с помощью выделения нильпотентного оператора σ_- и нахождения его когомологий можно показать, что этот гипотетический сценарий не реализуется.

Перед тем как перейти к обсуждению когомологий σ_-, важно обсудить вид развернутой системы в AdS_4. Благодаря низкоразмерному изоморфизму $\mathfrak{so}(3,1) \simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, реализуемому с помощью матриц Паули, можно перейти от описания в терминах $\mathfrak{so}(3,1)$-тензоров к описанию на языке мультиспиноров. Важнейшим преимуществом работы с двухкомпонентными спинорами является автоматическое разрешение условия Юнга и условий бесследовости. Как мы увидим позднее, этот факт сильно упрощает процесс анализа. В терминах двухкомпонентных спиноров с индексами $(\alpha, \dot\alpha) = 1, 2$ геометрия AdS_4 задается с помощью уравнений

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}e^{\alpha\dot\beta} + \varpi^{\alpha}{}_{\gamma} e^{\gamma\dot\beta} + \bar\varpi^{\dot\beta}{}_{\dot\gamma} e^{\alpha\dot\gamma} = 0\,, \\ &\mathrm{d}\varpi^{\alpha\beta} + \varpi^{\alpha}{}_{\gamma}\varpi^{\gamma\beta} = -\lambda^2 e^{\alpha}{}_{\dot\gamma} e^{\beta\dot\gamma}\,, \\ &\mathrm{d}\bar\varpi^{\dot\alpha\dot\beta} + \bar\varpi^{\dot\alpha}{}_{\dot\gamma}\bar\varpi^{\dot\gamma\dot\beta} = -\lambda^2 e_{\gamma}{}^{\dot\alpha} e^{\gamma\dot\beta}\,, \end{aligned} \tag{1.21}$$

где e – один-форма тетрады, ϖ – спин-связность и λ^2 отвечает за космологическую постоянную (кривизну). Правила работы со спинорными индексами указаны в Приложении A.1.

Спинорная версия развернутой системы для полей один-форм $\omega^{\alpha(n),\dot\alpha(m)}$, образующих $\mathfrak{so}(3,2)$-модуль, выглядит следующим образом. Обобщенная кривизна задается [88]

$$R^{\alpha(n),\dot\alpha(m)} = D_L \omega^{\alpha(n),\dot\alpha(m)} + \lambda^2 (n e^{\alpha}{}_{\dot\gamma} \omega^{\alpha(n-1),\dot\gamma\dot\alpha(m)} + m e_{\gamma}{}^{\dot\alpha} \omega^{\gamma\alpha(n),\dot\alpha(m-1)})\,, \tag{1.22}$$

где $D_L = \mathrm{d} + \varpi + \bar\varpi$ является Лоренц-ковариантной производной, построенной по связности $(\varpi \oplus \bar{\varpi})$

$$D_L \omega^{\alpha(n),\dot{\alpha}(m)} = \mathrm{d}\omega^{\alpha(n),\dot{\alpha}(m)} + n\varpi_\alpha{}^\beta \omega_{\beta\alpha(n-1),\dot{\alpha}(m)} + m\bar{\varpi}_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}} \omega_{\alpha(n),\dot{\beta}\dot{\alpha}(m-1)} \,. \tag{1.23}$$

Деформация развернутых уравнений (1.10) и (1.11) в AdS_4 принимает вид [53]

$$R^{\alpha(n),\dot{\alpha}(m)} = \delta_{0,n}\, e_{\beta\dot{\alpha}} e^\beta{}_{\dot{\alpha}} \bar{C}^{\dot{\alpha}(m+2)} + \delta_{0,m}\, e_{\alpha\dot{\beta}} e_\alpha{}^{\dot{\beta}} C^{\alpha(n+2)} \,, \tag{1.24}$$

где сопряженные мультиспиноры $C^{\alpha(s)}$ и $\bar{C}^{\dot{\alpha}(s)}$ соответствуют самодуальной и антисамодуальной частям обобщенных тензоров Вейля.

1.2 Интерпретация развернутых систем через σ_--когомологии и методы их вычислений

1.2.1 Динамический состав развернутых систем

В этом разделе рассмотрим анализ содержания развернутого уравнения вида

$$\mathcal{D}\mathcal{W} = 0 \tag{1.25}$$

с помощью когомологий нильпотентного оператора, входящего в определение ковариантной производной $\mathcal{D}$.

Определим $\mathbb{N}$-градуированное векторное пространство $V = \oplus_q V^q$, где V^q является подпространством градуировки q, ограниченной снизу. Поля $\mathcal{W}$ принадлежат пространству p-форм $\Lambda^p(\mathcal{M}^d) \otimes V$ над некоторым гладким d-мерным многообразием $\mathcal{M}^d$. Определим операторы $\sigma_\pm$, действующие в векторном пространстве $\Lambda^\bullet(\mathcal{M}^d) \otimes V$, причем

$$\sigma_\pm : \Lambda^p(\mathcal{M}^d) \otimes V^q \to \Lambda^{p+1}(\mathcal{M}^d) \otimes V^{q\pm 1} \,, \tag{1.26}$$

т. е. применение этих операторов увеличивает степень формы и меняет значение градуировки, ассоциированной с V. В дополнение введем оператор D_L, не меняющий связанную с V градуировку и действующий на пространственно-временных координатах. Наложим уравнение ковариантного постоянства на поля $\mathcal{W}$ и потребуем выполнения условия нулевой кривизны

$$\mathcal{D}\mathcal{W} = (D_L + \sigma_- + \sigma_+)\mathcal{W} = 0, \quad \mathcal{D}^2 = 0 \,. \tag{1.27}$$

Благодаря нильпотентности $\mathcal{D}$ уравнение (1.27) инвариантно относительно калибровочных сдвигов

$$\delta\mathcal{W} = \mathcal{D}\varepsilon \,, \tag{1.28}$$

где $\varepsilon \in \Lambda^{p-1}(\mathcal{M}^d) \otimes V$. Эти калибровочные преобразования содержат как дифференциальные калибровочные преобразования (например, линеаризованные диффеоморфизмы), так и Штюкельберговы калибровочные симметрии (например, линеаризованные локальные преобразования Лоренца).

Условие нулевой кривизны в сочетании с определенной градуировкой каждого члена в определении $\mathcal{D}$ приводит к следующему результату:

$$(\sigma_\pm)^2 = 0\,, \quad \{D_L\,, \sigma_\pm\} = 0\,, \tag{1.29}$$

$$D_L^2 + \{\sigma_-\,, \sigma_+\} = 0\,. \tag{1.30}$$

Следовательно, σ_- является нильпотентным дифференциалом на комплексе $\Lambda^\bullet(\mathcal{M}^d) \otimes V$.

В литературе по теории высших спинов сложилась следующая терминология относительно компонент поля $\mathcal{W}$ [90]. Под динамическими (примарными) полями понимаются компоненты $\mathcal{W}$, которые не выражаются как производные каких-либо других компонент через уравнение (1.27) (например, тетрада в гравитации или, как будет показано далее, один-формы $\omega_{\alpha(s)\,,\dot\alpha(s)}$ в стандартной теории ВС). Поля, которые можно выразить как производные динамических полей по модулю калибровочных симметрий Штюкельберга, т. е. которые не аннулируются σ_-, называются вспомогательными полями (например, Лоренцева связность в гравитации или ее аналоги в теории ВС $\omega_{\alpha(s+k)\,,\dot\alpha(s-k)}$, $k \in \{-s, \ldots, -1, 1, \ldots, s\}$). Под полями Штюкельберга мы понимаем σ_--точные поля, т. е. поля вида $\sigma_-\chi$, поскольку их можно исключить с помощью соответствующего σ_--точного члена в калибровочном преобразовании. Таким образом, нетривиальные динамические поля принадлежат $\ker\sigma_-$, но не принадлежат $\operatorname{im}\sigma_-$.

Классификация калибровочных параметров аналогична. Параметры, которые не уничтожаются σ_-, описывают Штюкельберговы сдвиги. Оставшиеся симметрии описываются параметрами из $\ker\sigma_-$. σ_--точные параметры соответствуют калибровочным преобразованиям для калибровочных преобразований. Параметры, которые являются σ_--замкнутыми и не σ_--точными, называются дифференциальными калибровочными параметрами.

Определив обобщенную кривизну как

$$R = \mathcal{D}\mathcal{W} = 0\,, \tag{1.31}$$

условие нулевой кривизны $\mathcal{D}^2 = 0$ можно интерпретировать как тождества Бианки

$$\mathcal{D}R = (D_L + \sigma_- + \sigma_+)R = 0\,. \tag{1.32}$$

Используя градуированность V, можно разложить уравнение (1.31) в сумму компонент различной градуировки и проанализировать ограничения, накладываемые тождествами Бианки (1.32), начиная с подсектора градуировки ноль, как это проделано в [90]. Тогда σ_--точные компоненты напряженности поля R в градуировке n могут быть положены в ноль алгебраическим сдвигом полей $\mathcal{W}$ в градуировке $n+1$, а σ_--когомологичные компоненты R могут быть выражены через (1.31) в терминах производных примарных полей. Так как правая часть уравнения (1.27) взята нулевой ($R = 0$), то на примарные поля наложены некоторые дифференциальные уравнения. Следовательно, представители $H^{p+1}(\sigma_-)$ соответствуют независимым дифференциальным операторам для нетривиальных динамических полей. Сами тождества Бианки также могут быть не независимыми, поэтому группы когомологий более высокого порядка могут оказаться непустыми.

Подводя итог всему сказанному выше, можно доказать следующее утверждение, сформулированное впервые в общем виде в [90], но встречавшееся ранее в [54; 93]:

Теорема 1.2.1. *Для полей p-форм верно следующее:*

1) Дифференциальные калибровочные параметры ε порождают $H^{p-1}(\sigma_-)$;

2) Нетривиальные динамические поля в $\mathcal{W}$ порождают $H^p(\sigma_-)$;

3) Калибровочно-инвариантные дифференциальные операторы на динамических полях, содержащиеся в $\mathcal{D}\mathcal{W} = 0$, порождают $H^{p+1}(\sigma_-)$.

В общем случае когомологии высшего порядка $H^k(\sigma_-)$ с $k > p+1$ описывают тождества Бианки для динамических уравнений при $k = p+2$ и тождества Бианки для тождеств Бианки при $k > p+2$ [94]. Аналогично, когомологии нижнего порядка $H^k(\sigma_-)$ с $k < p-1$ описывают дифференциальные калибровочные симметрии для дифференциальных калибровочных симметрий, т. е. касаются приводимых калибровочных симметрий.

Заметим, что если $H^{p+1}(\sigma_-) = 0$, то уравнение (1.25) содержит только связи, выражающие вспомогательные поля через производные примарных полей, не накладывая никаких ограничений на последние. Для нетривиальных

$H^{p+1}(\sigma_-)$ уравнение (1.25) описывает некоторые дифференциальные уравнения, наложенные на примарные поля. Наложенные дифференциальные уравнения можно снять путем добавления соответствующего представителя $H^{p+1}(\sigma_-)$ в правую часть уравнения (1.25) в качестве нового поля, для которого далее необходимо установить вид развернутых уравнений. Например, правая часть развернутых уравнений высших спинов (1.10) и (1.11) является нетривиальной и содержит коцикл Вейля. Как мы увидим далее, вейлевский коцикл принадлежит рассматриваемым когомологиям σ_-. Таким образом, одно из потенциальных дифференциальных уравнений на примарные поля оказывается не наложенным, что позволяет получить нетривиальную динамику в системе. Однако в рамках конкретной развернутой системы выбор градуировки и ассоциированного с ней оператора σ_- допускает определенный произвол. Так, например, можно втянуть коцикл Вейля в определение σ_- и рассмотреть единую систему с полем $\mathcal{W} = (\omega, C)$. Тогда результирующие когомологии будут содержать лишь дифференциальные операторы, отвечающие бесследовой части уравнений Фронсдала и их следу [90], а вейлевские когомологии и связанные с ними тождества Бианки пропадут из спектра. Подобный трюк был использован в недавней работе [104], посвященной анализу сохраняющихся примарных билинейных токов в четырехмерной теории высших спинов, но в рамках текущей диссертации коцикл Вейля не включается в определение σ_-.

Если D_L – дифференциальный оператор первого порядка (что верно в контексте высших спинов), то при $H^{p+1}(\sigma_-) \neq 0$ в секторе градуировки k, соответствующие дифференциальные уравнения для динамического поля градуировки l имеют порядок $k+1-l$. Это же правило позволяет определить число производных в истинном калибровочном преобразовании для динамического поля.

Поскольку векторное пространство V обычно является модулем некоторой алгебры Ли $\mathfrak{g}$, важно отметить, что правильная физическая интерпретация развернутой системы (1.25) может быть достигнута только в том случае, если σ_- определен на неразложимых $\mathfrak{g}$-модулях. В противном случае, хотя приведенный выше анализ остается верным, происходит смешение независимых примарных полей, что значительно усложняет их идентификацию и физическую интерпретацию системы. Поэтому в рамках текущей главы, а также главы 3, мы будем раскладывать развернутые системы на неразложимые (по возможности неприводимые) компоненты, используя дуальные алгебры $\mathfrak{f}$, коммутирующие с $\mathfrak{g}$ и действующие на пространстве V. При выполнении ряда условий такие алгебры $(\mathfrak{g}, \mathfrak{f})$ являются Хау-дуальными друг другу [87].

1.2.2 Обобщенная теория Ходжа

Прямое нахождение $\ker \sigma_-$ и последующий отсев σ_--точных выражений часто являются трудной задачей. Обычно вычисление $H(\sigma_-)$ проводится с помощью так называемой гомотопической леммы [92], обобщающей подход Ходжа к вычислению когомологий де-Рама [96].

Пусть V – градуированное векторное пространство, d – линейный нильпотентный оператор градуировки $+1$, и ∂ – линейный нильпотентный оператор градуировки -1. Из пары (d, ∂) можно построить оператор градуировки 0, обобщающий оператор Лапласа и коммутирующий с каждым из элементов пары:

$$\Delta := \{d, \partial\} = d\,\partial + \partial\, d\,, \tag{1.33}$$

$$[d, \Delta] = [\partial, \Delta] = 0\,. \tag{1.34}$$

Относительно оператора Лапласа Δ можно доказать две важные леммы (доказательства приведены, например, в [98]).

Лемма 1.2.2. *Если Δ диагонализуем на градуированном векторном пространстве V, то $H(d) \subset \ker \Delta$.*

Лемма 1.2.3. *Пусть $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ – это гильбертово пространство, и d^* является оператором, сопряженным к d в смысле скалярного произведения $\langle \alpha, d\beta \rangle = \langle d^*\alpha, \beta \rangle$. Определим $\Delta = \{d\,, d^*\}$. Тогда $\ker \Delta \subset H(d)$.*

Из лемм 1.2.2 и 1.2.3 следует, что при выполнении всех требований

$$H(d) = \ker \Delta\,. \tag{1.35}$$

В следующих разделах будет показано, что для развернутых систем в пространствах $Mink_d$ и AdS_4 удается ввести скалярное произведение и определить операторы σ_- и $\sigma_-^\dagger$, играющие роль d и d^*. Корректная интерпретация когомологий σ_- требует ограничения на неразложимые модули $\mathfrak{iso}(d-1,1)$ и $\mathfrak{so}(3,2)$ соответственно, что в первом случае достигается с помощью Хау-дуальной алгебры, а во втором случае выполнено автоматически за счет свойств двухкомпонентных спиноров. В рассматриваемых нами системах эти модули являются конечномерными неприводимыми представлениями фиксированного значения спина. Следовательно, ограничение оператора Лапласа Δ на неприводимый модуль спина-s – это конечномерный самосопряженный оператор, а значит диагонализуемый. Как мы увидим далее, собственными подпространствами ограниченного оператора Δ являются конечномерные неприводимые представления $\mathfrak{so}(d-1,1)$, соответствующие двухрядным диаграммам Юнга. В случае AdS_4 это будут мультиспиноры, задающие неприводимые представления $\mathfrak{so}(3,1)$.

1.3 Когомологии σ_- в пространстве $Mink_d$

1.3.1 Производящие функции

Рассмотрим кольцо дифференциальных форм со значениями в рядах $\Lambda^p(\mathcal{M}^d) \otimes \mathbb{R}[Y,Z]$ от $2d$ коммутирующих переменных Y^a, Z^b. Однородным элементом этого кольца является p-форма со значением в $\mathbb{R}[Y,Z]$, имеющая вид

$$\omega_{n,m}(x,\mathrm{d}x,Y,Z) = \omega_{a(n)|b(m)}(x,\mathrm{d}x) Y^{a(n)} Z^{b(m)} \,. \tag{1.36}$$

Определим производящую функцию

$$\omega(x,\mathrm{d}x\,|Y,Z) = \sum_{n,m\geq 0} \omega_{a(n)|b(m)}(x,\mathrm{d}x) Y^{a(n)} Z^{b(m)} \,. \tag{1.37}$$

Нетрудно убедиться в том, что наложение условий

$$Y^a \partial_{Za}\,\omega = 0\,, \quad \eta^{ab}\partial_{Ya}\partial_{Yb}\,\omega = 0 \tag{1.38}$$

накладывает на тензорные коэффициенты производящей функции условие Юнга и условие бесследовости по индексам $a(n)$

$$\omega_{a(n),ab(m-1)} = 0\,, \quad \omega^k{}_{ka(n-2),b(m)} = 0\,. \tag{1.39}$$

Бесследовость по остальным парам индексов следует из условий (1.38). Таким образом, в $\Lambda^p(\mathcal{M}^d) \otimes \mathbb{R}[Y,Z]$ выделяется подпространство форм со значениями в не более чем двухрядных диаграммах Юнга $\mathfrak{so}(d-1,1)$.

Аналогично анализу из работы [94], мы не будем различать вещественные формы одной комплексной алгебры Ли, сразу переходя к компактной вещественной форме, т. е. заменим алгебру $\mathfrak{so}(d-1,1)$ на $\mathfrak{so}(d)$. Это возможно сделать, так как представления исходной вещественной формы и компактной формы в классе тензоров имеют одинаковую структуру. Мотивация данного перехода заключается в существовании положительно-определенного скалярного произведения на тензорах компактной алгебры Ли. Единственное различие связано с (анти)самодуальными тензорами, так как их существование зависит от сигнатуры метрики. Однако они не играют роли в дальнейшем анализе, где (анти)самодуальные тензоры всегда появляются парами или вообще не появляются в достаточно больших размерностях $d > 4$.

Генераторы $\mathfrak{gl}(d)$ и $\mathfrak{so}(d)$ на пространстве форм $\Lambda^p(\mathcal{M}^d) \otimes \mathbb{R}[Y, Z]$ реализуются как

$$\left(t_{\mathfrak{gl}(d)}\right)^a_{\ b} = Y^a \partial_{Yb} + Z^a \partial_{Zb} + \theta^a \partial_{\theta^b}, \quad \left(t^{\mathfrak{so}(d)}\right)_{ab} = \frac{1}{2}\left(\eta_{ac} t_{\mathfrak{gl}}{}^c_b - \eta_{bc} t_{\mathfrak{gl}}{}^c_a\right), \tag{1.40}$$

где θ^a – грассманово-нечетный элемент внешней алгебры, ассоциированный с тетрадой e^a.

В этих переменных оператор σ_-, ассоциированный с оператором градуировки $G = Z^a \partial_{Za}$, имеет вид

$$\sigma_- \omega = \theta^a \frac{\partial \omega}{\partial Z^a} = m \theta^c \omega_{a(n),cb(m-1)}(x, \theta) Y^{a(n)} Z^{b(m-1)} \,. \tag{1.41}$$

Заметим, что так определенный оператор σ_- коммутирует с операторами, накладывающими условия (1.38), т. е. σ_- не выводит из класса дифференциальных форм со значением в не более чем двухрядных диаграммах Юнга $\mathfrak{so}(d)$.

В дальнейшем иногда не будем указывать переменные Y, Z, θ явно, поскольку они всегда предполагаются присутствующими. Также принимаем соглашение, согласно которому индекс a относится к Y, b к Z и c_i к θ^{c_i}, при этом θ упорядочены как $c_1, \ldots, c_p$.

На пространстве $\Lambda(\mathcal{M}^d) \otimes \mathbb{R}[Y, Z]$ можно ввести скалярное произведение

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi^{2n}} \int_{\mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^d} d^{2d}Z \, d^{2d}Y \, d^d\theta \, d^d\bar{\theta} \, f(Z, Y, \theta) \, \overline{g(Z, Y, \theta)} \, e^{-|Z|^2 - |Y|^2 - \bar{\theta}\theta}, \tag{1.42}$$

где $f, g \in \Lambda(\mathcal{M}^d) \otimes \mathbb{R}[Y, Z]$. Из скалярного произведения получаются следующие правила сопряжения для переменных Y, Z, θ:

$$(Z^a)^\dagger = \partial_{Za} \,, \qquad (Y^a)^\dagger = \partial_{Ya} \,, \qquad (\theta^a)^\dagger = \partial_{\theta a} \,. \tag{1.43}$$

1.3.2 Пример $\mathfrak{gl}(d)$-модулей

В качестве иллюстрации приведем альтернативный использованному в работе [90] вывод когомологий σ_- для полей, обладающих следом, т. е. форм со значением в не более чем двухрядных $\mathfrak{gl}(d)$ диаграммах.

Определим алгебру $\mathfrak{gl}(2)$ как

$$t_1 = Y^a \partial_{Za}, \quad t_2 = Z^a \partial_{Ya}, \quad h_1 = Y^a \partial_{Ya}, \quad h_2 = Z^a \partial_{Za}\,, \tag{1.44}$$

$$t_0 = h_1 - h_2\,, \tag{1.45}$$

$$[t_1, t_2] = t_0\,, \quad [t_0, t_1] = 2t_1, \quad [t_0, t_2] = -2t_2\,. \tag{1.46}$$

Нетрудно проверить, что эта алгебра коммутирует с генераторами $\mathfrak{gl}(d)$, определенными в (1.40). Представленная алгебра является Хау-дуальной к $\mathfrak{gl}(d)$, ограниченной на переменные Y, Z.

Тогда подпространство p-форм, принимающих значения в неприводимых представлениях $\mathfrak{gl}(d)$, отвечающих двухрядным диаграммам Юнга, выделяется условием экстремальности вектора относительно $\mathfrak{gl}(2)$

$$V^p = \{F \in \Lambda^p(\mathcal{M}^d) \otimes \mathbb{R}[Y, Z] \,|\, t_1 F = 0\}\,. \tag{1.47}$$

Расширим дуальную алгебру $\mathfrak{gl}(2)$ до $\mathfrak{gl}(2|1)$ с помощью операторов, содержащих тетраду θ и коммутирующих с генераторами $\mathfrak{gl}(d)$,

$$Z_\theta = Z^a \partial_{\theta a}, \quad Y_\theta = Y^a \partial_{\theta a}, \quad D = \theta^a \partial_{\theta a}, \quad \theta_Y = \theta^a \partial_{Ya}, \quad \theta_Z = \theta^a \partial_{Za}\,. \tag{1.48}$$

Следующий шаг состоит в построении $\sigma_-^\dagger : (\sigma_-^\dagger)^2 = 0$ и $\operatorname{im} \sigma_-^\dagger \subset V^p$. Рассмотрим оператор, являющийся самой общей деформацией наивно сопряженного к σ_- оператора, сохраняющей степени вхождения переменных Y, Z, θ:

$$\sigma_-^\dagger = f(t_0) Z_\theta + g(t_0) Y_\theta t_2\,, \tag{1.49}$$

где $f(t_0)$ и $g(t_0)$ – аналитические функции генератора Картана t_0 подалгебры $\mathfrak{sl}(2)$. Функции f и g находятся из условий

$$(\sigma_-^\dagger)^2 F = 0\,, \quad t_1 \sigma_-^\dagger F = 0\,, \quad (F, \sigma_-^\dagger G) = (\sigma_- F, G) \qquad \forall F, G \in V^p\,. \tag{1.50}$$

Подставляя анзац для $\sigma_-^\dagger$ в эти условия, получаем систему уравнений, решением которой является

$$\sigma_-^\dagger = \frac{t_0 + 1}{t_0 + 2} Z_\theta - \frac{1}{t_0 + 2} Y_\theta t_2\,. \tag{1.51}$$

Из формулы для $\sigma_-^\dagger$ видно, что он отличается от наивного применения правил сопряжения (1.43) к σ_-. Это связано с тем, что наивно сопряженный оператор выводит из пространства $\mathfrak{gl}(d)$-неприводимых p-форм. Чтобы сузить область действия до V^p, приходится вводить члены-компенсаторы. Так как согласно Хау-дуальности выделение неприводимого $\mathfrak{gl}(d)$-модуля эквивалентно проектированию на старшие (младшие) векторы $\mathfrak{sl}(2)$, добавление членов-компенсаторов оказывается тождественно построению так называемого экстремального проектора. Хотя общие формулы экстремальных проекторов известны для всех простых алгебр [105—108], мы будем получать «спроектированные» $\sigma_-^\dagger$ напрямую из требуемых ограничений.

Результирующий оператор Лапласа имеет вид

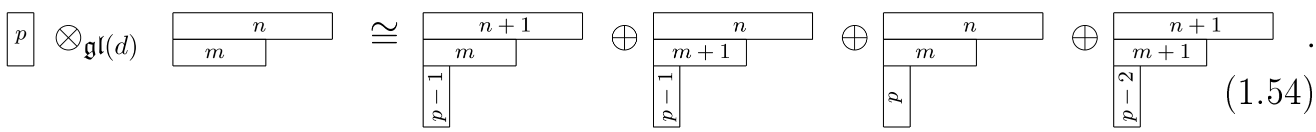
$$\Delta = \frac{t_0}{t_0+1}(D + h_2 - 1) + \frac{1}{t_0+1} Y_\theta \theta_Y - \frac{1}{(t_0+1)(t_0+2)} t_2 \theta_Z Y_\theta \,. \tag{1.52}$$

Будучи построенным из $\mathfrak{gl}(d)$-инвариантных операторов, Δ коммутирует с $\mathfrak{gl}(d)$, а значит, согласно лемме Шура действует числом на неприводимом $\mathfrak{gl}(d)$-модуле. Задача нахождения когомологий сводится к нахождению вида собственных векторов Δ с нулевым собственным значением.

Рассмотрим произвольный элемент V^p, имеющий вид

$$F = F_{a(n),b(m)|c_1,\dots,c_p} Y^{a(n)} Z^{b(m)} \theta^{c_1} \dots \theta^{c_p} \,. \tag{1.53}$$

При $p > 0$ вектор F является приводимым представлением $\mathfrak{gl}(d)$, эквивалентным тензорному произведению полностью антисимметричного и двухрядного представлений. В терминах диаграмм Юнга разложение на неприводимые компоненты, собственные относительно Δ, имеет вид



(1.54)

Вводя тензоры F_i, соответствующие каждой из диаграмм в правой части разложения, получаем тензорное выражение

$$\begin{aligned} F_{a(n),b(m)|c_1,c_2,\dots,c_p} &= F_{1\,a(n)c_1,b(m),c_2,\dots,c_p} + \frac{m}{n-m+2} F_{1\,a(n)b,b(m-1)c_1,c_2,\dots,c_p} + \\ &+ F_{2\,a(n),b(m)c_1,c_2,\dots,c_p} + F_{3\,a(n),b(m),c_1,\dots,c_p} + F_{4\,a(n)c_1,b(m)c_2,c_3,\dots,c_p} \,, \end{aligned} \tag{1.55}$$

где коэффициенты фиксируются условием $t_1 F = 0$.

Из условий σ_--замкнутости получаем, что $m = 0$ для F_1 и F_3, т. е. F_3 становится частным случаем F_2. Восстановив явную зависимость от переменных

Y, Z, θ, получаем следующие собственные значения оператора Лапласа

$$\left(\Delta - \frac{n(p-1)}{(n+1)}\right) F_{1a(n)c_1,c_2,\dots,c_p} Y^{a(n)} \theta^{c_1} \dots \theta^{c_p} = 0\,, \quad p \geq 1\,, \tag{1.56}$$

$$(\Delta - (m+p))\, F_{2a(n),b(m)c_1,c_2,\dots,c_p} Y^{a(n)} Z^{b(m)} \theta^{c_1} \dots \theta^{c_p} = 0\,, \tag{1.57}$$

$$\left(\Delta - \frac{(n-m)(p+m-1)}{(n-m+1)}\right) F_{4a(n)c_1,b(m)c_2,c_3,\dots,c_p} Y^{a(n)} Z^{b(m)} \theta^{c_1} \dots \theta^{c_p} = 0\,, \quad p \geq 2\,. \tag{1.58}$$

Из полученных выражений для собственных значений ясно, что тензор F_1 принадлежит σ_--когомологиям при $n = 0$ или $p = 1$, F_2 при $m = p = 0$, а F_4 при $n = m$ (случай F_1 при $n = 0$ совпадает с F_4 при $n = m = 0$).

В итоге имеем

$$H^0(\sigma_-) = \{\varepsilon = \varepsilon_{a(n)} Y^{a(n)} \,|\, \varepsilon \in V^0\}\,, \tag{1.59}$$

$$H^1(\sigma_-) = \{\phi = \phi_{a(n)c} \theta^c Y^{a(n)} \,|\, h_2\phi = 0,\, \phi \in V^1\}\,, \tag{1.60}$$

$$H^p(\sigma_-) = \{W = \theta_Y \theta_Z C(Y, Z, \theta) \,|\, t_0 C = 0,\, C \in V^{p-2}\,, \quad p > 1\}\,, \tag{1.61}$$

$$\text{где} \quad C = C_{a(n),b(n),c_1,\dots,c_{p-2}} Y^{a(n)} Z^{b(n)} \theta^{c_1} \dots \theta^{c_{p-2}} \in V^{p-2}\,.$$

Система описывается одним симметричным примарным полем с калибровочным преобразованием, задаваемым симметричным тензорным параметром. Вторая группа когомологий $H^2(\sigma_-)$ порождается одним тензором, соответствующим обобщенному (имеющему след) тензору Вейля. Если последний равен нулю, то система становится топологической. В противном случае развернутые уравнения кодируют набор связей, выражающих все поля и тензор Вейля со следом через производные примарного поля. Подобные развернутые системы, известные как системы вне массовой оболочки, рассматривались в [109]. Системы вне массовой оболочки представляют интерес для задачи построения действия и квантования (например, недавние работы, посвященные изучению данных вопросов в контексте теории высших спинов [110; 111]). Младшие группы когомологий (1.59), (1.60) и (1.61) совпадают с группами, полученными в работе [90].

1.3.3 Анализ когомологий для $\mathfrak{so}(d)$-модулей

Перейдем к рассмотрению когомологий σ_- в кольце p-форм со значениями в неприводимых $\mathfrak{so}(d)$-модулях, отвечающих не более чем двухрядным диаграммам Юнга. В этом случае Хау-дуальной является алгебра $\mathfrak{sp}(4)$, реализованная генераторами:

$$t_1 = Y^a \partial_{Za}, \quad t_2 = Z^a \partial_{Ya}, \quad h_1 = Y^a \partial_{Ya}, \quad h_2 = Z^a \partial_{Za}\,, \tag{1.62}$$

$$t_0 = h_1 - h_2\,, \tag{1.63}$$

$$f_1 = \partial_Y^a \partial_{Ya}, \quad f_2 = \partial_Z^a \partial_{Za}, \quad f_3 = \partial_Y^a \partial_{Za}\,, \tag{1.64}$$

$$e_1 = Y^a Y_a, \quad e_2 = Z^a Z_a, \quad e_3 = Y^a Z_a\,. \tag{1.65}$$

Дополним ее $\mathfrak{so}(d)$-инвариантными операторами

$$Z_\theta = Z^a \partial_{\theta a}, \quad Y_\theta = Y^a \partial_{\theta a}, \tag{1.66}$$

$$\partial_{\theta Z} = \partial_{\theta a} \partial_Z^a, \quad \partial_{\theta Y} = \partial_{\theta a} \partial_Y^a, \tag{1.67}$$

$$\theta_Z = \theta^a \partial_{Za}, \quad \theta_Y = \theta^a \partial_{Ya}, \quad D = \theta^a \partial_{\theta a}\,, \tag{1.68}$$

расширяющими $\mathfrak{sp}(4)$ до $\mathfrak{osp}(2|4)$, в чем нетрудно убедиться, сравнив представленные генераторы с осцилляторной реализацией $\mathfrak{osp}(2|4)$.

Пространство p-форм со значениями в не более чем двухрядных диаграммах Юнга $\mathfrak{so}(d)$ задается условиями экстремальности относительно $\mathfrak{sp}(4)$

$$V^p = \{F \in \Lambda^p(\mathcal{M}^d) \otimes \mathbb{R}[Y, Z] \,|\, t_1 F = 0\,, f_1 F = 0\}\,. \tag{1.69}$$

Рассмотрим оператор $\sigma_-^\dagger$

$$\begin{aligned} \sigma_-^\dagger = {} & g_1(h_1, h_2) Z_\theta + g_2(h_1, h_2) t_2 Y_\theta + g_3(h_1, h_2) e_3 \partial_{\theta Y} + g_4(h_1, h_2) e_1 t_2 \partial_{\theta Y} + \\ & + g_5(h_1, h_2) e_2 \partial_{\theta Z} + g_6(h_1, h_2) e_3 t_2 \partial_{\theta Z} + g_7(h_1, h_2) e_1 t_2^2 \partial_{\theta Z}\,, \end{aligned} \tag{1.70}$$

являющийся самой общей деформацией наивного сопряжения σ_- при условии $\mathfrak{so}(d)$-инвариантности и сохранения степеней вхождения переменных Y, Z, θ и производных по ним.

Требуя выполнения соотношений

$$\begin{aligned} & (\sigma_-^\dagger)^2 F = 0\,, \quad t_1 \sigma_-^\dagger F = 0\,, \quad f_1 \sigma_-^\dagger F = 0\,, \\ & (F, \sigma_-^\dagger G) = (\sigma_- F, G) \qquad \forall F, G \in V^p\,, \end{aligned} \tag{1.71}$$

получаем корректно определенный на V^p оператор, сопряженный к σ_-,

$$
\begin{aligned}
\sigma_-^\dagger = Z_\theta - \frac{1}{t_0+2} t_2 Y_\theta - \frac{t_0}{(t_0+2)(d-4+h_1+h_2)} e_3 \partial_{\theta Y} + \\
+ \frac{1}{(t_0+2)(d-4+h_1+h_2)} e_1 t_2 \partial_{\theta Y} - \frac{t_0+1}{(t_0+2)(d-6+2h_2)} e_2 \partial_{\theta Z} + \\
+ \frac{d-4+2h_1}{(t_0+2)(d-4+h_1+h_2)(d-6+2h_2)} e_3 t_2 \partial_{\theta Z} - \\
- \frac{1}{(t_0+2)(d-4+h_1+h_2)(d-6+2h_2)} e_1 t_2^2 \partial_{\theta Z} \,.
\end{aligned}
\tag{1.72}
$$

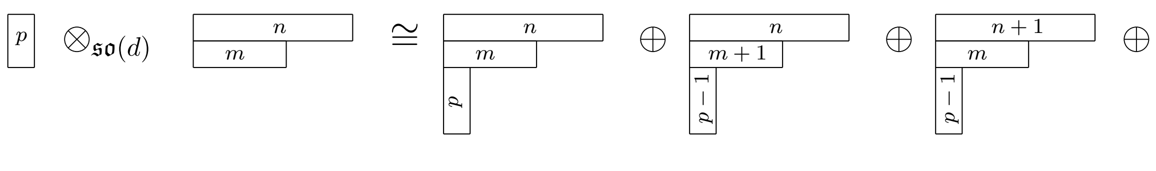
В итоге, оператор Лапласа на $\mathfrak{so}(d)$-модулях определяется формулой

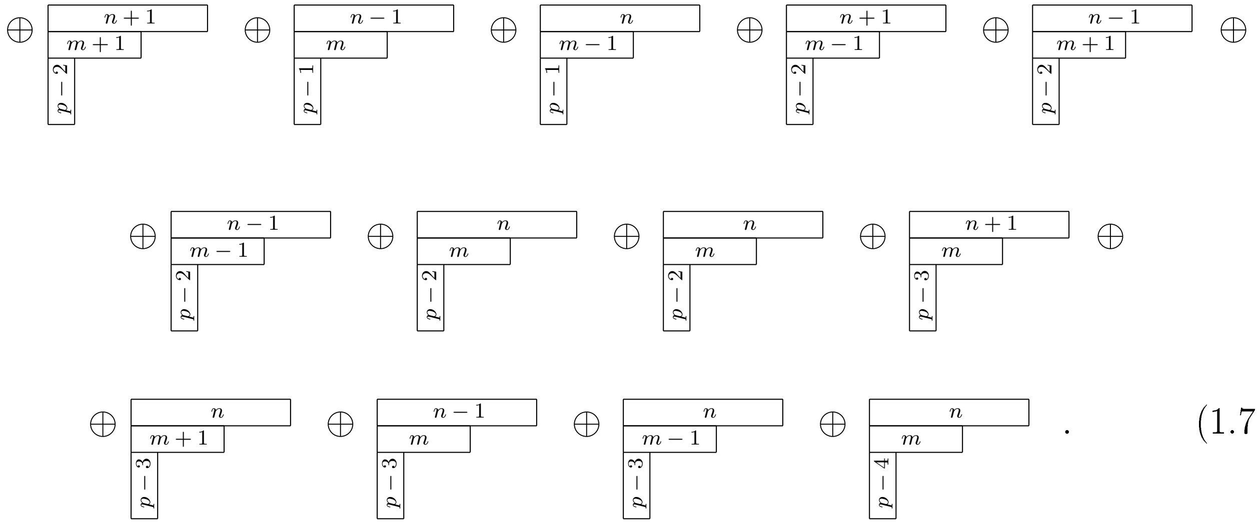
$$
\begin{aligned}
\Delta = \theta_Z Z_\theta + Z_\theta \theta_Z - \frac{1}{t_0+1}(t_2 \theta_Z Y_\theta + \theta_Y Y_\theta) + \frac{1}{t_0+2} t_2 \theta_Z Y_\theta + \\
+ \frac{1}{(t_0+1)(d-3+h_1+h_2)}(e_1 t_2 \theta_Z \partial_{\theta Y} + e_1 \theta_Y \partial_{\theta Y} - (t_0-1)(e_3 \theta_Z \partial_{\theta Y} + \theta^a Y_a \partial_{\theta Y})) + \\
+ \frac{d-4+2h_1}{(t_0+1)(d-3+h_1+h_2)(d-4+2h_2)}\Big(e_3 t_2 \theta_Z \partial_{\theta Z} + e_3 \theta_Y \partial_{\theta Z} + t_2 \theta^a Y_a \partial_{\theta Z} - \theta^a Z_a \partial_{\theta Z}\Big) - \\
- \frac{1}{(t_0+1)(d-3+h_1+h_2)(d-4+2h_2)}\Big(e_1 t_2^2 \theta_Z \partial_{\theta Z} + 2 e_1 t_2 \theta_Y \partial_{\theta Z}\Big) + \\
+ \frac{1}{(t_0+2)(d-4+h_1+h_2)}(t_0 e_3 \theta_Z \partial_{\theta Y} - e_1 t_2 \theta_Z \partial_{\theta Y}) + \frac{t_0+1}{(t_0+2)(d-6+2h_2)} e_2 \theta_Z \partial_{\theta Z} + \\
+ \frac{1}{(t_0+2)(d-4+h_1+h_2)(d-6+2h_2)}\big(e_1 t_2^2 \theta_Z \partial_{\theta Z} - (d-4+2h_1) e_3 t_2 \theta_Z \partial_{\theta Z}\big) - \\
- \frac{t_0}{(t_0+1)(d-4+2h_2)}\Big(e_2 \theta_Z \partial_{\theta Z} + 2\theta^a Z_a \partial_{\theta Z}\Big).
\end{aligned}
\tag{1.73}
$$

Так как $[\Delta\,, \mathfrak{so}(d)] = 0$, собственные векторы оператора Лапласа – это неприводимые представления $\mathfrak{so}(d)$. Аналогично примеру $\mathfrak{gl}(d)$, рассмотрим произвольный элемент V^p

$$
F = F_{a(n),b(m)|c_1,\dots,c_p} Y^{a(n)} Z^{b(m)} \theta^{c_1} \dots \theta^{c_p} \,. \tag{1.74}
$$

Тензорный коэффициент $F_{a(n),b(m)|c_1,\dots,c_p}$ соответствует произведению полностью антисимметричного и двухрядного представлений. В терминах диаграмм Юнга разложение на неприводимые компоненты имеет вид





(1.75)

Заметим, что диаграмма $\mathbb{Y}(n, m, 1^{p-2})$ имеет кратность два, что следует из правил умножения диаграмм Юнга $\mathfrak{so}(d)$. Очевидно, что группы $H^p(\sigma_-)$ пусты при $p > d$. В силу теоремы о двух столбцах для достаточно больших $p \leq d$ некоторые потенциальные элементы $H^p(\sigma_-)$ оказываются также тождественно равными нулю.

Теорема 1.3.1 (О двух столбцах [112]). *$\mathfrak{so}(d)$-тензоры, отвечающие диаграммам Юнга, для которых сумма высот первых двух столбцов превышает d, тождественно равны нулю.*

Приведем для правой части диаграммного разложения (1.75) соответствующие им тензорные выражения:

- **Диаграмма** $\mathbb{Y}(n, m, 1^p)$**:**

$$T_{a(n),b(m),c_1,\ldots,c_p}\,. \tag{1.76}$$

- **Диаграмма** $\mathbb{Y}(n+1, m+1, 1^{p-2})$**:**

$$T_{a(n)c_1,b(m)c_2,\ldots,c_p}\,. \tag{1.77}$$

- **Диаграмма** $\mathbb{Y}(n, m+1, 1^{p-1})$**:**

$$T_{a(n),b(m)c_0,c_1,\ldots,c_{p-1}}\,. \tag{1.78}$$

- **Диаграмма** $\mathbb{Y}(n+1, m, 1^{p-1})$:

$$T_{a(n)c_0,b(m),c_1,\dots,c_{p-1}} + \frac{m}{n-m+2} T_{a(n)b,b(m-1)c_0,c_1,\dots,c_{p-1}}\,. \tag{1.79}$$

- **Диаграмма** $\mathbb{Y}(n-1, m, 1^{p-1})$:

$$\begin{aligned} &\eta_{ac_1} T_{a(n-1),b(m),c_2,\dots,c_p} - \frac{n-1}{d-4+2n}\eta_{aa}T_{a(n-2)c_1,b(m),c_2,\dots,c_p} + \\ &+ \frac{m(n-1)}{(d-4+m+n)(d-4+2n)}\eta_{aa}T_{a(n-2)b,b(m-1)c_1,c_2,\dots,c_p} - \\ &- \frac{m}{d-4+m+n}\eta_{ab}T_{a(n-1),b(m-1)c_1,c_2,\dots,c_p}\,. \end{aligned} \tag{1.80}$$

- **Диаграмма** $\mathbb{Y}(n, m-1, 1^{p-1})$:

$$\begin{aligned} &(n-1)\eta_{aa}T_{a(n-2)bc_1,b(m-1),c_2,\dots,c_p} - \frac{(n-1)(m-1)}{d-6+2m}\eta_{aa}T_{a(n-2)bb,b(m-2)c_1,c_2,\dots,c_p} - \\ &-(d-4+m+n)\eta_{ac_1}T_{a(n-1)b,b(m-1),c_2,\dots,c_p} - (n-m)\eta_{ab}T_{a(n-1)c_1,b(m-1),c_2,\dots,c_p} + \\ &+ \frac{(m-1)(d-4+2n)}{d-6+2m}\eta_{ab}T_{a(n-1)b,b(m-2)c_1,c_2,\dots,c_p} + \\ &+ \frac{(n-m+1)(d-4+m+n)}{n}\eta_{bc_1}T_{a(n),b(m-1),c_2,\dots,c_p} - \\ &- \frac{(m-1)(n-m+1)(d-4+m+n)}{(d-6+2m)n}\eta_{bb}T_{a(n),b(m-2)c_1,c_2,\dots,c_p}\,. \end{aligned} \tag{1.81}$$

- **Диаграмма** $\mathbb{Y}(n+1, m-1, 1^{p-2})$:

$$\begin{aligned} &\eta_{ac_1}T_{a(n-1)bc_2,b(m-1),c_3,\dots,c_p} - \frac{n-m+1}{n}\eta_{bc_1}T_{a(n)c_2,b(m-1),c_3,\dots,c_p} + \\ &+ \frac{m-1}{n-m+3}\eta_{ac_1}T_{a(n-1)bb,b(m-2)c_2,c_3,\dots,c_p} - \\ &- \frac{(m-1)(n-1)}{(d-6+2m)(n-m+3)}\eta_{aa}T_{a(n-2)bbc_1,b(m-2)c_2,c_3,\dots,c_p} + \\ &+ \frac{2(m-1)(n-m+1)}{(d-6+2m)(n-m+3)}\eta_{ab}T_{a(n-1)bc_1,b(m-2)c_2,c_3,\dots,c_p} - \\ &- \frac{(m-1)(n-m+1)}{n(n-m+3)}\eta_{bc_1}T_{a(n)b,b(m-2)c_2,c_3,..c_p} - \\ &- \frac{(m-1)(n-m+2)(n-m+1)}{(d-6+2m)(n-m+3)n}\eta_{bb}T_{a(n)c_1,b(m-2)c_2,c_3,\dots,c_p}\,. \end{aligned} \tag{1.82}$$

- **Диаграмма** $\mathbb{Y}(n-1, m+1, 1^{p-2})$:

$$\eta_{ac_1}T_{a(n-1),b(m)c_2,\dots,c_p} - \frac{n-1}{d-4+2n}\eta_{aa}T_{a(n-2)c_1,b(m)c_2,\dots,c_p}\,. \tag{1.83}$$

- **Диаграмма** $\mathbb{Y}(n-1,m-1,1^{p-2})$**:** (Коэффициенты приведены в приложении А.2)

$$\eta_{ac_1}\eta_{bc_2}T_{a(n-1),b(m-1),\dots,c_p}+(m-1)\alpha_1\eta_{aa}\eta_{aa}T_{a(n-4)bbc_1,b(m-2)c_2,\dots,c_p}+ \\ +\alpha_2\eta_{aa}\eta_{ac_1}T_{a(n-3)bc_2,b(m-1),\dots,c_p}+(m-1)\alpha_3\eta_{aa}\eta_{ac_1}T_{a(n-3)bb,b(m-2)c_2,\dots,c_p}+ \\ +(m-1)\alpha_4\eta_{aa}\eta_{ab}T_{a(n-3)bc_1,b(m-2)c_2,\dots,c_p}+\alpha_5\eta_{aa}\eta_{bc_1}T_{a(n-2)c_2,b(m-1),\dots,c_p}+ \\ +(m-1)\alpha_6\eta_{aa}\eta_{bc_1}T_{a(n-2)b,b(m-2)c_2,\dots,c_p}+(m-1)\alpha_7\eta_{aa}\eta_{bb}T_{a(n-2)c_1,b(m-2)c_2,\dots,c_p}+ \\ +\alpha_8\eta_{ac_1}\eta_{ab}T_{a(n-2)c_2,b(m-1),\dots,c_p}+(m-1)\alpha_9\eta_{ac_1}\eta_{ab}T_{a(n-2)b,b(m-2)c_2,\dots,c_p}+ \\ +(m-1)\alpha_{10}\eta_{ac_1}\eta_{bb}T_{a(n-1),b(m-2)c_2,\dots,c_p}+(m-1)\alpha_{11}\eta_{ab}\eta_{ab}T_{a(n-2)c_1,b(m-2)c_2,\dots,c_p}+ \\ +(m-1)\alpha_{12}\eta_{ab}\eta_{bc_1}T_{a(n-1),b(m-2)c_2,\dots,c_p}. \quad (1.84)$$

- **Диаграмма** $\mathbb{Y}(n+1,m,1^{p-3})$**:**

$$\eta_{bc_1}T_{a(n)c_2,b(m-1)c_3,\dots,c_p}-\frac{n}{n-m+1}\eta_{ac_1}T_{a(n-1)bc_2,b(m-1)c_3,\dots,c_p}. \quad (1.85)$$

- **Диаграмма** $\mathbb{Y}(n,m+1,1^{p-3})$**:**

$$\eta_{ac_1}T_{a(n-1)c_2,b(m)c_3,\dots,c_p}. \quad (1.86)$$

- **Диаграмма** $\mathbb{Y}(n,m,1^{p-2})$**:** два линейно независимых выражения в соответствии с двойной кратностью диаграммы в разложении (1.75)

$$\eta_{ac_1}T_{1\,a(n-1)c_2,b(m),c_3,\dots,c_p}+\frac{m}{n}\eta_{bc_1}T_{1\,a(n),b(m-1)c_2,c_3,\dots,c_p}, \quad (1.87)$$

$$\eta_{aa}T_{2\,a(n-2)bc_1,b(m-1)c_2,c_3,\dots,c_p}-\frac{n-m}{n-1}\eta_{ab}T_{2\,a(n-1)c_1,b(m-1)c_2,c_3,\dots,c_p}- \\ -\frac{d-4+n+m}{n-1}\eta_{ac_1}T_{2\,a(n-1)b,b(m-1)c_2,c_3,\dots,c_p}+ \\ +\frac{(n-m+1)(d-4+m+n)}{n(n-1)}\eta_{bc_1}T_{2\,a(n),b(m-1)c_2,c_3,\dots,c_p}. \quad (1.88)$$

- **Диаграмма** $\mathbb{Y}(n-1,m,1^{p-3})$**:**

$$\eta_{ac_1}\eta_{bc_2}T_{a(n-1),b(m-1)c_3,\dots,c_p}+\frac{n-1}{d-4+m+n}\eta_{ab}\eta_{ac_1}T_{a(n-2)c_2,b(m-1)c_3,\dots,c_p}- \\ -\frac{(n-1)(n-2)}{(d-4+m+n)(d-4+2n)}\eta_{aa}\eta_{ac_1}T_{a(n-3)bc_2,b(m-1)c_3,\dots,c_p}- \\ -\frac{(n-1)(d-3+m+n)}{(d-4+n+m)(d-4+2n)}\eta_{aa}\eta_{bc_1}T_{a(n-2)c_2,b(m-1)c_3,\dots,c_p}. \quad (1.89)$$

- **Диаграмма** $\mathbb{Y}(n,m-1,1^{p-3})$:

$$\eta_{ac_1}\eta_{bc_2}T_{a(n-1)c_3,b(m-1),\dots,c_p}+(m-1)(\text{лин. нез. члены})\,. \tag{1.90}$$

- **Диаграмма** $\mathbb{Y}(n,m,1^{p-4})$:

$$\eta_{ac_1}\eta_{bc_2}T_{a(n-1)c_3,b(m-1)c_4,\dots,c_p}\,. \tag{1.91}$$

Приведенные выше выражения дают все собственные векторы оператора Лапласа (1.73). Для упрощения дальнейшего анализа вместо прямого вычисления собственных значений для каждого из векторов сначала применим к каждому из тензорных выражений σ_-, чтобы оставить лишь те p-формы, которые принадлежат $\ker\sigma_-$.

$$\ker\sigma_-=\Bigg\{$$

- $T_{a(n),b(m)c_1,c_2,\dots,c_p}\,,$
- $T_{a(n)c_1,b(m)c_2,\dots,c_p}\,,$
- $\eta_{ac_1}T_{a(n-1)bc_2,\dots,c_p}-\eta_{bc_1}T_{a(n)c_2,\dots,c_p}\,,$
- $\eta_{ac_1}T_{a(n-1),b(m)c_2,\dots,c_p}-\dfrac{n-1}{d-4+2n}\eta_{aa}\rho_{a(n-2)c_1,b(m)c_2,\dots,c_p}\,,$
- $\eta_{ac_1}\eta_{bc_2}T_{a(n-1),\dots,c_p}+\dfrac{(n-2)(n-1)}{(d-3+n)(d-4+2n)}\eta_{aa}\eta_{ac_1}T_{a(n-3)bc_2,\dots,c_p}+$
$+\dfrac{(n-1)(d-2+n)}{(d-3+n)(d-4+2n)}\eta_{aa}\eta_{bc_1}T_{a(n-2)c_2,\dots,c_p}-\dfrac{n-1}{d-3+n}\eta_{ac_1}\eta_{ab}T_{a(n-2)c_2,\dots,c_p}\,,$
- $\eta_{bc_1}T_{a(n)c_2,b(m-1)c_3,\dots,c_p}-\dfrac{n}{n-m+1}\eta_{ac_1}T_{a(n-1)bc_2,b(m-1)c_3,\dots,c_p}\,,$
- $\eta_{ac_1}T_{a(n-1)c_2,b(m)c_3,\dots,c_p}\,,$
- $\eta_{ac_1}\eta_{bc_2}T_{a(n-1),b(m-1)c_3,\dots,c_p}+\dfrac{n-1}{d-4+m+n}\eta_{ab}\eta_{ac_1}T_{a(n-2)c_2,b(m-1)c_3,\dots,c_p}-$
$-\dfrac{(n-1)(n-2)}{(d-4+m+n)(d-4+2n)}\eta_{aa}\eta_{ac_1}T_{a(n-3)bc_2,b(m-1)c_3,\dots,c_p}-$
$-\dfrac{(n-1)(d-3+m+n)}{(d-4+n+m)(d-4+2n)}\eta_{aa}\eta_{bc_1}T_{a(n-2)c_2,b(m-1)c_3,\dots,c_p}\,,$
- $\eta_{ac_1}\eta_{bc_2}T_{a(n-1)c_3,b(m-1)c_4,\dots,c_p}\Bigg\}\,.$ (1.92)

Из элементов $\ker\sigma_-$ оставим принадлежащие $\ker\sigma_-^\dagger$, что эквивалентно нахождению ядра Δ. В итоге получаем $\ker\Delta=H(\sigma_-)$.

$$H^0(\sigma_-) = \{\varepsilon = \varepsilon_{a(n)} Y^{a(n)} \in V^0\}\,. \tag{1.93}$$

$$\begin{aligned} H^1(\sigma_-) = \Big\{ &\phi = \phi_{a(n)c} Y^{a(n)} \theta^c \in V^1; \\ &\phi^{tr} = \Big[(n-1)\eta_{aa}\phi^{tr}{}_{a(n-2)c} - (d-4+2n)\eta_{ac}\phi^{tr}{}_{a(n-1)}\Big] Y^{a(n)}\theta^c \in V^1 \Big\}. \end{aligned} \tag{1.94}$$

$$\begin{aligned} H^2(\sigma_-) = \Big\{ &W = \theta_Y \theta_Z C(Y,Z) :\, t_0 C = 0, C \in V^0; \\ &\mathcal{E}_A = \Big[\eta_{ac_1}\mathcal{E}_{Aa(n-1)bc_2} - \eta_{bc_1}\mathcal{E}_{Aa(n)c_2}\Big] Y^{a(n)} Z^b \theta^{c_1}\theta^{c_2} \in V^2; \\ &\mathcal{E}_B = \Big[\eta_{ac_1}\eta_{bc_2}\mathcal{E}_{Ba(n-1)} + \frac{(n-2)(n-1)}{(d-3+n)(d-4+2n)}\eta_{aa}\eta_{ac_1}\mathcal{E}_{Ba(n-3)bc_2} + \\ &\quad + \frac{(n-1)(d-2+n)}{(d-3+n)(d-4+2n)}\eta_{aa}\eta_{bc_1}\mathcal{E}_{Ba(n-2)c_2} - \\ &\quad - \frac{n-1}{d-3+n}\eta_{ac_1}\eta_{ab}\mathcal{E}_{Ba(n-2)c_2}\Big] Y^{a(n)} Z^b \theta^{c_1}\theta^{c_2} \in V^2 \Big\}. \end{aligned} \tag{1.95}$$

$$\begin{aligned} H^3(\sigma_-) = \Big\{ &B^{gauge} = \eta_{ac_1}\eta_{bc_2} B^{gauge}_{a(n-1)c_3} Y^{a(n)} Z^b \theta^{c_1}\theta^{c_2}\theta^{c_3} \in V^3; \\ &B_1^{weyl} = \theta_Y\theta_Z B_1(Y,Z,\theta) :\, t_0 B_1 = 0\,, \quad B_1 = B_{1a(n),b(n),c} Y^{a(n)} Z^{b(n)} \theta^c \in V^1; \\ &B_2^{weyl} = \Big[\eta_{bc_1} B_{2a(n)c_2,b(n-1)c_3} - n\eta_{ac_1} B_{2a(n-1)bc_2,b(n-1)c_3}\Big] Y^{a(n)} Z^{b(n)} \theta^{c_1}\theta^{c_2}\theta^{c_3} \in V^3 \Big\}. \end{aligned} \tag{1.96}$$

При $p > 3$

$$\begin{aligned} H^p(\sigma_-) = \Big\{ &B_1^{weyl} = \theta_Y\theta_Z B_1(Y,Z,\theta) :\, t_0 B_1 = 0\,, \\ &B_1 = B_{1a(n),b(n),c_1,\ldots,c_{p-2}} Y^{a(n)} Z^{b(n)} \theta^{c_1}\ldots\theta^{c_{p-2}} \in V^{p-2}; \\ &B_2^{weyl} = \Big[\eta_{bc_1} B_{2a(n)c_2,b(n-1)c_3,\ldots,c_p} - n\eta_{ac_1} B_{2a(n-1)bc_2,b(n-1)c_3,\ldots,c_p}\Big] \times \\ &\quad \times Y^{a(n)} Z^{b(n)} \theta^{c_1}\ldots\theta^{c_p} \in V^p \Big\}. \end{aligned} \tag{1.97}$$

Из (1.93) видим, что дифференциальные калибровочные параметры в развернутой системе имеют структуру $\mathbb{Y}(n)$, а значит соответствуют параметрам ε из теории Фронсдала (1.6).

Аналогично для примарных полей представители когомологий $H^1(\sigma_-)$ (1.94) отвечают диаграммам-строкам $\mathbb{Y}(n+1)$ и $\mathbb{Y}(n-1)$, что соотносится с разложением симметричного дважды бесследового поля Фронсдала по неприводимым представлениям (1.3).

Как было отмечено в (1.7), уравнения Фронсдала представимы как сумма двух однорядных представлений. Точно такую же структуру имеют классы $\mathcal{E}_A$ и $\mathcal{E}_B$ группы $H^2(\sigma_-)$ (1.95). Подстановка представителей $\mathcal{E}_A$ и $\mathcal{E}_B$ в правую часть развернутых уравнений и дальнейшая замена вспомогательных полей на их явные выражения через примарные поля $\phi_{a(s)}$ и ${\phi^{tr}}_{a(s-2)}$ приводят к равенству тензоров $\mathcal{E}_{Aa(s)}$ и $\mathcal{E}_{Ba(s-2)}$ левым частям компонент уравнения Фронсдала. Следует отметить, что количество результирующих полевых уравнений совпадает с количеством примарных полей, как и должно быть в лагранжевой системе. Третий класс 2-коциклов W отвечает за вейлевские когомологии и их присутствие в правых частях развернутых уравнений обеспечивает возможность нетривиальной динамики. Ноль-форма $C(Y,Z)$, стоящая в выражении для W, ассоциируется с обобщенным тензором Вейля, являющимся в случае спина 2 настоящим линеаризованным тензором Вейля из гравитации.

Группа $H^3(\sigma_-)$ (1.96) отвечает за тождества Бианки. Класс B^{gauge} относится к тождествам Бианки для уравнений Фронсдала, связанным с наличием калибровочной симметрии. Оставшиеся классы B_1^{weyl} и B_2^{weyl} ассоциированы с тождествами Бианки, которым удовлетворяет тензор Вейля. Можно проверить, что $H^1(\widetilde{\sigma}_-)$ в секторе ноль-форм C будет содержать когомологии, имеющие диаграммную структуру B_1^{weyl} и B_2^{weyl}. Это связано с тем, что вейлевский коцикл и следующие из него тождества Бианки возникают из-за разделения системы на сектор один-форм ω и сектор ноль-форм C, как обсуждалось ранее. При $p > 3$ когомологии $H^p(\sigma_-)$ содержат тождества Бианки для тождеств Бианки, т. е. так называемые сизигии [94], которые пропадают в развернутой системе для единого поля $\mathcal{W} = (\omega, C)$.

Полученные результаты для младших групп когомологий соотносятся с результатами работ [90; 91]. Более того, результаты анализа развернутой системы для полей высших спинов в $Mink_d$ допускают прямую деформацию к AdS_d с тем же оператором σ_-. Это связано с тем, что динамические поля, калибровочные преобразования и полевые уравнения описываются прямоугольными диаграммами алгебры $\mathfrak{so}(d-1,2)$. В общем случае, в плоском пределе неприводимые безмассовые (калибровочные) поля в AdS_d распадаются на нетривиальные множества неприводимых безмассовых полей плоского пространства [113–115] и нет взаимно-однозначного соответствия между безмассовыми полями в $Mink_d$ и AdS_d.

1.4 Когомологии σ_- в пространстве AdS_4

1.4.1 Производящие функции

Как говорилось ранее, теории высших спинов в AdS_4 допускают описание в терминах двухкомпонентных спиноров, что снимает трудности в определении оператора $\sigma_-^\dagger$, возникавшие в разделе 1.3 и связанные с необходимостью проектирования на бесследовые тензоры, удовлетворяющие условию Юнга. Вместо использования производящей функции $\omega(x, \mathrm{d}x\,|Y, Z)$, где Y^a и Z^a несут векторные индексы $a = \{0, 1, 2, 3\}$ и коэффициенты являются приводимыми тензорами, будем использовать

$$\omega(y, \bar{y}\,|x, \mathrm{d}x) = \sum_{k,m\geq 0} \omega^{\alpha_1\ldots\alpha_k,\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_m}(x, \mathrm{d}x)\, y_{\alpha_1}\ldots y_{\alpha_k}\, \bar{y}_{\dot{\alpha}_1}\ldots \bar{y}_{\dot{\alpha}_m}\,, \tag{1.98}$$

где индексы $\alpha, \dot{\alpha} \in \{1, 2\}$, а мультиспинорные коэффициенты автоматически отвечают неприводимым представлениям $\mathfrak{so}(3, 1)$, организованным в конечномерные модули $\mathfrak{so}(3, 2)$. Алгебра $\mathfrak{so}(3, 2) \simeq \mathfrak{sp}(4)$ задается генераторами

$$L_{\alpha\alpha} = y_\alpha \partial_\alpha\,, \quad \bar{L}_{\dot{\alpha}\dot{\alpha}} = \bar{y}_{\dot{\alpha}} \bar{\partial}_{\dot{\alpha}}\,, \tag{1.99}$$

$$P_{\alpha\dot{\alpha}} = y_\alpha \bar{\partial}_{\dot{\alpha}} + \bar{y}_{\dot{\alpha}} \partial_\alpha\,. \tag{1.100}$$

Аналогично разделу 1.3 введем кольцо форм $\Lambda^\bullet(M) \otimes \mathbb{C}[y, \bar{y}]$. Однородный элемент кольца $\Lambda^\bullet(M) \otimes \mathbb{C}[y, \bar{y}]$ степени n и m по спинорам y и $\bar{y}$ имеет вид

$$\omega_{n,m}(y, \bar{y}\,|x, \mathrm{d}x) = \omega^{\alpha(n),\dot{\alpha}(m)}(x, \mathrm{d}x)\, y_{\alpha(n)}\, \bar{y}_{\dot{\alpha}(m)}\,. \tag{1.101}$$

Введем оператор градуировки $G = |N - \bar{N}|$, где $N = y^\alpha \partial_\alpha$ и $\bar{N} = \bar{y}^{\dot{\alpha}} \bar{\partial}_{\dot{\alpha}}$, действующий на однородных элементах по формуле

$$G\, \omega_{n,m}(y, \bar{y}\,|x, \mathrm{d}x) = |n - m|\, \omega_{n,m}(y, \bar{y}\,|x, \mathrm{d}x)\,. \tag{1.102}$$

Относительно оператора G кольцо $\Lambda^\bullet(M) \otimes \mathbb{C}[y, \bar{y}]$ распадается на бозонную часть, в которой $G \in 2\mathbb{Z}$, и фермионную, где $G \in 2\mathbb{Z} + 1$. Это приводит к тому, что определение оператора σ_- зависит от выбора половины кольца форм для дальнейшего изучения.

В бозонном секторе минимальное значение градуировки $G = 0$, и оно отвечает симметричным мультиспинорам $\omega^{\alpha(s-1),\dot\alpha(s-1)}$. На плоскости $(N, \bar N)$ линия минимальной градуировки – диагональ верхнего правого квадранта. Учитывая определение G и развернутые уравнения (1.22), определим бозонный σ_- следующим образом

$$\sigma_-\omega_{N,\bar N}(y,\bar y) := i\,\bar y^{\dot\alpha} e^{\alpha}{}_{\dot\alpha}\partial_\alpha\;\omega_{N,\bar N}(y,\bar y), \qquad \text{при } N > \bar N\,, \tag{1.103a}$$
$$\sigma_-\omega_{N,\bar N}(y,\bar y) := i\,y^{\alpha} e_{\alpha}{}^{\dot\alpha}\bar\partial_{\dot\alpha}\;\omega_{N,\bar N}(y,\bar y), \qquad \text{при } N < \bar N\,, \tag{1.103b}$$
$$\sigma_-\omega_{N,\bar N}(y,\bar y) := 0 \qquad \text{при } N = \bar N\,, \tag{1.103c}$$

где

$$\partial_\alpha := \frac{\partial}{\partial y^\alpha}\,, \qquad \bar\partial_{\dot\alpha} := \frac{\partial}{\partial \bar y^{\dot\alpha}}\,, \tag{1.104}$$

а зависимость от x и $\mathrm{d}x$ в $\omega_{N,\bar N}(y,\bar y)$ неявно предполагается.

Очевидно, что такой σ_- является нильпотентным и понижающим градуировку на 2, т. е. он не выводит из бозонного сектора. Также ясно, что он действует внутри неприводимого $\mathfrak{so}(3,2)$-модуля, задаваемого набором мультиспиноров $\omega^{\alpha(s+k-1),\dot\alpha(s-k-1)}$, где $k \in \{-(s-1),\dots,(s-1)\}$. С точки зрения $(N,\bar N)$-плоскости оператор определен так, чтобы элементы над(под) диагональю стягивались к ней посредством применения σ_-.

В фермионном секторе минимальная градуировка $G = 1$ соответствует паре сопряженных мультиспиноров $\omega^{\alpha(s-\frac12),\dot\alpha(s-\frac32)}$ и $\bar\omega^{\alpha(s-\frac32),\dot\alpha(s-\frac12)}$. Следовательно, линия минимальной градуировки бозонного случая в плоскости $(N,\bar N)$ расщепляется в две линии $N - \bar N = \pm1$. Оператор σ_- должен быть определен таким образом, чтобы элементы верхней полуплоскости стягивались к линии $N - \bar N = 1$, а нижней к $N - \bar N = -1$, причем перескок с одной линии минимальной градуировки на другую запрещен. Предъявленным ограничениям удовлетворяет оператор, определенный по формулам

$$\sigma_-\omega_{N,\bar N}(y,\bar y) := i\,\bar y^{\dot\alpha} e^{\alpha}{}_{\dot\alpha}\partial_\alpha\;\omega_{N,\bar N}(y,\bar y), \qquad \text{при } N \geq \bar N + 3\,, \tag{1.105a}$$
$$\sigma_-\omega_{N,\bar N}(y,\bar y) := i\,y^{\alpha} e_{\alpha}{}^{\dot\alpha}\bar\partial_{\dot\alpha}\;\omega_{N,\bar N}(y,\bar y), \qquad \text{при } N \leq \bar N - 3\,. \tag{1.105b}$$

Следующий шаг состоит во введении скалярного произведения на элементах кольца $\Lambda^\bullet(M)\otimes\mathbb{C}[y,\bar y]$. Определим его по правилу

$$\langle y^\alpha|y^\beta\rangle = i\epsilon^{\alpha\beta}\,,\qquad \langle \bar y^{\dot\alpha}|\bar y^{\dot\beta}\rangle = i\bar\epsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\,,\qquad \langle e_{\alpha\dot\alpha}|e_{\beta\dot\beta}\rangle = \epsilon_{\alpha\beta}\bar\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\,, \tag{1.106}$$

где $e^{\alpha\dot\beta}$ – AdS_4-тетрада. Важно отметить, что заданное $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})\times\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$-инвариантное скалярное произведение не является положительно определенным. Однако, аналогично тензорному случаю, мы можем перейти к $\mathfrak{su}(2)\oplus\mathfrak{su}(2)$, являющейся компактной вещественной формой $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\oplus\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ с другим правилом сопряжения $\bar y^\alpha = y_\alpha$, $\bar y^{\dot\alpha} = y_{\dot\alpha}$, не повлияв на результаты когомологического анализа и добившись существования инвариантной положительно определенной билинейной формы.

По билинейной форме строим сопряженные к σ_- операторы. В бозонном случае

$$\sigma_-^\dagger\omega_{N,\bar N}(y,\bar y) := iy^\alpha D_\alpha{}^{\dot\alpha}\bar\partial_{\dot\alpha}\,\omega_{N,\bar N}(y,\bar y)\qquad \text{при } N>\bar N\,, \tag{1.107a}$$

$$\sigma_-^\dagger\omega_{N,\bar N}(y,\bar y) := i\bar y^{\dot\alpha} D^\alpha{}_{\dot\alpha}\partial_\alpha\,\omega_{N,\bar N}(y,\bar y)\qquad \text{при } N<\bar N\,, \tag{1.107b}$$

$$\sigma_-^\dagger\omega_{N,\bar N}(y,\bar y) := i\left(y^\alpha D_\alpha{}^{\dot\alpha}\bar\partial_{\dot\alpha} + \bar y^{\dot\alpha} D^\alpha{}_{\dot\alpha}\partial_\alpha\right)\omega_{N,\bar N}(y,\bar y)\qquad \text{при } N=\bar N\,, \tag{1.107c}$$

где

$$D_{\alpha\dot\alpha}e_{\beta\dot\beta} := \epsilon_{\alpha\beta}\bar\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\,. \tag{1.108}$$

В фермионном случае

$$\sigma_-^\dagger\omega_{N,\bar N}(y,\bar y) := i\,y^\alpha D_\alpha{}^{\dot\alpha}\bar\partial_{\dot\alpha}\omega_{N,\bar N}(y,\bar y),\qquad \text{при } N\geq\bar N+1\,, \tag{1.109a}$$

$$\sigma_-^\dagger\omega_{N,\bar N}(y,\bar y) := i\,\bar y^{\dot\alpha} D^\alpha{}_{\dot\alpha}\partial_\alpha\omega_{N,\bar N}(y,\bar y),\qquad \text{при } N\leq\bar N-1\,. \tag{1.109b}$$

Так определенные операторы $\sigma_-^\dagger$ увеличивают градуировку на 2 и автоматически действуют на неприводимых представлениях, чего не было в тензорном подходе разделов 1.3.2 и 1.3.3.

Оператор Лапласа

$$\Delta := \sigma_-\sigma_-^\dagger + \sigma_-^\dagger\sigma_- \tag{1.110}$$

по построению является самосопряженным относительно $\langle\,|\,\rangle$ и неотрицательно определенным в компактной версии алгебры пространственно-временных симметрий.

В бозонном случае Δ имеет вид

$$\Delta^{\text{bosonic}}_{N>\bar{N}+2} = N(\bar{N}+2) + y^\beta \partial_\alpha e^\alpha{}_{\dot\gamma} D_\beta{}^{\dot\gamma} + \bar{y}^{\dot\alpha} \bar\partial_{\dot\beta} e_{\gamma\dot\alpha} D^{\gamma\dot\beta}\,, \tag{1.111a}$$
$$\Delta^{\text{bosonic}}_{N<\bar{N}-2} = \bar{N}(N+2) + y^\alpha \partial_\beta e_{\alpha\dot\gamma} D^{\beta\dot\gamma} + \bar{y}^{\dot\alpha} \bar\partial_{\dot\beta} e_\gamma{}^{\dot\beta} D^\gamma{}_{\dot\alpha}\,, \tag{1.111b}$$
$$\Delta^{\text{bosonic}}_{N=\bar{N}+2} = \Delta_{N>\bar{N}+2} + \bar{y}^{\dot\alpha} \bar{y}^{\dot\beta} \partial_\alpha \partial_\beta e^\beta{}_{\dot\beta} D^\alpha{}_{\dot\alpha}\,, \tag{1.111c}$$
$$\Delta^{\text{bosonic}}_{N=\bar{N}-2} = \Delta_{N<\bar{N}-2} + y^\alpha y^\beta \bar\partial_{\dot\alpha} \bar\partial_{\dot\beta} e_\beta{}^{\dot\beta} D_\alpha{}^{\dot\alpha}\,, \tag{1.111č}$$
$$\Delta^{\text{bosonic}}_{N=\bar{N}} = \bar{y}^{\dot\alpha} \bar\partial_{\dot\beta} e_{\gamma\dot\alpha} D^{\gamma\dot\beta} + y^\alpha \partial_\beta e_{\alpha\dot\gamma} D^{\beta\dot\gamma} - \bar{y}^{\dot\alpha} y^\beta \partial_\alpha \bar\partial_{\dot\beta} e^\alpha{}_{\dot\alpha} D_\beta{}^{\dot\beta} - y^\alpha \bar{y}^{\dot\beta} \partial_\beta \bar\partial_{\dot\alpha} e_\alpha{}^{\dot\alpha} D^\beta{}_{\dot\beta}\,. \tag{1.111d}$$

Заметим, что действие фермионного оператора Лапласа аналогично действию бозонного оператора Лапласа (1.111), при этом градуировка сдвинута на единицу, $\Delta^{\text{fermionic}}_{G} = \Delta^{\text{bosonic}}_{G-1}$, за исключением линии низшей градуировки. Итого, в фермионном случае

$$\Delta^{\text{fermionic}}_{N>\bar{N}+3} = \Delta^{\text{bosonic}}_{N>\bar{N}+2} = N(\bar{N}+2) + y^\beta \partial_\alpha e^\alpha{}_{\dot\gamma} D_\beta{}^{\dot\gamma} + \bar{y}^{\dot\alpha} \bar\partial_{\dot\beta} e_{\gamma\dot\alpha} D^{\gamma\dot\beta}\,, \tag{1.112a}$$
$$\Delta^{\text{fermionic}}_{N=\bar{N}+3} = \Delta^{\text{bosonic}}_{N=\bar{N}+2} = \Delta_{N>\bar{N}+2} + \bar{y}^{\dot\alpha} \bar{y}^{\dot\beta} \partial_\alpha \partial_\beta e^\beta{}_{\dot\beta} D^\alpha{}_{\dot\alpha}\,, \tag{1.112b}$$
$$\Delta^{\text{fermionic}}_{N=\bar{N}+1} = \bar{y}^{\dot\alpha} \bar\partial_{\dot\beta} e_{\gamma\dot\alpha} D^{\gamma\dot\beta} - \bar{y}^{\dot\alpha} y^\beta \partial_\alpha \bar\partial_{\dot\beta} e^\alpha{}_{\dot\alpha} D_\beta{}^{\dot\beta}\,, \tag{1.112c}$$
$$\Delta^{\text{fermionic}}_{N=\bar{N}-1} = y^\alpha \partial_\beta e_{\alpha\dot\gamma} D^{\beta\dot\gamma} - y^\alpha \bar{y}^{\dot\beta} \partial_\beta \bar\partial_{\dot\alpha} e_\alpha{}^{\dot\alpha} D^\beta{}_{\dot\beta}\,. \tag{1.112č}$$

Связь бозонного и фермионного операторов Лапласа позволяет нам получить фермионные когомологии из бозонных, кроме подсектора $G = 1$, требующего отдельного рассмотрения. Следовательно, перейдем к задаче поиска $\ker \Delta^{\text{bosonic}}$.

1.4.2 Анализ бозонного сектора

Согласно (1.111), область определения оператора Δ разбивается на $|N - \bar{N}| > 2$, $|N - \bar{N}| = 2$, $|N - \bar{N}| = 0$. При этом мультиспинор из области $N - \bar{N} > 2$ имеет сопряженного партнера в области $\bar{N} - N > 2$, так что достаточно провести вычисления на неприводимых $\mathfrak{so}(3,1)$ модулях над диагональю. На диагонали $N = \bar{N}$ придется анализировать значения Δ на самосопряженных выражениях. Нетривиальность возникает при рассмотрении области $|N - \bar{N}| = 2$. Определим пространство p-форм с N голоморфными и $\bar{N}$ анти-голоморфными индексами $V^p_{(N,\bar{N})}$. Пусть $N = n + 1$ и $\bar{N} = n - 1$, тогда $N - \bar{N} = 2$. Последовательно применяя сперва σ_-, а затем $\sigma_-^\dagger$, получаем цепочку

$$V^p_{(n+1,n-1)} \xrightarrow{\sigma_-} V^{p+1}_{(n,n)} \xrightarrow{\sigma_-^\dagger} V^p_{(n-1,n+1)} \oplus V^p_{(n+1,n-1)} \,. \tag{1.113}$$

Аналогично,

$$V^p_{(n-1,n+1)} \xrightarrow{\sigma_-} V^{p+1}_{(n,n)} \xrightarrow{\sigma_-^\dagger} V^p_{(n-1,n+1)} \oplus V^p_{(n+1,n-1)} \,. \tag{1.114}$$

В итоге,

$$\Delta_{(n+1,n-1)} : V^p_{(n+1,n-1)} \longrightarrow V^p_{(n-1,n+1)} \oplus V^p_{(n+1,n-1)} \,, \tag{1.115}$$

$$\Delta_{(n-1,n+1)} : V^p_{(n-1,n+1)} \longrightarrow V^p_{(n-1,n+1)} \oplus V^p_{(n+1,n-1)} \,. \tag{1.116}$$

Таким образом, на линии $|N-\bar{N}| = 2$ оператор Лапласа действует в двумерных подпространствах $V^p_{(n+1,n-1)} \oplus V^p_{(n-1,n+1)}$, т. е. собственными векторами будут линейные комбинации сопряженных мультиспинорных выражений. Пусть $X \in V^p_{(n+1,n-1)}$, а $\bar{X} \in V^p_{(n-1,n+1)}$ – сопряженный вектор. Тогда

$$\Delta X = \Delta_{(n+1,n-1)} X = \alpha X + \beta \bar{X} \,, \tag{1.117}$$

$$\Delta \bar{X} = \Delta_{(n-1,n+1)} \bar{X} = \gamma X + \delta \bar{X} \tag{1.118}$$

для некоторых α, β, γ и δ. Из сопряженности векторов и самосопряженности Δ следует, что $\alpha = \bar{\delta}$ и $\beta = \bar{\gamma}$. Пусть $Y \in \ker \Delta$ и находится в двумерном подпространстве, порожденном $\{X, \bar{X}\}$,

$$Y = F(n) X + G(n) \bar{X} \in \ker \Delta \,. \tag{1.119}$$

Следовательно,

$$0 = \Delta Y = \left(\alpha F(n) + \bar{\beta} G(n)\right) X + \left(\beta F(n) + \bar{\alpha} G(n)\right) \bar{X} = 0 \,. \tag{1.120}$$

Из линейной независимости X и $\bar{X}$ получаем систему

$$\begin{bmatrix} \alpha & \bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F(n) \\ G(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \,, \tag{1.121}$$

которая имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда

$$\det \begin{bmatrix} \alpha & \bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{bmatrix} = |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 0 \,. \tag{1.122}$$

Отсюда заключаем, что

$$\alpha = \beta \cdot e^{i\chi}, \qquad \chi \in [0, 2\pi)\,. \tag{1.123}$$

Таким образом, если коэффициенты α и β равны по модулю, то существует нетривиальный p-коцикл в области $|N - \bar{N}| = 2$. В противном случае, когомологии тривиальны.

Разобравшись с действием Δ во всех областях плоскости $(N\,, \bar{N})$, перейдем к вычислению ядра оператора Лапласа для форм младших степеней, так как именно в них содержится вся динамическая информация о развернутой системе по теореме 1.2.1.

• $H^0(\sigma_-)$:

Так как во всех областях Δ (1.111) содержит дифференцирование по тетраде, то на ноль-формах он сводится к

$$\Delta_{N\geq\bar{N}+2}\Big|_{\text{0-формы}} = N(\bar{N}+2)\,, \qquad \Delta_{N\leq\bar{N}-2}\Big|_{\text{0-формы}} = \bar{N}(N+2)\,, \tag{1.124a}$$

$$\Delta_{N=\bar{N}}\Big|_{\text{0-формы}} = 0\,. \tag{1.124b}$$

Отсюда

$$H^0(\sigma_-) = \ker\Delta\Big|_{\text{0-формы}} = \Big\{\varepsilon(y,\bar{y}) = \varepsilon_{\alpha(n),\dot{\alpha}(n)}y^{\alpha(n)}\bar{y}^{\dot{\alpha}(n)}\ :\ n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\Big\}\,. \tag{1.125}$$

• $H^1(\sigma_-)$:

Разложение один-формы $\omega(y,\bar{y})$ общего положения по неприводимым представлениям $\mathfrak{so}(3,1)$ имеет вид

$$\begin{aligned}\omega(y,\bar{y}) = &\underbrace{\omega_{A\,\alpha(n+1),\dot{\alpha}(m+1)}\,e^{\alpha\dot{\alpha}}y^{\alpha(n)}y^{\dot{\alpha}(m)}}_{\omega_{A(n,m)}} + \underbrace{\omega_{C\,\alpha(n+1),\dot{\alpha}(m-1)}\,e^{\alpha}{}_{\dot{\alpha}}y^{\alpha(n)}\bar{y}^{\dot{\alpha}}\bar{y}^{\dot{\alpha}(m-1)}}_{\omega_{C(n,m)}} + \\ &+\underbrace{\omega_{D\,\alpha(n-1),\dot{\alpha}(m+1)}\,e_{\nu}{}^{\dot{\alpha}}y^{\nu}y^{\alpha(n-1)}\bar{y}^{\dot{\alpha}(m)}}_{\omega_{D(n,m)}} + \underbrace{\omega_{B\,\alpha(n-1),\dot{\alpha}(m-1)}\,e_{\nu\dot{\nu}}y^{\nu}y^{\alpha(n-1)}\bar{y}^{\dot{\nu}}\bar{y}^{\dot{\alpha}(m-1)}}_{\omega_{B(n,m)}}\,.\end{aligned} \tag{1.126}$$

Для каждой пары (n,m) формы ω_A, ω_B, ω_C и ω_D образуют базис в подпространстве один-форм $V^1_{(n,m)}$.

В области $N=\bar{N}$:

$$\Delta_{N=\bar{N}}\left(\omega_{A(n,n)}\right)=0\,, \tag{1.127}$$
$$\Delta_{N=\bar{N}}\left(\omega_{B(n,n)}\right)=0\,, \tag{1.128}$$
$$\Delta_{N=\bar{N}}\left(\omega_{C(n,n)}\right)=(n+1)^2\omega_{C(n,n)}\neq 0\,, \tag{1.129}$$
$$\Delta_{N=\bar{N}}\left(\omega_{D(n,n)}\right)=(n+1)^2\omega_{D(n,n)}\neq 0\,. \tag{1.130}$$

Следовательно,

$$H^1(\sigma_-)\supset\left\{e^{\alpha\dot{\alpha}}\,\partial_\alpha\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}\,\phi_1(y,\bar{y})+e_{\alpha\dot{\alpha}}\,y^\alpha\bar{y}^{\dot{\alpha}}\phi_2(y,\bar{y})\right\}, \tag{1.131}$$

где $\phi_{1,2}(y,\bar{y})$ лежат на диагонали $N=\bar{N}$, т. е.

$$\left(y^\alpha\partial_\alpha-\bar{y}^{\dot{\alpha}}\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}\right)\phi_{1,2}(y,\bar{y})=0\,. \tag{1.132}$$

В области $N-\bar{N}>2$:

$$\Delta_{N>\bar{N}+2}\left(\omega_{A(n,m)}\right)=n(m+1)\omega_{A(n,m)}\neq 0\,, \tag{1.133}$$
$$\Delta_{N>\bar{N}+2}\left(\omega_{B(n,m)}\right)=(nm+2n+m+2)\omega_{B(n,m)}\neq 0\,, \tag{1.134}$$
$$\Delta_{N>\bar{N}+2}\left(\omega_{C(n,m)}\right)=(nm+n+m+1)\omega_{C(n,m)}\neq 0\,, \tag{1.135}$$
$$\Delta_{N>\bar{N}+2}\left(\omega_{D(n,m)}\right)=(nm+2n+1)\omega_{D(n,m)}\neq 0\,. \tag{1.136}$$

Вкладов в ядро нет, так как $n-m>2$ и $n,m\geq 0$. Аналогичные выводы справедливы для области $\bar{N}-N>2$.

В области $|N-\bar{N}|=2$:

$$\Delta_{N=\bar{N}+2}\left(\omega_{A(n,n-2)}\right)=n(n-1)\omega_{A(n,n-2)}\neq 0\,, \tag{1.137}$$
$$\Delta_{N=\bar{N}+2}\left(\omega_{B(n,n-2)}\right)=n(n+1)\omega_{B(n,n-2)}\neq 0\,, \tag{1.138}$$
$$\Delta_{N=\bar{N}+2}\left(\omega_{C(n,n-2)}\right)=(n^2-1)\omega_{C(n,n-2)}\neq 0\,, \tag{1.139}$$
$$\Delta_{N=\bar{N}+2}\left(\omega_{D(n,n-2)}\right)=\underbrace{(n^2+1)}_{\alpha}\omega_{D(n,n-2)}-\underbrace{(n^2-1)}_{\beta}\omega_{C(n-2,n)}\,. \tag{1.140}$$

Так как $|\alpha|\neq|\beta|$, то вкладов в ядро нет.

• $H^2(\sigma_-)$:

Для разложения общей два-формы на неприводимые $\mathfrak{so}(3,1)$ компоненты определим базисные два-формы

$$e^{\nu\dot{\nu}}\wedge e^{\lambda\dot{\lambda}}=\frac{1}{2}H^{\nu\lambda}\bar{\epsilon}^{\dot{\nu}\dot{\lambda}}+\frac{1}{2}\bar{H}^{\dot{\nu}\dot{\lambda}}\epsilon^{\nu\lambda}\,, \tag{1.141}$$

где

$$H^{\nu\lambda} = H^{(\nu\lambda)} := e^{\nu}{}_{\dot\gamma} e^{\lambda\dot\gamma}\,, \qquad \bar H^{\dot\nu\dot\lambda} = \bar H^{(\dot\nu\dot\lambda)} := e_{\gamma}{}^{\dot\nu} e^{\gamma\dot\lambda}\,. \tag{1.142}$$

С их помощью разложение два-формы $R(y,\bar y)$ задается формулой

$$\begin{aligned} R(y,\bar y) = &\underbrace{R^{A}_{\alpha(n+2),\dot\alpha(m)}\ H^{\alpha\alpha} y^{\alpha(n)} \bar y^{\dot\alpha(m)}}_{R_{A(n,m)}} + \underbrace{R^{\bar A}_{\alpha(n),\dot\alpha(m+2)}\ \bar H^{\dot\alpha\dot\alpha} y^{\alpha(n)} \bar y^{\dot\alpha(m)}}_{R_{\bar A(n,m)}} + \\ &+ \underbrace{R^{B}_{\alpha(n-2),\dot\alpha(m)}\ H_{\nu\nu} y^{\nu} y^{\nu} y^{\alpha(n-2)} \bar y^{\dot\alpha(m)}}_{R_{B(n,m)}} + \underbrace{R^{\bar B}_{\alpha(n),\dot\alpha(m-2)}\ \bar H_{\dot\nu\dot\nu} y^{\alpha(n)} \bar y^{\dot\nu} \bar y^{\dot\nu} \bar y^{\dot\alpha(m-2)}}_{R_{\bar B(n,m)}} + \\ &+ \underbrace{R^{C}_{\alpha(n),\dot\alpha(m)}\ H_{\nu}{}^{\alpha} y^{\nu} y^{\alpha(n-1)} \bar y^{\dot\alpha(m)}}_{R_{C(n,m)}} + \underbrace{R^{\bar C}_{\alpha(n),\dot\alpha(m)}\ \bar H_{\dot\nu}{}^{\dot\alpha} y^{\alpha(n)} \bar y^{\dot\nu} \bar y^{\dot\alpha(m-1)}}_{R_{\bar C(n,m)}}\,. \end{aligned} \tag{1.143}$$

Аналогично случаю один-форм, R_A, R_B, R_C и сопряженные к ним образуют базис в подпространстве два-форм $V^2_{(n,m)}$.

В области $N - \bar N > 2$:

$$\Delta_{N>\bar N+2} R_{A(n,m)} = m(n+1) R_{A(n,m)}\,, \tag{1.144}$$
$$\Delta_{N>\bar N+2} R_{B(n,m)} = (nm+2n+m+2)\, R_{B(n,m)} \neq 0\,, \tag{1.145}$$
$$\Delta_{N>\bar N+2} R_{C(n,m)} = (nm+n+m+2) R_{C(n,m)} \neq 0\,, \tag{1.146}$$
$$\Delta_{N>\bar N+2} R_{\bar A(n,m)} = n(m+1) R_{\bar A(n,m)} \neq 0\,, \tag{1.147}$$
$$\Delta_{N>\bar N+2} R_{\bar B(n,m)} = (nm+n+2m+2) R_{\bar B(n,m)} \neq 0\,, \tag{1.148}$$
$$\Delta_{N>\bar N+2} R_{\bar C(n,m)} = (nm+n+m+2) R_{\bar C(n,m)} \neq 0\,. \tag{1.149}$$

В результате ядру принадлежит

$$H^2(\sigma_-) \supset \{R_{A(n,0)} = R^{A}_{\alpha(n+2)}\ H^{\alpha\alpha} y^{\alpha(n)} \Leftrightarrow W(y,0) = H^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu C(y,0)\}\,, \tag{1.150}$$

где $C(y,0)$ – полином степени > 4. Аналогично, для области $\bar N - N > 2$

$$H^2(\sigma_-) \supset \{R_{\bar A(0,n)} = R^{\bar A}_{\dot\alpha(n+2)}\ \bar H^{\dot\alpha\dot\alpha} \bar y^{\dot\alpha(n)} \Leftrightarrow W(0,\bar y) = \bar H^{\dot\mu\dot\nu}\bar\partial_{\dot\mu}\bar\partial_{\dot\nu} C(0,\bar y)\}\,. \tag{1.151}$$

На диагонали $N = \bar N$:

$$\Delta_{N=\bar N} R_{A(n,n)} = n(n+1) R_{A(n,n)}\,, \tag{1.152}$$
$$\Delta_{N=\bar N} R_{B(n,n)} = (n^2+3n+2) R_{B(n,n)} \neq 0\,, \tag{1.153}$$
$$\Delta_{N=\bar N} R_{C(n,n)} = (n^2+2n+2) R_{C(n,n)} - n(n+2) R_{\bar C(n,n)}\,. \tag{1.154}$$

Из полученных выражений видно, что только $R_{A(n,n)}$ лежит в ядре при $N = \bar{N} = 0$. Тем самым мы продолжаем формулу (1.150) на квадратичный по y полином $C(y,0)$, так как $R_{A(0,0)} = R^A_{\alpha(2)}\ H^{\alpha\alpha} = H^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\left(\frac{1}{2}R^A_{\alpha(2)}y^{\alpha(2)}\right)$. Анализ анти-голоморфных два-форм аналогичен.

В области $|N-\bar{N}| = 2$ ядро состоит из линейных комбинаций пар сопряженных векторов, причем ясно, что голоморфная форма под диагональю смешивается с анти-голоморфной над ней и наоборот. Рассмотрим действие Δ на голоморфные и анти-голоморфные два-формы над диагональю. Голоморфные формы дают

$$\Delta_{N=\bar{N}+2}R_{A(n,n-2)} = (n-2)(n+1)R_{A(n,n-2)}\,, \tag{1.155}$$

$$\Delta_{N=\bar{N}+2}R_{B(n,n-2)} = \underbrace{n(n+1)}_{\alpha}R_{B(n,n-2)}\underbrace{-n(n+1)}_{\beta}R_{\bar{B}(n-2,n)}\,, \tag{1.156}$$

$$\Delta_{N=\bar{N}+2}R_{C(n,n-2)} = n^2R_{C(n,n-2)}\,. \tag{1.157}$$

Во-первых, форма $R_{A(2,0)}$ принадлежит $\ker\Delta$ и продлевает (1.150) на полиномы степени 4. Во-вторых, для формы $R_{B(n,n-2)}$ возникает линейная комбинация двух сопряженных векторов, причем $|\alpha| = |\beta|$. Таким образом, имеется нетривиальный 2-коцикл

$$\begin{gathered}\mathcal{E}_{tr} = R_{B(n,n-2)} + R_{\bar{B}(n-2,n)} = \\ = \mathcal{E}^{tr}_{\alpha(n-2),\dot{\alpha}(n-2)}\left(H_{\alpha\alpha}y^{\alpha(2)}y^{\alpha(n-2)}\bar{y}^{\dot{\alpha}(n-2)} + \bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\alpha}}y^{\alpha(n-2)}\bar{y}^{\dot{\alpha}(2)}\bar{y}^{\dot{\alpha}(n-2)}\right).\end{gathered} \tag{1.158}$$

Вычисления с анти-голоморфными два-формами приводят к

$$\Delta_{N=\bar{N}+2}R_{\bar{A}(n,n-2)} = \underbrace{n(n-1)}_{\alpha}R_{\bar{A}(n,n-2)}\underbrace{-n(n-1)}_{\beta}R_{A(n-2,n)}\,, \tag{1.159}$$

$$\Delta_{N=\bar{N}+2}R_{\bar{B}(n,n-2)} = (n^2+n-2)R_{\bar{B}(n,n-2)}\,, \tag{1.160}$$

$$\Delta_{N=\bar{N}+2}R_{\bar{C}(n,n-2)} = n^2R_{\bar{C}(n,n-2)}\,. \tag{1.161}$$

Для формы $R_{\bar{A}(n,n-2)}$ образуется линейная комбинация сопряженных векторов с равными по модулю коэффициентами. Следовательно, имеется коцикл

$$\begin{gathered}\mathcal{E} = R_{A(n-2,n)} + R_{\bar{A}(n,n-2)} = \\ = \mathcal{E}_{\alpha(n),\dot{\alpha}(n)}\left(H^{\alpha\alpha}y^{\alpha(n-2)}\bar{y}^{\dot{\alpha}(n)} + \bar{H}^{\dot{\alpha}\dot{\alpha}}y^{\alpha(n)}\bar{y}^{\dot{\alpha}(n-2)}\right).\end{gathered} \tag{1.162}$$

В итоге получаем следующие бозонные когомологии.

$$H^0(\sigma_-) = \Big\{\varepsilon(y,\bar{y}) = \varepsilon_{\alpha(n),\dot{\alpha}(n)} y^{\alpha(n)} \bar{y}^{\dot{\alpha}(n)} \ : \ n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\Big\} \, . \tag{1.163}$$

$$\begin{aligned} H^1(\sigma_-) = \Big\{\phi(y,\bar{y}) = e^{\alpha\dot{\alpha}}\, \partial_\alpha \bar{\partial}_{\dot{\alpha}}\, \phi_1(y,\bar{y}) \, \oplus \, \phi^{tr}(y,\bar{y}) = e_{\alpha\dot{\alpha}}\, y^\alpha \bar{y}^{\dot{\alpha}} \phi^{tr}(y,\bar{y}) : \\ (N-\bar{N})\phi_i = 0\Big\} \, . \end{aligned} \tag{1.164}$$

$$\begin{aligned} H^2(\sigma_-) = \Big\{W(y,\bar{y}) = H^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu C(y,0) + \bar{H}^{\dot{\mu}\dot{\nu}}\bar{\partial}_{\dot{\mu}}\bar{\partial}_{\dot{\nu}} C(0,\bar{y}) \, , \\ \mathcal{E}(y,\bar{y}) = \Big(H^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + \bar{H}^{\dot{\mu}\dot{\nu}}\bar{\partial}_{\dot{\mu}}\bar{\partial}_{\dot{\nu}}\Big)\mathcal{E}_1(y,\bar{y}) \, , \\ \mathcal{E}_{tr}(y,\bar{y}) = \Big(H^{\mu\nu}y_\mu y_\nu + \bar{H}^{\dot{\mu}\dot{\nu}}\bar{y}_{\dot{\mu}}\bar{y}_{\dot{\nu}}\Big)\mathcal{E}_2(y,\bar{y}) \ : \\ (N-\bar{N})\mathcal{E}_i = 0\Big\} \, . \end{aligned} \tag{1.165}$$

Сравнение с результатами раздела 1.3.3 показывает, что полученные представители когомологий имеют ту же диаграммную структуру, что и в тензорном подходе. Действительно, в этом можно убедиться, пользуясь правилом сопоставления $\mathfrak{so}(3,1)$ двухрядных тензоров и мультиспиноров [103]

$$T^{a(k),b(m)} \quad \leftrightarrow \quad T^{\alpha(k+m),\dot{\alpha}(k-m)} + \bar{T}^{\alpha(k-m),\dot{\alpha}(k+m)} \, , \tag{1.166}$$

$$T^{a(k)} \quad \leftrightarrow \quad T^{\alpha(k),\dot{\alpha}(k)} \, . \tag{1.167}$$

Ноль-формы $\varepsilon(y,\bar{y})$ отвечают параметрам дифференциальных калибровочных преобразований, один-формы $\phi(y,\bar{y})$ и $\phi^{tr}(y,\bar{y})$ – бесследовая часть поля Фронсдала и его след, коцикл $W(y,\bar{y})$ сопоставляется с обобщенным тензором Вейля, а формы $\mathcal{E}(y,\bar{y})$ и $\mathcal{E}_{tr}(y,\bar{y})$ относятся к бесследовой части уравнений Фронсдала и их следу.

1.4.3 Фермионный сектор

До сих пор мы рассматривали бозонный случай с четными значениями градуировки $G = |N-\bar{N}|$. Чтобы распространить результаты бозонных $H^p(\sigma_-)$ на фермионные поля, рассмотрим связь бозонных и фермионных Δ (1.112). Как можно заметить, выражения для оператора Лапласа $\Delta^{\text{fermionic}}_{N\geq\bar{N}+3}$ полностью совпадают с $\Delta^{\text{bosonic}}_{N\geq\bar{N}+2}$. Для минимальной градуировки видим, что формально

$\Delta^{\text{fermionic}}_{N=\bar{N}-1} + \Delta^{\text{fermionic}}_{N=\bar{N}+1} = \Delta^{\text{bosonic}}_{N=\bar{N}}$. Таким образом, все полученные ранее результаты полностью переносятся на фермионный случай, а также появляются дополнительные коциклы в градуировке $G = 1$.

$$\begin{aligned} H^0(\sigma_-) = \Big\{ & \varepsilon(y,\bar{y}) = \varepsilon_{\alpha(n+1),\dot{\alpha}(n)}\, y^{\alpha(n+1)} \bar{y}^{\dot{\alpha}(n)}\,, \\ & \bar{\varepsilon}(y,\bar{y}) = \bar{\varepsilon}_{\alpha(n),\dot{\alpha}(n+1)}\, y^{\alpha(n)} \bar{y}^{\dot{\alpha}(n+1)} \Big\}\,. \end{aligned} \tag{1.168}$$

$$\begin{aligned} H^1(\sigma_-) = \Big\{ \psi(y,\bar{y}) &= \psi_{\mu(n+2),\dot{\mu}(n+1)}\, e^{\mu\dot{\mu}}\, y^{\mu(n+1)} \bar{y}^{\dot{\mu}(n)}\,, \\ \bar{\psi}(y,\bar{y}) &= \bar{\psi}_{\mu(n+1),\dot{\mu}(n+2)}\, e^{\mu\dot{\mu}}\, y^{\mu(n)} \bar{y}^{\dot{\mu}(n+1)}\,, \\ \psi^{\text{tr}}(y,\bar{y}) &= \psi^{\text{tr}}_{\mu(n),\dot{\mu}(n-1)}\, e_{\nu\dot{\nu}}\, y^{\nu} y^{\mu(n)} \bar{y}^{\dot{\nu}} \bar{y}^{\dot{\mu}(n-1)}\,, \\ \bar{\psi}^{\text{tr}}(y,\bar{y}) &= \bar{\psi}^{\text{tr}}_{\mu(n-1),\dot{\mu}(n)}\, e_{\nu\dot{\nu}}\, y^{\nu} y^{\mu(n-1)} \bar{y}^{\dot{\nu}} \bar{y}^{\dot{\mu}(n)}\,, \\ \psi^{ext}(y,\bar{y}) &= \psi^{ext}_{\mu(n),\dot{\mu}(n+1)}\, e_{\nu}{}^{\dot{\mu}}\, y^{\nu} y^{\mu(n)} \bar{y}^{\dot{\mu}(n)}\,, \\ \bar{\psi}^{ext}(y,\bar{y}) &= \bar{\psi}^{ext}_{\mu(n+1),\dot{\mu}(n)}\, e^{\mu}{}_{\dot{\nu}}\, y^{\mu(n)} \bar{y}^{\dot{\nu}} \bar{y}^{\dot{\mu}(n)} \Big\}\,. \end{aligned} \tag{1.169}$$

$$\begin{gathered} H^2(\sigma_-) = \Big\{ W^{\text{ferm}}(y,\bar{y}) = H^{\mu\nu}\, \partial_\mu \partial_\nu C(y,0) + \bar{H}^{\dot{\mu}\dot{\nu}}\, \bar{\partial}_{\dot{\mu}} \bar{\partial}_{\dot{\nu}} C(0,\bar{y})\,, \\ \mathcal{E}^{\text{ferm}}_A(y,\bar{y}) = H^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \mathcal{E}^{\text{near-diag}}_1(y,\bar{y}) \,\oplus\, \bar{\mathcal{E}}^{\text{ferm}}_A(y,\bar{y}) = \bar{H}^{\dot{\mu}\dot{\nu}} \bar{\partial}_{\dot{\mu}} \bar{\partial}_{\dot{\nu}} \bar{\mathcal{E}}^{\text{near-diag}}_1(y,\bar{y})\,, \\ \mathcal{E}^{\text{ferm}}_B(y,\bar{y}) = \bar{H}^{\dot{\mu}\dot{\nu}} \bar{y}_{\dot{\mu}} \bar{y}_{\dot{\nu}} \mathcal{E}^{\text{near-diag}}_2(y,\bar{y}) \,\oplus\, \bar{\mathcal{E}}^{\text{ferm}}_B(y,\bar{y}) = H^{\mu\nu} y_\mu y_\nu \bar{\mathcal{E}}^{\text{near-diag}}_2(y,\bar{y})\,, \\ \mathcal{E}^{\text{ferm}}_C(y,\bar{y}) = H^{\mu\nu} y_\mu \partial_\nu \mathcal{E}^{\text{near-diag}}_3(y,\bar{y}) \,\oplus\, \bar{\mathcal{E}}^{\text{ferm}}_C(y,\bar{y}) = \bar{H}^{\dot{\mu}\dot{\nu}} \bar{y}_{\dot{\mu}} \bar{\partial}_{\dot{\nu}} \bar{\mathcal{E}}^{\text{near-diag}}_3(y,\bar{y}) \;: \\ (N-\bar{N}) \mathcal{E}^{\text{near-diag}}_i(y,\bar{y}) = \mathcal{E}^{\text{near-diag}}_i(y,\bar{y})\,, \\ (N-\bar{N}) \bar{\mathcal{E}}^{\text{near-diag}}_i(y,\bar{y}) = -\bar{\mathcal{E}}^{\text{near-diag}}_i(y,\bar{y}) \Big\}\,. \end{gathered} \tag{1.170}$$

Из представленных фермионных $H(\sigma_-)$ видим, что полученные ранее выражения для полей $\phi(y,\bar{y})$ и $\phi^{tr}(y,\bar{y})$, а также уравнений $\mathcal{E}(y,\bar{y})$ и $\mathcal{E}_{tr}(y,\bar{y})$ расщепились на пары сопряженных друг другу выражений. Это связано с тем, что в бозонном случае элементы областей $0 \le N - \bar{N} \le 2$ и $-2 \le N - \bar{N} \le 0$ связаны друг с другом с помощью операторов σ_- и $\sigma_-^\dagger$. В случае фермионов отображения элементов линий $N - \bar{N} = \pm 1$ друг в друга нет, т. е. области $N - \bar{N} \ge 1$ и $N - \bar{N} \le -1$ отделены. Более того, разделение областей приводит к появлению дополнительного примарного поля ψ^{ext} и дополнительного уравнения $\mathcal{E}^{\text{ferm}}_C$, что согласуется с результатами Фронсдала-Фанга [33].

1.5 Выводы

В этой главе было рассмотрено динамическое содержание развернутых систем для симметричных безмассовых полей в пространствах $Mink_d$ и AdS_4. Впервые эти системы были представлены в работах [88; 89], где описание полей в AdS_4 велось на языке мультиспиноров, а тензорный формализм применялся для случая пространства произвольной размерности. В этих работах было выдвинуто утверждение об эквивалентности представленных развернутых систем описанию симметричных безмассовых полей спина s, предложенному Фронсдалом в работах [32; 116]. Это утверждение, известное в литературе как Первая теорема о массовой оболочке, было доказано в статье [97] с помощью так называемого Parent-формализма. Однако доказательство Первой теоремы о массовой оболочке не требует привлечения внешних структур и может быть проведено в рамках развернутого формализма. В соответствии с наблюдениями, сделанными в работах [54; 84], содержание развернутых уравнений устанавливается посредством выделения нильпотентного оператора σ_- и анализа его когомологий. Для вычисления когомологий используется обобщение метода Ходжа [96], применявшееся ранее для нахождения динамического содержания иных развернутых систем [86; 93—95]. В результате получены явные выражения для коциклов, отвечающих динамическим полям, калибровочно-инвариантным дифференциальным операторам, параметрам калибровочных преобразований и тождествам Бианки. Тем самым дано альтернативное доказательство эквивалентности содержания развернутых систем [88; 89] и теории Фронсдала [32; 116]. Также в рамках тензорного описания полей высших спинов в пространстве $Mink_d$ найдены старшие когомологии, соответствующие тождествам Бианки высших порядков, а в спинорной системе рассмотрен случай полей полуцелого спина и показана эквивалентность описанию Фронсдала-Фанга [33].

Результаты главы опубликованы в работе [98]. Основные результаты, описанные в главе, следующие:

1. Было получено содержание развернутой системы полей один-форм, принимающих значения в тензорах, отвечающих не более чем двухрядным $\mathfrak{gl}(d)$ диаграммам Юнга, с помощью обобщения теории Ходжа. Тем самым предъявлен вывод σ_--когомологий для $\mathfrak{gl}(d)$-полей, альтернативный использованному в работе [90].

2. В рамках d-мерной развернутой системы для безмассовых полей в пространстве Минковского произведено вычисление всех когомологий $H^p(\sigma_-)$ с применением обобщения теории Ходжа. Получены явные тензорные выражения для представителей классов когомологий, а также соответствующие им диаграммы Юнга. Выражения для представителей младших когомологий совпадают с предложенными в работе [90]. Проделанные вычисления на основе оператора Δ дают другой путь извлечения σ_--когомологий и доказательства Первой теоремы о массовой оболочке по сравнению с методом, использованным в работе [91].

3. Для системы в пространстве AdS_4 в спинорном формализме найдены младшие когомологии $H^{0,1,2}(\sigma_-)$ для бозонных и фермионных подсистем с помощью обобщения теории Ходжа. Получены явные мультиспинорные выражения для примарных полей, калибровочно-инвариантных дифференциальных операторов и калибровочных параметров. Доказана эквивалентность развернутой системы [88] подходу Фронсдала(-Фанга) [33; 116].

Глава 2

Кокстеровское расширение теории высших спинов: модули и их свойства

Глава основана на статье [100]. В разделе 2.1 представлена формулировка кокстеровского расширения теории высших спинов на основе [77]. Раздел 2.2 посвящен рассмотрению типов модулей, возникающих в рамках расширения с помощью конечной группы Кокстера $\mathcal{C}$. В нем сформулирован и доказан критерий распутываемости, делящий $\mathcal{C}$-модули на два различных класса. Далее в рамках B_2-расширения в разделе 2.3 проводится детальный анализ имеющихся модулей на наличие унитарных комплексно-эквивалентных модулей старшего или младшего веса, устанавливаются условия редукции до унитарных подмодулей. Выводы по главе приведены в разделе 2.4.

2.1 Кокстеровское расширение теории ВС

В этом разделе рассмотрим формулировку четырехмерной теории КВС, построенной в работе [77].

Группой Кокстера $\mathcal{C}$ называется группа отражений относительно системы гиперплоскостей, у которой каждый двугранный угол равен π/k для некоторых целых k [117]. Конечные группы Кокстера соответствуют отражениям в евклидовом пространстве V, определяемым системой корневых векторов v_a. Будем говорить, что группа Кокстера $\mathcal{C}$ имеет ранг p, если соответствующее ей пространство V имеет размерность p. Элементарное отражение относительно гиперплоскости с нормалью v_a дается формулой

$$R_{v_a}x^i = x^i - 2\frac{(v_a, x)}{(v_a, v_a)}v_a^i\,, \quad R_{v_a}^2 = Id\,. \tag{2.1}$$

Введем набор осцилляторов q_α^n, идемпотентов I_n и операторов Клейна $\hat{K}_v$ для каждого корневого вектора v. Индексы пробегают значения $\alpha \in \{1, 2\}, n \in$

$\{1,...,p\}$. Потребуем, чтобы $(q^n_\alpha, I_n, \hat{K}_v)$ удовлетворяли соотношениям

$$I_nI_m = I_mI_n\,, \quad I_nI_n = I_n\,, \quad I_nq^n_\alpha = q^n_\alpha I_n = q^n_\alpha\,, \quad I_mq^n_\alpha = q^n_\alpha I_m\,, \tag{2.2}$$

где суммирование по латинским индексам не ведется, и

$$\hat{K}_v q^n_\alpha = R_v{}^n{}_m q^m_\alpha \hat{K}_v\,, \quad \hat{K}_v\hat{K}_u = \hat{K}_u\hat{K}_{R_u(v)} = \hat{K}_{R_v(u)}\hat{K}_v\,, \tag{2.3a}$$

$$\hat{K}_v\hat{K}_v = \prod I_{i_1(v)}...I_{i_k(v)}\,, \quad \hat{K}_v = \hat{K}_{-v}\,, \tag{2.3b}$$

$$[q^n_\alpha, q^m_\beta] = -i\varepsilon_{\alpha\beta}\left(2\delta^{nm}I_n + \sum_{v\in\mathcal{R}}\nu(v)\frac{v^nv^m}{(v,v)}\hat{K}_v\right), \tag{2.4}$$

$$I_n\hat{K}_v = \hat{K}_vI_n\,, \forall n\in\{1,...,p\}\,, \tag{2.5}$$

$$I_n\hat{K}_v = \hat{K}_vI_n = \hat{K}_v\,, \forall n\in\{i_1(v),...,i_k(v)\}\,, \tag{2.6}$$

где индексы $i_1(v),...,i_k(v)$ нумеруют базисные векторы e_n пространства V, которые нетривиально преобразуются под действием отражения R_v, $\mathcal{R}$ – набор орбит группы $\mathcal{C}$ на множестве корневых векторов, и $\nu(v)$ является произвольной функцией орбит.

Соотношения (2.2)–(2.6) определяют обрамленную алгебру Чередника. Эта конструкция отличается от стандартной (рациональной) алгебры Чередника [80; 118; 119] наличием идемпотентов, которые расщепляют единичный оператор и индуцируют фильтрацию на алгебре. Отметим, что операторы Клейна реализуют матричное представление группы Кокстера на осцилляторах q^n_α, причем сами $\hat{K}_v$ не образуют группу из-за наличия идемпотентов I_n. Факторизация по идеалу, порожденному набором $(I_n - 1)$, восстанавливает стандартную конструкцию Чередника, в которой операторы Клейна замыкаются в группу. Алгебра Чередника является прямым обобщением алгебры деформированных осцилляторов ($\mathcal{C}\simeq\mathbb{Z}_2$), лежащей в основе нелинейной системы стандартной теории высших спинов.

Непосредственная проверка показывает, что двойной коммутатор q^n_α удовлетворяет тождеству Якоби. Действительно, двойной коммутатор осцилляторов $q^\alpha_n, q^\beta_m, q^\gamma_k$ пропорционален $v_nv_mv_k$ и содержит антисимметризацию трех двухкомпонентных индексов α,β,γ, которая тождественно равна нулю.

Важным свойством построенной алгебры является существование генераторов

$$t_{\alpha\beta} = \frac{i}{4}\sum_{n=1}^{p}\{q^n_\alpha, q^n_\beta\}I_n\,, \tag{2.7}$$

удовлетворяющих коммутационным соотношениям алгебры $\mathfrak{sp}(2)$

$$[t_{\alpha\beta}, t_{\gamma\delta}] = \epsilon_{\beta\gamma} t_{\alpha\delta} + \epsilon_{\beta\delta} t_{\alpha\gamma} + \epsilon_{\alpha\gamma} t_{\beta\delta} + \epsilon_{\alpha\delta} t_{\beta\gamma}\,, \tag{2.8}$$

и реализующих представление $\mathfrak{sp}(2)$ на осцилляторах q^n_α

$$[t_{\alpha\beta}, q^n_\gamma] = \epsilon_{\beta\gamma} q^n_\alpha + \epsilon_{\alpha\gamma} q^n_\beta\,. \tag{2.9}$$

Аналогично стандартной теории высших спинов введем мастер-поля W, S и B, зависящие от Y^n_A, Z^n_A, I_n, $\mathrm{d}Z^A_n$ и $\hat{K}_v$, где $A \in \{1, ..., 4\}$ и $n \in \{1, ..., p\}$. Поле $W(Y, Z, I; \hat{K}|x)$ является $\mathrm{d}x$ один-формой, $S(Y, Z, I; \hat{K}|x)$ – $\mathrm{d}Z$ один-формой и $B(Y, Z, I; \hat{K}|x)$ – ноль-формой.

На осцилляторах Y^n_A, Z^n_A определим звездочное произведение

$$\begin{aligned}(f * g)(Y, Z, I) = \frac{1}{(2\pi)^{4p}} \int d^{4p}S d^{4p}T \exp\left(iS^A_n T^B_m C_{AB}\delta^{nm}\right)\times \\ \times f(Y_i + I_i S_i, Z_i + I_i S_i, I) g(Y + T, Z - T, I)\,,\end{aligned} \tag{2.10}$$

где

$$C_{AB} = \begin{pmatrix} \epsilon_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & \bar{\epsilon}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

Согласно (2.2) потребуем, чтобы

$$\begin{aligned} &Y^m_A * I_n = I_n * Y^m_A\,, \quad Y^n_A * I_n = I_n * Y^n_A = Y^n_A\,, \quad Z^m_A * I_n = I_n * Z^m_A\,, \\ &Z^n_A * I_n = I_n * Z^n_A = Z^n_A\,, \quad I_n * I_n = I_n\,, \quad I_n * I_m = I_m * I_n\,, \end{aligned} \tag{2.12}$$

где суммирование по повторяющимся латинским индексам не предполагается.

Несложно проверить, что внутренние операторы Клейна

$$\varkappa_v = \exp\left(i\frac{v^n v^m}{(v,v)} z_{\alpha n} y^\alpha_m\right), \quad \bar{\varkappa}_v = \exp\left(i\frac{v^n v^m}{(v,v)} \bar{z}_{\dot{\alpha} n} \bar{y}^{\dot{\alpha}}_m\right) \tag{2.13}$$

реализуют матричное представление группы $\mathcal{C}$ посредством произведения (2.10)

$$\varkappa_v * q^n_\alpha = R_v{}^n{}_m q^m_\alpha * \varkappa_v\,, \quad q^n_\alpha = y^n_\alpha, z^n_\alpha \tag{2.14}$$

с аналогичными соотношениями на $\bar{q}^n_{\dot{\alpha}}$.

Нелинейные уравнения для мастер-полей в КВС теории с группой Кокстера $\mathcal{C}$ имеют вид [77]

$$\mathrm{d}_x W + W * W = 0\,, \tag{2.15}$$

$$\mathrm{d}_x B + W * B - B * W = 0\,, \tag{2.16}$$

$$\mathrm{d}_x S + W * S + S * W = 0\,, \tag{2.17}$$

$$S * B = B * S\,, \tag{2.18}$$

$$S * S = i\left(\mathrm{d}Z^{An}\mathrm{d}Z_{An} + \sum_i \sum_{v\in\mathcal{R}_i} \left[\eta_i B \frac{v^n v^m}{(v,v)} \mathrm{d}z_n^\alpha \mathrm{d}z_{\alpha m} * \varkappa_v \hat{k}_v + \text{к.с.}\right]\right), \tag{2.19}$$

где $\varkappa_v \hat{k}_v$ действует на $\mathrm{d}z_n^\alpha$ по формуле

$$\varkappa_v \hat{k}_v * \mathrm{d}z_n^\alpha = R_{vn}{}^m \mathrm{d}z_m^\alpha * \varkappa_v \hat{k}_v\,, \tag{2.20}$$

и η_i – произвольная константа, ассоциированная с орбитой $\mathcal{R}_i$.

По аналогии со стандартной теорией совместность системы уравнений (2.15)–(2.19) следует из центральности элементов

$$\hat{\gamma}_i = \sum_{v\in\mathcal{R}_i} \frac{v^n v^m}{(v,v)} \mathrm{d}z_n^\alpha \mathrm{d}z_{\alpha m} * \varkappa_v \hat{k}_v\,, \quad \hat{\bar{\gamma}}_i = \sum_{v\in\mathcal{R}_i} \frac{v^n v^m}{(v,v)} \mathrm{d}\bar{z}_n^{\dot\alpha} \mathrm{d}\bar{z}_{\dot\alpha m} * \bar{\varkappa}_v \hat{\bar{k}}_v\,. \tag{2.21}$$

С точки зрения обрамленной алгебры Чередника, закодированной в уравнении (2.19), совместность гарантируется выполнением тождества Якоби.

Наличие $\mathfrak{sp}(2)$-автоморфизма (2.9) гарантирует Лоренц-ковариантность уравнений, построенных на основе алгебры Чередника, так как процедура доказательства Лоренц-ковариантности стандартной теории из работы [25] полностью переносится на случай КВС теории.

Идемпотентное расширение алгебры Чередника с помощью идемпотентов I_n было предложено в работе [77], чтобы избежать проблемы роста вакуумной энергии, или младшего веса, при переходе от одного набора осцилляторов y_α к p копиям y_α^n, $n = 1,\ldots,p$. Для алгебры ВС, построенной из одного набора осцилляторов ($p = 1$), соответствующий модуль Фока F_1 реализует синглетонное/дублетонное-представление, интерпретируемое как свободное граничное конформное поле конформной размерности h_1 [23; 84; 85]. Согласно теореме Флато–Фронсдала [120; 121], тензорное произведение $F_1 \otimes F_1$ разлагается в прямую сумму модулей сохраняющихся граничных токов, дуальных безмассовым bulk-полям. В наивном расширении алгебры до p копий осцилляторов младший вес вакуума в модуле Фока F_p складывается по копиям и становится равным $h_p = ph_1$. Следовательно, младшие веса в $F_p \otimes F_p$ могут оказаться слишком большими для описания безмассовых полей. Введение идемпотентов I_n позволяет рассматривать модули Фока F_p^n с вакуумами $|0\rangle_n$, удовлетворяющими условию

$$I_m \, |0\rangle_n = \delta_{mn} \, |0\rangle_n \ , \tag{2.22}$$

и тем самым избежать проблемы роста младших весов с увеличением p.

2.2 Ковариантная производная и модули КВС теории

Непосредственно проверяется, что уравнение (2.15) имеет решение в виде связности

$$\Omega_{AdS}(Y|x) = -\frac{i}{4}\delta^{nm}\Big(\varpi_{\alpha\beta}(x)y_n^\alpha y_m^\beta + \bar\varpi_{\dot\alpha\dot\beta}(x)\bar y_n^{\dot\alpha}\bar y_m^{\dot\beta} + 2e_{\alpha\dot\alpha}(x)y_n^\alpha \bar y_m^{\dot\alpha}\Big)\,, \tag{2.23}$$

где $(\varpi \oplus \bar\varpi)$ и e – спин-связность и репер пространства AdS_4.

В этом разделе проанализируем общую структуру модулей, задаваемых с помощью ковариантной производной

$$D_\Omega(\bullet) = \mathrm{d}_x(\bullet) + [\Omega_{AdS}, \bullet]_* \,, \tag{2.24}$$

построенной по $\Omega_{AdS}(Y|x)$.

Используя (2.10) и (2.3), получаем следующее выражение

$$\begin{aligned} D_\Omega f(Y,I;\hat k,\hat{\bar k}|x) = \Big[D_L + \frac{1}{2}\delta^{nm}e^{\alpha\dot\alpha}\Big(\mathbf{1}_n^k\bar{\mathbf{1}}_m^l + R(k)_n^k\bar R(\bar k)_m^l\Big)(y_{\alpha k}\hat{\bar\partial}_{\dot\alpha l} + \bar y_{\dot\alpha l}\hat\partial_{\alpha k}) - \\ - \frac{i}{2}\delta^{nm}e^{\alpha\dot\alpha}\Big(\mathbf{1}_n^k\bar{\mathbf{1}}_m^l - R(k)_n^k\bar R(\bar k)_m^l\Big)(y_{\alpha k}\bar y_{\dot\alpha l} - \hat\partial_{\alpha k}\hat{\bar\partial}_{\dot\alpha l})\Big] f(Y,I;\hat k,\hat{\bar k}|x)\,, \end{aligned} \tag{2.25}$$

$$\begin{aligned} D_L f(Y,I;\hat k,\hat{\bar k}|x) := \mathrm{d}_x f(Y,I;\hat k,\hat{\bar k}|x) + \\ + \delta^{nm}\Big(\varpi^{\alpha\beta}y_{\alpha n}\hat\partial_{\beta m} + \bar\varpi^{\dot\alpha\dot\beta}\bar y_{\dot\alpha n}\hat{\bar\partial}_{\dot\beta m}\Big) f(Y,I;\hat k,\hat{\bar k}|x)\,, \end{aligned} \tag{2.26}$$

$$\hat\partial_{\alpha n} = I_n\partial_{\alpha n}\,, \quad \hat{\bar\partial}_{\dot\alpha n} = I_n\bar\partial_{\dot\alpha n}\,, \tag{2.27}$$

где $\mathbf{1}_n^k$ и $\bar{\mathbf{1}}_m^l$ – единичные матрицы $(p \times p)$, $\hat k$ и $\hat{\bar k}$ являются произведениями некоторого набора $(\hat k_v, \hat{\bar k}_v)$ или единицами, матрицы $R(k)_n^k$ и $\bar R(\bar k)_m^l$ соответствуют отражениям в пространстве корней, реализуемым на осцилляторах Y_A^n

с помощью $\hat{k}$ и $\hat{\bar{k}}$ (в случае $\hat{k} = 1$ матрица отражений является единичной). Заметим, что Лоренц-ковариантная производная D_L получает свой канонический вид за счет $\mathfrak{sp}(2)$-автоморфизма обрамленной алгебры Чередника (2.9). Также на практике часто можно произвести замену $\hat{\partial} \to \partial$ за счет свойств (2.6) и (2.12).

Из (2.25) следует, что структура модуля определяется матричным произведением $\delta^{nm} R(k)_n^k \bar{R}(\bar{k})_m^l$. Так как группы $\mathcal{C}$ являются конечными, то имеется конечное число различных значений произведений $\delta^{nm} R(k)_n^k \bar{R}(\bar{k})_m^l$, а именно число, равное порядку группы Кокстера. Следовательно, количество типов $\mathcal{C}$-модулей равно $\mathrm{ord}(\mathcal{C})$.

В случае простейшей группы Кокстера $A_1 \cong \mathbb{Z}_2$, имеющей одномерное корневое пространство и единственный оператор Клейна $\hat{k}$, ковариантная производная (2.25) сводится к двум случаям

$$D_\Omega f(Y|x) = D_L f(Y|x) + e^{\alpha\dot{\alpha}}(y_\alpha \bar{\partial}_{\dot{\alpha}} + \bar{y}_{\dot{\alpha}} \partial_\alpha) f(Y|x)\,, \tag{2.28}$$

$$D_\Omega (f(Y|x)\hat{k}) = D_L f(Y|x)\hat{k} - ie^{\alpha\dot{\alpha}}(y_\alpha \bar{y}_{\dot{\alpha}} - \partial_\alpha \bar{\partial}_{\dot{\alpha}}) f(Y|x)\hat{k}\,. \tag{2.29}$$

В первом случае D_Ω задает присоединенный модуль стандартной теории ВС (adj), связанный с физическими полями теории $\omega(Y;\hat{K}|x)$. Второй случай ассоциируется с твистованно-присоединенным (tw) модулем $C(Y;\hat{K}|x)$, содержащим обобщенные тензоры Вейля и их потомки. При этом присоединенный модуль не является унитарным, поскольку он представляет собой бесконечную сумму конечномерных (и, следовательно, неунитарных) модулей некомпактной алгебры Ли $\mathfrak{so}(3,2)$, в то время как твистованно-присоединенный модуль представляет собой бесконечную сумму бесконечномерных модулей, комплексно эквивалентных унитарным модулям, используемым для описания одночастичных состояний [84].

В КВС теории общего положения заключаем, что часть описываемых модулей является тензорными произведениями (tw) и (adj) модулей стандартной теории, т. е. их можно интерпретировать как многочастичные состояния, однако в ином смысле, нежели в [76]. Также из формулы (2.25) ясно, что возможно смешивание осцилляторов Y_n с отличающимися кокстеровскими номерами, а значит допустимо смешивание присоединенных и твистованно-присоединенных модулей. В связи с этим будем говорить, что $\mathcal{C}$-модуль, не эквивалентный тензорному произведению присоединенных и твистованно-присоединенных модулей стандартной теории как представление, является запутанным. В противном случае модуль называется распутываемым. Тип $\mathcal{C}$-модуля полностью определяется свойствами операторов

$$P^{kl}_{\pm} = \frac{1}{2}\delta^{nm}\left(\mathbf{1}^k_n\bar{\mathbf{1}}^l_m \pm R(k)^k_n\bar{R}(\bar{k})^l_m\right). \tag{2.30}$$

Матричные операторы $P^{kl}_{\pm}$ напоминают пару ортогональных проекторов, но они являются таковыми только в случае $(R\bar{R}^T)^2 = \mathbf{1}$. Если $P^{kl}_{\pm}$ – это ортогональные проекторы, то линейными заменами осцилляторных переменных можно представить соответствующий $\mathcal{C}$-модуль в виде тензорного произведения модулей стандартной теории ВС. При этом, как будет продемонстрировано далее на примере B_2-теории, уравнения на запутанные модули можно свести к уравнению на произведение твистованно-присоединенных модулей с помощью экспоненциального преобразования, выводящего за пределы класса полиномиальных функций от Y_i. Однако запутанные модули не будут изоморфны модулю $(\mathrm{tw}\otimes\mathrm{tw})$. В результате получаем следующий критерий распутываемости.

Предложение (Критерий распутываемости)**.** $(R\bar{R}^T)^2 = \mathbf{1}$ *является необходимым и достаточным условием распутываемости соответствующего $\mathcal{C}$-модуля.*

Доказательство. Действительно, пусть $\mathcal{C}$-модуль представим в виде тензорного произведения модулей обычной теории. Тогда

$$R\bar{R}^T = \mathrm{diag}(+1, ..., +1, -1, ..., -1)$$

и $(R\bar{R}^T)^2 = \mathbf{1}$.

Пусть теперь $(R\bar{R}^T)^2 = \mathbf{1}$. Тогда минимальный аннулирующий полином оператора $R\bar{R}^T$ либо делится на $q_{min}(t) = t \pm 1$, либо на $q_{min}(t) = t^2 - 1$. В первом случае $R\bar{R}^T = \pm\mathbf{1}$ и утверждение доказано. Во втором случае $R\bar{R}^T$ является диагонализуемой с собственными значениями $\lambda = \pm 1$. Так как матрица $R\bar{R}^T$ и собственные значения λ вещественны, то диагонализация $R\bar{R}^T$ происходит над полем $\mathbb{R}$. Таким образом, существует линейная замена осцилляторных переменных, представляющая $\mathcal{C}$-модуль как явное тензорное произведение модулей стандартной теории. $\square$

Так как для любого корневого вектора $(R_v)^2 = \mathbf{1}$, то в любой КВС-теории существуют распутываемые модули. Если группа Кокстера $\mathcal{C}$ отличается от тривиального случая $\mathbb{Z}_2$, то найдутся такие матрицы отражений, что $(R\bar{R}^T)^2 \neq \mathbf{1}$.

Следовательно, за пределами стандартной теории высших спинов появляются запутанные модули и требуется изучить их свойства. В следующем разделе займемся изучением свойств модулей B_2-теории.

2.3 Модули B_2 КВС

Корневая система группы B_2 представима в виде двух орбит

$$\mathcal{R}_1 = \{\pm e^1, \pm e^2\}\,, \quad \mathcal{R}_2 = \{\pm e^1 \pm e^2\}\,. \tag{2.31}$$

Группа B_2 порождается отражениями $\{R_{e^i}, R_{e^1-e^2}\}$. С этими матрицами отражений ассоциированы голоморфные операторы Клейна $\hat{k}_i$ и $\hat{k}_{12}$. Голоморфная обрамленная группа B_2 порождается множеством

$$\left\{\hat{k}_i, \hat{k}_{12} | \hat{k}_i^2 = I_i, \hat{k}_{12}^2 = I_1 I_2, \hat{k}_1\hat{k}_{12} = \hat{k}_{12}\hat{k}_2, \hat{k}_2\hat{k}_{12} = \hat{k}_{12}\hat{k}_1, i \in \{1,2\}\right\} \tag{2.32}$$

и, после отождествления идемпотентов I_n с единицей, сводится к B_2.

Также введем составной генератор

$$\hat{k}_{12}^{+} := \hat{k}_1\hat{k}_2\hat{k}_{12}\,, \tag{2.33}$$

отвечающий корневому вектору $e^1 + e^2 \in \mathcal{R}_2$. Таким образом, с каждым вектором из орбит $\mathcal{R}_i$ связан некоторый оператор Клейна ($\mathcal{R}_1 \leftrightarrow \{\hat{k}_1, \hat{k}_2\}$ и $\mathcal{R}_2 \leftrightarrow \{\hat{k}_{12}, \hat{k}_{12}^{+}\}$).

Матрицы отражений в корневом пространстве $R(k)$ даются формулами

$$R(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, R(k_1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, R(k_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, R(k_{12}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.34}$$

$$R(k_1k_2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, R(k_1k_{12}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, R(k_2k_{12}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.35}$$

$$R(k_{12}^{+}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.36}$$

Такие же соответствия верны для матриц $\bar{R}(\bar{k})$, ассоциированных с анти-голоморфными операторами Клейна $\hat{\bar{k}}_i, \hat{\bar{k}}_{12}$.

В B_2 КВС-теории поля ноль-формы $C(Y_1, Y_2, I; \hat{k}, \hat{\bar{k}}|x)$ состоят из 64 компонентных полей вдоль $I_1 I_2$

$$C(Y_1, Y_2; \hat{k}, \hat{\bar{k}}|x) * I_1 I_2 = \sum_{a,b,c,\bar{a},\bar{b},\bar{c}=0}^{1} C_{abc\bar{a}\bar{b}\bar{c}}(Y_1, Y_2|x) * I_1 I_2 * \hat{k}_1^a \hat{k}_2^b \hat{k}_{12}^c \hat{\bar{k}}_1^{\bar{a}} \hat{\bar{k}}_2^{\bar{b}} \hat{\bar{k}}_{12}^{\bar{c}} \tag{2.37}$$

и 4 компонентных полей вдоль каждой из I_i

$$C(Y_i; \hat{k}, \hat{\bar{k}}|x) * I_i = \sum_{a,\bar{a}=0}^{1} C_{a\bar{a}}(Y_i|x) * I_i * \hat{k}_i^a \hat{\bar{k}}_i^{\bar{a}} \,. \tag{2.38}$$

Как было показано ранее, число типов модулей определяется числом значений матричных произведений $\delta^{nm} R(k)_n^k \bar{R}(\bar{k})_m^l$ и равно $\mathrm{ord}(B_2) = 8$. При этом отличающиеся по составу наборы операторов Клейна могут приводить к одному и тому же значению матричного произведения, т. е. модулю. В результате можно убедиться, что 64 компоненты поля C разбиваются на 8 групп по 8 компонентных полей, а оставшиеся 4 компоненты лишь на 2 группы по 2 поля (две копии стандартного присоединенного и твистованно-присоединенного модулей). Чтобы разобраться со структурой B_2-модулей, нужно рассмотреть ковариантную производную D_Ω для каждого из 8 возможных произведений матриц отражений $R(k)\bar{R}(\bar{k})^T$:

$$R(k)\bar{R}(\bar{k})^T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \right. \tag{2.39}$$

$$\left. \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}. \tag{2.40}$$

Итого, имеем 8 типов уравнений ковариантного постоянства

$$\Big(D_L + e^{\alpha\dot{\alpha}} \sum_{i=1}^{2} (y_{\alpha i} \bar{\partial}_{\dot{\alpha} i} + \bar{y}_{\dot{\alpha} i} \partial_{\alpha i}) \Big) C(Y_1, Y_2, I; \hat{k}, \hat{\bar{k}}|x) = 0 \,, \tag{2.41}$$

$$\Big(D_L - i e^{\alpha\dot{\alpha}} (y_{\alpha 1} \bar{y}_{\dot{\alpha} 1} - \partial_{\alpha 1} \bar{\partial}_{\dot{\alpha} 1}) + e^{\alpha\dot{\alpha}} (y_{\alpha 2} \bar{\partial}_{\dot{\alpha} 2} + \bar{y}_{\dot{\alpha} 2} \partial_{\alpha 2}) \Big) C(Y_1, Y_2, I; \hat{k}, \hat{\bar{k}}|x) = 0 \,, \tag{2.42}$$

$$\Big(D_L + e^{\alpha\dot{\alpha}} (y_{\alpha 1} \bar{\partial}_{\dot{\alpha} 1} + \bar{y}_{\dot{\alpha} 1} \partial_{\alpha 1}) - i e^{\alpha\dot{\alpha}} (y_{\alpha 2} \bar{y}_{\dot{\alpha} 2} - \partial_{\alpha 2} \bar{\partial}_{\dot{\alpha} 2}) \Big) C(Y_1, Y_2, I; \hat{k}, \hat{\bar{k}}|x) = 0 \,, \tag{2.43}$$

$$\Big(D_L - i e^{\alpha\dot{\alpha}} \sum_{i=1}^{2} (y_{\alpha i} \bar{y}_{\dot{\alpha} i} - \partial_{\alpha i} \bar{\partial}_{\dot{\alpha} i}) \Big) C(Y_1, Y_2, I; \hat{k}, \hat{\bar{k}}|x) = 0 \,, \tag{2.44}$$

$$\Big(D_L + \frac{1}{2}e^{\alpha\dot\alpha}\Big[(y_{\alpha 1}+y_{\alpha 2})(\bar\partial_{\dot\alpha 1}+\bar\partial_{\dot\alpha 2}) + (\bar y_{\dot\alpha 1}+\bar y_{\dot\alpha 2})(\partial_{\alpha 1}+\partial_{\alpha 2})\Big] -$$
$$- \frac{i}{2}e^{\alpha\dot\alpha}\Big[(y_{\alpha 1}-y_{\alpha 2})(\bar y_{\dot\alpha 1}-\bar y_{\dot\alpha 2}) - (\partial_{\alpha 1}-\partial_{\alpha 2})(\bar\partial_{\dot\alpha 1}-\bar\partial_{\dot\alpha 2})\Big]\Big) C(Y_1,Y_2,I;\hat k,\hat{\bar k}|x) = 0\,, \tag{2.45}$$

$$\Big(D_L + \frac{1}{2}e^{\alpha\dot\alpha}\Big[(y_{\alpha 1}-y_{\alpha 2})(\bar\partial_{\dot\alpha 1}-\bar\partial_{\dot\alpha 2}) + (\bar y_{\dot\alpha 1}-\bar y_{\dot\alpha 2})(\partial_{\alpha 1}-\partial_{\alpha 2})\Big] -$$
$$- \frac{i}{2}e^{\alpha\dot\alpha}\Big[(y_{\alpha 1}+y_{\alpha 2})(\bar y_{\dot\alpha 1}+\bar y_{\dot\alpha 2}) - (\partial_{\alpha 1}+\partial_{\alpha 2})(\bar\partial_{\dot\alpha 1}+\bar\partial_{\dot\alpha 2})\Big]\Big) C(Y_1,Y_2,I;\hat k,\hat{\bar k}|x) = 0\,, \tag{2.46}$$

$$\Big(D_L + \frac{1}{2}e^{\alpha\dot\alpha}\Big[y_{\alpha 1}(\bar\partial_{\dot\alpha 1}-\bar\partial_{\dot\alpha 2}) + y_{\alpha 2}(\bar\partial_{\dot\alpha 1}+\bar\partial_{\dot\alpha 2}) + \bar y_{\dot\alpha 1}(\partial_{\alpha 1}+\partial_{\alpha 2}) - \bar y_{\dot\alpha 2}(\partial_{\alpha 1}-\partial_{\alpha 2})\Big] -$$
$$- \frac{i}{2}e^{\alpha\dot\alpha}\Big[y_{\alpha 1}(\bar y_{\dot\alpha 1}+\bar y_{\dot\alpha 2}) - y_{\alpha 2}(\bar y_{\dot\alpha 1}-\bar y_{\dot\alpha 2}) - \partial_{\alpha 1}(\bar\partial_{\dot\alpha 1}+\bar\partial_{\dot\alpha 2}) + \partial_{\alpha 2}(\bar\partial_{\dot\alpha 1}-\bar\partial_{\dot\alpha 2})\Big]\Big)\times$$
$$\times C(Y_1,Y_2,I;\hat k,\hat{\bar k}|x) = 0\,, \tag{2.47}$$

$$\Big(D_L + \frac{1}{2}e^{\alpha\dot\alpha}\Big[y_{\alpha 1}(\bar\partial_{\dot\alpha 1}+\bar\partial_{\dot\alpha 2}) - y_{\alpha 2}(\bar\partial_{\dot\alpha 1}-\bar\partial_{\dot\alpha 2}) + \bar y_{\dot\alpha 1}(\partial_{\alpha 1}-\partial_{\alpha 2}) + \bar y_{\dot\alpha 2}(\partial_{\alpha 1}+\partial_{\alpha 2})\Big] -$$
$$- \frac{i}{2}e^{\alpha\dot\alpha}\Big[y_{\alpha 1}(\bar y_{\dot\alpha 1}-\bar y_{\dot\alpha 2}) + y_{\alpha 2}(\bar y_{\dot\alpha 1}+\bar y_{\dot\alpha 2}) - \partial_{\alpha 1}(\bar\partial_{\dot\alpha 1}-\bar\partial_{\dot\alpha 2}) - \partial_{\alpha 2}(\bar\partial_{\dot\alpha 1}+\bar\partial_{\dot\alpha 2})\Big]\Big)\times$$
$$\times C(Y_1,Y_2,I;\hat k,\hat{\bar k}|x) = 0\,, \tag{2.48}$$

отвечающих матрицам (2.39) и (2.40) при чтении слева направо, начиная с первой строки. В уравнениях произведена замена $\hat\partial \to \partial$ в соответствии с приведенным выше обсуждением.

Первые 6 уравнений задают распутываемые модули, которые мы будем далее обозначать $(\mathrm{adj}\otimes\mathrm{adj})$, $(\mathrm{tw}\otimes\mathrm{tw})$, $(\mathrm{tw}\otimes\mathrm{adj})$ и $(\mathrm{adj}\otimes\mathrm{tw})$. Последние два определяют модули, для которых нельзя линейными преобразованиями расцепить члены $y\bar\partial, \bar y\partial$ и члены $y\bar y, \partial\bar\partial$ по индексам $1,2$. Однако с помощью нелокального переопределения полей C

$$C(Y_1,Y_2,I;\hat k,\hat{\bar k}|x) = \exp\Big(-iy_{1\alpha}y_2^\alpha + i\bar y_{1\dot\alpha}\bar y_2^{\dot\alpha}\Big)\tilde C(Y_1,Y_2,I;\hat k,\hat{\bar k}|x)\,, \tag{2.49}$$

$$C(Y_1,Y_2,I;\hat k,\hat{\bar k}|x) = \exp\Big(iy_{1\alpha}y_2^\alpha - i\bar y_{1\dot\alpha}\bar y_2^{\dot\alpha}\Big)\tilde C(Y_1,Y_2,I;\hat k,\hat{\bar k}|x) \tag{2.50}$$

уравнения (2.47)–(2.48) сводятся к

$$\Big(D_L-\frac{i}{2}e^{\alpha\dot\alpha}\Big[2y_{\alpha1}(\bar y_{\dot\alpha1}+\bar y_{\dot\alpha2})-2y_{\alpha2}(\bar y_{\dot\alpha1}-\bar y_{\dot\alpha2})-\partial_{\alpha1}(\bar\partial_{\dot\alpha1}+\bar\partial_{\dot\alpha2})+\partial_{\alpha2}(\bar\partial_{\dot\alpha1}-\bar\partial_{\dot\alpha2})\Big]\Big)\times \\ \times\tilde C(Y_1,Y_2,I;\hat k,\hat{\bar k}|x)=0, \quad (2.51)$$

$$\Big(D_L-\frac{i}{2}e^{\alpha\dot\alpha}\Big[2y_{\alpha1}(\bar y_{\dot\alpha1}-\bar y_{\dot\alpha2})+2y_{\alpha2}(\bar y_{\dot\alpha1}+\bar y_{\dot\alpha2})-\partial_{\alpha1}(\bar\partial_{\dot\alpha1}-\bar\partial_{\dot\alpha2})-\partial_{\alpha2}(\bar\partial_{\dot\alpha1}+\bar\partial_{\dot\alpha2})\Big]\Big)\times \\ \times\tilde C(Y_1,Y_2,I;\hat k,\hat{\bar k}|x)=0. \quad (2.52)$$

При линейной замене голоморфных переменных, например,

$$y^{'}_{\alpha1}=y_{\alpha1}-y_{\alpha2}\,,\quad y^{'}_{\alpha2}=y_{\alpha1}+y_{\alpha2} \qquad (2.53)$$

в первом случае, уравнение на поле $\tilde C(Y_1,Y_2,I;\hat k,\hat{\bar k}|x)$ трансформируется в (2.44), отвечающее модулю ($\mathrm{tw}\otimes\mathrm{tw}$). Это означает, что разбиение поля $\tilde C$ на примарные и вспомогательные компоненты такое же, как в случае полей C из модуля ($\mathrm{tw}\otimes\mathrm{tw}$). Точно такими же будут и уравнения на примарные поля. При этом модуль ($\mathrm{tw}\otimes\mathrm{tw}$) не является изоморфным запутанному модулю, так как их связь устанавливается через нелокальное преобразование, несовместимое с правилами сопряжения осцилляторов Y^A_n (осцилляторы $y^{'}_{\alpha i}$ и $\bar y_{\dot\alpha i}$ не являются сопряженными). Из-за этого такие свойства, как ограниченность энергии или существование унитарного комплексно-эквивалентного модуля, для запутанных модулей не могут быть напрямую установлены из свойств представления ($\mathrm{tw}\otimes\mathrm{tw}$). К тому же экспоненциальные выражения в анзацах (2.49) и (2.50) плохо определены относительно произведения (2.10). Как будет установлено далее, такое поведение связано с выбором осцилляторов Y^A_n для описания B_2-системы. В следующих разделах этой главы будет показано, что имеется набор осцилляторов, в терминах которых отсутствуют проблемы с умножением на экспоненциальные выражения из анзацев выше.

2.3.1 Унитарность и граничные условия

Из сравнения уравнений (2.41)–(2.44) с (2.28) и (2.29) следует, что соответствующие B_2-модули являются тензорными произведениями модулей (tw) и (adj) стандартной теории. Из записи уравнений (2.45) и (2.46) ясно, что заменами переменных

$$
\begin{aligned}
y_{\alpha+} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(y_{\alpha 1} + y_{\alpha 2})\,, \quad y_{\alpha-} = \frac{1}{\sqrt{2}}(y_{\alpha 1} - y_{\alpha 2})\,,\\
\bar{y}_{\dot\alpha+} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{y}_{\dot\alpha 1} + \bar{y}_{\dot\alpha 2})\,, \quad \bar{y}_{\dot\alpha-} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{y}_{\dot\alpha 1} - \bar{y}_{\dot\alpha 2})\,,
\end{aligned}
\tag{2.54}
$$

они сводятся к уравнениям (2.42) и (2.43). Существование такой замены связано с тем, что соответствующие этим случаям произведения матриц отражения $R\bar{R}^T$ удовлетворяют критерию распутываемости $\mathcal{C}$-модулей. Следовательно, уравнения (2.41)–(2.46) определяют модули, построенные как произведения одночастичных модулей (tw) и (adj). Можем сразу же заключить, что эти модули являются модулями с ограниченной энергией (тензорное произведение модулей с ограниченной энергией), а если поле не зависит от осцилляторов, описывающих (adj) часть, то существует комплексно-эквивалентный унитарный модуль (поле, не зависящее от (adj)-осцилляторов, описывает (tw)-модуль, который обладает унитарным дуальным модулем согласно [84]). Независимость от «присоединенных» осцилляторов можно реализовать в виде граничного условия на поле C.

Чтобы получить требуемое граничное условие, рассмотрим уравнения (2.28) и (2.29) из стандартной теории ВС. В стереографических координатах для гиперболоидной реализации пространства AdS_4 репер и спин-связность выражаются через матрицы Паули как [122]

$$
\begin{aligned}
&e_{0\underline{n}}{}^{\alpha\dot\beta} = -z^{-1}\sigma_{\underline{n}}{}^{\alpha\dot\beta}\,,\\
&\omega_{0\underline{n}}^{\alpha\beta} = -\lambda^2(2z)^{-1}(\sigma_{\underline{n}}^{\alpha\dot\beta}x^{\beta}{}_{\dot\beta} + \sigma_{\underline{n}}^{\beta\dot\beta}x^{\alpha}{}_{\dot\beta})\,,\\
&\bar\omega_{0\underline{n}}{}^{\dot\alpha\dot\beta} = -\lambda^2(2z)^{-1}(\sigma_{\underline{n}}{}^{\alpha\dot\alpha}x_{\alpha}{}^{\dot\beta} + \sigma_{\underline{n}}{}^{\alpha\dot\beta}x_{\alpha}{}^{\dot\alpha})\,,
\end{aligned}
\tag{2.55}
$$

где λ – обратный радиус пространства AdS_4,

$$
x_{\alpha\dot\beta} = \sigma^a_{\alpha\dot\beta}x_a, \quad x^2 = x_a x^a = \frac{1}{2}x_{\alpha\dot\beta}x^{\alpha\dot\beta}, \quad z = 1 + \lambda^2 x^2,
\tag{2.56}
$$

а эрмитовы матрицы Паули $\sigma^a_{\alpha\dot\beta}$ нормированы условием $\sigma_{a\alpha\dot\beta}\sigma_b^{\alpha\dot\beta} = 2\eta_{ab}$ с метрикой $\eta_{ab} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$.

В работе [122] было показано, что AdS_4 связность $\Omega_{AdS}(y,\bar{y}|x)$ представима в виде

$$
\Omega_{AdS}(y,\bar{y}|x) = g^{-1}(y,\bar{y}|x) * \mathrm{d}_x g(y,\bar{y}|x)\,,
\tag{2.57}
$$

где

$$g(y,\bar{y}|x) = 2\frac{\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}}\exp\left[\frac{i\lambda}{1+\sqrt{z}}x^{\alpha\dot{\alpha}}y_\alpha\bar{y}_{\dot{\alpha}}\right], \tag{2.58}$$

и обратный элемент

$$g^{-1}(y,\bar{y}|x) = \tilde{g}(y,\bar{y}|x) = 2\frac{\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}}\exp\left[-\frac{i\lambda}{1+\sqrt{z}}x^{\alpha\dot{\alpha}}y_\alpha\bar{y}_{\dot{\alpha}}\right]. \tag{2.59}$$

Общие решения $C_{adj}(Y|x)$ уравнения (2.28) и $C_{tw}(Y|x)$ для (2.29) выражаются через «присоединенное» действие g [122; 123]:

$$C_{tw}(Y|x) = g^{-1} * C_{0tw}(Y) * \tilde{g}\,, \quad C_{adj}(Y|x) = g^{-1} * C_{0adj}(Y) * g\,, \tag{2.60}$$

где аналитические функции $C_{0tw}(Y)$ и $C_{0adj}(Y)$ определяют начальные условия.

Непосредственно проверяется, что

$$C_{tw}(Y|x) = z\exp\Bigg(-i\lambda x^{\alpha\dot{\alpha}}y_\alpha\bar{y}_{\dot{\alpha}} + i(\sqrt{z}-1)y^\alpha p_{0\alpha} + i(\sqrt{z}-1)\bar{y}^{\dot{\alpha}}\bar{p}_{0\dot{\alpha}} - \\ - i\lambda x^{\alpha\dot{\alpha}}p_{0\alpha}\bar{p}_{0\dot{\alpha}}\Bigg)C_{0tw}(Y)\,, \tag{2.61}$$

$$C_{adj}(Y|x) = C_{0adj}\left(\frac{1}{\sqrt{z}}(y^\alpha + \lambda x^{\alpha\dot{\alpha}}\bar{y}_{\dot{\alpha}}), \frac{1}{\sqrt{z}}(\bar{y}^{\dot{\alpha}} + \lambda x^{\alpha\dot{\alpha}}y_\alpha)\right), \tag{2.62}$$

где

$$p_{0\mu}C_0(Y|x) = C_0(Y|x)p_{0\mu} := -i\frac{\partial}{\partial y^\mu}C_0(Y|x)\,. \tag{2.63}$$

Здесь индекс 0 означает, что $p_{0\alpha}$ действует на поле начальных данных $C_{0tw}(Y)$.

Независящие от пространственно-временной координаты x функции $C_{0tw}(Y)$ и $C_{0adj}(Y)$ описывают значения примарных полей и их производных всех порядков в точке x_0, в которой $g(Y|x_0) = I$ (в используемых в этом разделе координатах $x_0 = 0$). Формула (2.60) играет роль ковариантизированного разложения Тейлора, восстанавливающего общее решение в терминах его производных в точке $x = x_0$, что является стандартным свойством развернутой динамики.

Заметим, что решения $C_{tw}(Y|x)$ и $C_{adj}(Y|x)$ имеют различное поведение при $z \to 0$, что соответствует выходу на границу AdS_4. Из аналитичности функций $C_{0tw}(Y)$ и $C_{0adj}(Y)$ следует, что $C_{tw}(Y|x)$ стремится к нулю, а $C_{adj}(Y|x)$ расходится за исключением случая постоянного поля $C_{0adj}(Y) = C_{0adj}$ (только тривиальное конечномерное неприводимое представление некомпактной алгебры Ли является унитарным).

Полученные результаты для стандартной теории имеют прямое обобщение на случай B_2-КВС. Несложно убедиться, что в стереографических координатах AdS_4 связность (2.23) представима в виде

$$\Omega_{AdS}(Y_1, Y_2|x) = G^{-1}(Y_1, Y_2|x) * \mathrm{d}_x G(Y_1, Y_2|x)\,, \tag{2.64}$$

где

$$G(Y_1, Y_2|x) = g(y_1, \bar{y}_1|x) g(y_2, \bar{y}_2|x)\,. \tag{2.65}$$

С помощью обратимых элементов звездочной алгебры G выписываются решения уравнений (2.41)–(2.48)

$$C(Y_1, Y_2, I; \hat{K}|x) = G^{-1} * C_0(Y_1, Y_2, I) * \pi(G) * \hat{K}\,, \tag{2.66}$$

где $\pi(\bullet)$ – это автоморфизм B_2-алгебры высших спинов, индуцированный операторами Клейна $\hat{K}$. Формально решения (2.41)–(2.46) ведут себя как произведение решений $C_{tw}(Y|x)$ и $C_{adj}(Y|x)$ стандартной теории. Так, решение уравнения (2.42) дается формулой

$$C(Y_1, Y_2, I; \hat{K}|x) = z \exp\bigg(- i\lambda x^{\alpha\dot{\alpha}} y_{\alpha 1} \bar{y}_{\dot{\alpha} 1} + i(\sqrt{z} - 1) y_1^{\alpha} p_{0\alpha 1} + i(\sqrt{z} - 1) \bar{y}_1^{\dot{\alpha}} \bar{p}_{0\dot{\alpha} 1} -$$
$$- i\lambda x^{\alpha\dot{\alpha}} p_{0\alpha 1} \bar{p}_{0\dot{\alpha} 1}\bigg) C_{0tw\otimes adj}\bigg(y_1, \bar{y}_1, \frac{1}{\sqrt{z}}(y_2^{\alpha} + \lambda x^{\alpha\dot{\alpha}} \bar{y}_{\dot{\alpha} 2}), \frac{1}{\sqrt{z}}(\bar{y}_2^{\dot{\alpha}} + \lambda x^{\alpha\dot{\alpha}} y_{\alpha 2}), I; \hat{K}\bigg)\,. \tag{2.67}$$

Из найденных решений становится ясно, что для модулей $(\mathrm{tw} \otimes \mathrm{adj})$ и $(\mathrm{adj} \otimes \mathrm{tw})$ осцилляторы, относящиеся к присоединенному модулю, несут перед собой множитель $z^{-1/2}$. Таким образом, граничное условие

$$\lim_{z \to 0} \frac{1}{\sqrt{z}} C(Y_1, Y_2, I; \hat{K}|x) = 0 \tag{2.68}$$

запрещает зависимость от «присоединенных» переменных, оставляя нетронутой твистованно-присоединенную часть, обладающую дуальным (комплексно-эквивалентным) унитарным модулем согласно результатам работы [84].

2.3.2 Реализация B_2 модулей через модуль Фока

Как было установлено выше, запутанные модули можно связать с модулем $(\mathrm{tw} \otimes \mathrm{tw})$, однако мы не можем гарантировать ни ограниченности энергии, ни существования комплексно-эквивалентного унитарного модуля, так как связь устанавливается с помощью нелокального, нарушающего сопряженность осцилляторов, преобразования. Чтобы разобраться с вопросами ограниченности энергии и унитарности, аналогично [84], переформулируем линейные уравнения B_2-теории в терминах удвоенного набора осцилляторов и построенного с их помощью модуля Фока.

Рассмотрим ассоциативную звездочную алгебру с 16 порождающими осцилляторами $a_{1,2A}$ и $b_{1,2}{}^{B}$, где индексы $A, B \in \{1, ..., 4\}$. Звездочное произведение определим по формуле

$$(f * g)(a,b) = \frac{1}{\pi^8} \int d^4u_{1,2} d^4v_{1,2} d^4s_{1,2} d^4t_{1,2} f(a+u, b+t) g(a+s, b+v) \times$$
$$\times \exp\left(2s_{1A}t_1^A - 2u_{1A}v_1^A + 2s_{2A}t_2^A - 2u_{2A}v_2^A\right), \quad (2.69)$$

т. е. будем работать в полностью симметричном (Вейлевском) упорядочении. Произведение (2.69) приводит к коммутаторам $(i, j = 1, 2)$

$$[a_{iA}, b_j{}^B]_* = \delta_{ij}\delta_A{}^B\,, \quad [a_{iA}, a_{iB}]_* = 0\,, \quad [b_i{}^A, b_j{}^B]_* = 0\,. \qquad (2.70)$$

Нетрудно проверить, что

$$a_{iA}* = a_{iA} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial b_i^A}\,, \quad b_i^A* = b_i^A - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial a_{iA}}\,, \qquad (2.71)$$

$$*a_{iA} = a_{iA} - \frac{1}{2}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial b_i^A}\,, \quad *b_i^A = b_i^A + \frac{1}{2}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial a_{iA}}\,. \qquad (2.72)$$

Из билинейных комбинаций осцилляторов $a_{iA}, b_j{}^B$ можно построить алгебру $\mathfrak{gl}(4,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{gl}(4,\mathbb{C})$, порождаемую генераторами

$$T_{iA}{}^B = a_{iA}b_i{}^B \equiv \frac{1}{2}(a_{iA} * b_i{}^B + b_i{}^B * a_{iA})\,. \qquad (2.73)$$

Центральными элементами оказываются комбинации

$$H_i = a_{iA}b_i{}^A \equiv \frac{1}{2}(a_{iA} * b_i{}^A + b_i{}^A * a_{iA})\,. \qquad (2.74)$$

Факторизация по генераторам H_i дает алгебру $\mathfrak{sl}(4,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(4,\mathbb{C})$, порождаемую

$$t_{iA}{}^B = (a_{iA}b_i{}^B - \frac{1}{4}\delta_A{}^B H_i)\,. \qquad (2.75)$$

Вещественная форма $\mathfrak{su}(2,2) \oplus \mathfrak{su}(2,2)$ алгебры $\mathfrak{sl}(4,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(4,\mathbb{C})$ получается из условий вещественности

$$\bar{a}_{iA} = b_i{}^B C_{BA}\,, \quad \bar{b}_i{}^A = C^{AB} a_{iB}\,, \tag{2.76}$$

где черта над осциллятором обозначает комплексное сопряжение, а $C_{AB} = -C_{BA}$, $C^{AB} = -C^{BA}$ – вещественные антисимметричные матрицы, удовлетворяющие соотношению

$$C_{AC}C^{BC} = \delta_A{}^B\,. \tag{2.77}$$

Положим

$$C^{AB} = \begin{pmatrix} \epsilon^{\alpha\dot{\beta}} & 0 \\ 0 & \epsilon^{\dot{\alpha}\beta} \end{pmatrix}, \quad \epsilon^{12} = -\epsilon^{21} = 1\,, \quad \epsilon^{11} = \epsilon^{22} = 0\,, \tag{2.78}$$

разбивая осцилляторы $a_{1,2A}$ и $b_{1,2}{}^B$ на пары двухкомпонентных спиноров $a_{1,2\alpha}$, $b_{1,2}{}^\alpha$, $\tilde{a}_{1,2\dot{\alpha}}$, $\tilde{b}_{1,2}{}^{\dot{\alpha}}$. При таком разбиении ненулевые коммутаторы (2.70) распадаются на

$$[a_{i\alpha}, b_j^\beta]_* = \delta_{ij}\delta_\alpha^\beta\,, \quad [\tilde{a}_{i\dot{\alpha}}, \tilde{b}_j{}^{\dot{\beta}}]_* = \delta_{ij}\delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}}\,. \tag{2.79}$$

Правила сопряжения (2.76) сводятся к

$$\bar{a}_{i\alpha} = \tilde{b}_{i\dot{\alpha}}\,, \quad \bar{b}_i^\alpha = \tilde{a}_i^{\dot{\alpha}}\,, \quad \bar{\tilde{a}}_{i\dot{\alpha}} = b_{i\alpha}\,, \quad \bar{\tilde{b}}_i^{\dot{\alpha}} = a_i^\alpha\,. \tag{2.80}$$

Используя осцилляторы $a_{iA}, b_i{}^B$, определим набор вакуумных элементов $\pi^i{}_p$:

$$a_{i\alpha} * \pi^i{}_1 = 0 = \pi^i{}_1 * \tilde{a}_{i\dot{\alpha}}\,, \quad \tilde{b}_i^{\dot{\alpha}} * \pi^i{}_1 = 0 = \pi^i{}_1 * b_i^\alpha\,, \tag{2.81}$$
$$b_i^\alpha * \pi^i{}_2 = 0 = \pi^i{}_2 * \tilde{b}_i^{\dot{\alpha}}\,, \quad \tilde{a}_{i\dot{\alpha}} * \pi^i{}_2 = 0 = \pi^i{}_2 * a_{i\alpha}\,, \tag{2.82}$$
$$a_{i\alpha} * \pi^i{}_3 = 0 = \pi^i{}_3 * \tilde{b}_i^{\dot{\alpha}}\,, \quad \tilde{a}_{i\dot{\alpha}} * \pi^i{}_3 = 0 = \pi^i{}_3 * b_i^\alpha\,, \tag{2.83}$$
$$b_i^\alpha * \pi^i{}_4 = 0 = \pi^i{}_4 * \tilde{a}_{i\dot{\alpha}}\,, \quad \tilde{b}_i^{\dot{\alpha}} * \pi^i{}_4 = 0 = \pi^i{}_4 * a_{i\alpha}\,. \tag{2.84}$$

Пользуясь соотношениями (2.71) и (2.72), можно показать, что вакуумы $\pi^i{}_p$ имеют реализацию в терминах звездочной алгебры:

$$\pi^i{}_1 = \exp\Big\{-2a_{i\alpha}b_i{}^\alpha + 2\tilde{a}_{i\dot{\alpha}}\tilde{b}_i{}^{\dot{\alpha}}\Big\}, \quad \pi^i{}_2 = \exp\Big\{2a_{i\alpha}b_i{}^\alpha - 2\tilde{a}_{i\dot{\alpha}}\tilde{b}_i{}^{\dot{\alpha}}\Big\}, \tag{2.85}$$
$$\pi^i{}_3 = \exp\Big\{-2a_{i\alpha}b_i{}^\alpha - 2\tilde{a}_{i\dot{\alpha}}\tilde{b}_i{}^{\dot{\alpha}}\Big\}, \quad \pi^i{}_4 = \exp\Big\{2a_{i\alpha}b_i{}^\alpha + 2\tilde{a}_{i\dot{\alpha}}\tilde{b}_i{}^{\dot{\alpha}}\Big\}. \tag{2.86}$$

Модули Фока строятся из вакуумов $\pi^1{}_p\pi^2{}_q$ с помощью соответствующих операторов рождения. Как будет объяснено далее, для задачи имплементации

B_2-модулей неважно, какой из модулей Фока взят за основу. В связи с этим остановимся на модуле Фока, порождаемом из вакуума $\pi^1{}_1\pi^2{}_1$:

$$\left|C^{11}\right\rangle = C^{11}(b_1, \tilde{a}_1, b_2, \tilde{a}_2) * \pi^1{}_1\pi^2{}_1 = C^{11}(2b_1, 2\tilde{a}_1, 2b_2, 2\tilde{a}_2)\pi^1{}_1\pi^2{}_1 \,. \tag{2.87}$$

Построим из набора осцилляторов $a_{1,2\alpha}$, $b_{1,2}{}^{\alpha}$, $\tilde{a}_{1,2\dot{\alpha}}$, $\tilde{b}_{1,2}{}^{\dot{\alpha}}$ генераторы алгебры $\mathfrak{su}(2,2)$:

$$L^i{}_{\alpha}{}^{\beta} = a_{i\alpha}b_i{}^{\beta} - \frac{1}{2}\delta_{\alpha}{}^{\beta}a_{i\gamma}b_i{}^{\gamma}\,, \quad P^i{}_{\alpha}{}^{\dot{\beta}} = a_{i\alpha}\tilde{b}_i{}^{\dot{\beta}}\,, \tag{2.88}$$

$$\bar{L}^i{}_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}} = \tilde{a}_{i\dot{\alpha}}\tilde{b}_i{}^{\dot{\beta}} - \frac{1}{2}\delta_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}}\tilde{a}_{i\dot{\gamma}}\tilde{b}_i{}^{\dot{\gamma}}\,, \quad K^i{}_{\dot{\alpha}}{}^{\beta} = \tilde{a}_{i\dot{\alpha}}b_i{}^{\beta}\,. \tag{2.89}$$

$$D^i = \frac{1}{2}(a_{i\alpha}b_i{}^{\alpha} - \tilde{a}_{i\dot{\alpha}}\tilde{b}_i{}^{\dot{\alpha}})\,, \tag{2.90}$$

а также центральные элементы

$$H^i = \frac{1}{2}(a_{i\alpha}b_i{}^{\alpha} + \tilde{a}_{i\dot{\alpha}}\tilde{b}_i{}^{\dot{\alpha}})\,, \tag{2.91}$$

отвечающие операторам спина.

Связность AdS_4 может быть введена посредством вложения алгебры $\mathfrak{so}(3,2)$ в $\mathfrak{su}(2,2) \oplus \mathfrak{su}(2,2)$

$$\omega_0 = \omega_0{}^{\alpha}{}_{\beta}(L^1{}_{\alpha}{}^{\beta} + L^2{}_{\alpha}{}^{\beta}) + \bar{\omega}_0{}^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}(\bar{L}^1{}_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}} + \bar{L}^2{}_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}}) + e_0{}^{\alpha}{}_{\dot{\beta}}(P^1{}_{\alpha}{}^{\dot{\beta}} + P^2{}_{\alpha}{}^{\dot{\beta}} + K^{1\dot{\beta}}{}_{\alpha} + K^{2\dot{\beta}}{}_{\alpha})\,. \tag{2.92}$$

Связность ω_0 пространства AdS_4 удовлетворяет уравнению нулевой кривизны

$$\mathrm{d}_x\omega_0 + \omega_0 \wedge *\omega_0 = 0\,, \tag{2.93}$$

из которого следует, что $\omega_0{}^{\alpha}{}_{\beta}$, $\bar{\omega}_0{}^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}$ и $e_0{}^{\alpha}{}_{\dot{\beta}}$ определяют AdS_4 спин-связность и тетраду. Комбинация $P^i{}_{\alpha}{}^{\dot{\beta}} + K^{i\dot{\beta}}{}_{\alpha}$ реализует вложение AdS_4 трансляций в конформную алгебру $\mathfrak{su}(2,2)$.

Важно заметить, что вакуумы $\pi^i{}_p$ биинвариантны относительно преобразований Лоренца, т. е.

$$L^j{}_{\alpha}{}^{\beta} * \pi^i{}_p = 0 = \pi^i{}_p * L^j{}_{\alpha}{}^{\beta}\,, \quad \bar{L}^j{}_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}} * \pi^i{}_p = 0 = \pi^i{}_p * \bar{L}^j{}_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}}\,. \tag{2.94}$$

Также $\pi^i{}_p$ являются собственными векторами относительно D^i и H^i. Можно проверить, что для $\pi^1{}_1\pi^2{}_1$

$$D^i * \pi^1{}_1\pi^2{}_1 = \pi^1{}_1\pi^2{}_1\,, \quad H^i * \pi^1{}_1\pi^2{}_1 = 0\,. \tag{2.95}$$

Определив модуль Фока и действие алгебры $\mathfrak{so}(3,2)$, наложим на поля (2.87) уравнение

$$\mathrm{d}_x \left|C^{11}\right\rangle + \omega_0 * \left|C^{11}\right\rangle = 0\,. \tag{2.96}$$

Расписывая его в компонентах, получаем

$$D_L C^{11}(2b_1, 2\tilde{a}_1, 2b_2, 2\tilde{a}_2) + e_0{}^{\alpha\dot{\alpha}} \sum_{i=1}^{2} \left(4\tilde{a}_{i\dot{\alpha}} b_{i\alpha} - \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial b_i^{\alpha} \partial \tilde{a}_i^{\dot{\alpha}}} \right) C^{11}(2b_1, 2\tilde{a}_1, 2b_2, 2\tilde{a}_2) = 0\,, \tag{2.97}$$

где

$$D_L = \mathrm{d}_x + \omega_0{}^{\alpha}{}_{\beta} \sum_{i=1}^{2} \left(b_i^{\beta} \frac{\partial}{\partial b_i^{\alpha}} - \frac{1}{2} \delta_{\alpha}{}^{\beta} b_i^{\gamma} \frac{\partial}{\partial b_i^{\gamma}} \right) - \bar{\omega}_0{}^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} \sum_{i=1}^{2} \left(\tilde{a}_{i\dot{\alpha}} \frac{\partial}{\partial \tilde{a}_{i\dot{\beta}}} - \frac{1}{2} \delta_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}} \tilde{a}_{i\dot{\gamma}} \frac{\partial}{\partial \tilde{a}_{i\dot{\gamma}}} \right). \tag{2.98}$$

Из уравнения (2.97) видно, что подстановкой $2b_i \to y_i$, $2\tilde{a}_i \to \bar{y}_i$ оно сводится к уравнению (2.44), определяющему модуль $(\mathrm{tw} \otimes \mathrm{tw})$. Тем самым мы получили возможность реализовывать $(\mathrm{tw} \otimes \mathrm{tw})$-модуль как на языке осцилляторов Y_i^A, так и в терминах набора $\{a_{iA}, b_{jB}\}$. В первом подходе важную роль играли операторы Клейна, с помощью которых происходил «твист» ковариантной производной (протаскивание оператора $\hat{K}$ через AdS_4 связность преобразовывало генераторы $\mathfrak{so}(3,2)$). В рамках второго подхода модуль $(\mathrm{tw} \otimes \mathrm{tw})$ реализуется как левый модуль, т. е. наивно операторы Клейна выпадают из картины. На самом деле роль операторов $\hat{K}$ в $\{a_{iA}, b_{jB}\}$-описании выполняют автоморфизмы звездочной алгебры (2.79). С помощью специального набора автоморфизмов ρ удается получить оставшиеся B_2-уравнения из (2.41)–(2.48).

Для отображения модуля $(\mathrm{tw} \otimes \mathrm{tw})$ в любой другой модуль B_2 необходимо применить автоморфизм ρ к алгебре AdS_4 и сохранить базовый модуль Фока $\left|C^{11}\right\rangle$ неизменным, то есть мы оставляем модуль Фока, порожденный из вакуума $\pi^1{}_1\pi^2{}_1$. Заметим, что весь анализ может быть проведен над любым другим Фоковским вакуумом (2.85) или (2.86), что приведет к тем же результатам, поскольку переход от описания B_2-модулей в терминах одного модуля Фока к другому может быть произведен с помощью подходящего автоморфизма.

Идея соединения различных модулей посредством автоморфизмов вдохновлена наблюдением из стандартной теории ВС, сформулированной в терминах Y^A-осцилляторов. Модуль (adj) можно получить из модуля (tw) посредством действия автоморфизма алгебры $\mathfrak{so}(3,2)$. Однако процедура отображения в подходе к описанию через Y^A-осцилляторы весьма сложна из-за вовлечения частичного преобразования Фурье, которое отображает полиномы в производные δ-функций и наоборот. К счастью, в $\{a_{iA}\,, b_i{}^B\}$-подходе процедура отображения модулей вовлекает лишь полиномы и позволяет избежать указанных трудностей.

Требуемые автоморфизмы звездочной алгебры $\{a_{iA}\,, b_i{}^B\}$ имеют следующий вид (тривиальное действие опущено в каждом случае, и для каждого автоморфизма приведены сопоставляемые им операторы Клейна):

$$\left\{\rho_i(a_{i\alpha}) = b_{i\alpha}\,, \quad \rho_i(b_i^\alpha) = a_i^\alpha\,, \quad \bar\rho_i(\tilde a_{i\dot\alpha}) = \tilde b_{i\dot\alpha} \quad \bar\rho_i(\tilde b_i^{\dot\alpha}) = \tilde a_i^{\dot\alpha}\right\}$$
$$\Updownarrow$$
$$\{\hat k_i * y_i^\alpha = -y_i^\alpha * \hat k_i\,, \quad \hat{\bar k}_i * \bar y_i^{\dot\alpha} = -\bar y_i^{\dot\alpha} * \hat{\bar k}_i\}\,, \tag{2.99}$$

$$\left\{\psi_+(a_{1\alpha}) = \frac12(b_1+b_2+a_1-a_2)_\alpha\,, \quad \psi_+(a_{2\alpha}) = \frac12(b_1+b_2+a_2-a_1)_\alpha\,,\right.$$
$$\left.\psi_+(b_1^\alpha) = \frac12(a_1+a_2+b_1-b_2)^\alpha\,, \quad \psi_+(b_2^\alpha) = \frac12(a_1+a_2+b_2-b_1)^\alpha\right\}$$
$$\Updownarrow$$
$$\{\hat k_{12}^+ * y_1^\alpha = -y_2^\alpha * \hat k_{12}^+\,, \quad \hat k_{12}^+ * y_2^\alpha = -y_1^\alpha * \hat k_{12}^+\}\,, \tag{2.100}$$

$$\left\{\psi_-(a_{1\alpha}) = \frac12(b_1-b_2+a_1+a_2)_\alpha\,, \quad \psi_-(a_{2\alpha}) = \frac12(b_2-b_1+a_1+a_2)_\alpha\,,\right.$$
$$\left.\psi_-(b_1^\alpha) = \frac12(a_1-a_2+b_1+b_2)^\alpha\,, \quad \psi_-(b_2^\alpha) = \frac12(a_2-a_1+b_2+b_1)^\alpha\right\}$$
$$\Updownarrow$$
$$\{\hat k_{12} * y_1^\alpha = y_2^\alpha * \hat k_{12}\,, \quad \hat k_{12} * y_2^\alpha = y_1^\alpha * \hat k_{12}\}\,, \tag{2.101}$$

и вспомогательный автоморфизм

$$\begin{aligned} &\chi(a_{1\alpha}) = \frac{1}{\sqrt2}(a_{1\alpha}+a_{2\alpha})\,, \quad \chi(a_{2\alpha}) = \frac{1}{\sqrt2}(a_{2\alpha}-a_{1\alpha})\,,\\ &\chi(b_1^\alpha) = \frac{1}{\sqrt2}(b_1^\alpha+b_2^\alpha)\,, \quad \chi(b_2^\alpha) = \frac{1}{\sqrt2}(b_2^\alpha-b_1^\alpha)\,. \end{aligned} \tag{2.102}$$

Автоморфизмы χ и $\bar{\chi}$ не отвечают никаким комбинациям операторов Клейна. Вместо этого они реализуют замену осцилляторных переменных, аналогичную (2.54) и связывающую орбиты $\mathcal{R}_1$ и $\mathcal{R}_2$.

Инволютивные автоморфизмы ρ_i, ψ_+, ψ_- и их комплексно-сопряженные партнеры не преобразуют D_L, т. е.

$$\rho\bigg(\omega_0{}^{\alpha\beta}[L^1_{\alpha\beta}+L^2_{\alpha\beta}]\bigg)=\omega_0{}^{\alpha\beta}[L^1_{\alpha\beta}+L^2_{\alpha\beta}]\,,\quad \forall\rho\in\{\rho_i,\psi_+,\psi_-\}\,, \tag{2.103}$$

но нетривиально действуют на $e_0{}^{\alpha\dot\alpha}\sum_{i=1}^{2}(P^i_{\alpha\dot\alpha}+K^i_{\alpha\dot\alpha})$. Следовательно, применение к $\mathfrak{so}(3,2)$-связности композиции автоморфизмов ρ_i, ψ_+, ψ_-, а также их комплексно-сопряженных партнеров, позволяет наложить на модуль Фока $\big|C^{11}\big\rangle$ уравнения

$$\mathrm{d}_x\big|C^{11}\big\rangle+\rho(\omega_0)*\big|C^{11}\big\rangle=0\,, \tag{2.104}$$

которые будут описывать оставшиеся B_2-модули. Получаемые уравнения можно связать с уравнениями (2.41)–(2.48). Например, автоморфизм ρ_1 приводит к модулю $(\mathrm{adj}\otimes\mathrm{tw})$, описываемому уравнением (2.43)

$$\mathrm{d}_x\big|C^{11}\big\rangle+\rho_1(\omega_0)*\big|C^{11}\big\rangle=0 \tag{2.105}$$

$$\Updownarrow$$

$$\bigg(D_L+e_0{}^{\alpha\dot\alpha}\bigg[\tilde a_{1\dot\alpha}\frac{\partial}{\partial b^\alpha_1}-b_{1\alpha}\frac{\partial}{\partial\tilde a^{\dot\alpha}_1}+4\tilde a_{2\dot\alpha}b_{2\alpha}-\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial b^\alpha_2\tilde a^{\dot\alpha}_2}\bigg]\bigg)C^{11}(2b_1,2\tilde a_1,2b_2,2\tilde a_2)=0\,. \tag{2.106}$$

Используемый способ имплементации B_2-модулей через модуль Фока может быть легко обобщен на случай группы B_p. Так, для описания B_p-модулей следует перейти к большему набору осцилляторов $\{a_{iA}\,,b_i{}^B\}$ с $i\in\{1,...,p\}$. Во всех полученных ранее формулах суммирование по индексу i требуется распространить с диапазона $\{1,2\}$ до $\{1,...,p\}$. Автоморфизмы ρ_i воспроизводят действие операторов Клейна $\hat{k}_i$, а автоморфизмы $\psi_{\pm ij}$, получаемые заменой $1,2$ на i,j в формулах для $\psi_\pm$, дают действие операторов Клейна $\hat{k}_{ij}$ и $\hat{k}^+_{ij}$.

Чтобы получить уравнения, определяющие запутанные модули (2.47) и (2.48), требуется воспользоваться автоморфизмами $\rho_1\psi_+$ и $\rho_2\psi_+$. Применяя автоморфизм $\rho_1\psi_+$ к связности ω_0, приходим к уравнению

$$\mathrm{d}_x \left|C^{11}\right\rangle + \rho_1\psi_+(\omega_0) * \left|C^{11}\right\rangle = 0 \tag{2.107}$$

$$\Updownarrow$$

$$\Bigg(D_L + \frac{1}{2}e_0{}^{\alpha\dot\alpha}\Bigg[b_{1\alpha}\frac{\partial}{\partial\tilde a_2^{\dot\alpha}} - b_{1\alpha}\frac{\partial}{\partial\widetilde{a}_1^{\dot\alpha}} - b_{2\alpha}\frac{\partial}{\partial\tilde a_1^{\dot\alpha}} - b_{2\alpha}\frac{\partial}{\partial\tilde a_2^{\dot\alpha}} + \tilde a_{1\dot\alpha}\frac{\partial}{\partial b_1^{\alpha}} + \widetilde{a}_{1\dot\alpha}\frac{\partial}{\partial b_2^{\alpha}} + \\ + \tilde a_{2\dot\alpha}\frac{\partial}{\partial b_2^{\alpha}} - \widetilde{a}_{2\dot\alpha}\frac{\partial}{\partial b_1^{\alpha}}\Bigg] + \frac{1}{2}e_0{}^{\alpha\dot\alpha}\Bigg[4\tilde a_{1\dot\alpha}b_{1\alpha} - 4\tilde a_{1\dot\alpha}b_{2\alpha} + 4\tilde a_{2\dot\alpha}b_{1\alpha} + 4\tilde a_{2\dot\alpha}b_{2\alpha} - \\ -\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial b_1^{\alpha}\partial\tilde a_1^{\dot\alpha}} + \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial b_2^{\alpha}\partial\tilde a_1^{\dot\alpha}} - \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial b_1^{\alpha}\partial\tilde a_2^{\dot\alpha}} - \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial b_2^{\alpha}\partial\tilde a_2^{\dot\alpha}}\Bigg]\Bigg) C^{11}(2b_1, 2\tilde a_1, 2b_2, 2\tilde a_2) = 0\,. \tag{2.108}$$

Во всех случаях, за исключением запутанных модулей, вакуум $\pi^1{}_1\pi^2{}_1$ является собственным относительно преобразованных генераторов дилатации $\rho(D) = \rho(D^1) + \rho(D^2)$ и спина $\rho(H) = \rho(H^1) + \rho(H^2)$, а их действие на модуле Фока $\left|C^{11}\right\rangle$ диагонализуемо. Например,

$$D * \left|C^{11}\right\rangle = \frac{1}{2}\left(b_i^{\alpha}\frac{\partial}{\partial b_i^{\alpha}}C^{11} + \tilde a_{i\dot\alpha}\frac{\partial}{\partial\tilde a_{i\dot\alpha}}C^{11} + 4C^{11}\right)\pi^1{}_1\pi^2{}_1\,, \tag{2.109}$$

$$\rho_1(D) * \left|C^{11}\right\rangle = \frac{1}{2}\left(- b_1^{\alpha}\frac{\partial}{\partial b_1^{\alpha}}C^{11} + b_2^{\alpha}\frac{\partial}{\partial b_2^{\alpha}}C^{11} + \tilde a_{i\dot\alpha}\frac{\partial}{\partial\tilde a_{i\dot\alpha}}C^{11} + 2C^{11}\right)\pi^1{}_1\pi^2{}_1\,, \tag{2.110}$$

$$\psi_+(D) * \left|C^{11}\right\rangle = \frac{1}{2}\left(- 2b_1^{\alpha}\frac{\partial}{\partial b_2^{\alpha}}C^{11} - 2b_2^{\alpha}\frac{\partial}{\partial b_1^{\alpha}}C^{11} + \tilde a_{i\dot\alpha}\frac{\partial}{\partial\tilde a_{i\dot\alpha}}C^{11} + 2C^{11}\right)\pi^1{}_1\pi^2{}_1\,, \tag{2.111}$$

$$\rho_1\psi_+(D) * \left|C^{11}\right\rangle = \frac{1}{2}\left(4b_{2\alpha}b_1^{\alpha}C^{11} + \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial b_1^{\alpha}\partial b_{2\alpha}}C^{11} + \tilde a_{i\dot\alpha}\frac{\partial}{\partial\tilde a_{i\dot\alpha}}C^{11} + 2C^{11}\right)\pi^1{}_1\pi^2{}_1\,. \tag{2.112}$$

Как видно из последней формулы, $\pi^1{}_1\pi^2{}_1$ не является собственным относительно оператора $\rho_1\psi_+(D)$. Также можно проверить, что вакуум не является собственным вектором относительно $\rho_1\psi_+(H)$. Оказывается, что экспоненциальное преобразование $\exp(\pm 4b_{1\alpha}b_2^{\alpha})\pi^1{}_1\pi^2{}_1$ диагонализует оба оператора. Однако это преобразование не позволяет свести уравнение на запутанный модуль к уравнению на модуль $(\mathrm{tw}\otimes\mathrm{tw})$. Настоящий аналог экспоненциального анзаца (2.49) имеет вид

$$C^{11}(2b_1, 2\tilde a_1, 2b_2, 2\tilde a_2) = \exp\left(4b_{1\alpha}b_2^{\alpha} - 4\tilde a_{1\dot\alpha}\tilde a_2^{\dot\alpha}\right)\tilde C^{11}(2b_1, 2\tilde a_1, 2b_2, 2\tilde a_2)\,. \tag{2.113}$$

Такое экспоненциальное преобразование не диагонализует операторы $\rho(D)$ и $\rho(H)$, но сводит уравнение (2.108) к

$$\left(D_L + \frac{1}{2}e_0{}^{\alpha\dot\alpha}\left[8\tilde a_{1\dot\alpha}(b_{1\alpha}-b_{2\alpha}) + 8\tilde a_{2\dot\alpha}(b_{1\alpha}+b_{2\alpha}) - \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial\tilde a_1^{\dot\alpha}(\partial b_1^\alpha - \partial b_2^\alpha)} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial\tilde a_2^{\dot\alpha}(\partial b_1^\alpha + \partial b_2^\alpha)}\right]\right)\tilde C^{11}(2b_1, 2\tilde a_1, 2b_2, 2\tilde a_2) = 0\,. \quad (2.114)$$

Выполнив замену переменных $b^\pm_\alpha = b_{1\alpha} \pm b_{2\alpha}$, не трогая осцилляторы $\tilde a_{i\dot\alpha}$ (тем самым нарушая правила сопряжения), мы приходим к уравнению на модуль $(\mathrm{tw}\otimes\mathrm{tw})$. В подходе к описанию модулей через осцилляторы Y_n^A экспонента из анзаца приводила к бесконечностям при звездочном умножении. В терминах $\{a_{iA}, b_j^B\}$-осцилляторов такого поведения не возникает, квадрат экспоненты – это хорошо определенный объект

$$\exp\left(b_{1\alpha}b_2^\alpha - \tilde a_{1\dot\alpha}\tilde a_2^{\dot\alpha}\right) * \exp\left(b_{1\alpha}b_2^\alpha - \tilde a_{1\dot\alpha}\tilde a_2^{\dot\alpha}\right) = \exp\left(2b_{1\alpha}b_2^\alpha - 2\tilde a_{1\dot\alpha}\tilde a_2^{\dot\alpha}\right). \quad (2.115)$$

Расходимости пропадают, так как произведение (2.69) является обыкновенным для осцилляторов одного типа.

Таким образом, набор автоморфизмов звездочной алгебры, ассоциированный с операторами Клейна, позволяет описать все B_2-модули на языке осцилляторов $\{a_{iA}, b_j^B\}$. Построенные модули не являются унитарными из-за Лоренц-инвариантности вакуумов $\pi^i{}_p$. Однако, поле $\left|C^{11}(x)\right\rangle$ полностью определяется уравнением (2.104) и значением в некоторой фиксированной точке x_0, т. е. модуль $\left|C^{11}(x_0)\right\rangle$ содержит всю информацию о динамике четырехмерных полей. В итоге задача сводится к установлению существования или отсутствия унитарного $\mathfrak{su}(2,2)$-модуля, комплексно-эквивалентного модулю $\left|C^{11}(x_0)\right\rangle$. Для решения этой задачи обратимся к конструкции, использовавшейся в работе [84] для доказательства существования унитарного модуля, дуального модулю (tw) стандартной теории ВС.

Определим набор осцилляторов $e^i_{\nu A}$ и $f^i{}_A{}^\nu$, удовлетворяющих коммутационным соотношениям

$$[e^i_{\nu A}, e^j_{\mu B}]_* = 0\,, \quad [f^i{}_A{}^\nu, f^j{}_B{}^\mu]_* = 0\,, \quad [e^i_{\nu A}, f^j{}_B{}^\mu]_* = \delta^{ij}\delta^\mu_\nu K_{AB}\,, \quad (2.116)$$

где $K_{AB} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ и индексы пробегают значения $i\,,\nu\,,A \in \{1\,,2\}$. Определим сопряжение †, сохраняющее коммутационные соотношения, по правилу

$$(e^i_{\nu A})^\dagger = f^i{}_A{}^\nu \,. \tag{2.117}$$

Заметим, что

$$e^\pm_{\nu A} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^1_{\nu A} \pm e^2_{\nu A})\,, \quad f^\pm{}_A{}^\nu = \frac{1}{\sqrt{2}}(f^1{}_A{}^\nu \pm f^2{}_A{}^\nu) \tag{2.118}$$

удовлетворяют

$$[e^\pm_{\nu A}, e^\pm_{\mu B}]_* = [e^\pm_{\nu A}, e^\mp_{\mu B}]_* = 0\,, \quad [f^\pm{}_A{}^\nu, f^\pm{}_B{}^\mu]_* = [f^\pm{}_A{}^\nu, f^\mp{}_B{}^\mu]_* = 0\,, \tag{2.119}$$

$$[e^\pm_{\nu A}, f^\pm{}_B{}^\mu]_* = [e^\mp_{\nu A}, f^\mp{}_B{}^\mu]_* = \delta^\mu_\nu K_{AB}\,, \quad [e^\pm_{\nu A}, f^\mp{}_B{}^\mu]_* = 0\,, \tag{2.120}$$

$$(e^\pm_{\nu A})^\dagger = f^\pm{}_A{}^\nu \,. \tag{2.121}$$

Связь осцилляторов $\{e^i_{\nu A}, f^i{}_A{}^\nu\}$ и $\{e^\pm_{\nu A}, f^\pm{}_A{}^\nu\}$ обусловлена автоморфизмом χ.

Из осцилляторов $\{e^i_{\nu A}, f^i{}_A{}^\nu\}$ можно построить алгебру $\mathfrak{su}(2,2) \oplus \mathfrak{su}(2,2)$

$$\tau^i_{A\nu}{}^\mu = f^i{}_A{}^\mu e^i_{\nu A} \quad (A, i = 1,2;\ \text{нет суммирования по } A, i)\,, \tag{2.122}$$

$$t^{+i\mu}_{\ \ \nu} = e^i_{\nu 2} f^i{}_1{}^\mu\,, \quad t^{-i\mu}_{\ \ \nu} = e^i_{\nu 1} f^i{}_2{}^\mu\,, \tag{2.123}$$

$$E^i = f^i{}_1{}^\lambda e^i_{\lambda 1} + f^i{}_2{}^\lambda e^i_{\lambda 2}\,, \tag{2.124}$$

$$H^i = f^i{}_1{}^\lambda e^i_{\lambda 1} - f^i{}_2{}^\lambda e^i_{\lambda 2}\,. \tag{2.125}$$

Операторы $\tau^i_{A\nu}{}^\mu$ порождают компактную подалгебру $(\mathfrak{u}(2) \oplus \mathfrak{u}(2))^i$, некомпактными являются генераторы $t^{+i\mu}_{\ \ \nu}$ и $t^{-i\mu}_{\ \ \nu}$, E^i можно интерпретировать как оператор энергии в i-ом секторе, а центральные элементы H^i являются операторами спина.

Выделим диагональную подалгебру $\mathfrak{su}(2,2)$:

$$\tau_{A\nu}{}^\mu = \tau^1_{A\nu}{}^\mu + \tau^2_{A\nu}{}^\mu\,, \quad t^{\pm\mu}_{\ \nu} = t^{\pm 1\mu}_{\ \ \nu} + t^{\pm 2\mu}_{\ \ \nu}\,, \tag{2.126}$$

$$E = E^1 + E^2\,, \quad H = H^1 + H^2\,. \tag{2.127}$$

Определим Фоковский вакуум Π по правилу

$$e^i_{\nu 1} * \Pi = 0\,, \quad f^i{}_2{}^\mu * \Pi = 0\,, \quad \Pi * e^i_{\nu 2} = 0\,, \quad \Pi * f^i{}_1{}^\mu = 0\,. \tag{2.128}$$

Модуль Фока F, порождаемый из Π, является подходящим для описания физических состояний как представлений $\mathfrak{su}(2,2)$, если он удовлетворяет двум условиям:

- F является модулем старшего или младшего веса, т. е. энергия E ограничена с одной из сторон и можно выделить подмодули конечного спина.

- F допускает введение положительно определенной эрмитовой формы, т. е. F является унитарным модулем.

Наборы осцилляторов $\{a_{iA}, b_{jB}\}$ и $\{e^i_{\nu A}, f^i{}_A{}^\nu\}$ можно связать с помощью комплексного преобразования Боголюбова

$$e^i_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_{i1} + i\tilde{a}_{i\dot{2}})\,, \qquad e^i_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_{i1} - i\tilde{a}_{i\dot{2}})\,, \tag{2.129}$$

$$e^i_{21} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{a}_{i\dot{1}} + ia_{i2})\,, \qquad e^i_{22} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{a}_{i\dot{1}} - ia_{i2})\,, \tag{2.130}$$

$$f^i{}_1{}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(b_{i2} + i\tilde{b}_{i\dot{1}})\,, \qquad f^i{}_2{}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-b_{i2} + i\tilde{b}_{i\dot{1}})\,, \tag{2.131}$$

$$f^i{}_1{}^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{b}_{i\dot{2}} + ib_{i1})\,, \qquad f^i{}_2{}^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\tilde{b}_{i\dot{2}} + ib_{i1})\,. \tag{2.132}$$

Используя произведение (2.69) получаем для вакуума Π реализацию в терминах звездочной алгебры

$$\Pi = \exp\left\{ -2e^1_{\nu 1}f^1{}_1{}^\nu - 2e^1_{\nu 2}f^1{}_2{}^\nu - 2e^2_{\nu 1}f^2{}_1{}^\nu - 2e^2_{\nu 2}f^2{}_2{}^\nu \right\}. \tag{2.133}$$

Преобразование Боголюбова связывает модуль $\left|C^{11}(x_0)\right\rangle \simeq (\mathrm{tw}\otimes\mathrm{tw})$ с модулем $F_{\mathrm{tw}\otimes\mathrm{tw}}$. С помощью автоморфизмов ρ_i, ψ_+, ψ_-, χ, $\bar{\rho}_i$, $\bar{\psi}_+$, $\bar{\psi}_-, \bar{\chi}$ и их аналогов на осцилляторах $\{e^i_{\nu A}, f^i{}_A{}^\nu\}$ получим остальные B_2-модули и дуальные им $\mathfrak{su}(2,2)$-модули, стартуя с сопоставления $(\mathrm{tw}\otimes\mathrm{tw}) \leftrightarrow F_{\mathrm{tw}\otimes\mathrm{tw}}$.

В использованном выше подходе к описанию B_2-уравнений (2.104), каждый B_2-модуль имел один и тот же базовый модуль Фока, но отличающиеся реализации алгебры AdS_4. Эта же конструкция переносится на представления $\mathfrak{su}(2,2)$ в терминах осцилляторов $\{e^i_{\nu A}, f^i{}_A{}^\nu\}$. Вообще говоря, можно было поступать альтернативным образом, так как действие автоморфизмов на фоковский вакуум при сохранении реализации генераторов алгебры также воспроизводит все возможные B_2-модули. Другими словами, применение автоморфизма изменяет разбиение базового модуля Фока на подмодули спина s фоновой алгебры изометрий.

Для дальнейшего анализа примем альтернативный способ построения модулей, применяя автоморфизмы ρ_i, ψ_+, ψ_- для $\{a_{iA}, b_{jB}\}$ и $\{e^i_{\nu A}, f^i{}_A{}^\nu\}$ к соответствующим базовым модулям Фока. Поскольку полный спектр представлений остается одинаковым в обеих осцилляторных реализациях, мы можем установить соответствие представлений, выраженных через любой из наборов осцилляторов. В некоторых представлениях может оказаться, что вакуум не является собственным относительно энергии E или спина H, как это было в случае (2.112). Тогда модуль не является модулем старшего или младшего веса. Унитарность представления $\mathfrak{su}(2,2)$ может быть явно проверена. Операторы рождения и уничтожения для рассматриваемого вакуума должны быть сопряжены, что гарантирует положительную определенность билинейной формы, а компактные генераторы $\tau^{i}_{A\nu}{}^{\mu}$, энергия E^i и спин H^i должны быть эрмитовы, причем некомпактные генераторы должны сопрягаться друг в друга $(t^{+\mu}_{\ \ \nu})^\dagger = t^{-\mu}_{\ \ \nu}$, что дает инвариантность билинейной формы. Поскольку мы сохраняем реализацию $\mathfrak{su}(2,2)$ неизменной, этих условий достаточно для фиксации сопряжения в осцилляторах $\{e^{i}_{\nu A}\,, f^{i}{}_{A}{}^{\nu}\}$ одинаковым для всех модулей. Потребуем

$$(e^{i}_{\nu A})^\dagger = f^{i}{}_{A}{}^{\nu}\,. \tag{2.134}$$

Однако эти правила сопряжения могут привести к тому, что вакуум $\rho(\Pi)$ не будет самосопряженным. Это автоматически означает, что соответствующий модуль не является унитарным. Как будет показано далее, во всех случаях, за исключением запутанных модулей, вакуум $\rho(\Pi)$ является самосопряженным относительно правил сопряжения (2.134).

Начнем с иллюстрации описанной выше процедуры на примере стандартной теории высших спинов, а затем расширим ее до B_2-модулей.

2.3.3 Анализ модулей стандартной теории ВС

Предъявленная в разделе 2.3.2 процедура анализа модулей применима к случаю группы Коксетера A_1, т. е. стандартным высшим спинам [55], если опустить индекс Коксетера i и автоморфизмы $\psi_\pm$ (2.100), (2.101).

Твистованно-присоединенный модуль стандартной теории F_{tw}, описывающий физическую часть поля $C(Y;K|x)$, строится из вакуума (2.128). Правила сопряжения (2.134) переводят операторы рождения в операторы уничтожения. Вакуум $\Pi = |0\rangle_{\mathrm{tw}}$ является самосопряженным относительно $\dagger$.

Энергия неотрицательна и эрмитова, вакуум является собственным вектором

$$E = f_1{}^{\lambda} e_{\lambda 1} + f_2{}^{\lambda} e_{\lambda 2}, \quad E * |0\rangle_{\mathrm{tw}} = 2\,|0\rangle_{\mathrm{tw}}\,. \tag{2.135}$$

Оператор спина H также эрмитов и действует на вакуум домножением на константу, некомпактные генераторы $t^{\pm i\mu}{}_{\nu}$ выполняют роль повышающих/понижающих вес операторов обобщенного модуля Верма

$$H = f_1{}^{\lambda}e_{\lambda 1} - f_2{}^{\lambda}e_{\lambda 2}, \quad H * |0\rangle_{\rm tw} = 0, \quad t^{-\mu}{}_{\nu} * |0\rangle_{\rm tw} = 0\,, \quad t^{+\mu}{}_{\nu} * |0\rangle_{\rm tw} \neq 0\,. \tag{2.136}$$

Векторы $(e_{\nu 2})^n\,|0\rangle_{\rm tw}$ и $(f_1{}^{\mu})^m\,|0\rangle_{\rm tw}$ сингулярны относительно $t^{-\mu}{}_{\nu}$. Следовательно, они порождают неприводимые бесконечномерные непересекающиеся подмодули спиральности $(-n)$ и m.

Таким образом, $F_{\rm tw}$ является унитарным модулем младшего веса, раскладываемым в прямую сумму неприводимых бесконечномерных модулей всех спинов.

Присоединенный модуль $F_{\rm adj}$ получается применением автоморфизма ρ, соответствующего оператору Клейна k, к вакууму Π. Автоморфизм определяется по формуле

$$\rho(e_{\nu 2}) = -f_2{}^{\nu}, \quad \rho(f_2{}^{\nu}) = e_{\nu 2}\,, \tag{2.137}$$

а оставшиеся осцилляторы не преобразуются. Тогда вакуум задается формулой

$$\rho(\Pi) = |0\rangle_{\rm adj} = \exp\Big\{ - 2e_{\nu 1}f_1{}^{\nu} + 2e_{\nu 2}f_2{}^{\nu}\Big\}\,. \tag{2.138}$$

Непосредственно видно, что $\rho(\Pi)$ самосопряжен относительно $\dagger$. Операторами уничтожения для этого вакуума являются $\{e_{\nu 1}\,, e_{\nu 2}\}$, а значит модуль неунитарный, так как операторы рождения – это $\{f_1{}^{\nu}\,, -f_2{}^{\nu}\}$, и норма состояния $||(-f_2{}^{\nu}) * |0\rangle_{\rm adj}\,||^2 = -1$, т. е. операторы рождения и уничтожения не сопряжены. При этом модуль является представлением старшего веса, так как

$$E * |0\rangle_{\rm adj} = 0, \quad H * |0\rangle_{\rm adj} = 2\,|0\rangle_{\rm adj}\,, \quad t^{\pm\mu}{}_{\nu} * |0\rangle_{\rm adj} = 0\,. \tag{2.139}$$

Векторы $(f_2{}^{\nu})^n\,|0\rangle_{adj}$ сингулярны относительно $t^{-\mu}{}_{\nu}$ и порождают конечномерные подпредставления, так как кратные применения генераторов $t^{+\mu}{}_{\nu}$ аннигилируют эти векторы.

Стоит отметить, что унитарный левый модуль Фока, построенный из вакуума Π, отождествляется с удвоенным синглетонным пространством Фока, известным как дублетонное представление $\mathfrak{su}(2,2)$ [124; 125]. Дублетонное представление содержит все неприводимые четырехмерные безмассовые унитарные представления конформной алгебры. Как показано в [126; 127], стандартный присоединенный модуль соответствует тензорному произведению синглетона и анти-синглетона. Это произведение разлагается под действием фоновой алгебры изометрий на сумму всех различных присоединенных модулей спина s. Следовательно, действие автоморфизма ρ можно рассматривать как замену синглетона на анти-синглетон в тензорном произведении.

2.3.4 Анализ B_2 модулей

Теперь применим проиллюстрированную процедуру к модулям B_2-теории.

Модуль $R(k)\bar{R}(\bar{k})^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Согласно уравнению (2.44), данный случай соответствует модулю $(\mathrm{tw} \otimes \mathrm{tw})$. Дуальный ему модуль $F_{\mathrm{tw} \otimes \mathrm{tw}}$ строится из вакуума

$$|0\rangle_{\mathrm{tw}\otimes\mathrm{tw}} = \exp\Big\{ -2(e^1_{\nu 1} f^1{}_1{}^\nu + e^1_{\nu 2} f^1{}_2{}^\nu + e^2_{\nu 1} f^2{}_1{}^\nu + e^2_{\nu 2} f^2{}_2{}^\nu) \Big\}. \qquad (2.140)$$

Вакуум $|0\rangle_{\mathrm{tw}\otimes\mathrm{tw}}$ самосопряжен относительно

$$(e^i_{\nu A})^\dagger = f^i{}_A{}^\nu. \qquad (2.141)$$

Операторы энергии и спина являются эрмитовыми, а вакуум – это их собственный вектор

$$E = \sum_{i=1}^{2} \Big(f^i{}_1{}^\lambda e^i_{\lambda 1} + f^i{}_2{}^\lambda e^i_{\lambda 2} \Big), \quad H = \sum_{i=1}^{2} \Big(f^i{}_1{}^\lambda e^i_{\lambda 1} - f^i{}_2{}^\lambda e^i_{\lambda 2} \Big), \qquad (2.142)$$

$$E * |0\rangle_{\mathrm{tw}\otimes\mathrm{tw}} = 4\,|0\rangle_{\mathrm{tw}\otimes\mathrm{tw}}, \quad H * |0\rangle_{\mathrm{tw}\otimes\mathrm{tw}} = 0. \qquad (2.143)$$

Также очевидно, что вакуум $|0\rangle_{\mathrm{tw}\otimes\mathrm{tw}}$ аннигилируется некомпактным генератором, понижающим вес,

$$t^{-\mu}_{\ \ \nu} * |0\rangle_{\mathrm{tw}\otimes\mathrm{tw}} = 0, \quad t^{+\mu}_{\ \ \nu} * |0\rangle_{\mathrm{tw}\otimes\mathrm{tw}} \neq 0. \qquad (2.144)$$

Таким образом, $F_{\mathrm{tw}\otimes\mathrm{tw}}$ – унитарный модуль младшего веса. Для получения остальных B_2-модулей из $F_{\mathrm{tw}\otimes\mathrm{tw}}$ требуется применить комбинации автоморфизмов алгебры осцилляторов $\{e^i_{\nu A}, f^i{}_A{}^\nu\}$.

$$\textbf{Модуль } R(k)\bar{R}(\bar{k})^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \textbf{ и } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Соответствующие модули $F_{\mathrm{tw}\,\otimes\,\mathrm{adj}}$ и $F_{\mathrm{adj}\,\otimes\,\mathrm{tw}}$ получаются применением автоморфизмов, сопоставленных с $\hat{k}_1$ и $\hat{k}_2$. Например, для Клейна $\hat{k}_2$ нетривиальная часть автоморфизма:

$$\rho_2(e^2_{\nu 2}) = -f^2{}_2{}^\nu\,, \quad \rho_2(f^2{}_2{}^\nu) = e^2_{\nu 2}\,. \tag{2.145}$$

Вакуум в модуле $F_{\mathrm{tw}\,\otimes\,\mathrm{adj}}$ имеет вид

$$|0\rangle_{\mathrm{tw}\,\otimes\,\mathrm{adj}} = \rho_2(|0\rangle_{\mathrm{tw}\,\otimes\,\mathrm{tw}}) = \exp\Big\{ -2(e^1_{\nu 1}f^1{}_1{}^\nu + e^1_{\nu 2}f^1{}_2{}^\nu + e^2_{\nu 1}f^2{}_1{}^\nu - e^2_{\nu 2}f^2{}_2{}^\nu) \Big\}\,. \tag{2.146}$$

Из формулы для $|0\rangle_{\mathrm{tw}\,\otimes\,\mathrm{adj}}$ очевидно, что $F_{\mathrm{tw}\,\otimes\,\mathrm{adj}}$ является тензорным произведением присоединенного и твистованно-присоединенного модулей стандартной теории ВС. Операторами уничтожения для данного вакуума являются $\{e^1_{\nu 1}\,, e^2_{\nu 1}\,, f^1{}_2{}^\nu\,, e^2_{\nu 2}\}$. Модуль $F_{\mathrm{tw}\,\otimes\,\mathrm{adj}}$ – это неунитарный модуль младшего веса, но при этом он содержит унитарный подмодуль, выделяемый факторизацией по присоединенной части. В терминах полей это достигается путем ограничения $C(Y_1, Y_2, I; \hat{K}|x) = C(Y_2, I; \hat{K}|x)$ через наложение граничных условий (2.68). Аналогично применение автоморфизма ρ_1 ведет к неунитарному $F_{\mathrm{adj}\,\otimes\,\mathrm{tw}}$, имеющему унитарный подмодуль младшего веса. Подмодуль выделяется условием $C(Y_1, Y_2, I; \hat{K}|x) = C(Y_1, I; \hat{K}|x)$, эффективно реализуемым через (2.68).

$$\textbf{Модуль } R(k)\bar{R}(\bar{k})^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Данный модуль получается автоморфизмом $\rho_1\rho_2$, приводящим к вакууму

$$|0\rangle_{\mathrm{adj}\,\otimes\,\mathrm{adj}} = \rho_1\rho_2(|0\rangle_{\mathrm{tw}\,\otimes\,\mathrm{tw}}) = \exp\Big\{ -2(e^1_{\nu 1}f^1{}_1{}^\nu - e^1_{\nu 2}f^1{}_2{}^\nu + e^2_{\nu 1}f^2{}_1{}^\nu - e^2_{\nu 2}f^2{}_2{}^\nu) \Big\}\,. \tag{2.147}$$

Вакууму $|0\rangle_{\mathrm{adj}\,\otimes\,\mathrm{adj}}$ отвечают операторы уничтожения $\{e^1_{\nu 1}\,, e^2_{\nu 1}\,, e^1_{\nu 2}\,, e^2_{\nu 2}\}$. Очевидно, что результирующий модуль $F_{\mathrm{adj}\,\otimes\,\mathrm{adj}}$ является неунитарным, а единственный унитарный подмодуль – это тривиальное (константное) представление с полевой реализацией $C(Y_1, Y_2, I; \hat{K}|x) = C(0, 0, I; \hat{K}|0)$.

Модуль $R(k)\bar{R}(\bar{k})^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Для получения данных модулей требуются автоморфизмы ψ_+ и ψ_- (2.100), (2.101). Нетривиальная часть действия ψ_+ на $\{e^i_{\nu A}, {f^i}_A{}^\nu\}$ определяется формулами

$$\psi_+(e^1_{\nu 2}) = \frac{1}{2}(e^1_{\nu 2} - e^2_{\nu 2} - {f^1}_2{}^\nu - {f^2}_2{}^\nu), \quad \psi_+(e^2_{\nu 2}) = \frac{1}{2}(-e^1_{\nu 2} + e^2_{\nu 2} - {f^1}_2{}^\nu - {f^2}_2{}^\nu)\,,$$
$$\psi_+({f^1}_2{}^\nu) = \frac{1}{2}(e^1_{\nu 2} + e^2_{\nu 2} + {f^1}_2{}^\nu - {f^2}_2{}^\nu), \quad \psi_+({f^2}_2{}^\nu) = \frac{1}{2}(e^1_{\nu 2} + e^2_{\nu 2} - {f^1}_2{}^\nu + {f^2}_2{}^\nu)\,. \tag{2.148}$$

Под действием ψ_+ вакуум отображается в

$$\psi_+(|0\rangle_{\mathrm{tw}\otimes\mathrm{tw}}) = \exp\Big\{ -2(e^1_{\nu 1} f^{1\nu}_1 - e^1_{\nu 2} f^{2\nu}_2 + e^2_{\nu 1} f^{2\nu}_1 - e^2_{\nu 2} f^{1\nu}_2)\Big\}\,. \tag{2.149}$$

Множество операторов уничтожения для этого вакуума состоит из линейных комбинаций $\{e^i_{\nu A}, {f^i}_A{}^\nu\}$ и более удобно описывается в терминах осцилляторов $\{e^\pm_{\nu A}, {f^\pm}_A{}^\nu\}$: $\{e^+_{\nu 1}\,, e^-_{\nu 1}\,, e^+_{\nu 2}\,, {f^-}_2{}^\nu\}$. После перехода к удобным осцилляторам становится ясно, что модуль эквивалентен $F_{\mathrm{adj}\otimes\mathrm{tw}}$. Следовательно, факторизация по присоединенной части, порождаемой $\{{f^+}_1{}^\nu, -{f^+}_2{}^\nu\}$, приводит к унитарному модулю младшего веса, эквивалентному стандартному (tw)-модулю. Для полей факторизация эквивалентна ограничению $C(Y_1, Y_2, I; \hat{K}|x) = C(Y_1 - Y_2, I; \hat{K}|x)$. Точно так же можно показать, что автоморфизм ψ_- приводит к модулю $F_{\mathrm{tw}\otimes\mathrm{adj}}$, и унитарный подмодуль выделяется условием $C(Y_1, Y_2, I; \hat{K}|x) = C(Y_1 + Y_2, I; \hat{K}|x)$.

Модуль $R(k)\bar{R}(\bar{k})^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Оставшиеся два значения произведения $R(k)\bar{R}(\bar{k})^T$ отвечают запутанным модулям. Они получаются с помощью автоморфизмов $\rho_1\psi_+$ и $\rho_2\psi_+$. Рассмотрим автоморфизм $\rho_1\psi_+$. Его применение к $|0\rangle_{\mathrm{tw}\otimes\mathrm{tw}}$ ведет к

$$|0\rangle_{ent} = \exp\Big\{ -2(e^1_{\nu 1} {f^1}_1{}^\nu - e^1_{\nu 2} e^2_{\nu 2} + e^2_{\nu 1} {f^2}_1{}^\nu + {f^1}_2{}^\nu {f^2}_2{}^\nu)\Big\}\,. \tag{2.150}$$

Из формулы для $|0\rangle_{ent}$ ясно, что этот вакуум не является самосопряженным относительно правил сопряжения (2.134)

$$|0\rangle^\dagger_{ent} = \exp\Big\{ -2(e^1_{\nu 1} {f^1}_1{}^\nu - {f^1}_2{}^\nu {f^2}_2{}^\nu + e^2_{\nu 1} {f^2}_1{}^\nu + e^1_{\nu 2} e^2_{\nu 2})\Big\} \neq |0\rangle_{ent}\,. \tag{2.151}$$

Чтобы определить билинейную форму, требуется ввести другие правила сопряжения на осцилляторах $\{e^i_{\nu A}, f^i{}_A{}^\nu\}$:

$$(e^i_{\nu 1})^\dagger = f^i{}_1{}^\nu\,, \quad (e^1_{\nu 2})^\dagger = f^1{}_2{}^\nu\,, \quad (e^2_{\nu 2})^\dagger = -f^2{}_2{}^\nu\,. \tag{2.152}$$

Альтернативный † приводит к неправильному сопряжению некомпактных генераторов: $(t^{+1}{}^\mu_\nu)^\dagger = t^{-1}{}^\mu_\nu\,, (t^{+2}{}^\mu_\nu)^\dagger = -t^{-2}{}^\mu_\nu$, т. е. билинейная форма не инвариантна.

Операторы уничтожения имеют вид:

$$v^-_{\nu a} = \{e^1_{\nu 1}\,, e^2_{\nu 1}\,, \frac{1}{\sqrt{2}}(f^2{}_2{}^\nu - e^1_{\nu 2})\,, \frac{1}{\sqrt{2}}(f^1{}_2{}^\nu - e^2_{\nu 2})\}\,, \tag{2.153}$$

а операторы рождения:

$$v^+_{\nu a} = \{f^1{}_1{}^\nu\,, f^2{}_1{}^\nu\,, \frac{1}{\sqrt{2}}(e^2_{\nu 2} + f^1{}_2{}^\nu)\,, \frac{1}{\sqrt{2}}(e^1_{\nu 2} + f^2{}_2{}^\nu)\}\,. \tag{2.154}$$

Для них выполняются стандартные коммутационные соотношения

$$[v^-_{\nu a}\,, v^+_{\mu b}] = \delta_{\nu\mu}\delta_{ab}\,. \tag{2.155}$$

Можно проверить, что норма $||v^+_{\nu 3} * |0\rangle_{ent}\,||^2 = -1$, т. е. билинейная форма не положительно определена. Таким образом, запутанный модуль не имеет унитарного дуального модуля. Более того, дуальный модуль теряет весовую структуру. Хотя для некомпактного генератора $t^-{}^\mu_\nu$ аннигиляция вакуума сохраняется

$$t^-{}^\mu_\nu = e^1_{\nu 1} f^1{}_2{}^\mu + e^2_{\nu 1} f^2{}_2{}^\mu \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(v^-_{\nu 1}(v^-_{\mu 4} + v^+_{\mu 3}) + v^-_{\nu 2}(v^+_{\mu 4} + v^-_{\mu 3})\Big) \Rightarrow \tag{2.156}$$

$$t^-{}^\mu_\nu * |0\rangle_{ent} = 0\,, \quad t^-{}^\mu_\nu * G(v^+_3\,, v^+_4) * |0\rangle_{ent} = 0\,, \text{ для любой функции } G(v^+_3\,, v^+_4)\,, \tag{2.157}$$

но, так же как для запутанных модулей в терминах $\{a_{iA}, b_{jB}\}$-осцилляторов (2.112), вакуум не является собственным относительно операторов энергии и спина.

$$E = \sum_{i=1}^{2}\Big(f^i{}_1{}^\lambda e^i_{\lambda 1} + f^i{}_2{}^\lambda e^i_{\lambda 2}\Big) \equiv (v^+_{\lambda 1}v^-_{\lambda 1} + v^+_{\lambda 2}v^-_{\lambda 2} + v^+_{\lambda 3}v^+_{\lambda 4} - v^-_{\lambda 3}v^-_{\lambda 4})\,, \tag{2.158}$$

$$H = \sum_{i=1}^{2}\Big(f^i{}_1{}^\lambda e^i_{\lambda 1} - f^i{}_2{}^\lambda e^i_{\lambda 2}\Big) \equiv (v^+_{\lambda 1}v^-_{\lambda 1} + v^+_{\lambda 2}v^-_{\lambda 2} - v^+_{\lambda 3}v^+_{\lambda 4} + v^-_{\lambda 3}v^-_{\lambda 4})\,, \tag{2.159}$$

$$E*|0\rangle_{ent}=2(1+(e^1_{\nu 2}+f^2{}_2{}^\nu)(e^2_{\nu 2}+f^1{}_2{}^\nu))\,|0\rangle_{ent}=2(1+2v^+_{\lambda 3}v^+_{\lambda 4})\,|0\rangle_{ent}\,, \qquad (2.160)$$

$$H*|0\rangle_{ent}=2(1-(e^1_{\nu 2}+f^2{}_2{}^\nu)(e^2_{\nu 2}+f^1{}_2{}^\nu))\,|0\rangle_{ent}=2(1-2v^+_{\lambda 3}v^+_{\lambda 4})\,|0\rangle_{ent}\,. \qquad (2.161)$$

Недиагонализуемость энергии можно проиллюстрировать на примере полей $C(Y_1,Y_2,I;\hat{k},\hat{\bar{k}}|x)$, взяв плоский предел в свободных уравнениях. Для этого нужно восстановить радиус AdS_4 в уравнении (2.47) и взять предел $\lambda\to 0$ после перемасштабирования $y^\alpha\to\lambda^{1/2}y^\alpha; \quad \partial_\alpha=\lambda^{-1/2}\partial_\alpha$. Это приводит к уравнению

$$\left(\mathrm{d}_x+\frac{i}{2}e^{\alpha\dot\alpha}\left(\partial_{\alpha 1}\bar\partial_{\dot\alpha 1}+\partial_{\alpha 1}\bar\partial_{\dot\alpha 2}+\partial_{\alpha 2}\bar\partial_{\dot\alpha 2}-\partial_{\alpha 2}\bar\partial_{\dot\alpha 1}\right)\right)C(Y_1,Y_2,I;\hat{k},\hat{\bar{k}}|x)=0\,. \qquad (2.162)$$

Данное уравнение допускает решение в виде плоской волны

$$C(Y_1,Y_2,I;\hat{k},\hat{\bar{k}}|x)=\exp\left\{i\left(A^{IJ}\xi_{I\alpha}\bar\xi_{J\dot\alpha}x^{\alpha\dot\alpha}+\delta^{IJ}\xi_{I\alpha}y^\alpha_J+\delta^{IJ}\bar\xi_{I\dot\alpha}\bar{y}^{\dot\alpha}_J\right)\right\}, \qquad (2.163)$$

где ξ, $\bar\xi$ – это фурье-партнеры к переменным y и $\bar{y}$ и

$$A^{IJ}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}. \qquad (2.164)$$

Непосредственно проверяется, что матрица A не диагонализуется над полем вещественных чисел, а значит разделение на положительно и отрицательно частотные решения невозможно, т. е. запутанный модуль не является модулем старшего или младшего веса.

2.3.5 Редукция к унитарным подмодулям

Чтобы интерпретировать B_2 КВС-теорию как обобщение стандартной теории ВС, необходимо найти способ устранения модулей, не имеющих унитарного дуального партнера, из сектора полей ноль-форм на уровне полной нелинейной теории. Нелинейная система (2.15)–(2.19) допускает автоморфизм четности $\hat{K}_v\to-\hat{K}_v$. Этот автоморфизм является прямым обобщением автоморфизма $K\to-K$ из обычной теории ВС, позволяющего разделить физический и топологический сектор. Нетрудно найти инвариантную относительно автоморфизма $\hat{K}_v\to-\hat{K}_v$ подсистему. Из всех нелинейных уравнений только последнее уравнение (2.19) имеет явную зависимость от операторов Клейна

$$S*S=i\left(dZ^{An}dZ_{An}+\sum_i\sum_{v\in\mathcal{R}_i}\left[\eta_i B\frac{v^n v^m}{(v,v)}dz^\alpha_n dz_{\alpha m}*\varkappa_v\hat{k}_v+\text{к.с.}\right]\right). \qquad (2.165)$$

Требование инвариантности относительно автоморфизма четности накладывает ограничения на четность мастер-полей

$$B(Y,Z,I;-\hat{K}|x) = -B(Y,Z,I;\hat{K}|x)\,, \quad W(Y,Z,I;-\hat{K}|x) = W(Y,Z,I;\hat{K}|x)\,. \tag{2.166}$$

В контексте B_2-модели требование нечетности мастер-поля $B(Y,Z,I;\hat{K}|x)$ производит ограничение сектора ноль-форм до модулей $(\mathrm{tw}\otimes\mathrm{adj})$ и $(\mathrm{adj}\otimes\mathrm{tw})$. Как было установлено выше, наложение граничных условий (2.68) оставляет от модулей $(\mathrm{tw}\otimes\mathrm{adj})$ и $(\mathrm{adj}\otimes\mathrm{tw})$ лишь твистованно-присоединенные компоненты, имеющие комплексно-эквивалентные унитарные модули. Усеченные поля ноль-формы ассоциируются с обобщенными тензорами Вейля и их потомками, т. е. описывают безмассовые одночастичные состояния стандартной теории.

2.4 Выводы

Суммируя результаты, полученные в данной главе, было установлено существование двух типов модулей в рамках КВС-теории: распутываемые и запутанные. Первые являются многочастичными состояниями, образованными из модулей (tw) и (adj) стандартной теории высших спинов, а последние – это бесконечномерные модули нового вида, требующие дальнейшего изучения.

В рамках B_2-теории, интерес к которой мотивирован гипотезой о связи с теорией струн [77], были найдены модули четырех категорий: $(\mathrm{adj}\otimes\mathrm{adj})$, $(\mathrm{tw}\otimes\mathrm{tw})$, $(\mathrm{tw}\otimes\mathrm{adj})$ и $(\mathrm{adj}\otimes\mathrm{tw})$, а также два запутанных модуля. Модуль $(\mathrm{tw}\otimes\mathrm{tw})$ обладает унитарным комплексно-эквивалентным модулем. Модули $(\mathrm{adj}\otimes\mathrm{adj})$, $(\mathrm{tw}\otimes\mathrm{adj})$ и $(\mathrm{adj}\otimes\mathrm{tw})$ имеют унитарные подмодули младшего веса, выделяемые с помощью граничных условий (2.68). Для первого модуля соответствующий подмодуль – это константа, а для оставшихся двух – (tw). При этом автоморфизм четности $\hat{K}_v \to -\hat{K}_v$ ограничивает поля ноль-формы до модулей $(\mathrm{tw}\otimes\mathrm{adj})$ и $(\mathrm{adj}\otimes\mathrm{tw})$.

Усечение до унитарных подмодулей в полной нелинейной системе менее очевидно из-за нетривиального смешивания различных модулей B_2. Эта ситуация напоминает аналогичную проблему перепутывания топологических и динамических полей в трехмерной теории ВС [128—130], так что решение за пределами линейного порядка, вероятно, может быть получено по теории возмущений с помощью подходящей сдвинутой [131] или дифференциальной [132] гомотопии.

Было показано, что запутанные B_2-модули не имеют дуального унитарного модуля старшего или младшего веса. Тем не менее, с помощью нелокального преобразования и нарушающей сопряженность замены осцилляторных переменных можно свести уравнение для запутанного модуля к уравнению на модуль $(\mathrm{tw} \otimes \mathrm{tw})$. Это позволяет применить результаты анализа динамического содержания развернутой $(\mathrm{tw} \otimes \mathrm{tw})$-системы [86] к запутанным уравнениям.

Для доказательства существования или отсутствия дуального унитарного модуля старшего или младшего веса B_2-система была переформулирована в терминах удвоенного набора осцилляторов и модулей Фока, аналогично работе [84]. Данная процедура обобщена на случай модулей КВС-теорий с группой B_p старших рангов и, возможно, допускает обобщение для других групп Кокстера.

Результаты главы опубликованы в работе [100]. Основные результаты, описанные в главе, следующие:

1. Показано разделение $\mathcal{C}$-модулей на два типа: распутываемые модули и запутанные модули. Предъявлен критерий распутываемости, позволяющий выделить модули, эквивалентные тензорным произведениям присоединенных и твистованно-присоединенных модулей стандартной теории высших спинов.

2. Получен полный список B_2-модулей. Построена реализация B_2-модулей в терминах левых модулей Фока на основе удвоенного набора осцилляторов.

3. Модули B_2 классифицированы по наличию комплексно-эквивалентного унитарного модуля старшего или младшего веса посредством комплексного преобразования Боголюбова. Предъявлен способ устранения неунитарных модулей из сектора ноль-форм на уровне линейной теории. Найдены граничные условия на поля $C(Y_1, Y_2, I; \hat{k}, \hat{\hat{k}}|x)$, ограничивающие модули $(\mathrm{tw} \otimes \mathrm{adj})$ и $(\mathrm{adj} \otimes \mathrm{tw})$ до унитарных подмодулей.

Глава 3

B_2 расширение теории высших спинов: динамическое содержание

Глава основана на статье [99]. В ней будет проведен анализ динамического содержания уравнений ковариантного постоянства для полей ранга-2, возникающих из КВС-теории B_2 в пространстве AdS_4. В разделе 3.1 будут вычислены когомологии $H(\sigma_-)$ для модуля $(\mathrm{adj}\otimes\mathrm{adj})$ и показано, что соответствующие один-формы ω описывают симметричные безмассовые поля и частично-безмассовые поля всех глубин безмассовости. Также будут вычислены когомологии σ_- для модуля $(\mathrm{tw}\otimes\mathrm{adj})$ в разделе 3.2. В конце в разделе 3.3 будет рассмотрено устройство склейки сектора полей один-форм $(\mathrm{adj}\otimes\mathrm{adj})$ с сектором ноль-форм $(\mathrm{tw}\otimes\mathrm{adj})$ и $(\mathrm{adj}\otimes\mathrm{tw})$, осуществляемой посредством вершин $\Upsilon(\Omega_{AdS},\Omega_{AdS},C)$. Выводы по главе приведены в разделе 3.4.

3.1 Сектор один-форм $(\mathrm{adj}\otimes\mathrm{adj})$

В этом разделе будет рассмотрено динамическое содержание уравнений для поля один-формы ω, отвечающей модулю $(\mathrm{adj}\otimes\mathrm{adj})$, полученному в рамках B_2-КВС-теории в главе 2. В соответствии с обсуждением в предыдущей главе, модуль $(\mathrm{adj}\otimes\mathrm{adj})$ возникает в секторе I_1I_2, и ему отвечают 8 компонентных полей в $\omega(Y_1,Y_2,I_1I_2;\hat{K}|x)$, т. е.

$$\hat{K}=\{1,\hat{k}_1\hat{\hat{k}}_1,\hat{k}_2\hat{\hat{k}}_2,\hat{k}_{12}\hat{\hat{k}}_{12},\hat{k}^+_{12}\hat{\hat{k}}^+_{12},\hat{k}_1\hat{k}_2\hat{\hat{k}}_1\hat{\hat{k}}_2,\hat{k}_1\hat{k}_{12}\hat{\hat{k}}_1\hat{\hat{k}}_{12},\hat{k}_2\hat{k}_{12}\hat{\hat{k}}_2\hat{\hat{k}}_{12}\}\,. \tag{3.1}$$

Так как уравнения для компонентных полей имеют одинаковый вид, далее будем рассматривать уравнение на компоненту $\omega(Y_1,Y_2|x)*I_1I_2$.

Как было установлено в работе [100], линейное уравнение на компонентное поле $\omega(Y_1, Y_2|x) * I_1 I_2$ имеет вид

$$\mathcal{D}\omega(y_1,y_2,\bar{y}_1,\bar{y}_2,I_1I_2|x) \equiv \left[D_L + e^{\alpha\dot{\alpha}}\sum_{i=1}^{2}(\bar{y}_{i\dot{\alpha}}\partial_{i\alpha} + y_{i\alpha}\bar{\partial}_{i\dot{\alpha}})\right]\omega(y_1,y_2,\bar{y}_1,\bar{y}_2,I_1I_2|x) =$$
$$= -\frac{i\eta_1}{2}\bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\partial}_1^{\dot{\alpha}}\bar{\partial}_1^{\dot{\beta}}C(0,y_2,\bar{y}_1,\bar{y}_2,I_1I_2;\hat{k}_1|x) * \hat{k}_1 -$$
$$-\frac{i\eta_1}{2}\bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\partial}_2^{\dot{\alpha}}\bar{\partial}_2^{\dot{\beta}}C(y_1,0,\bar{y}_1,\bar{y}_2,I_1I_2;\hat{k}_2|x) * \hat{k}_2 -$$
$$-\frac{i\eta_2}{2}\bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\partial}_-^{\dot{\alpha}}\bar{\partial}_-^{\dot{\beta}}C(y_+,0,\bar{y}_+,\bar{y}_-,I_1I_2;\hat{k}_{12}|x) * \hat{k}_{12} -$$
$$-\frac{i\eta_2}{2}\bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\partial}_+^{\dot{\alpha}}\bar{\partial}_+^{\dot{\beta}}C(0,y_-,\bar{y}_+,\bar{y}_-,I_1I_2;\hat{k}_{12}^+|x) * \hat{k}_{12}^+ + \text{к.с.}, \qquad (3.2)$$

$$D_L\omega(y_1,y_2,\bar{y}_1,\bar{y}_2,I_1I_2|x) = \mathrm{d}_x\omega(y_1,y_2,\bar{y}_1,\bar{y}_2,I_1I_2|x) +$$
$$+\delta^{nm}\left(\varpi^{\alpha\beta}y_{n\alpha}\partial_{m\beta} + \bar{\varpi}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{y}_{n\dot{\alpha}}\bar{\partial}_{m\dot{\beta}}\right)\omega(y_1,y_2,\bar{y}_1,\bar{y}_2,I_1I_2|x)\,, \qquad (3.3)$$

где поля ноль-формы C соответствуют модулям $(\mathrm{tw}\otimes\mathrm{adj})$ и $(\mathrm{adj}\otimes\mathrm{tw})$.

Согласно выводам, сделанным в разделе 1.2.1 главы 1, для установления динамического содержания уравнений (3.2) требуется найти младшие когомологии $H^\bullet(\sigma_-)$. В связи с этим рассмотрим кольцо дифференциальных форм $\mathfrak{R} = \Lambda^\bullet(M)\otimes\mathbb{C}[y_1,y_2,\bar{y}_1,\bar{y}_2]$ со значениями в рядах от переменных Y_i^A. Его однородными элементами являются формы

$$\omega_{n,\bar{n};m,\bar{m}}(Y_1,Y_2\,|x,\mathrm{d}x) = \omega^{\alpha(n),\dot{\alpha}(\bar{n})|\beta(m),\dot{\beta}(\bar{m})}(x,\mathrm{d}x)\,y_{1\alpha(n)}\,\bar{y}_{1\dot{\alpha}(\bar{n})}y_{2\beta(m)}\,\bar{y}_{2\dot{\beta}(\bar{m})}\,, \qquad (3.4)$$

где индексы $(\alpha,\dot{\alpha})$ и $(\beta,\dot{\beta})$ не связаны какими-либо симметриями. Мультиспиноры в (3.4) принадлежат $\mathrm{Irrep}_{\mathfrak{so}(3,1)}\otimes\mathrm{Irrep}_{\mathfrak{so}(3,1)}$. Из ковариантной производной $\mathcal{D}$ в уравнении (3.2) видно, что $\mathfrak{so}(3,2)$ действует на кольце $\mathfrak{R}$ операторами

$$P_{\alpha\dot{\alpha}} = \delta^{ij}(y_{i\alpha}\bar{\partial}_{j\dot{\alpha}} + \partial_{i\alpha}\bar{y}_{j\dot{\alpha}})\,, \qquad (3.5)$$
$$L_{\alpha\alpha} = \delta^{ij}y_{i\alpha}\partial_{j\alpha}\,, \quad \bar{L}_{\dot{\alpha}\dot{\alpha}} = \delta^{ij}\bar{y}_{i\dot{\alpha}}\bar{\partial}_{j\dot{\alpha}}\,. \qquad (3.6)$$

Операторы $\{L,\bar{L},P\}$ не меняют полную степень монома по Y_i^A, так что кольцо $\mathfrak{R}$ как представление $\mathfrak{so}(3,2)$ раскладывается в прямую сумму однородных полиномов $\mathrm{PolyHom}(Y_1,Y_2;n)$ полной степени n

$$\mathfrak{R} \simeq \oplus_{n=0}^{\infty}\Lambda^\bullet(M)\otimes\mathrm{PolyHom}(Y_1,Y_2;n)\,. \qquad (3.7)$$

При этом $\mathrm{PolyHom}(Y_1, Y_2; n)$ тоже является приводимым и раскладывается в сумму конечномерных неприводимых модулей $\mathfrak{so}(3,2)$. С другой стороны, благодаря низкоразмерному изоморфизму $\mathfrak{so}(3,2) \simeq \mathfrak{sp}(4)$, можно рассматривать неприводимые $\mathfrak{so}(3,2)$-модули как неприводимые представления $\mathfrak{sp}(4)$. Более того, $\mathfrak{sp}(4)$-взгляд является предпочтительным, так как B_2-система записана в терминах двухкомпонентных спиноров с индексами $(\alpha\,,\dot{\alpha})$, объединяемыми в единый $\mathfrak{sp}(4)$-индекс $A \in \{1\,,\ldots\,,4\}$. Все конечномерные неприводимые представления $\mathfrak{sp}(4)$ исчерпываются не более чем двухрядными диаграммами Юнга. Разложение однородных полиномов $\mathrm{PolyHom}(Y_1, Y_2; n)$ в сумму $\mathfrak{sp}(4)$-неприводимых модулей можно провести с помощью дуальной алгебры.

Непосредственная проверка показывает, что следующие билинейные операторы, построенные из $(Y_i^A\,, \partial_{iA})$, коммутируют с алгеброй $\mathfrak{so}(3,2) \simeq \mathfrak{sp}(4)$, порожденной (3.5)–(3.6)

$$E_h = y_1^\alpha \partial_{2\alpha} + \bar{y}_1^{\dot{\alpha}} \bar{\partial}_{2\dot{\alpha}} = Y_1^A \partial_{2A}\,, \quad F_h = y_2^\alpha \partial_{1\alpha} + \bar{y}_2^{\dot{\alpha}} \bar{\partial}_{1\dot{\alpha}} = Y_2^A \partial_{1A}\,, \tag{3.8}$$

$$H_h = N_1 - N_2 + \bar{N}_1 - \bar{N}_2 = Y_1^A \partial_{1A} - Y_2^A \partial_{2A}\,, \tag{3.9}$$

где

$$N_i = y_i^\alpha \partial_{i\alpha}\,, \quad \bar{N}_i = \bar{y}_i^{\dot{\alpha}} \bar{\partial}_{i\dot{\alpha}}\,, \tag{3.10}$$

и

$$E_v = y_{1\alpha} y_2^\alpha + \bar{y}_{1\dot{\alpha}} \bar{y}_2^{\dot{\alpha}} = Y_{1A} Y_2^A\,, \quad F_v = \partial_{2\alpha} \partial_1^\alpha + \bar{\partial}_{2\dot{\alpha}} \bar{\partial}_1^{\dot{\alpha}} = \partial_{2A} \partial_1^A\,, \tag{3.11}$$

$$H_v = N_1 + N_2 + \bar{N}_1 + \bar{N}_2 + 4 = Y_i^A \partial_{jA} \delta^{ij} + 4\,. \tag{3.12}$$

Наборы операторов $\{E_h\,, F_h\,, H_h\}$ и $\{E_v\,, F_v\,, H_v\}$ коммутируют друг с другом и образуют алгебру $\mathfrak{sl}^h(2) \oplus \mathfrak{sl}^v(2)$ (горизонтальную и вертикальную) с коммутационными соотношениями:

$$\begin{aligned}
&[E_h, F_h] = H_h\,, &&[E_v, F_v] = H_v\,,\\
&[H_h, E_h] = 2E_h\,, &&[H_v, E_v] = 2E_v\,,\\
&[H_h, F_h] = -2F_h\,, &&[H_v, F_v] = -2F_v\,.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Имеется естественное соответствие между векторами (старшего веса, младшего веса) алгебры $\mathfrak{sl}^h(2) \oplus \mathfrak{sl}^v(2)$ и не более чем двухрядными диаграммами Юнга $\mathfrak{sp}(4)$. Далее не будем писать явно (старшего веса, младшего веса), а примем краткие обозначения (HW, LW).

Рассмотрим однородный полином

$$\psi_{n+m}(Y_1\,,Y_2) = \psi_{A(n)|B(m)} Y_1^{A(n)} Y_2^{B(m)}\,. \tag{3.14}$$

Тогда

$$E_h\psi_{n+m}(Y_1,Y_2) = Y_1^A\partial_{2A}\psi_{n+m}(Y_1,Y_2) = 0\text{: условие Юнга для } \psi_{A(n)|B(m)}\,, \tag{3.15}$$

$$F_v\psi_{n+m}(Y_1,Y_2) = \partial_{2A}\partial_1^A\psi_{n+m}(Y_1,Y_2) = 0\text{: } \mathfrak{sp}(4)\text{-бесследовость } \psi_{A(n)|B(m)}\,, \tag{3.16}$$

$$H_h\psi_{n+m}(Y_1,Y_2) = (n-m)\psi_{n+m}(Y_1,Y_2) = \lambda_h\psi_{n+m}(Y_1,Y_2)\,, \tag{3.17}$$

$$H_v\psi_{n+m}(Y_1,Y_2) = (n+m+4)\psi_{n+m}(Y_1,Y_2) = \lambda_v\psi_{n+m}(Y_1,Y_2)\,, \tag{3.18}$$

т. е. λ_h – это разность длин строк, λ_v – число ящиков, и

$$\psi_{n+m}(Y_1,Y_2) \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{|c|}\hline \quad\quad n \quad\quad \\ \hline m \\ \cline{1-1}\end{array}\right|_{\mathfrak{sp}(4)} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{|c|}\hline \quad\quad (n+m)/2 \quad\quad \\ \hline (n-m)/2 \\ \cline{1-1}\end{array}\right|_{\mathfrak{so}(3,2)}\,. \tag{3.19}$$

Таким образом, имеется взаимно-однозначное соответствие между (HW, LW) векторами $\mathfrak{sl}^h(2)\oplus\mathfrak{sl}^v(2)$ в кольце $\mathfrak{R}$ и неприводимыми $\mathfrak{sp}(4)$-модулями. В этом случае алгебры $\mathfrak{sl}^h(2)\oplus\mathfrak{sl}^v(2)$ и $\mathfrak{sp}(4)$ образуют Хау-дуальную пару [87], что приводит к разложению кольца форм в сумму тензорных произведений неприводимых представлений $\mathfrak{sl}^h(2)\oplus\mathfrak{sl}^v(2)$ и $\mathfrak{sp}(4)$, параметризованных весами (λ_h,λ_v):

$$\mathfrak{R} \simeq \bigoplus_{\lambda_h,\lambda_v} \mathrm{Irrep}^{\lambda_h,\lambda_v}_{\mathfrak{sl}(2)\oplus\mathfrak{sl}(2)} \otimes \mathrm{Irrep}^{\lambda_h,\lambda_v}_{\mathfrak{sp}(4)}\,. \tag{3.20}$$

Другими словами, каждый элемент кольца $\mathfrak{R}$ представим в виде линейной комбинации (HW, LW) векторов $\mathfrak{sl}^h(2)\oplus\mathfrak{sl}^v(2)$ и их потомков, так как модули $\mathrm{Irrep}^{\lambda_h,\lambda_v}_{\mathfrak{sl}(2)\oplus\mathfrak{sl}(2)}$ образуют пространства кратностей для представлений $\mathrm{Irrep}^{\lambda_h,\lambda_v}_{\mathfrak{sp}(4)}$. Тем самым задача разложения поля $\omega(Y_1,Y_2|x)*I_1I_2$ на неприводимые представления $\mathfrak{sp}(4)$ сводится к нахождению полного списка (HW, LW) векторов $\mathfrak{sl}^h(2)\oplus\mathfrak{sl}^v(2)$, определяемых дифференциальными уравнениями (3.15) и (3.16).

Решим уравнения, определяющие (HW, LW) векторы $\mathfrak{sl}^h(2)\oplus\mathfrak{sl}^v(2)$. Нетрудно установить, что общее решение условия Юнга (3.15) дается полиномами

$$\psi(Y_1,Y_2) = \sum_{\lambda_h,r,p,q}\ \sum_{n+m=\lambda_h} {\psi^{\lambda_h}}_{\alpha(n+r),\dot\alpha(m+r)} y_1^{\alpha(n)}\bar y_1^{\dot\alpha(m)} X^{\alpha\dot\alpha(r)}\zeta^p\bar\zeta^q, \tag{3.21}$$

где для удобства были введены вспомогательные переменные, выражаемые через $(y_i, \bar{y}_i)$,

$$X^{\alpha\dot{\alpha}} = (y_1\bar{y}_2 - y_2\bar{y}_1)^{\alpha\dot{\alpha}}\,, \tag{3.22}$$

$$\zeta = y_{1\alpha}y_2^{\alpha}\,, \quad \bar{\zeta} = \bar{y}_{1\dot{\alpha}}\bar{y}_2^{\dot{\alpha}}\,. \tag{3.23}$$

Решения (3.21) имеют явную асимметрию в пользу переменных Y_1, что обусловлено выбором (HW, LW) векторов в качестве опорной точки. Если бы был сделан выбор в пользу (LW, LW) векторов, то соответствующее решение имело перевес в пользу переменных Y_2. При этом в независимости от выбора опорного вектора, полный модуль $\mathrm{Irrep}^{\lambda_h,\lambda_v}_{\mathfrak{sl}(2)\oplus\mathfrak{sl}(2)}$ описывает все возможные полиномы от Y_1 и Y_2 при заданных весах, что становится ясно из формул для повышающих и понижающих генераторов (3.8).

Заметим, что горизонтальная $\mathfrak{sl}^h(2)$ не действует на переменных $\{X, \zeta, \bar{\zeta}\}$

$$\begin{aligned} F_h\bigg(y_1^{\alpha(n)}\bar{y}_1^{\dot{\alpha}(m)}X^{\alpha\dot{\alpha}(r)}\zeta^p\bar{\zeta}^q\bigg) = n y_1^{\alpha(n-1)}y_2^{\alpha}\bar{y}_1^{\dot{\alpha}(m)}X^{\alpha\dot{\alpha}(r)}\zeta^p\bar{\zeta}^q + \\ + m y_1^{\alpha(n)}\bar{y}_1^{\dot{\alpha}(m-1)}\bar{y}_2^{\dot{\alpha}}X^{\alpha\dot{\alpha}(r)}\zeta^p\bar{\zeta}^q\,, \end{aligned} \tag{3.24}$$

$$H_h\bigg(y_1^{\alpha(n)}\bar{y}_1^{\dot{\alpha}(m)}X^{\alpha\dot{\alpha}(r)}\zeta^p\bar{\zeta}^q\bigg) = (n+m)y_1^{\alpha(n)}\bar{y}_1^{\dot{\alpha}(m)}X^{\alpha\dot{\alpha}(r)}\zeta^p\bar{\zeta}^q\,, \tag{3.25}$$

$$H_v\bigg(y_1^{\alpha(n)}\bar{y}_1^{\dot{\alpha}(m)}X^{\alpha\dot{\alpha}(r)}\zeta^p\bar{\zeta}^q\bigg) = (n+m+2r+2p+2q+4)y_1^{\alpha(n)}\bar{y}_1^{\dot{\alpha}(m)}X^{\alpha\dot{\alpha}(r)}\zeta^p\bar{\zeta}^q\,. \tag{3.26}$$

Для упрощения встречаемых далее формул переопределим λ_v так, чтобы $\lambda_v = 2(p+q+r)$. Это допустимо, поскольку исходные $\mathfrak{sl}^h(2)\oplus\mathfrak{sl}^v(2)$ веса и переопределенный набор параметров (λ_h, λ_v) кодируют одинаковый объем информации о рассматриваемом модуле.

Несложно убедиться, что в классе полиномов (3.21) условие бесследовости (3.16) удовлетворяется функциями

$$\Psi^{\vec{\lambda}l}{}_{n,m,r}(Y_1,Y_2) = \left(\sum_{p+q=l}\Gamma^{p,q}_{n,m,r}\zeta^p\bar{\zeta}^q\right)\psi^{\vec{\lambda}}{}_{\alpha(n+r),\dot{\alpha}(m+r)}y_1^{\alpha(n)}\bar{y}_1^{\dot{\alpha}(m)}X^{\alpha\dot{\alpha}(r)}\,, \tag{3.27}$$

где коэффициенты Γ выражаются как

$$\Gamma^{p,q}_{n,m,r} = (-1)^q\frac{l!}{p!q!(n+r+p+1)!(m+r+q+1)!}\,, \tag{3.28}$$

$$\vec{\lambda} = (\lambda_h, \lambda_v): \quad \lambda_h = n+m\,, \quad \lambda_v = 2(l+r)\,. \tag{3.29}$$

В соответствии с обсуждением в начале раздела, полиномы (3.27) дают полный список (HW, LW) векторов $\mathfrak{sl}^h(2) \oplus \mathfrak{sl}^v(2)$ в кольце $\mathfrak{R}$, а значит и список всех возможных неприводимых представлений $\mathfrak{sp}(4)$, описываемых не более чем двухрядными диаграммами Юнга. Согласно следствию Хау-дуальности (3.20), разложение $\mathfrak{R}$ в терминах полиномов строится с помощью векторов (3.27), а также их потомков, получаемых применением операторов $\{F_h, E_v\}$. Далее ограничим один-формы ω на класс (HW, LW) векторов (3.27) и рассмотрим действие ковариантной производной $\mathcal{D}$ на каждом неприводимом представлении $\mathfrak{sp}(4)$. Из этого действия установим вид оператора σ_- и перейдем к вычислению $H(\sigma_-)$.

Естественный способ определения градуировки и оператора σ_- как прямого обобщения σ_- из анализа содержания стандартной теории ВС раздела 1.4 главы 1 не согласуется с требованием действия на неприводимых $\mathfrak{sp}(4)$-модулях. Действительно, непосредственно проверяется, что наивно определенный оператор σ_- не будет коммутировать с алгеброй $\mathfrak{sl}^h(2) \oplus \mathfrak{sl}^v(2)$, а значит его применение выводит за пределы неприводимого $\mathfrak{sp}(4)$-модуля. Тем не менее, мы можем корректно определить действие σ_- на неприводимых модулях, поскольку они полностью определяются набором $\mathfrak{so}(3,1)$-мультиспиноров. Для заданного неприводимого представления $\mathfrak{sp}(4)$ допустимо разложение в прямую сумму неприводимых $\mathfrak{so}(3,1)$-модулей, поскольку $\mathfrak{so}(3,1)$ является подалгеброй $\mathfrak{so}(3,2) \simeq \mathfrak{sp}(4)$.

$$\mathrm{Irrep}^{\vec{\lambda}}_{\mathfrak{so}(3,2)} = \bigoplus \mathrm{Irrep}^{\vec{\lambda}}_{\mathfrak{so}(3,2)\downarrow\mathfrak{so}(3,1)}\,, \tag{3.30}$$

$$\left.\begin{array}{|l|}\hline \quad\quad N \\ \hline M \\ \hline\end{array}\right|_{\mathfrak{so}(3,2)} = \bigoplus_{i=0}^{N-M}\bigoplus_{j=0}^{M} \left.\begin{array}{|l|}\hline \quad\quad M+i \\ \hline j \\ \hline\end{array}\right|_{\mathfrak{so}(3,1)}, \tag{3.31}$$

где $N = (\lambda_h + \lambda_v)/2$ и $M = \lambda_h/2$ связывают параметры представления $\mathfrak{sp}(4)$ и представления $\mathfrak{so}(3,2)$.

Таким образом, задача сводится к определению действия ковариантной производной $\mathcal{D}$ на мультиспинорах $\omega^{\vec{\lambda}}{}_{\alpha(n+r),\dot{\alpha}(m+r)}$. Введем два вспомогательных двухкомпонентных спинора $u^\alpha, \bar{u}^{\dot{\alpha}}$ и соответствующие им производные $\partial_\alpha\,, \bar{\partial}_{\dot{\alpha}}$. Мультиспиноры $\omega^{\vec{\lambda}}{}_{\alpha(n+r),\dot{\alpha}(m+r)}$ являются коэффициентами полинома от переменных $(u, \bar{u})$

$$\omega^{\vec{\lambda}l}{}_{n,m,r}(u,\bar{u}) = \omega^{\vec{\lambda}}{}_{\alpha(n+r),\dot{\alpha}(m+r)} u^{\alpha(n+r)} \bar{u}^{\dot{\alpha}(m+r)}\,. \tag{3.32}$$

С помощью вспомогательных спиноров полиномы класса (3.27) можно переписать в виде

$$\omega^{\vec{\lambda}l}_{\ \ n,m,r}=\frac{1}{(n+r)!(m+r)!}\left(\sum_{p+q=l}\Gamma^{p,q}_{n,m,r}\zeta^p\bar{\zeta}^q\right)\left(\partial_\alpha\bar{\partial}_{\dot\alpha}X^{\alpha\dot\alpha}\right)^r\left(\partial_\alpha y_1^\alpha\right)^n\left(\bar{\partial}_{\dot\alpha}\bar{y}_1^{\dot\alpha}\right)^m\times$$
$$\times\,\omega^{\vec{\lambda}l}_{\ \ n,m,r}(u,\bar{u})\,. \quad (3.33)$$

Так как $\omega^{\vec{\lambda}l}_{\ \ n,m,r}(u,\bar{u})$ – это полином степени $(n+r)$ по переменным u и $(m+r)$ относительно $\bar{u}$, то необходимость полагать $u=\bar{u}=0$ в (3.33) отсутствует.

Использованный прием позволяет преобразовать уравнение на поле второго ранга (3.2) в уравнение на поле первого ранга с гораздо более простым определением оператора σ_-.

Протягивание лоренцевой ковариантной производной D_L (3.3) через операторный префактор в (3.33) приводит к стандартному действию для полей ранга-1

$$D_L\omega^{\vec{\lambda}l}_{\ \ n,m,r}(u,\bar{u})=\left(\mathrm{d}_x+\omega(u\,,\partial)+\bar{\omega}(\bar{u}\,,\bar{\partial})\right)\omega^{\vec{\lambda}l}_{\ \ n,m,r}(u,\bar{u})\,, \quad (3.34)$$

$$\omega(u\,,\partial)=\omega^{\alpha\beta}u_\alpha\partial_\beta\,,\quad \bar{\omega}(\bar{u}\,,\bar{\partial})=\bar{\omega}^{\dot\alpha\dot\beta}\bar{u}_{\dot\alpha}\bar{\partial}_{\dot\beta}\,. \quad (3.35)$$

Действие оператора импульса $P_{\alpha\dot\alpha}$ дается формулой

$$e^{\alpha\dot\alpha}P_{\alpha\dot\alpha}\omega^{\vec{\lambda}l}_{\ \ n,m,r}(Y_1,Y_2)=$$
$$=\Bigg[\left(\sum_{p+q=l}\Gamma^{p,q}_{n-1,m+1,r}\zeta^p\bar{\zeta}^q\right)\left(\partial_\alpha\bar{\partial}_{\dot\alpha}X^{\alpha\dot\alpha}\right)^r\left(\partial_\alpha y_1^\alpha\right)^{n-1}\left(\bar{\partial}_{\dot\alpha}\bar{y}_1^{\dot\alpha}\right)^{m+1}n(m+r+l+2)e^{\alpha\dot\alpha}\bar{u}_{\dot\alpha}\partial_\alpha+$$
$$+\left(\sum_{p+q=l}\Gamma^{p,q}_{n+1,m-1,r}\zeta^p\bar{\zeta}^q\right)\left(\partial_\alpha\bar{\partial}_{\dot\alpha}X^{\alpha\dot\alpha}\right)^r\left(\partial_\alpha y_1^\alpha\right)^{n+1}\left(\bar{\partial}_{\dot\alpha}\bar{y}_1^{\dot\alpha}\right)^{m-1}m(n+r+l+2)e^{\alpha\dot\alpha}\bar{\partial}_{\dot\alpha}u_\alpha-$$
$$-\left(\sum_{p+q=l+1}\Gamma^{p,q}_{n,m,r-1}\zeta^p\bar{\zeta}^q\right)\left(\partial_\alpha\bar{\partial}_{\dot\alpha}X^{\alpha\dot\alpha}\right)^{r-1}\left(\partial_\alpha y_1^\alpha\right)^{n}\left(\bar{\partial}_{\dot\alpha}\bar{y}_1^{\dot\alpha}\right)^{m}r(n+m+r+1)e^{\alpha\dot\alpha}\bar{\partial}_{\dot\alpha}\partial_\alpha+$$
$$+\left(\sum_{p+q=l-1}\Gamma^{p,q}_{n,m,r+1}\zeta^p\bar{\zeta}^q\right)\left(\partial_\alpha\bar{\partial}_{\dot\alpha}X^{\alpha\dot\alpha}\right)^{r+1}\left(\partial_\alpha y_1^\alpha\right)^{n}\left(\bar{\partial}_{\dot\alpha}\bar{y}_1^{\dot\alpha}\right)^{m}l(n+m+2r+l+3)e^{\alpha\dot\alpha}\bar{u}_{\dot\alpha}u_\alpha\Bigg]\times$$
$$\times\frac{1}{(n+r+1)(m+r+1)}\omega^{\vec{\lambda}l}_{\ \ n,m,r}(u,\bar{u}), \quad (3.36)$$

где факториальный множитель из (3.33) убран переопределением мультиспиноров $\omega^{\vec{\lambda}}{}_{\alpha(n+r),\dot{\alpha}(m+r)}$.

Из (3.36) видно, что оператор $P_{\alpha\dot{\alpha}}$ сохраняет класс функций (3.27) и нетривиально преобразует поля $\omega^{\vec{\lambda}l}{}_{n,m,r}(u,\bar{u})$ первого ранга. Таким образом, действие $\mathcal{D}$ на двухчастичных полях $\omega(Y_1,Y_2)$ в (3.2) переносится на действие в одночастичных полях согласно

$$\sum_{\lambda_h\,,\lambda_v}\sum_{\substack{n+m=\lambda_h\\2(r+l)=\lambda_v}}\left(\sum_{p+q=l}\Gamma^{p,q}_{n,m,r}\zeta^p\bar{\zeta}^q\right)(\partial\bar{\partial}X)^r\,(\partial y_1)^n\left(\bar{\partial}\bar{y}_1\right)^m\Bigg\{D_L\omega^{\vec{\lambda}l}{}_{n,m,r}(u,\bar{u})+$$
$$+\frac{(n+1)(m+r+l+1)}{(n+r+2)(m+r)}e^{\alpha\dot{\alpha}}\bar{u}_{\dot{\alpha}}\partial_\alpha\omega^{\vec{\lambda}l}{}_{n+1,m-1,r}(u,\bar{u})+$$
$$+\frac{(m+1)(n+r+l+1)}{(n+r)(m+r+2)}e^{\alpha\dot{\alpha}}u_\alpha\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}\omega^{\vec{\lambda}l}{}_{n-1,m+1,r}(u,\bar{u})-$$
$$-\frac{(r+1)(n+m+r+2)}{(n+r+2)(m+r+2)}e^{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\alpha\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}\omega^{\vec{\lambda}l-1}{}_{n,m,r+1}(u,\bar{u})+$$
$$+\frac{(l+1)(n+m+2r+l+2)}{(n+r)(m+r)}e^{\alpha\dot{\alpha}}u_\alpha\bar{u}_{\dot{\alpha}}\omega^{\vec{\lambda}l+1}{}_{n,m,r-1}(u,\bar{u})\Bigg\}\,. \quad (3.37)$$

Начиная с этого момента, не будем явно указывать спинорные индексы в операторном префакторе

$$\partial\,\bar{\partial}\,X:=\partial_\alpha\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}X^{\alpha\dot{\alpha}}\,,\quad \partial\,y_1:=\partial_\alpha y_1^\alpha\,,\quad \bar{\partial}\,\bar{y}_1:=\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}\bar{y}_1^{\dot{\alpha}}\,. \quad (3.38)$$

Опустив действие производной $\mathcal{D}$ на уровень полей ранга-1, перепишем его в более компактном виде с помощью производящей функции

$$\omega(u,\bar{u},\chi,t)=\sum_{\lambda_h,\lambda_v}\sum_{\substack{n+m=\lambda_h\\2(r+l)=\lambda_v}}\omega^{\vec{\lambda}l}{}_{n,m,r}(u\,,\bar{u})\chi^r t^l\,, \quad (3.39)$$

зависящей от дополнительных вспомогательных переменных χ и t, используемых для сохранения информации о степени биспиноров $X^{\alpha\dot{\alpha}}$ и суммарной степени следов $\zeta^p\bar{\zeta}^q$.

Действие ковариантной производной на производящей функции принимает вид

$$D_L\omega(u,\bar{u},\chi,t)+\left[\frac{\left(\hat{N}_u-\hat{N}_\chi+1\right)\left(\hat{\bar{N}}_u+\hat{N}_t+1\right)}{\left(\hat{N}_u+2\right)\hat{\bar{N}}_u}e^{\alpha\dot{\alpha}}\bar{u}_{\dot{\alpha}}\partial_\alpha+\right.$$

$$+\frac{\left(\hat{\bar{N}}_u-\hat{N}_\chi+1\right)\left(\hat{N}_u+\hat{N}_t+1\right)}{\left(\hat{\bar{N}}_u+2\right)\hat{N}_u}e^{\alpha\dot{\alpha}}u_\alpha\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}-\frac{\left(\hat{N}_u+\hat{\bar{N}}_u-\hat{N}_\chi+2\right)}{\left(\hat{N}_u+2\right)\left(\hat{\bar{N}}_u+2\right)}e^{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\alpha\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}\left(t\partial_\chi\right)+$$

$$\left.+\frac{\left(\hat{N}_u+\hat{\bar{N}}_u+\hat{N}_t+2\right)}{\hat{N}_u\hat{\bar{N}}_u}e^{\alpha\dot{\alpha}}u_\alpha\bar{u}_{\dot{\alpha}}\left(\chi\partial_t\right)\right]\omega(u,\bar{u},\chi,t)\,, \tag{3.40}$$

где были введены операторы Эйлера для каждой из переменных

$$\hat{N}_u=u^\alpha\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\,,\quad \hat{\bar{N}}_u=\bar{u}^{\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial\bar{u}^{\dot{\alpha}}}\,, \tag{3.41}$$

$$\hat{N}_\chi=\chi\partial_\chi\,,\qquad \hat{N}_t=t\partial_t\,. \tag{3.42}$$

Определим оператор градуировки $G=|\hat{N}_u-\hat{\bar{N}}_u|+2\hat{N}_\chi$. С ним связан нильпотентный оператор σ_-

$$\sigma_-=\frac{\left(\hat{N}_u-\hat{N}_\chi+1\right)\left(\hat{\bar{N}}_u+\hat{N}_t+1\right)}{\left(\hat{N}_u+2\right)\hat{\bar{N}}_u}e^{\alpha\dot{\alpha}}\bar{u}_{\dot{\alpha}}\partial_\alpha\,\theta\left(\hat{N}_u-\hat{\bar{N}}_u\right)+$$

$$+\frac{\left(\hat{\bar{N}}_u-\hat{N}_\chi+1\right)\left(\hat{N}_u+\hat{N}_t+1\right)}{\left(\hat{\bar{N}}_u+2\right)\hat{N}_u}e^{\alpha\dot{\alpha}}u_\alpha\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}\,\theta\left(\hat{\bar{N}}_u-\hat{N}_u\right)-$$

$$-\frac{\left(\hat{N}_u+\hat{\bar{N}}_u-\hat{N}_\chi+2\right)}{\left(\hat{N}_u+2\right)\left(\hat{\bar{N}}_u+2\right)}e^{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\alpha\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}\left(t\partial_\chi\right)\,, \tag{3.43}$$

корректно действующий на неприводимом $\mathfrak{sp}(4)\simeq\mathfrak{so}(3,2)$ модуле. Для определения σ_- используются тета-функции, где $\theta(0)=0$.

Если ввести $(N_u\,,\bar{N}_u)$-плоскость и рассмотреть правый верхний квадрант, то первые два члена (3.43) отображают лежащие над и под биссектрисой выражения ближе к диагонали квадранта, в точности как это было в анализе раздела 1.4 главы 1. Последний член конвертирует биспинор χ в след t, не меняя баланса числа индексов с точками и без точек. Это определение σ_- является ожидаемым, поскольку оно действует на правую часть формулы (3.30) путем отсечения ячеек от $\mathfrak{so}(3,1)$ диаграмм Юнга.

3.1.1 Вычисление $H^\bullet(\sigma_-)$

В этом разделе проведем анализ младших когомологий $H^{0,1,2}(\sigma_-)$ для оператора (3.43), действующего на полях один-формах со значением в $(\mathrm{adj}\otimes\mathrm{adj})$. Вместо введения скалярного произведения и построения оператора Лапласа Δ согласно процедуре из главы 1, проведем прямое вычисление $\ker\sigma_-$ и отбрасывание σ_--точных форм. Хотя обычно прямое вычисление когомологий σ_- является довольно трудоемким занятием, при работе с двухкомпонентными спинорами тождество Схоутена сильно упрощает процесс вычислений и позволяет не прибегать к обобщенному методу Ходжа. При этом, так же как и в разделе 1.4, будем раскладывать p-формы по неприводимым $\mathfrak{so}(3,1)$ компонентам, так как из них строятся собственные векторы оператора Δ, а значит и когомологии σ_-.

Введем вспомогательные обозначения

$$f_{a,b}(u,\bar u) := f_{\alpha(a),\dot\alpha(b)}u^{\alpha(a)}\bar u^{\dot\alpha(b)}\,. \tag{3.44}$$

Группа $H^0(\sigma_-)$

Ноль-форма общего положения имеет вид

$$\mathcal{E}^{\vec\lambda}(u,\bar u,\chi,t) = \sum_{2(r+l)=\lambda_v}\ \sum_{n+m=\lambda_h}\mathcal{E}^{\vec\lambda}_{n+r,m+r}(u,\bar u)\chi^r t^l\,. \tag{3.45}$$

Прямым вычислением получаем, что

$$\begin{aligned}\sigma_-\mathcal{E}^{\vec\lambda}(u,\bar u,\chi,t) = \sum_{\substack{2(r+l)=\lambda_v\\ n+m=\lambda_h}}\Bigg\{&\theta(n-m)\frac{n(m+r+l+2)}{(n+r+1)(m+r+1)}e(\partial,\bar u)+\\ &+\theta(m-n)\frac{m(n+r+l+2)}{(n+r+1)(m+r+1)}e(u,\bar\partial)-\\ &-\frac{(n+m+r+1)}{(n+r+1)(m+r+1)}e(\partial,\bar\partial)\,(t\partial_\chi)\Bigg\}\mathcal{E}^{\vec\lambda}_{n+r,m+r}(u,\bar u)\chi^r t^l\,,\end{aligned} \tag{3.46}$$

где были введены Лоренц-неприводимые один-формы

$$e(u,\bar\partial)=e^{\beta\dot\beta}u_\beta\bar\partial_{\dot\beta},\quad e(\partial,\bar u)=e^{\beta\dot\beta}\partial_\beta\bar u_{\dot\beta},\quad e(u,\bar u)=e^{\beta\dot\beta}u_\beta\bar u_{\dot\beta},\quad e(\partial,\bar\partial)=e^{\beta\dot\beta}\partial_\beta\bar\partial_{\dot\beta}\,. \tag{3.47}$$

Из независимости неприводимых один-форм следует, что ядро

$$\ker\sigma_-|_{\deg\Lambda=0} = \left\{\mathcal{E}^{\vec{\lambda}}_{\alpha\left(\frac{\lambda_h}{2}\right),\dot\alpha\left(\frac{\lambda_h}{2}\right)} u^{\alpha\left(\frac{\lambda_h}{2}\right)}\bar{u}^{\dot\alpha\left(\frac{\lambda_h}{2}\right)} t^{\frac{\lambda_v}{2}}\right\}. \tag{3.48}$$

Так как для ноль-форм $\operatorname{im}\sigma_-|_{\deg\Lambda=0} = \{\emptyset\}$, то в итоге имеем

$$H^0(\sigma_-) = \left\{\mathcal{E}^{\vec{\lambda}}_{\frac{\lambda_h}{2},\frac{\lambda_h}{2}}(u\,,\bar{u})t^{\frac{\lambda_v}{2}};\quad \lambda_h,\lambda_v\in 2\mathbb{Z}_{\geqslant 0}\right\}. \tag{3.49}$$

Группа $H^1(\sigma_-)$

Разложение один-формы по неприводимым компонентам, описываемым индексами (A,B,C,D), дается формулой

$$\omega^{\vec{\lambda}}(u,\bar{u},\chi,t) = \sum_{\substack{n+m=\lambda_h\\2(r+l)=\lambda_v}}\left\{\frac{1}{(n+r+1)(m+r+1)}e(\partial,\bar\partial)\omega^{\vec{\lambda}}_{A\,n+r+1,m+r+1}(u,\bar{u})\chi^r t^l+\right.$$
$$+e(u,\bar{u})\omega^{\vec{\lambda}}_{B\,n+r-1,m+r-1}(u,\bar{u})\chi^r t^l+\frac{1}{n+r+1}e(\partial,\bar{u})\omega^{\vec{\lambda}}_{C\,n+r+1,m+r-1}(u,\bar{u})\chi^r t^l+$$
$$\left.+\frac{1}{m+r+1}e(u,\bar\partial)\omega^{\vec{\lambda}}_{D\,n+r-1,m+r+1}(u,\bar{u})\chi^r t^l\right\}. \tag{3.50}$$

Раскладывая $\sigma_-\omega^{\vec{\lambda}}$ по базисным два-формам (1.141), получаем следующее выражение

$$\sigma_-\omega^{\vec{\lambda}}(u,\bar{u},\chi,t) = \sum_{\substack{2(r+l)=\lambda_v\\n+m=\lambda_h}}\left\{\vphantom{\frac{1}{1}}\right.$$
$$-\theta(n-m)\frac{n(m+r+l+2)}{2(n+r+1)^2(m+r+1)}H(\partial,\partial)\,\omega^{\vec{\lambda}}_{A\,n+r+1,m+r+1}(u,\bar{u})\chi^r t^l-$$
$$-\theta(m-n)\frac{m(n+r+l+2)}{2(n+r+1)(m+r+1)^2}\bar{H}(\bar\partial,\bar\partial)\,\omega^{\vec{\lambda}}_{A\,n+r+1,m+r+1}(u,\bar{u})\chi^r t^l+$$
$$+\theta(n-m)\frac{n(m+r+l+2)}{2(m+r+1)}\bar{H}(\bar{u},\bar{u})\,\omega^{\vec{\lambda}}_{B\,n+r-1,m+r-1}(u,\bar{u})\chi^r t^l+$$
$$+\theta(m-n)\frac{m(n+r+l+2)}{2(n+r+1)}H(u,u)\,\omega^{\vec{\lambda}}_{B\,n+r-1,m+r-1}(u,\bar{u})\chi^r t^l-$$
$$-\left[\frac{r(n+m+r+1)}{2(m+r+1)}\bar{H}(\bar{u},\bar\partial)+\frac{r(n+m+r+1)}{2(n+r+1)}H(u,\partial)\right]\times$$
$$\times\,\omega^{\vec{\lambda}}_{B\,n+r-1,m+r-1}(u,\bar{u})\chi^{r-1}t^{l+1}+$$

$$+\theta(m-n)\left[\frac{m(n+r+l+2)}{2(n+r+1)^2}H(u,\partial)-\frac{m(n+r+l+2)}{2(n+r+1)(m+r+1)}\bar H(\bar u,\bar\partial)\right]\times$$
$$\times\,\omega^{\vec\lambda}_{C\,n+r+1,m+r-1}(u,\bar u)\chi^r t^l-$$
$$-\frac{r(n+m+r+1)}{2(n+r+1)^2}H(\partial,\partial)\,\omega^{\vec\lambda}_{C\,n+r+1,m+r-1}(u,\bar u)\chi^{r-1}t^{l+1}+$$
$$+\theta(n-m)\left[\frac{n(m+r+l+2)}{2(m+r+1)^2}\bar H(\bar u,\bar\partial)-\frac{n(m+r+l+2)}{2(n+r+1)(m+r+1)}H(u,\partial)\right]\times$$
$$\times\,\omega^{\vec\lambda}_{D\,n+r-1,m+r+1}(u,\bar u)\chi^r t^l-$$
$$\left.-\frac{r(n+m+r+1)}{2(m+r+1)^2}\bar H(\bar\partial,\bar\partial)\,\omega^{\vec\lambda}_{D\,n+r-1,m+r+1}(u,\bar u)\chi^{r-1}t^{l+1}\right\}. \quad (3.51)$$

Для неприводимых два-форм были использованы обозначения

$$H(\partial,\partial)=H^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta\,,\quad H(u,\partial)=H^{\alpha\beta}u_\alpha\partial_\beta\,,\quad H(u,u)=H^{\alpha\beta}u_\alpha u_\beta\,,$$
$$\bar H(\bar\partial,\bar\partial)=\bar H^{\dot\alpha\dot\beta}\bar\partial_{\dot\alpha}\bar\partial_{\dot\beta}\,,\quad \bar H(\bar u,\bar\partial)=\bar H^{\dot\alpha\dot\beta}\bar u_{\dot\alpha}\bar\partial_{\dot\beta}\,,\quad \bar H(\bar u,\bar u)=\bar H^{\dot\alpha\dot\beta}\bar u_{\dot\alpha}\bar u_{\dot\beta}\,. \quad (3.52)$$

Указанные выше неприводимые два-формы позволяют представить уравнение $\sigma_-\omega^{\vec\lambda}=0$ как систему линейных уравнений, связывающих компоненты один-форм $\{\omega^{\vec\lambda}_A\,,\omega^{\vec\lambda}_B\,,\omega^{\vec\lambda}_C\,,\omega^{\vec\lambda}_D\}$ при различных значениях параметров (n,m,r,l). Получаемая система имеет треугольно-подобную структуру. Большая часть компонент один-формы $\omega^{\vec\lambda}_B$ пропадает в силу уравнений вдоль $H(u,u)$ и $\bar H(\bar u,\bar u)$. Оставшиеся компоненты $\omega^{\vec\lambda}_B$ смешиваются с формами $\{\omega^{\vec\lambda}_C\,,\omega^{\vec\lambda}_D\}$ через уравнения вдоль $H(u,\partial)$ и $\bar H(\bar u,\bar\partial)$, что позволяет выразить последние через компоненты B-формы. Аналогично за счет тета-функций пропадает большая часть компонент форм (A,C,D), в то время как выживающие мультиспинорные коэффициенты связываются с помощью незадействованных уравнений вдоль $H(\partial,\partial)$ и $\bar H(\bar\partial,\bar\partial)$.

В результате в ядре остаются

$$\ker\sigma_-|_{\deg\Lambda=1}=\Big\{\lambda_h,\lambda_v\in 2\mathbb{Z}_{\geqslant 0}\,,\quad n+m=\lambda_h\,,\quad 2(r+l)=\lambda_v\,:$$

$(\mathbb{A})$ $\quad e(\partial,\bar\partial)\omega^{\vec\lambda}_{\frac{\lambda_h}{2}+r+1\,,\frac{\lambda_h}{2}+r+1}(u\,,\bar u)\chi^r t^l\,;\quad$ $(\mathbb{B})$ $\quad e(u,\bar u)\omega^{\vec\lambda}_{\frac{\lambda_h}{2}-1\,,\frac{\lambda_h}{2}-1}(u\,,\bar u)t^{\frac{\lambda_v}{2}}\,;$

$(\mathbb{C})$ $\quad \left(e(u,\bar u)\chi t^{\frac{\lambda_v}{2}-1}+\dfrac{\lambda_h}{(\lambda_h+\lambda_v+2)}\{e(\partial,\bar u)+e(u,\bar\partial)\}t^{\frac{\lambda_v}{2}}\right)\omega^{\vec\lambda}_{\frac{\lambda_h}{2}\,,\frac{\lambda_h}{2}}(u\,,\bar u)\,,\lambda_v\geqslant 2\,;$

$(\mathbb{D}_1)$ $\quad \sigma_-\left(\omega^{\vec\lambda}_{n+1\,,m-1}(u\,,\bar u)t^{\frac{\lambda_v}{2}}\right)\,,\ n\geq m\,;$

$(\mathbb{D}_2)$ $\quad \sigma_-\left(\omega^{\vec\lambda}_{n-1\,,m+1}(u\,,\bar u)t^{\frac{\lambda_v}{2}}\right)\,,\ m\geq n\,;$

$$(\mathbb{E}_1)\quad \sigma_-\left(\omega^{\vec{\lambda}}_{\frac{\lambda_h}{2}+k+r+2,\frac{\lambda_h}{2}-k+r}\chi^{r+1}t^{l-1}\right)\,,\quad k\in\left\{1,\ldots,\frac{\lambda_h}{2}-1\right\}\,;$$

$$(\mathbb{E}_2)\quad \sigma_-\left(\omega^{\vec{\lambda}}_{\frac{\lambda_h}{2}-k+r,\frac{\lambda_h}{2}+k+r+2}\chi^{r+1}t^{l-1}\right)\,,\quad k\in\left\{1,\ldots,\frac{\lambda_h}{2}-1\right\}\Bigg\}\,, \tag{3.53}$$

где формы $(\mathbb{D}_i)$ и $(\mathbb{E}_i)$ сразу представлены в σ_--точном виде. Для формы $(\mathbb{A})$ вне граничных значений параметров (r,l) можно также явно найти σ_--точное представление. Так как $e(u,\bar{u})$ отсутствует в выражении для $\operatorname{im}\sigma_-|_{\deg\Lambda=1}$ (3.46), $(\mathbb{B})$ и $(\mathbb{C})$ являются элементами $H^1(\sigma_-)$. Вспоминая, что максимально допустимое значение параметра $r=\lambda_v/2$, приходим к выводу, что $(\mathbb{A})$ при $(r,l)=(\lambda_v/2,0)$ не имеет σ_--точного представления.

Группа $H^2(\sigma_-)$

Пользуясь (3.52), раскладываем два-форму общего положения по неприводимому набору $(A,B,C,\bar{A},\bar{B},\bar{C})$

$$\begin{aligned}R^{\vec{\lambda}}(u,\bar{u},\chi,t)=\sum_{\substack{n+m=\lambda_h\\2(r+l)=\lambda_v}}\Big\{&H(\partial,\partial)R^{\vec{\lambda}}_{A\,n+r+2,m+r}(u,\bar{u})\chi^r t^l+\\ &+\bar{H}(\bar{\partial},\bar{\partial})R^{\vec{\lambda}}_{\bar{A}\,n+r,m+r+2}(u,\bar{u})\chi^r t^l+\\ &+H(u,u)R^{\vec{\lambda}}_{B\,n+r-2,m+r}(u,\bar{u})\chi^r t^l+\bar{H}(\bar{u},\bar{u})R^{\vec{\lambda}}_{\bar{B}\,n+r,m+r-2}(u,\bar{u})\chi^r t^l+\\ &+H(u,\partial)R^{\vec{\lambda}}_{C\,n+r,m+r}(u,\bar{u})\chi^r t^l+\bar{H}(\bar{u},\bar{\partial})R^{\vec{\lambda}}_{\bar{C}\,n+r,m+r}(u,\bar{u})\chi^r t^l\Big\}\,.\end{aligned} \tag{3.54}$$

Введем базисные три-формы

$$\mathcal{H}_{\alpha\dot{\alpha}}:=-e_\alpha{}^{\dot{\beta}}\bar{H}_{\dot{\beta}\dot{\alpha}}=-e_\alpha{}^{\dot{\beta}}\wedge e_{\gamma\dot{\beta}}\wedge e^\gamma{}_{\dot{\alpha}}=e^\beta{}_{\dot{\alpha}}\wedge e_{\beta\dot{\gamma}}\wedge e_\alpha{}^{\dot{\gamma}}=e^\beta{}_{\dot{\alpha}}H_{\beta\alpha}\,, \tag{3.55}$$

удовлетворяющие соотношениям

$$e^{\alpha\dot{\alpha}}\wedge H^{\mu\nu}=-\frac{1}{3}\left(\epsilon^{\alpha\mu}\mathcal{H}^{\nu\dot{\alpha}}+\epsilon^{\alpha\nu}\mathcal{H}^{\mu\dot{\alpha}}\right)\,,\quad e^{\alpha\dot{\alpha}}\wedge\bar{H}^{\dot{\mu}\dot{\nu}}=\frac{1}{3}\left(\bar{\epsilon}^{\dot{\alpha}\dot{\mu}}\mathcal{H}^{\alpha\dot{\nu}}+\bar{\epsilon}^{\dot{\alpha}\dot{\nu}}\mathcal{H}^{\alpha\dot{\mu}}\right)\,. \tag{3.56}$$

Используя их, разложим $\sigma_-R^{\vec{\lambda}}(u,\bar{u},\chi,t)\in\Lambda^3(M)\otimes\operatorname{Poly}(u,\bar{u},\chi,t)$:

$$\sigma_-R^{\vec{\lambda}}(u,\bar{u},\chi,t)=\sum_{\substack{n+m=\lambda_h\\2(r+l)=\lambda_v}}\left\{\theta(m-n)\frac{2m(n+r+l+2)}{3(m+r+1)}\,\mathcal{H}(\partial,\bar{\partial})\,R^{\vec{\lambda}}_{A\,n+r+2,\,m+r}\,\chi^r t^l-\right.$$

$$
\begin{aligned}
&- \theta(n-m)\frac{2n(m+r+l+2)}{3(n+r+1)}\,\mathcal{H}(\partial,\bar\partial)\,R^{\vec\lambda}_{\bar A n+r,\,m+r+2}\,\chi^r t^l - \\
&\qquad - \theta(n-m)\frac{2n(m+r+l+2)}{3(m+r+1)}\,\mathcal{H}(u,\bar u)\,R^{\vec\lambda}_{B n+r-2,\,m+r}\,\chi^r t^l + \\
&\qquad + \theta(m-n)\frac{2m(n+r+l+2)}{3(n+r+1)}\,\mathcal{H}(u,\bar u)\,R^{\vec\lambda}_{\bar B n+r,\,m+r-2}\,\chi^r t^l + \\
&\qquad + \frac{2r(n+m+r+1)}{3(m+r+1)}\,\mathcal{H}(u,\bar\partial)\,R^{\vec\lambda}_{B n+r-2,\,m+r}\,\chi^{r-1} t^{l+1} - \\
&\qquad - \frac{2r(n+m+r+1)}{3(n+r+1)}\,\mathcal{H}(\partial,\bar u)\,R^{\vec\lambda}_{\bar B n+r,\,m+r-2}\,\chi^{r-1} t^{l+1} - \\
&\qquad - \theta(n-m)\frac{n(m+r+l+2)(n+r+2)}{3(n+r+1)(m+r+1)}\,\mathcal{H}(\partial,\bar u)\,R^{\vec\lambda}_{C n+r,\,m+r}\,\chi^r t^l + \\
&\qquad + \theta(m-n)\frac{m(n+r+l+2)(n+r)}{3(n+r+1)(m+r+1)}\,\mathcal{H}(u,\bar\partial)\,R^{\vec\lambda}_{C n+r,\,m+r}\,\chi^r t^l + \\
&\qquad + \frac{r(n+m+r+1)(n+r+2)}{3(n+r+1)(m+r+1)}\,\mathcal{H}(\partial,\bar\partial)\,R^{\vec\lambda}_{C n+r,\,m+r}\,\chi^{r-1} t^{l+1} - \\
&\qquad - \theta(n-m)\frac{n(m+r+l+2)(m+r)}{3(n+r+1)(m+r+1)}\,\mathcal{H}(\partial,\bar u)\,R^{\vec\lambda}_{\bar C n+r,\,m+r}\,\chi^r t^l + \\
&\qquad + \theta(m-n)\frac{m(n+r+l+2)(m+r+2)}{3(n+r+1)(m+r+1)}\,\mathcal{H}(u,\bar\partial)\,R^{\vec\lambda}_{\bar C n+r,\,m+r}\,\chi^r t^l - \\
&\qquad - \left.\frac{r(n+m+r+1)(m+r+2)}{3(n+r+1)(m+r+1)}\,\mathcal{H}(\partial,\bar\partial)\,R^{\vec\lambda}_{\bar C n+r,\,m+r}\,\chi^{r-1} t^{l+1}\right\}. \qquad (3.57)
\end{aligned}
$$

В разложении выше были использованы неприводимые три-формы

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}(u,\bar u) &= \mathcal{H}^{\alpha\dot\alpha}u_\alpha \bar u_{\dot\alpha}\,, \quad \mathcal{H}(u,\bar\partial) = \mathcal{H}^{\alpha\dot\alpha}u_\alpha \bar\partial_{\dot\alpha}\,,\\
\mathcal{H}(\partial,\bar\partial) &= \mathcal{H}^{\alpha\dot\alpha}\partial_\alpha \bar\partial_{\dot\alpha}\,, \quad \mathcal{H}(\partial,\bar u) = \mathcal{H}^{\alpha\dot\alpha}\partial_\alpha \bar u_{\dot\alpha}\,.
\end{aligned} \qquad (3.58)
$$

Итого, получаем четыре уравнения, связывающие компоненты два-форм $(A, B, C, \bar A, \bar B, \bar C)$. Система уравнений снова принимает треугольный вид, существенно облегчающий процесс решения. По результатам анализа получается следующий список два-форм, принадлежащих ядру σ_-:

$$
\ker\sigma_-\big|_{\deg\Lambda=2} = \Big\{\lambda_h, \lambda_v \in 2\mathbb{Z}_{\geqslant 0}\,, \quad n+m=\lambda_h\,, \quad 2(r+l)=\lambda_v :
$$

$(\mathbb{A})$ $\quad H(\partial,\partial)R^{\vec\lambda}_{n+r+2\,,m+r}(u\,,\bar u)\chi^r t^l\,, n \geq m \quad \oplus \quad$ к.с. ;

$(\mathbb{B})$ $\quad H(u,u)R^{\vec\lambda}_{n-2,m}(u\,,\bar u)t^{\frac{\lambda_v}{2}}\,, \quad m \geqslant n \quad \oplus \quad$ к.с. ;

$$
\begin{aligned}
&(\mathbb{C})\quad H(u,\partial)R^{\vec{\lambda}}_{\frac{\lambda_h}{2},\frac{\lambda_h}{2}}(u,\bar{u})t^{\frac{\lambda}{2}}\quad\oplus\quad \text{к.с.}\,;\\
&(\mathbb{D})\quad \Big(H(u,u)+\bar{H}(\bar{u},\bar{u})\Big)R^{\vec{\lambda}}_{\frac{\lambda_h}{2}-1\,,\frac{\lambda_h}{2}-1}(u\,,\bar{u})t^{\frac{\lambda_v}{2}}\,,\quad \lambda_h\geqslant 2\,;\\
&(\mathbb{E})\quad H(u,\partial)R^{\vec{\lambda}}_{Cn,m}(u,\bar{u})t^{\frac{\lambda_v}{2}}+\bar{H}(\bar{u},\bar{\partial})R^{\vec{\lambda}}_{\bar{C}n,m}(u,\bar{u})t^{\frac{\lambda_v}{2}}-\frac{1}{4\,(\lambda_n+2)}\frac{m\,(\lambda_v+2n+4)}{n+1}\times\\
&\times\Big[nH(u,u)R^{\vec{\lambda}}_{Cn,m}(u,\bar{u})+(m+2)H(u,u)R^{\vec{\lambda}}_{\bar{C}n,m}(u,\bar{u})\Big]\chi t^{\frac{\lambda_v}{2}-1}\,,\quad m>n\quad\oplus\quad \text{к.с.}\,;\\
&(\mathbb{F})\quad \Big(H(\partial,\partial)+\bar{H}(\bar{\partial},\bar{\partial})\Big)R^{\vec{\lambda}}_{\frac{\lambda_h}{2}+r+1\,,\frac{\lambda_h}{2}+r+1}(u\,,\bar{u})\chi^r t^l\,;\\
&(\mathbb{G})\quad \Big(H(u,\partial)+\bar{H}(\bar{u},\bar{\partial})\Big)R^{\vec{\lambda}}_{\frac{\lambda_h}{2}+r\,,\frac{\lambda_h}{2}+r}(u\,,\bar{u})\chi^r t^l\,;\\
&(\mathbb{H})\quad \left(H(u,\partial)\chi^{r+1}t^{l-1}-\frac{2(r+1)\,(\lambda_h+r+2)\,(\lambda_h+2r+6)}{(\lambda_h+2r+4)\,(\lambda_h+2)\,(\lambda_h+\lambda_v+2)}H(\partial,\partial)\chi^r t^l\right)\times\\
&\times\Big[R^{\vec{\lambda}}_{C\,\frac{\lambda_h}{2}+r+1,\frac{\lambda_h}{2}+r+1}(u\,,\bar{u})-R^{\vec{\lambda}}_{\bar{C}\,\frac{\lambda_h}{2}+r+1,\frac{\lambda_h}{2}+r+1}(u\,,\bar{u})\Big]\,,\quad r\neq\frac{\lambda_v}{2}\quad\oplus\quad \text{к.с.}\,;\\
&(\mathbb{I})\quad H(u,\partial)R^{\vec{\lambda}}_{Cn+r,m+r}(u\,,\bar{u})\chi^r t^l+\bar{H}(\bar{u},\bar{\partial})R^{\vec{\lambda}}_{\bar{C}n+r,m+r}(u\,,\bar{u})\chi^r t^l-\\
&-\frac{m(n+r+l+2)}{2(r+1)(\lambda_h+r+2)(n+r+1)}\Big[(n+r)H(u,u)R^{\vec{\lambda}}_{Cn+r,m+r}(u\,,\bar{u})+\\
&+(m+r+2)H(u,u)R^{\vec{\lambda}}_{\bar{C}n+r,m+r}(u\,,\bar{u})\Big]\chi^{r+1}t^{l-1}+\\
&+\frac{r(\lambda_h+r+1)}{(m+1)\,(\lambda_v+2n+2)\,(n+r+1)}\Big[(m+r+2)H(\partial,\partial)R^{\vec{\lambda}}_{\bar{C}n+r,m+r}(u\,,\bar{u})-\\
&-(n+r+2)H(\partial,\partial)R^{\vec{\lambda}}_{Cn+r,m+r}\Big]\chi^{r-1}t^{l+1}\,,\quad m>n\,,r\neq\frac{\lambda_v}{2}\quad\oplus\quad \text{к.с.}\,;\\
&(\mathbb{J})\quad \Big(H(u,\partial)x^{\frac{\lambda_v}{2}}-\frac{\lambda_v+2n}{\lambda_v+2m+4}\bar{H}(\bar{u},\bar{\partial})\chi^{\frac{\lambda_v}{2}}-\\
&-\frac{\lambda_v\,(\lambda_v+2\lambda_h+2)}{2(m+1)\,(\lambda_v+2n+2)}H(\partial,\partial)x^{\frac{\lambda_v}{2}-1}t\Big)R^{\vec{\lambda}}_{Cn+\frac{\lambda_v}{2},m+\frac{\lambda_v}{2}}(u\,,\bar{u})\,,\quad m>n\quad\oplus\quad \text{к.с.}\Big\}\,.
\end{aligned}
\tag{3.59}
$$

Формы $(\mathbb{B})$, $(\mathbb{C})$, $(\mathbb{E})$, $(\mathbb{I})$, $(\mathbb{J})$ всегда представимы в σ_--точном виде (представления приведены в Приложении Б.1). Из (3.51) следует, что форма $(\mathbb{A})$ при $(n,m,r,l)=(\lambda_h/2,\lambda_h/2,\lambda_v/2,0)$, $(\mathbb{D})$ при любых значениях параметров, $(\mathbb{F})$ при $(r,l)=(\lambda_v/2,0)$ и $(r,l)=(\lambda_v/2-1,1)$, $(\mathbb{G})$ при $(r,l)=(\lambda_v/2,0)$, $(\mathbb{H})$ при $(r,l)=(\lambda_v/2-1,1)$ принадлежат когомологиям $H^2(\sigma_-)$. Интересно, что при заданных ограничениях на параметры (n,m,r,l) и $\lambda_v \geq 2$

$$(\mathbb{F})\Big|_{(r,l)=(\lambda_v/2-1,1)} \overset{\operatorname{im}\sigma_-}{\simeq} (\mathbb{G})\Big|_{(r,l)=(\lambda_v/2,0)} \overset{\operatorname{im}\sigma_-}{\simeq} (\mathbb{H})\Big|_{(r,l)=(\lambda_v/2-1,1)}, \tag{3.60}$$

т. е. для одного класса когомологий имеется три непохожих представителя. При $\lambda_v = 0$ этот класс 2-коциклов отсутствует.

3.1.2 $H^{0,1,2}(\sigma_-)$: результаты

В итоге, имеем следующие результаты для младших групп когомологий оператора σ_-, определенного на полях один-формах ω, отвечающих $(\mathrm{adj}\otimes\mathrm{adj})$-модулю.

$$H^0(\sigma_-) = \left\{\varepsilon^{\vec{\lambda}}_{\frac{\lambda_h}{2},\frac{\lambda_h}{2}}(u\,,\bar{u})t^{\frac{\lambda_v}{2}}; \quad \lambda_h, \lambda_v \in 2\mathbb{Z}_{\geqslant 0}\right\}. \tag{3.61}$$

Калибровочные параметры соответствуют $\mathfrak{so}(3,1)$ диаграмме Юнга

$$\varepsilon^{\vec{\lambda}}_{\frac{\lambda_h}{2},\frac{\lambda_h}{2}}(u\,,\bar{u}) \simeq \boxed{\quad\lambda_h/2\quad}. \tag{3.62}$$

Такая же диаграмма для параметра калибровочной симметрии появляется в теории Фронсдала (1.6) и в теории частично-безмассовых полей [91; 133].

В один-формах имеем коциклы

$$\begin{aligned} H^1(\sigma_-) = \Bigg\{ & \lambda_h, \lambda_v \in 2\mathbb{Z}_{\geqslant 0}, \quad n+m=\lambda_h, \quad 2(r+l)=\lambda_v \\ (\mathbb{A}) \quad & e(\partial,\bar{\partial})\omega^{\vec{\lambda}}_{\frac{\lambda_h+\lambda_v}{2}+1,\frac{\lambda_h+\lambda_v}{2}+1}(u\,,\bar{u})\chi^{\frac{\lambda_v}{2}}; \\ (\mathbb{B}) \quad & e(u,\bar{u})\omega^{\vec{\lambda}}_{\frac{\lambda_h}{2}-1,\frac{\lambda_h}{2}-1}(u\,,\bar{u})t^{\frac{\lambda_v}{2}}; \\ (\mathbb{C}) \quad & \left(e(u,\bar{u})\chi t^{\frac{\lambda_v}{2}-1} + \frac{\lambda_h}{(\lambda_h+\lambda_v+2)}\{e(\partial,\bar{u})+e(u,\bar{\partial})\}t^{\frac{\lambda_v}{2}}\right)\omega^{\vec{\lambda}}_{\frac{\lambda_h}{2},\frac{\lambda_h}{2}}(u\,,\bar{u})\,, \lambda_v \geqslant 2 \Bigg\}. \end{aligned} \tag{3.63}$$

Для 1-коциклов диаграммная структура следующая

$$\begin{aligned} (\mathbb{A}) &\simeq \boxed{\quad(\lambda_v+\lambda_h)/2+1\quad}, \\ (\mathbb{B}) &\simeq \boxed{\quad\lambda_h/2-1\quad}, \\ (\mathbb{C}) &\simeq \boxed{\quad\lambda_h/2\quad}, \end{aligned} \tag{3.64}$$

т. е. это самая длинная и две самые короткие однорядные диаграммы в ограничении представления $\mathfrak{so}(3,2)$ до представлений $\mathfrak{so}(3,1)$ (3.30).

В случае веса $\lambda_v = 0$ коцикл ($\mathbb{C}$) пропадает, и остаются формы

$$\begin{aligned} (\mathbb{A})\Big|_{\lambda_v=0} &\simeq \boxed{\quad \lambda_h/2+1 \quad}\,, \\ (\mathbb{B})\Big|_{\lambda_v=0} &\simeq \boxed{\quad \lambda_h/2-1 \quad}\,. \end{aligned} \tag{3.65}$$

Представители $(\mathbb{A})\Big|_{\lambda_v=0}$ и $(\mathbb{B})\Big|_{\lambda_v=0}$ по своей диаграммной структуре и явным формульным выражениям совпадают с 1-коциклами, полученными в разделе 1.4.2 главы 1. Следовательно, они отвечают бесследовой компоненте поля Фронсдала и его следу.

Чтобы понять физический смысл коциклов ($\mathbb{A}$), ($\mathbb{B}$), ($\mathbb{C}$) при ненулевом весе λ_v, нужно обратиться к работе [133]. В [133] изучалось разворачивание системы для частично-безмассовых полей. Как было установлено, частично-безмассовые поля и требуемый набор вспомогательных полей кодируются одинформами, отвечающими двухрядным $\mathfrak{so}(d-1,2)$-диаграммам. Длина первой строки ассоциируется со спином $s-1$, в то время как вторая строка $s-t$ отвечает за так называемую глубину безмассовости t, т. е. степень пространственно-временной производной в лидирующем члене калибровочного преобразования. При этом, динамическими полями при $t>1$ оказывались симметричные тензоры ϕ^s, ϕ^{s-t} и ϕ^{s-t-1}. При максимально возможной глубине безмассовости $t=s$ последний тензор отсутствует, что согласно [133] отвечает конформному обобщению теории Максвелла.

Частично-безмассовые поля получили такое название, так как по числу степеней свободы они занимают промежуточное положение между массивными и безмассовыми полями. В случае массивных полей спина-s в работах [30; 31] было показано, что для лагранжева описания в дополнение к однорядной диаграмме длины s также требуется добавить поля, соответствующие однорядным диаграммам с длинами от $s-2$ до 0, причем вспомогательные поля исчезают на массовой оболочке. Как было представлено в главе 1, описание безмассового поля требует двух $\mathfrak{so}(d-1,1)$-полей с диаграммами строками длин s и $s-2$. Для частично-безмассовых полей было получено [134—136], что вспомогательные поля отвечают однорядным диаграммам с длинами от $s-2$ до $s-t-1$, т. е. происходит обрезание списка вспомогательных полей. При этом поля $s-t$ и $s-t-1$ не исчезают на массовой оболочке, что и объясняет наличие трех коциклов ($\mathbb{A}$), ($\mathbb{B}$), ($\mathbb{C}$) в когомологиях $H^1(\sigma_-)$.

Сравнивая полученные 1-коциклы с результатами [91; 133—136], приходим к выводу, что формы ($\mathbb{A}$), ($\mathbb{B}$), ($\mathbb{C}$) при $\lambda_v \neq 0$ соответствуют компонентам частично-безмассового поля ϕ^s, ϕ^{s-t} и ϕ^{s-t-1} глубины безмассовости $t = 1 + \frac{\lambda_v}{2}$. Положив вертикальный вес равным нулю, мы возвращаемся к полям Фронсдала с калибровочной симметрией, содержащей производную по координате первого порядка.

Группе когомологий $H^2(\sigma_-)$, описывающей калибровочно-инвариантные дифференциальные операторы, соответствуют четыре класса 2-коциклов:

$$
\begin{aligned}
&H^2\left(\sigma_-\right) = \Bigg\{ \lambda_h, \lambda_v \in 2\mathbb{Z}_{\geqslant 0} : \\
&(\mathbb{A}) \quad H(\partial,\partial) R^{\vec{\lambda}}_{\frac{\lambda_v}{2}+\lambda_h+2\,,\frac{\lambda_v}{2}}(u\,,\bar{u})\chi^{\frac{\lambda_v}{2}} \quad \oplus \quad \bar{H}(\bar{\partial},\bar{\partial}) R^{\vec{\lambda}}_{\frac{\lambda_v}{2}\,,\frac{\lambda_v}{2}+\lambda_h+2}(u\,,\bar{u})\chi^{\frac{\lambda_v}{2}}\,; \\
&(\mathbb{B}) \quad \Big(H(\partial,\partial) + \bar{H}(\bar{\partial},\bar{\partial})\Big) R^{\vec{\lambda}}_{\frac{\lambda_v+\lambda_h}{2}+1\,,\frac{\lambda_v+\lambda_h}{2}+1}(u\,,\bar{u})\chi^{\frac{\lambda_v}{2}}\,; \\
&(\mathbb{C}) \quad \Big(H(u,u) + \bar{H}(\bar{u},\bar{u})\Big) R^{\vec{\lambda}}_{\frac{\lambda_h}{2}-1\,,\frac{\lambda_h}{2}-1}(u\,,\bar{u}) t^{\frac{\lambda_v}{2}}\,, \quad \lambda_h \geqslant 2\,; \\
&(\mathbb{D}) \quad \Big(H(\partial,\partial) + \bar{H}(\bar{\partial},\bar{\partial})\Big) R^{\vec{\lambda}}_{\frac{\lambda_v+\lambda_h}{2}\,,\frac{\lambda_v+\lambda_h}{2}}(u\,,\bar{u})\chi^{\frac{\lambda_v}{2}-1} t \\
&\overset{\mathrm{Im}(\sigma_-)}{\simeq} \Big(H(u,\partial) + \bar{H}(\bar{u},\bar{\partial})\Big) R^{\vec{\lambda}}_{\frac{\lambda_v+\lambda_h}{2}\,,\frac{\lambda_v+\lambda_h}{2}}(u\,,\bar{u})\chi^{\frac{\lambda_v}{2}} \\
&\overset{\mathrm{Im}(\sigma_-)}{\simeq} \left(H(u,\partial)\chi^{\frac{\lambda_v}{2}} - \frac{\lambda_v(\lambda_h+\lambda_v+4)(\lambda_v+2\lambda_h+2)}{2(\lambda_h+2)(\lambda_h+\lambda_v+2)^2} H(\partial,\partial)\chi^{\frac{\lambda_v}{2}-1} t\right) \times \\
&\times R^{\vec{\lambda}}_{\frac{\lambda_v+\lambda_h}{2}\,,\frac{\lambda_v+\lambda_h}{2}}(u\,,\bar{u})\,, \lambda_v \geqslant 2 \Bigg\}\,.
\end{aligned}
\tag{3.66}
$$

Классам 2-коциклов можно сопоставить следующие $\mathfrak{so}(3,1)$ диаграммы

$$
\begin{aligned}
(\mathbb{A}) &\simeq \begin{array}{|l|}\hline \quad(\lambda_v+\lambda_h)/2+1 \quad \\ \hline \lambda_h/2+1 \\ \cline{1-1}\end{array}\,, \\
(\mathbb{B}) &\simeq \boxed{\quad(\lambda_v+\lambda_h)/2+1\quad}\,, \\
(\mathbb{C}) &\simeq \boxed{\lambda_h/2-1}\,, \\
(\mathbb{D}) &\simeq \boxed{\quad(\lambda_v+\lambda_h)/2\quad}\,.
\end{aligned}
\tag{3.67}
$$

Коцикл ($\mathbb{D}$) пропадает в случае веса $\lambda_v = 0$, а диаграммы для оставшихся трех классов принимают вид

$$
\begin{aligned}
(\mathbb{A})\Big|_{\lambda_v=0} &\simeq \begin{array}{|c|}\hline \lambda_h/2+1 \\ \hline \lambda_h/2+1 \\ \hline \end{array}\,, \\
(\mathbb{B})\Big|_{\lambda_v=0} &\simeq \begin{array}{|c|}\hline \lambda_h/2+1 \\ \hline \end{array}\,, \\
(\mathbb{C})\Big|_{\lambda_v=0} &\simeq \begin{array}{|c|}\hline \lambda_h/2-1 \\ \hline \end{array}\,.
\end{aligned}
\tag{3.68}
$$

Сравнение два-форм $(\mathbb{A})\Big|_{\lambda_v=0}$, $(\mathbb{B})\Big|_{\lambda_v=0}$ и $(\mathbb{C})\Big|_{\lambda_v=0}$ с результатами главы 1 показывает, что диаграммная структура и мультиспинорные выражения в точности совпадают с полученными ранее в рамках стандартной теории высших спинов в пространстве AdS_4. Это значит, что коцикл $(\mathbb{A})\Big|_{\lambda_v=0}$ соответствует обобщенному тензору Вейля для безмассовых полей, коциклы $(\mathbb{B})\Big|_{\lambda_v=0}$ и $(\mathbb{C})\Big|_{\lambda_v=0}$ отвечают бесследовой части и следу уравнения Фронсдала.

При весе $\lambda_v \neq 0$, снова обращаясь к результатам работ [91; 133], заключаем, что коцикл $(\mathbb{A})$ отвечает обобщенному тензору Вейля для частично-безмассового поля, два-формы $(\mathbb{B})$, $(\mathbb{C})$ и $(\mathbb{D})$ отвечают уравнениям на частично-безмассовое поле.

Итого, полученные выражения для когомологий $H^{0,1,2}(\sigma_-)$ в терминах производящих функций от переменных $(u\,,\bar{u}\,,\chi\,,t)$ имеют ту же диаграммную структуру, что и когомологии, приведенные в работе [91]. Это означает, что поля один-формы ω, принимающие значения в представлении $(\mathrm{adj}\otimes\mathrm{adj})$, описывают безмассовые симметричные поля Фронсдала, а также частично-безмассовые поля всех допустимых глубин безмассовости. Более того, как будет показано далее, каждое поле представлено в бесконечном числе копий, организованных в модули алгебры $\mathfrak{sl}^h(2)\oplus\mathfrak{sl}^v(2)$.

При унитарном усечении системы (2.15)–(2.19) с помощью наложения граничных условий (2.68) на поля ноль-формы C и автоморфизма четности $\hat{K}_v \to -\hat{K}_v$ все поля находятся на массовой оболочке, причем частично-безмассовые поля, а также большая часть безмассовых полей, являются нединамическими, так как соответствующие тензоры Вейля равны нулю. В не усеченной системе остается вопрос нахождения полей на массовой оболочке. Вообще говоря, вершина $\Upsilon(\Omega_{AdS},\Omega_{AdS},C)$ может содержать в себе два-формы $(\mathbb{B})$, $(\mathbb{C})$ и $(\mathbb{D})$ для некоторых значений весов (λ_h, λ_v), что указывает на нахождение ассоциированных примарных полей вне массовой оболочки (некоторые дифференциальные уравнения на примарные поля не наложены).

Важно вспомнить, что когомологии были получены путем перехода от исходного уравнения (3.2) к уравнению на производящую функцию от вспомогательных переменных $(u, \bar{u}, \chi, t)$. Тем не менее, в текущем рассмотрении можно провести обратный процесс и восстановить зависимость от осцилляторов Y_i, т. е. выразить представителей всех классов когомологий как функции из класса (3.27). Для этого проведем замену

$$\chi^r \to (\partial\bar{\partial}X)^r\,, \quad t^l \to \sum_{p+q=l} \Gamma^{p,q}_{n,m,r}\zeta^p\bar{\zeta}^q \tag{3.69}$$

и восстановим операторы $(\partial y_1)^n \left(\bar{\partial}\bar{y}_1\right)^m$, где значения параметров определяются через операторы Эйлера

$$n = \hat{N}_u - \hat{N}_\chi\,, \quad m = \hat{\bar{N}}_u - \hat{N}_\chi\,. \tag{3.70}$$

В результате приходим к следующим выражениям для представителей в классе функций (3.27):

$$H^0(\sigma) = \left\{ \left(\sum_{p+q=\frac{\lambda_v}{2}} \Gamma^{p,q}_{\frac{\lambda_h}{2},\frac{\lambda_h}{2},0}\zeta^p\bar{\zeta}^q \right) (\partial y_1)^{\frac{\lambda_h}{2}}(\bar{\partial}\bar{y}_1)^{\frac{\lambda_h}{2}}\mathcal{E}^{\vec{\lambda}}_{\frac{\lambda_h}{2},\frac{\lambda_h}{2}}(u\,,\bar{u});\quad \lambda_h,\lambda_v\in 2\mathbb{Z}_{\geqslant 0} \right\}. \tag{3.71}$$

$$H^1(\sigma_-) = \left\{ (\mathbb{A}) \quad (\partial\,\bar{\partial}\,X)^{\frac{\lambda_v}{2}}(\partial y_1)^{\frac{\lambda_h}{2}}(\bar{\partial}\bar{y}_1)^{\frac{\lambda_h}{2}}e(\partial,\bar{\partial})\omega^{\vec{\lambda}}_{\frac{\lambda_h+\lambda_v}{2}+1\,,\frac{\lambda_h+\lambda_v}{2}+1}(u\,,\bar{u})\,; \right.$$

$$(\mathbb{B}) \quad \left(\sum_{p+q=\frac{\lambda_v}{2}} \Gamma^{p,q}_{\frac{\lambda_h}{2},\frac{\lambda_h}{2},0}\zeta^p\bar{\zeta}^q \right) (\partial y_1)^{\frac{\lambda_h}{2}}(\bar{\partial}\bar{y}_1)^{\frac{\lambda_h}{2}}e(u,\bar{u})\omega^{\vec{\lambda}}_{\frac{\lambda_h}{2}-1\,,\frac{\lambda_h}{2}-1}(u\,,\bar{u})\,;$$

$$(\mathbb{C}) \quad \left[\left(\sum_{p+q=\frac{\lambda_v}{2}-1} \Gamma^{p,q}_{\frac{\lambda_h}{2},\frac{\lambda_h}{2},1}\zeta^p\bar{\zeta}^q \right) (\partial\,\bar{\partial}\,X)(\partial y_1)^{\frac{\lambda_h}{2}}(\bar{\partial}\bar{y}_1)^{\frac{\lambda_h}{2}}e(u,\bar{u}) + \right.$$

$$+\frac{\lambda_h}{(\lambda_h+\lambda_v+2)} \left\{ \left(\sum_{p+q=\frac{\lambda_v}{2}} \Gamma^{p,q}_{\frac{\lambda_h}{2}-1,\frac{\lambda_h}{2}+1,0}\zeta^p\bar{\zeta}^q \right) (\partial y_1)^{\frac{\lambda_h}{2}-1}(\bar{\partial}\bar{y}_1)^{\frac{\lambda_h}{2}+1}e(\partial,\bar{u}) + \right.$$

$$+\left(\sum_{p+q=\frac{\lambda_v}{2}}\Gamma^{p,q}_{\frac{\lambda_h}{2}+1,\frac{\lambda_h}{2}-1,0}\zeta^p\bar\zeta^q\right)(\partial y_1)^{\frac{\lambda_h}{2}+1}(\bar\partial\bar y_1)^{\frac{\lambda_h}{2}-1}e(u,\bar\partial)\Bigg\}\Bigg]\,\omega^{\vec\lambda}_{\frac{\lambda_h}{2},\frac{\lambda_h}{2}}(u\,,\bar u)\,,\lambda_v\geqslant 2\,;$$

$$\lambda_h,\lambda_v\in 2\mathbb{Z}_{\geqslant 0}\Bigg\}\,. \qquad (3.72)$$

$$H^2\,(\sigma_-)=\Bigg\{(\mathbb{A})\quad(\partial\,\bar\partial\,X)^{\frac{\lambda_v}{2}}(\partial y_1)^{\lambda_h}H(\partial,\partial)R^{\vec\lambda}_{\frac{\lambda_v}{2}+\lambda_h+2\,,\frac{\lambda_v}{2}}(u\,,\bar u)\quad\oplus$$

$$\oplus\quad(\partial\,\bar\partial\,X)^{\frac{\lambda_v}{2}}(\bar\partial\bar y_1)^{\lambda_h}\bar H(\bar\partial,\bar\partial)R^{\vec\lambda}_{\frac{\lambda_v}{2}\,,\frac{\lambda_v}{2}+\lambda_h+2}(u\,,\bar u)\,;$$

$$(\mathbb{B})\quad(\partial\,\bar\partial\,X)^{\frac{\lambda_v}{2}}\Big((\partial y_1)^{\frac{\lambda_h}{2}-1}(\bar\partial\bar y_1)^{\frac{\lambda_h}{2}+1}H(\partial,\partial)+$$

$$+(\partial y_1)^{\frac{\lambda_h}{2}+1}(\bar\partial\bar y_1)^{\frac{\lambda_h}{2}-1}\bar H(\bar\partial,\bar\partial)\Big)\,R^{\vec\lambda}_{\frac{\lambda_v+\lambda_h}{2}+1\,,\frac{\lambda_v+\lambda_h}{2}+1}(u\,,\bar u)\,;$$

$$(\mathbb{C})\quad\Bigg[\left(\sum_{p+q=\frac{\lambda_v}{2}}\Gamma^{p,q}_{\frac{\lambda_h}{2}+1,\frac{\lambda_h}{2}-1,0}\zeta^p\bar\zeta^q\right)(\partial y_1)^{\frac{\lambda_h}{2}+1}(\bar\partial\bar y_1)^{\frac{\lambda_h}{2}-1}H(u,u)+$$

$$+\left(\sum_{p+q=\frac{\lambda_v}{2}}\Gamma^{p,q}_{\frac{\lambda_h}{2}-1,\frac{\lambda_h}{2}+1,0}\zeta^p\bar\zeta^q\right)(\partial y_1)^{\frac{\lambda_h}{2}-1}(\bar\partial\bar y_1)^{\frac{\lambda_h}{2}+1}\bar H(\bar u,\bar u)\Bigg]\times$$

$$\times\,R^{\vec\lambda}_{\frac{\lambda_h}{2}-1\,,\frac{\lambda_h}{2}-1}(u\,,\bar u)\,,\lambda_h\geqslant 2\,;$$

$$(\mathbb{D})\quad(\partial\,\bar\partial\,X)^{\frac{\lambda_v}{2}}(\partial y_1)^{\frac{\lambda_h}{2}}(\bar\partial\bar y_1)^{\frac{\lambda_h}{2}}\left(H(u,\partial)+\bar H(\bar u,\bar\partial)\right)R^{\vec\lambda}_{\frac{\lambda_v+\lambda_h}{2}\,,\frac{\lambda_v+\lambda_h}{2}}(u\,,\bar u)\,,\lambda_v\geqslant 2\,;$$

$$\lambda_h,\lambda_v\in 2\mathbb{Z}_{\geqslant 0}\Bigg\}\,. \qquad (3.73)$$

Имея выражения для всех коциклов в терминах (HW, LW) векторов алгебры $\mathfrak{sl}^h(2)\oplus\mathfrak{sl}^v(2)$, мы можем получить полный набор калибровочных параметров, полей и уравнений, закодированных в $(\mathrm{adj}\otimes\mathrm{adj})$-производной $\mathcal{D}$. Для этого к полученным выше выражениям требуется применить генераторы E_v вертикальной алгебры и F_h горизонтальной во всех возможных комбинациях. В итоге получим бесконечное число копий безмассовых и частично-безмассовых систем, описываемых с помощью $\mathcal{D}$. Отметим, что с точки зрения горизонтальной $\mathfrak{sl}^h(2)$ кольцо $\mathfrak{R}$ является суммой конечномерных неприводимых представлений, поэтому для любой фиксированной пары весов (λ_v,λ_h) применение оператора $F_h^{\lambda_h+1}$ аннигилирует (HW, LW) вектор, в то время как оператор E_v можно применять неограниченное число раз.

Возникновение частично-безмассовых полей в спектре B_2-теории представляет интерес для задачи построения взаимодействующей теории безмассовых, массивных и частично-безмассовых полей, активно изучаемой различными группами [137—146].

3.2 Сектор ноль-форм $(\mathrm{tw}\otimes\mathrm{adj})$ и $(\mathrm{adj}\otimes\mathrm{tw})$

В этом разделе рассмотрим содержание уравнений для полей ноль-форм C со значениями в модулях $(\mathrm{tw}\otimes\mathrm{adj})$ и $(\mathrm{adj}\otimes\mathrm{tw})$, полученных в главе 2. Проведем вычисления для случая $(\mathrm{tw}\otimes\mathrm{adj})$, так как случай $(\mathrm{adj}\otimes\mathrm{tw})$ следует из замены индексов Кокстера $1\leftrightarrow 2$.

Из уравнения (2.42) устанавливается, что в случае модуля $(\mathrm{tw}\otimes\mathrm{adj})$ алгебра $\mathfrak{so}(3,2)$ действует на кольце форм $\mathfrak{R}=\Lambda^\bullet(M)\otimes\mathbb{C}[y_1,y_2,\bar{y}_1,\bar{y}_2]$ генераторами

$$P_{\alpha\dot\alpha}=-ie^{\alpha\dot\alpha}(y_{1\alpha}\bar{y}_{1\dot\alpha}-\partial_{1\alpha}\bar\partial_{1\dot\alpha})+e^{\alpha\dot\alpha}(y_{2\alpha}\bar\partial_{2\dot\alpha}+\bar{y}_{2\dot\alpha}\partial_{2\alpha})\,, \tag{3.74}$$

$$L_{\alpha\alpha}=\delta^{ij}y_{i\alpha}\partial_{j\alpha}\,,\quad \bar{L}_{\dot\alpha\dot\alpha}=\delta^{ij}\bar{y}_{i\dot\alpha}\bar\partial_{j\dot\alpha}\,. \tag{3.75}$$

Из формулы видно, что генератор $P_{\alpha\dot\alpha}$ меняет полную степень монома от переменных Y_i на ± 2. Следовательно, все $\mathfrak{so}(3,2)$-подмодули кольца $\mathfrak{R}$ являются бесконечномерными. В связи с этим мы не можем гарантировать, что $\mathfrak{R}$ раскладывается в прямую сумму неприводимых представлений $\mathfrak{so}(3,2)$, так как среди подмодулей $\mathfrak{R}$ могут найтись неразложимые приводимые модули. Появление приводимых неразложимых модулей указывает на то, что соответствующее безмассовое или частично-безмассовое поле лежит вне массовой оболочки, т. е. не описывает физическую динамику и является вспомогательным. Прямой анализ структуры $\mathfrak{R}$ как модуля $\mathfrak{so}(3,2)$ осложняется бесконечной размерностью его подмодулей, поэтому прибегнем к использованию дуальной коммутирующей алгебры.

С алгеброй $\mathfrak{so}(3,2)$ (3.74)–(3.75) коммутирует алгебра $\mathfrak{sl}(2)\oplus\mathfrak{sl}(2)$, порожденная генераторами

$$H_1=\bar{N}_1-N_1+N_2+\bar{N}_2+2,\quad E_1=y_2^\alpha\partial_{1\alpha}-i\bar{y}_{1\dot\alpha}\bar{y}_2^{\dot\alpha},\quad F_1=y_1^\alpha\partial_{2\alpha}-i\bar\partial_{1\dot\alpha}\bar\partial_2^{\dot\alpha}\,, \tag{3.76}$$

$$H_2=N_1-\bar{N}_1+N_2+\bar{N}_2+2,\quad E_2=\bar{y}_2^{\dot\alpha}\bar\partial_{1\dot\alpha}-iy_{1\alpha}y_2^\alpha,\quad F_2=\bar{y}_1^{\dot\alpha}\bar\partial_{2\dot\alpha}-i\partial_{1\alpha}\partial_2^\alpha\,. \tag{3.77}$$

Из выражений для генераторов видно, что любой $\mathfrak{sl}(2)\oplus\mathfrak{sl}(2)$-подмодуль кольца $\mathfrak{R}$ является бесконечномерным. Следовательно, мы также не можем гарантировать разложение $\mathfrak{R}$ в сумму неприводимых $\mathfrak{sl}(2)\oplus\mathfrak{sl}(2)$-модулей.

Поэтому разложение кольца $\mathfrak{R}$ в сумму тензорных произведений неприводимых представлений $\mathfrak{sl}(2)\oplus\mathfrak{sl}(2)$ и $\mathfrak{so}(3,2)$, использованное в разделе 3.1, не применимо к текущей ситуации. Свойство коммутации генераторов $\mathfrak{sl}(2)\oplus\mathfrak{sl}(2)$ и $\mathfrak{so}(3,2)$ обеспечивает лишь то, что образ отображения представления ρ для одной из алгебр действует на пространстве кратности представлений другой, т. е.

$$\rho(\mathfrak{so}(3,2))\subset \mathrm{End}_{\mathfrak{sl}(2)\oplus\mathfrak{sl}(2)}(\mathfrak{R})\,,\quad \rho(\mathfrak{sl}(2)\oplus\mathfrak{sl}(2))\subset \mathrm{End}_{\mathfrak{so}(3,2)}(\mathfrak{R})\,, \tag{3.78}$$

$$\mathfrak{R}\simeq\bigoplus \mathrm{Rep}_{\mathfrak{so}(3,2)}\otimes\mathrm{Rep}_{\mathfrak{sl}(2)\oplus\mathfrak{sl}(2)}\,, \tag{3.79}$$

где $\mathrm{Rep}_{\mathfrak{sl}(2)\oplus\mathfrak{sl}(2)}$ является пространством кратностей для представления $\mathrm{Rep}_{\mathfrak{so}(3,2)}$ и наоборот. Так как нас интересуют модули $\mathfrak{so}(3,2)$, то на их пространствах кратностей действует $\mathfrak{sl}(2)\oplus\mathfrak{sl}(2)$. В случае стандартной Хау-дуальности [87] выделение старшего или младшего вектора по одной алгебре фиксировало неприводимое представление другой. В текущей ситуации выделение (LW, LW) вектора $\mathfrak{sl}(2)\oplus\mathfrak{sl}(2)$ фиксирует неразложимое, но возможно приводимое, представление $\mathfrak{so}(3,2)$. Этого достаточно для нахождения σ_--когомологий, однако на пути получения полного списка примарных полей и дифференциальных операторов на них в терминах функций от Y_i возникают препятствия, как будет показано далее.

Изучим структуру кольца $\mathfrak{R}$ как представления $\mathfrak{sl}(2)\oplus\mathfrak{sl}(2)$. Любой элемент кольца $\mathfrak{R}$ можно представить в виде

$$\Psi\left(Y_1,Y_2\right)=\sum_{\substack{a,b,c\\ \bar a,\bar b,\bar c}}\frac{1}{(a+b)!(\bar a+\bar b)!}\zeta^c\bar\zeta^{\,\bar c}\left(\partial y_1\right)^a\left(\partial y_2\right)^b\left(\bar\partial\bar y_1\right)^{\bar a}\left(\bar\partial\bar y_2\right)^{\bar b}\Psi^{\bar a,\bar b,\bar c}_{a,b,c}\psi_{a+b,\bar a+\bar b}(u,\bar u)\,, \tag{3.80}$$

где вводятся вспомогательные спинорные переменные $(u,\bar u)$ и используются возникавшие ранее обозначения (3.23), (3.38). Полиномы $\psi_{a+b,\bar a+\bar b}(u,\bar u)$ кодируют мультиспиноры $\psi_{\alpha(a+b),\dot\alpha(\bar a+\bar b)}$, а $\Psi^{\bar a,\bar b,\bar c}_{a,b,c}$ – некоторые числовые коэффициенты. Такое представление поля ранга-2 через комбинацию $\mathfrak{so}(3,1)$-полей ранга-1 является известной конструкцией, используемой в рамках четырехмерных высших спинов, например, [104; 147]. Важно, что

$$\zeta^c\bar\zeta^{\,\bar c}\left(\partial y_1\right)^a\left(\partial y_2\right)^b\left(\bar\partial\bar y_1\right)^{\bar a}\left(\bar\partial\bar y_2\right)^{\bar b}\psi_{a+b,\bar a+\bar b}(u,\bar u) \tag{3.81}$$

образуют счетный базис кольца $\mathfrak{R}$, согласованный с весовой структурой $\mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{sl}(2)$, т. е.

$$H_1 \zeta^c \bar{\zeta}^{\,\bar{c}} (\partial y_1)^a (\partial y_2)^b \left(\bar{\partial}\bar{y}_1\right)^{\bar{a}} \left(\bar{\partial}\bar{y}_2\right)^{\bar{b}} = \lambda_1 \zeta^c \bar{\zeta}^{\,\bar{c}} (\partial y_1)^a (\partial y_2)^b \left(\bar{\partial}\bar{y}_1\right)^{\bar{a}} \left(\bar{\partial}\bar{y}_2\right)^{\bar{b}} , \quad (3.82)$$

$$H_2 \zeta^c \bar{\zeta}^{\,\bar{c}} (\partial y_1)^a (\partial y_2)^b \left(\bar{\partial}\bar{y}_1\right)^{\bar{a}} \left(\bar{\partial}\bar{y}_2\right)^{\bar{b}} = \lambda_2 \zeta^c \bar{\zeta}^{\,\bar{c}} (\partial y_1)^a (\partial y_2)^b \left(\bar{\partial}\bar{y}_1\right)^{\bar{a}} \left(\bar{\partial}\bar{y}_2\right)^{\bar{b}} , \quad (3.83)$$

где веса выражаются через параметры $(a, b, c, \bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ по формулам

$$\lambda_1 = (2\bar{c} + \bar{a} + \bar{b} + b - a + 2) , \quad \lambda_2 = (2c + a + b + \bar{b} - \bar{a} + 2) . \quad (3.84)$$

При этом оба веса не могут оказаться одновременно отрицательными, что очевидно из

$$\lambda_+ = \lambda_1 + \lambda_2 = 2(b + \bar{b} + c + \bar{c} + 2) > 0 , \quad \lambda_- = \lambda_2 - \lambda_1 = 2(a + c - \bar{a} - \bar{c}) . \quad (3.85)$$

Несложно проверить, что для любого базисного вектора x и $\forall i \in \{1, 2\}\, \exists n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : F_i^{n_i} x = 0$, т. е. модуль $\mathfrak{R}$ является локально-нильпотентным относительно генераторов F_i. Другими словами, это означает, что любой базисный вектор (3.81) можно отобразить в (LW, LW) вектор, применяя конечный набор понижающих операторов. То же самое верно и для любой линейной комбинации базисных векторов, т. е. для любого элемента кольца $\mathfrak{R}$. В то же время не каждый элемент $\mathfrak{R}$ обязательно представим в виде комбинации младших векторов $\mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{sl}(2)$ и их потомков. Более того, такие элементы $\mathfrak{R}$ существуют и о них пойдет речь далее.

Чтобы описать класс (LW, LW) векторов, требуется решить уравнения

$$F_1 \Psi (Y_1, Y_2) = \sum_{\substack{a,b,c \\ \bar{a},\bar{b},\bar{c}}} \frac{1}{(a+b)!(\bar{a}+\bar{b})!} \Big\{ b \zeta^c \bar{\zeta}^{\,\bar{c}} (\partial y_1)^{a+1} (\partial y_2)^{b-1} \left(\bar{\partial}\bar{y}_1\right)^{\bar{a}} \left(\bar{\partial}\bar{y}_2\right)^{\bar{b}} -$$
$$- i\bar{c}(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + 1) \zeta^c \bar{\zeta}^{\,\bar{c}-1} (\partial y_1)^a (\partial y_2)^b \left(\bar{\partial}\bar{y}_1\right)^{\bar{a}} \left(\bar{\partial}\bar{y}_2\right)^{\bar{b}} \Big\} \Psi^{\bar{a},\bar{b},\bar{c}}_{a,b,c} \psi_{a+b,\bar{a}+\bar{b}}(u, \bar{u}) = 0 , \quad (3.86)$$

$$F_2 \Psi (y_1, y_2) = \sum_{\substack{a,b,c \\ \bar{a},\bar{b},\bar{c}}} \frac{1}{(a+b)!(\bar{a}+\bar{b})!} \Big\{ \bar{b} \zeta^c \bar{\zeta}^{\,\bar{c}} (\partial y_1)^a (\partial y_2)^b \left(\bar{\partial}\bar{y}_1\right)^{\bar{a}+1} \left(\bar{\partial}\bar{y}_2\right)^{\bar{b}-1} -$$
$$- ic(a + b + c + 1) \zeta^{c-1} \bar{\zeta}^{\,\bar{c}} (\partial y_1)^a (\partial y_2)^b (\partial \bar{y}_1)^{\bar{a}} \left(\bar{\partial}\bar{y}_2\right)^{\bar{b}} \Big\} \Psi^{\bar{a},\bar{b},\bar{c}}_{a,b,c} \psi_{a+b,\bar{a}+\bar{b}}(u, \bar{u}) = 0 . \quad (3.87)$$

В выделенном случае $\lambda_+ = 4$, отвечающем унитарному подмодулю модуля $(\mathrm{tw} \otimes \mathrm{adj})$, решение принимает простую форму

$$\Psi^{\vec{\lambda}\bar{a},0}_{a,0}(Y_1, Y_2) = \frac{1}{a!\bar{a}!} \left(\partial y_1\right)^a \left(\bar{\partial}\bar{y}_1\right)^{\bar{a}} \Psi^{\bar{a},0,0}_{a,0,0} \psi^{\vec{\lambda}}_{a,\bar{a}}(u, \bar{u}) \,, \quad \lambda_+ = 4 \,, \quad \lambda_- = 2(a - \bar{a}) \,. \tag{3.88}$$

В общем положении $\lambda_+ > 4$ младший вектор определен как

$$\Psi^{\vec{\lambda}\bar{a},\bar{b}}_{a,b}(Y_1, Y_2) = \sum_{\substack{k=0,\dots,b \\ l=0,\dots,\bar{b}}} \frac{b!\bar{b}!(a+b+1)(\bar{a}+\bar{b}+1)}{i^{k+l}k!l!(b-k)!(\bar{b}-l)!(a+b+l+1)!(\bar{a}+\bar{b}+k+1)!} \times$$
$$\times\, \Psi^{\bar{a},\bar{b},0}_{a,b,0} \zeta^l \bar{\zeta}^k \left(\partial y_1\right)^{a+k} \left(\bar{\partial}\bar{y}_1\right)^{\bar{a}+l} \left(\partial y_2\right)^{b-k} \left(\bar{\partial}\bar{y}_2\right)^{\bar{b}-l} \psi^{\vec{\lambda}}_{a+b,\bar{a}+\bar{b}}(u, \bar{u}) \,, \tag{3.89}$$

где

$$\lambda_+ = 2(b + \bar{b} + 2) \,, \; \lambda_- = 2(a - \bar{a}) \,. \tag{3.90}$$

Из каждого младшего вектора с помощью повышающих операторов $\mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{sl}(2)$ строится модуль Верма $V(\lambda_1, \lambda_2)$. Из теории представлений известно (например, [148]), что в модуле Верма младшего веса $V(\lambda)$ алгебры $\mathfrak{sl}(2)$ при $\lambda \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ возникает сингулярный вектор, т. е. $V(\lambda)$ – неразложимый приводимый модуль. Этот факт прямо обобщается на модули $V(\lambda_1, \lambda_2) \simeq V(\lambda_1) \otimes V(\lambda_2)$, где $\lambda_i \in \mathbb{Z}$. Имеется три случая:

1. $\lambda_i > 0$: модуль неприводим;

2. $\lambda_1 \leq 0 \,, \lambda_2 > 0$ или наоборот: в первом случае $V(\lambda_1, \lambda_2)$ имеет один сингулярный подмодуль $V(-\lambda_1 + 2, \lambda_2)$, порожденный $E_1^{-\lambda_1+1}\Psi^{\vec{\lambda}}$. Второй случай аналогичен;

3. $\lambda_i \leq 0$: модуль $V(\lambda_1, \lambda_2)$ имеет три пересекающихся сингулярных подмодуля $V(-\lambda_1 + 2, \lambda_2)$, $V(\lambda_1, -\lambda_2 + 2)$ и $V(-\lambda_1 + 2, -\lambda_2 + 2)$.

Так как оба веса не могут быть одновременно отрицательными (3.85), то последний случай не реализуется.

Существование модулей $V(\lambda_1, \lambda_2)$ с сингулярным подмодулем приводит к невозможности разложить любой вектор из $\mathfrak{R}$ по младшим векторам и их потомкам. Например, можно рассмотреть вектор $\Phi = \left(\bar{\partial}\bar{y}_1\right)^n \left(\bar{\partial}\bar{y}_2\right)^m \psi_{0,n+m}(u, \bar{u})$.

Соответствующие ему $\mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{sl}(2)$-веса равны

$$H_1\Phi = (n + m + 2)\Phi = h_1\Phi \,, \quad H_2\Phi = (m - n + 2)\Phi = h_2\Phi \,. \tag{3.91}$$

Непосредственно проверяется, что $F_1\Phi = F_2^{m+1}\Phi = 0$.

Допустим, что Φ разложим в сумму (LW, LW) векторов и их потомков. Пользуясь значениями весов h_i, а также степенями операторов F_i, требующимися для аннигиляции, Φ можно представить в виде

$$\Phi = \sum_{(a,b,\bar{a},\bar{b})} \Psi^{(h_1,h_2)\bar{a},\bar{b}}_{a,b} + \sum_{(a,b,\bar{a},\bar{b})} E_2 \Psi^{(h_1,h_2-2)\bar{a},\bar{b}}_{a,b} + \cdots + \\ + \sum_{(a,b,\bar{a},\bar{b})} E_2^k \Psi^{(h_1,h_2-2k)\bar{a},\bar{b}}_{a,b} + \cdots + \sum_{(a,b,\bar{a},\bar{b})} E_2^m \Psi^{(h_1,h_2-2m)\bar{a},\bar{b}}_{a,b}. \tag{3.92}$$

Применением операторов F_2^k для $k \in \{1, \ldots, m\}$ к обеим частям разложения Φ (3.92) получаем конечную систему уравнений, фиксирующую векторы $\Psi^{\vec{\lambda}\bar{a},\bar{b}}_{\phantom{\vec{\lambda}}a,b}$. Эта система уравнений имеет треугольный вид, что позволяет искать решение аналогично обратному ходу в классическом методе Гаусса для систем линейных уравнений. Можно убедиться, что полученная система уравнений не имеет решения. Причина этого заключается в членах $F_2^l E_2^k \Psi^{(h_1,h_2-2k)\bar{a},\bar{b}}_{a,b}$: $h_2 \leq 2k$ и $k \leq h_2 - 1$. При $l = h_2 - k - 1$ протаскивание F_2^l через E_2^k приводит к сингулярному вектору $E_2^{2k-h_2+1} \Psi^{(h_1,h_2-2k)\bar{a},\bar{b}}_{a,b}$, уничтожаемому оператором F_2 при следующем применении к разложению (3.92). В результате приходим к противоречию.

Для ясности рассмотрим пример $\Phi = \left(\bar{\partial}\bar{y}_1\right)^2 \left(\bar{\partial}\bar{y}_2\right)^2 \psi_{0,4}(u,\bar{u})$. Несложно проверить, что

$$H_1\Phi = 6\Phi\,, \qquad H_2\Phi = 2\Phi\,, \tag{3.93}$$

$$F_1\Phi = 0\,, \qquad F_2^3\Phi = 0\,. \tag{3.94}$$

Следовательно, разложение по младшим векторам и их потомкам дается формулой

$$\Phi = \left(\bar{\partial}\bar{y}_1\right)^2 \left(\bar{\partial}\bar{y}_2\right)^2 \psi_{0,4}(u,\bar{u}) = \sum_{(a,b,\bar{a},\bar{b})} \Psi^{(6,2)\bar{a},\bar{b}}_{a,b} + \sum_{(a,b,\bar{a},\bar{b})} E_2 \Psi^{(6,0)\bar{a},\bar{b}}_{a,b} + \sum_{(a,b,\bar{a},\bar{b})} E_2^2 \Psi^{(6,-2)\bar{a},\bar{b}}_{a,b}\,. \tag{3.95}$$

Применение F_2^2 к обеим частям разложения приводит к

$$\sum_{(a,b,\bar{a},\bar{b})} \Psi^{(6,-2)\bar{a},\bar{b}}_{a,b} = \frac{1}{2} \left(\bar{\partial}\bar{y}_2\right)^4 \psi_{0,4}(u,\bar{u})\,. \tag{3.96}$$

Подставим полученное выражение обратно в разложение для Φ и применим F_2.

В итоге придем к противоречию

$$0 = \left(2\left(\bar{\partial}\bar{y}_1\right)\left(\bar{\partial}\bar{y}_2\right)^3 + i\zeta\left(\bar{\partial}\bar{y}_2\right)^4\right)\psi_{0,4}(u,\bar{u}) \tag{3.97}$$

из-за сингулярного вектора $\sum_{(a,b,\bar{a},\bar{b})} E_2\Psi^{(6,0)}{}^{\bar{a},\bar{b}}_{a,b}$.

Итого, любой x из $\mathfrak{R}$ с помощью F_i можно отобразить в младший вектор, но при этом не каждый вектор x раскладывается по (LW, LW) векторам и их потомкам. Это указывает на появление нерасщепляемых расширений модулей Верма, т. е. среди $\mathfrak{sl}(2)\oplus\mathfrak{sl}(2)$-подмодулей модуля $\mathfrak{R}$ появляются $E\subset\mathfrak{R}$:

$$0\to V\left(\lambda_1,\lambda_2\right)\to E\to V\left(\mu_1,\mu_2\right)\to 0 \tag{3.98}$$

образуют короткую точную последовательность, и E не расщепляется как модуль

$$E\not\simeq V\left(\lambda_1,\lambda_2\right)\oplus V\left(\mu_1,\mu_2\right)\,. \tag{3.99}$$

Пользуясь известными результатами из гомологической алгебры и ограничением на веса (3.85), можно показать, что для нерасщепляемых расширений $E\subset\mathfrak{R}$

$$\left(\mu_1,\mu_2\right) = \left(2-\lambda_1,\lambda_2\right) \;\text{ или }\; \left(\mu_1,\mu_2\right) = \left(\lambda_1,2-\lambda_2\right)\,, \tag{3.100}$$

где в первом случае $(\lambda_1\leq 0,\lambda_2>0)$, а во втором $(\lambda_1>0,\lambda_2\leq 0)$, т. е. нерасщепляемый модуль возникает за счет существования сингулярного вектора в подмодуле $V(\lambda_1,\lambda_2)$. В приложении Б.2 приводится краткое объяснение возникновения связи весов (3.100).

Явный пример нерасщепляемого модуля в рамках кольца $\mathfrak{R}$ можно привести непосредственно. Рассмотрим короткую точную последовательность

$$0\to V\left(6,0\right)\xrightarrow{i} E\xrightarrow{p} V\left(6,2\right)\to 0\,. \tag{3.101}$$

Модуль E порожден двумя векторами v_0 и $\hat{w}_2$.

$$\begin{gathered} v_0 = \left[\left(\bar{\partial}\bar{y}_1\right)^3\left(\bar{\partial}\bar{y}_2\right) - \frac{i}{2}e\left(\bar{\partial}\bar{y}_1\right)^4\right]\psi^{\vec{\lambda}}_{0,4}(u,\bar{u})\;: \\ F_i v_0 = 0\,,\; H_1 v_0 = 6v_0\,,\; H_2 v_0 = 0\,, \end{gathered} \tag{3.102}$$

$$\begin{gathered} \hat{w}_2 = \left[\left(\bar{\partial}\bar{y}_1\right)^2\left(\bar{\partial}\bar{y}_2\right)^2 - \frac{i}{2}e(\bar{\partial}\bar{y}_1)^3\left(\bar{\partial}\bar{y}_2\right)\right]\psi^{\vec{\lambda}}_{0,4}(u,\bar{u})\;: \\ F_1\hat{w}_2 = 0\,,\; F_2\hat{w}_2 = v_0\,,\; H_1\hat{w}_2 = 6\hat{w}_2\,,\; H_2\hat{w}_2 = 2\hat{w}_2\,. \end{gathered} \tag{3.103}$$

Подмодуль $V(6,0) \subset E$ порожден v_0 и его потомками. Вектор $\hat{w}_2 = p^{-1}(w_2)$ – это прообраз отображения проекции p, где w_2 является младшим вектором $V\,(6,2)$. При этом $\hat{w}_2 \neq E_2 v_0$, что видно из формулы

$$E_2 v_0 = \left[\left(\bar{\partial}\bar{y}_1\right)^2\left(\bar{\partial}\bar{y}_2\right)^2 - ie(\bar{\partial}\bar{y}_1)^3\left(\bar{\partial}\bar{y}_2\right) - \frac{1}{6}e^2\left(\bar{\partial}\bar{y}_1\right)^4\right]\psi^{\vec{\lambda}}_{0,4}(u,\bar{u})\,. \qquad (3.104)$$

Несложно проверить, что

$$F_2 E_2^n \hat{w}_2 = E_2^n v_0 - n(n+1)E_2^{n-1}\hat{w}_2\,. \qquad (3.105)$$

Следовательно, факторизация E по подмодулю $V(6,0)$ оставляет $V(6,2)$. Значит, E является нерасщепляемым расширением модуля $V(6,2)$ посредством модуля $V(6,0)$. При этом модуль $V(6,0)$ имеет сингулярный вектор на первом уровне.

Суммируя все сделанные наблюдения, приходим к выводу, что как $\mathfrak{sl}(2)\oplus\mathfrak{sl}(2)$-модуль

$$\mathfrak{R} \simeq \bigoplus_{\lambda_1,\lambda_2} V(\lambda_1\,,\lambda_2) \bigoplus_{E\in\text{нерасщепляемые}} E\,. \qquad (3.106)$$

Таким образом, пространства кратностей представлений $\mathfrak{so}(3,2)$ являются неразложимыми локально-нильпотентными модулями $\mathfrak{sl}(2)\oplus\mathfrak{sl}(2)$. При этом ограничение на класс (LW, LW) векторов покрывает все присутствующие типы неразложимых, возможно приводимых, представлений $\mathfrak{so}(3,2)$. Следовательно, для когомологического анализа динамического содержания уравнения (2.42) достаточно ограничиться рассмотрением проекций на младшие векторы (3.88)–(3.89). В то же время восстановить полный список коциклов как функций от переменных Y_i не представляется возможным, так как представления младшего веса не покрывают $\mathfrak{R}$ целиком. Классификация нерасщепляемых расширений, а также способы их выделения как подпредставлений мало изучены в литературе и представляют интерес для дальнейшего исследования.

Будем действовать аналогично разделу 3.1 и произведем переход от производящих функций от Y_i к полям ранга-1. Лоренцева ковариантная производная D_L (3.3) действует на внутреннее поле первого ранга стандартным образом

$$D_L \Psi^{\vec{\lambda}\bar{a},\bar{b}}_{a,b}(Y_1,Y_2) = \sum_{\substack{k=0,\dots,b\\ l=0,\dots,\bar{b}}} \frac{b!\bar{b}!(a+b+1)(\bar{a}+\bar{b}+1)}{i^{k+l}k!l!(b-k)!(\bar{b}-l)!(a+b+l+1)!(\bar{a}+\bar{b}+k+1)!}\times$$

$$\times\, \Psi^{\bar a,\bar b,0}_{a,b,0}\zeta^l\bar\zeta^k\,(\partial y_1)^{a+k}\,(\bar\partial\bar y_1)^{\bar a+l}\,(\partial y_2)^{b-k}\,(\bar\partial\bar y_2)^{\bar b-l}\times$$
$$\times\left\{\mathrm{d}_x+\omega(u,\partial)+\bar\omega(\bar u,\bar\partial)\right\}\psi^{\vec\lambda}_{a+b,\bar a+\bar b}(u,\bar u)\,. \quad (3.107)$$

Результат применения оператора импульса к (LW, LW) вектору приведен в приложении Б.3.

Собирая все вместе, приходим к уравнению

$$D_L\psi^{\vec\lambda}_{a+b,\bar a+\bar b}(u,\bar u)-i\frac{(a+b+\bar b+1)(\bar a+b+\bar b+1)}{(a+b)(\bar a+\bar b)}e(u,\bar u)\psi^{\vec\lambda}_{a+b-1,\bar a+\bar b-1}(u,\bar u)+$$
$$+\,i\frac{(a+1)(\bar a+1)}{(a+b+2)(\bar a+\bar b+2)}e(\partial,\bar\partial)\psi^{\vec\lambda}_{a+b+1,\bar a+\bar b+1}(u,\bar u)+$$
$$+\,\frac{b(b+a-\bar a)}{(a+b)(\bar a+\bar b+2)}e(u,\bar\partial)\psi^{\vec\lambda}_{a+b-1,\bar a+\bar b+1}(u,\bar u)+$$
$$+\,\frac{\bar b(\bar b+\bar a-a)}{(a+b+2)(\bar a+\bar b)}e(\partial,\bar u)\psi^{\vec\lambda}_{a+b+1,\bar a+\bar b-1}(u,\bar u)=0\,, \quad (3.108)$$

где

$$\lambda_+=2(b+\bar b+2)\,,\quad \lambda_-=2(a-\bar a)\,. \quad (3.109)$$

Множитель $b!\bar b!(a+b+1)(\bar a+\bar b+1)$ убран переопределением мультиспиноров.

Определим производящую функцию

$$\Psi\,(u,\bar u,v,\bar v)=\sum_{a,b,\bar a,\bar b}\psi^{\vec\lambda}_{a+b,\bar a+\bar b}(u,\bar u)v^a\bar v^{\bar a}\,, \quad (3.110)$$

где переменные $v\,,\bar v$ позволяют хранить информацию о значениях $a,\bar a$ в соответствующем векторе $\Psi^{\vec\lambda\,\bar a,\bar b}_{a,b}$ (3.89).

В терминах производящей функции $\Psi\,(u,\bar u,v,\bar v)$ уравнение принимает форму

$$\left(D_L-i\frac{\left(\hat N_u+\hat{\bar N}_u-\hat{\bar N}_v+1\right)\left(\hat N_u+\hat{\bar N}_u-\hat N_v+1\right)}{\hat N_u\hat{\bar N}_u}e(u,\bar u)\,v\,\bar v+\right.$$
$$+\,\frac{i}{\left(\hat N_u+2\right)\left(\hat{\bar N}_u+2\right)}e(\partial,\bar\partial)\,\partial_v\,\bar\partial_v+\frac{\left(\hat N_u-\hat N_v\right)\left(\hat N_u-\hat{\bar N}_v\right)}{\hat N_u\left(\hat{\bar N}_u+2\right)}e(u,\bar\partial)+$$
$$\left.+\frac{\left(\hat{\bar N}_u-\hat{\bar N}_v\right)\left(\hat{\bar N}_u-\hat N_v\right)}{\left(\hat N_u+2\right)\hat{\bar N}_u}e(\partial,\bar u)\right)\Psi\,(u,\bar u,v,\bar v)=0\,, \quad (3.111)$$

где были использованы операторы Эйлера

$$\hat{N}_u = u^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha}\,, \quad \hat{\bar{N}}_u = \bar{u}^{\dot\alpha} \frac{\partial}{\partial \bar{u}^{\dot\alpha}}\,, \tag{3.112}$$

$$\hat{N}_v = v\partial_v\,, \qquad \hat{\bar{N}}_v = \bar{v}\bar{\partial}_v\,. \tag{3.113}$$

Введем градуировку $G = |\hat{N}_u - \hat{\bar{N}}_u| + 2\min(\hat{N}_v\,, \hat{\bar{N}}_v)$. Заметим, что для так введенной градуировки возможны два минимальных значения $G = \{0, 1\}$. При этом из уравнения (3.111) следует, что G меняется на ± 2. В результате имеем два способа ввести нильпотентный оператор σ_-: «бозонный» и «фермионный». Используя тот факт, что

$$\left(\hat{N}_u - \hat{\bar{N}}_u - \hat{N}_v + \hat{\bar{N}}_v\right) \psi^{\vec{\lambda}}_{a+b,\bar{a}+\bar{b}}(u,\bar{u}) v^a \bar{v}^{\bar{a}} = (b-\bar{b}) \psi^{\vec{\lambda}}_{a+b,\bar{a}+\bar{b}}(u,\bar{u}) v^a \bar{v}^{\bar{a}}\,, \tag{3.114}$$

оператор σ_- можно задать следующим образом.

В «бозонном» случае параметры $(b, \bar{b})$: $|b-\bar{b}| \in 2\mathbb{Z}$ и оператор определен по формуле

$$\begin{aligned}\sigma_- = &\frac{i}{\left(\hat{N}_u + 2\right)\left(\hat{N}_u + 2\right)} e(\partial, \bar{\partial})\, \partial_v\, \bar{\partial}_v + \\ &+ \frac{\left(\hat{N}_u - \hat{N}_v\right)\left(\hat{N}_u - \hat{\bar{N}}_v\right)}{\hat{N}_u \left(\hat{\bar{N}}_u + 2\right)} e(u, \bar{\partial}) \theta\left(\hat{\bar{N}}_u - \hat{N}_u - \hat{\bar{N}}_v + \hat{N}_v\right) + \\ &+ \frac{\left(\hat{\bar{N}}_u - \hat{\bar{N}}_v\right)\left(\hat{\bar{N}}_u - \hat{N}_v\right)}{\left(\hat{N}_u + 2\right) \hat{\bar{N}}_u} e(\partial, \bar{u}) \theta\left(\hat{N}_u - \hat{\bar{N}}_u - \hat{N}_v + \hat{\bar{N}}_v\right)\,.\end{aligned} \tag{3.115}$$

В «фермионном» случае $|b - \bar{b}| \notin 2\mathbb{Z}$ и оператор дается формулами

$$\begin{aligned}\sigma_-\Big|_{b-\bar{b}\geq 1} = &\frac{i}{\left(\hat{N}_u + 2\right)\left(\hat{N}_u + 2\right)} e(\partial, \bar{\partial})\, \partial_v\, \bar{\partial}_v + \\ &+ \frac{\left(\hat{\bar{N}}_u - \hat{\bar{N}}_v\right)\left(\hat{\bar{N}}_u - \hat{N}_v\right)}{\left(\hat{N}_u + 2\right) \hat{\bar{N}}_u} e(\partial, \bar{u}) \theta\left(\hat{N}_u - \hat{\bar{N}}_u - \hat{N}_v + \hat{\bar{N}}_v - 1\right)\,,\end{aligned} \tag{3.116a}$$

$$\begin{aligned}\sigma_-\Big|_{b-\bar{b}\leq 1} = &\frac{i}{\left(\hat{N}_u + 2\right)\left(\hat{N}_u + 2\right)} e(\partial, \bar{\partial})\, \partial_v\, \bar{\partial}_v + \\ &+ \frac{\left(\hat{N}_u - \hat{N}_v\right)\left(\hat{N}_u - \hat{\bar{N}}_v\right)}{\hat{N}_u \left(\hat{\bar{N}}_u + 2\right)} e(u, \bar{\partial}) \theta\left(\hat{\bar{N}}_u - \hat{N}_u - \hat{\bar{N}}_v + \hat{N}_v - 1\right)\,.\end{aligned} \tag{3.116b}$$

В области $|b-\bar{b}| \geq 3$ когомологии операторов (3.115) и (3.116) совпадают. Различия появляются на прямых $|b-\bar{b}| = 1$, аналогично рассмотренному в главе 1 случаю когомологий стандартной теории ВС в пространстве AdS_4.

3.2.1 Вычисления $H^\bullet(\sigma_-)$

По аналогии с рассмотрением когомологий в модуле $(\mathrm{adj}\otimes\mathrm{adj})$, будем явно искать $\ker\sigma_-$ и отбрасывать σ_--точные формы. Хотя мы получим σ_--когомологии лишь для модуля $(\mathrm{tw}\otimes\mathrm{adj})$, представители для $(\mathrm{adj}\otimes\mathrm{tw})$ получаются заменой параметров $(a \leftrightarrow b)$ и $(\bar{a} \leftrightarrow \bar{b})$ во всех формулах ниже.

Группа $H^0(\sigma_-)$

Ноль-форма общего положения имеет вид

$$C^{\vec{\lambda}}(u,\bar{u},v,\bar{v}) = \sum_{\substack{\lambda_+=2(b+\bar{b}+2)\\ \lambda_-=2(a-\bar{a})}} C^{\vec{\lambda}}_{a+b,\bar{a}+\bar{b}}(u,\bar{u})\, v^a\, \bar{v}^{\bar{a}}\,. \tag{3.117}$$

Применение «бозонного» оператора σ_- (3.115) к ноль-форме общего положения дает

$$\begin{aligned}\sigma_- C^{\vec{\lambda}}(u,\bar{u},v,\bar{v}) = \sum_{\substack{\lambda_+=2(b+\bar{b}+2)\\ \lambda_-=2(a-\bar{a})}} \Bigg\{ & \frac{ia\bar{a}}{(a+b+1)(\bar{a}+\bar{a}+1)} e(\partial,\bar{\partial}) C^{\vec{\lambda}}_{a+b,\bar{a}+\bar{b}}(u,\bar{u}) v^{a-1}\bar{v}^{\bar{a}-1} + \\ & + \theta(\bar{b}-b)\frac{(b+1)(a+b-\bar{a}+1)}{(a+b+1)(\bar{a}+\bar{b}+1)} e(u,\bar{\partial}) C^{\vec{\lambda}}_{a+b,\bar{a}+\bar{b}}(u,\bar{u}) v^a \bar{v}^{\bar{a}} + \\ & + \theta(b-\bar{b})\frac{(\bar{b}+1)(\bar{a}+\bar{b}-a+1)}{(a+b+1)(\bar{a}+\bar{b}+1)} e(\partial,\bar{u}) C^{\vec{\lambda}}_{a+b,\bar{a}+\bar{b}}(u,\bar{u}) v^a \bar{v}^{\bar{a}} \Bigg\} = 0.\end{aligned} \tag{3.118}$$

Пользуясь линейной независимостью неприводимых один-форм (3.47), получаем следующие 0-коциклы

$$H^0(\sigma_-) = \ker\sigma_-|_{\deg\Lambda=0} \supset \left\{ \begin{array}{l} \lambda_-, \lambda_+ \in 2\mathbb{Z}: \quad \lambda_+ = 2(b+\bar{b}+2) \geq 4\,, \quad \lambda_- = 2(a-\bar{a}) \\ \bullet \quad C^{\vec{\lambda}}_{\frac{|\lambda_-|}{2}+\frac{\lambda_+}{4}-1,\frac{\lambda_+}{4}-1}(u,\bar{u}) v^{\frac{|\lambda_-|}{2}}\,, \lambda_- \geq 0 \oplus C^{\vec{\lambda}}_{\frac{\lambda_+}{4}-1,\frac{|\lambda_-|}{2}+\frac{\lambda_+}{4}-1}(u,\bar{u}) \bar{v}^{\frac{|\lambda_-|}{2}}\,, \lambda_- \leq 0 : \lambda_+ \in 4\mathbb{Z}\,; \\ \bullet \quad C^{\vec{\lambda}}_{\frac{|\lambda_-|}{2}-1,\frac{\lambda_+}{2}-1}(u,\bar{u}) \bar{v}^{\frac{|\lambda_-|}{2}}\,, \lambda_- \leq -2 \oplus C^{\vec{\lambda}}_{\frac{\lambda_+}{2}-1,\frac{|\lambda_-|}{2}-1}(u,\bar{u}) v^{\frac{|\lambda_-|}{2}}\,, \lambda_- \geq 2 : \lambda_+ > 2|\lambda_-| \end{array} \right\}. \tag{3.119}$$

Для «фермионного» оператора (3.116) на границе $|b-\bar b|=1$ находим решения

$$H^0(\sigma_-)=\ker\sigma_-|_{\deg\Lambda=0}\supset\left\{\lambda_-,\lambda_+\in 2\mathbb{Z}:\quad \lambda_+=2(b+\bar b+2)>4\,,\quad \lambda_-=2(a-\bar a)\right.$$

$$\left.C_{\frac{|\lambda_-|}{2}+b,\bar b}(u,\bar u)\,v^{\frac{|\lambda_-|}{2}}\,,\lambda_-\geq 0\;\oplus\;C_{b,\frac{|\lambda_-|}{2}+\bar b}(u,\bar u)\,\bar v^{\frac{|\lambda_-|}{2}}\,,\lambda_-\leq 0:|b-\bar b|=1\right\}. \qquad (3.120)$$

Группа $H^1(\sigma_-)$

Разложение один-формы общего положения по (3.47) дается формулой

$$\mathcal{E}^{\vec\lambda}(u,\bar u,v,\bar v)=\sum_{\substack{\lambda_+=2(b+\bar b+2)\\ \lambda_-=2(a-\bar a)}}\Big(e(\partial,\bar\partial)\varepsilon^{\vec\lambda}_{A\,a+b+1,\bar a+\bar b+1}(u,\bar u)\,v^a\bar v^{\bar a}+$$
$$+\,e(u,\bar u)\varepsilon^{\vec\lambda}_{B\,a+b-1,\bar a+\bar b-1}(u,\bar u)\,v^a\bar v^{\bar a}+e(\partial,\bar u)\varepsilon^{\vec\lambda}_{C\,a+b+1,\bar a+\bar b-1}(u,\bar u)\,v^a\bar v^{\bar a}+$$
$$+\,e(u,\bar\partial)\varepsilon^{\vec\lambda}_{D\,a+b-1,\bar a-\bar b+1}(u,\bar u)\,v^a\bar v^{\bar a}\Big)\,. \qquad (3.121)$$

С помощью (3.52) разложим $\operatorname{im}\sigma_-|_{\deg\Lambda=2}$ для «бозонного» оператора:

$$\sigma_-\mathcal{E}^{\vec\lambda}(u,\bar u,v,\bar v)=\sum_{\substack{\lambda_+=2(b+\bar b+2)\\ \lambda_-=2(a-\bar a)}}\left\{\frac{ia\bar a}{(a+b+1)\left(\bar a+\bar b+1\right)}\times\right.$$
$$\times\left(\frac{\bar a+\bar b+1}{2}H\left(u,\partial\right)+\frac{a+b+1}{2}H(\bar u,\bar\partial)\right)\varepsilon^{\vec\lambda}_{B\,a+b-1,\bar a+\bar b-1}(u,\bar u)\,v^{a-1}\bar v^{\bar a-1}+$$
$$+\,\frac{ia\bar a\left(\bar a+\bar b+1\right)}{2(a+b+1)\left(\bar a+\bar b+1\right)}H(\partial,\partial)\varepsilon^{\vec\lambda}_{C\,a+b+1,\bar a+\bar b-1}(u,\bar u)v^{a-1}\bar v^{\bar a-1}+$$
$$+\,\frac{ia\bar a(a+b+1)}{2(a+b+1)\left(\bar a+\bar b+1\right)}\bar H(\bar\partial,\bar\partial)\varepsilon^{\vec\lambda}_{D\,a+b-1,\bar a+\bar b+1}(u,\bar u)v^{a-1}\bar v^{\bar a-1}-$$
$$-\,\theta(\bar b-b)\frac{(b+1)(a+b-\bar a+1)}{2(\bar a+\bar b+1)}\bar H(\bar\partial,\bar\partial)\varepsilon^{\vec\lambda}_{A\,a+b+1,\bar a+\bar b+1}(u,\bar u)v^a\bar v^{\bar a}+$$
$$+\,\theta(\bar b-b)\frac{(b+1)(a+b-\bar a+1)}{2(a+b+1)}H(u,u)\varepsilon^{\vec\lambda}_{B\,a+b-1,\bar a+\bar b-1}(u,\bar u)v^a\bar v^{\bar a}+$$
$$+\,\theta(\bar b-b)\frac{(b+1)(a+b-\bar a+1)}{(a+b+1)(\bar a+\bar b+1)}\left(\frac{\bar a+\bar b+1}{2}H(u,\partial)-\right.$$
$$\left.-\frac{a+b+1}{2}\bar H(\bar u,\bar\partial)\right)\varepsilon^{\vec\lambda}_{C\,a+b+1,\bar a+\bar b-1}(u,\bar u)v^a\bar v^{\bar a}-$$

$$
-\theta(b-\bar b)\frac{(\bar b+1)(\bar a+\bar b-a+1)}{2\,(a+b+1)}H(\partial,\partial)\varepsilon^{\vec\lambda}_{A a+b+1,\bar a+\bar b+1}(u,\bar u)v^a\bar v^{\bar a}+
$$
$$
+\theta(b-\bar b)\frac{(\bar b+1)(\bar a+\bar b-a+1)}{2(\bar a+\bar b+1)}\bar H(\bar u,\bar u)\varepsilon^{\vec\lambda}_{B a+b-1,\bar a+\bar b-1}(u,\bar u)v^a\bar v^{\bar a}+
$$
$$
+\theta(b-\bar b)\frac{(\bar b+1)(\bar a+\bar b-a+1)}{(a+b+1)\,(\bar a+\bar b+1)}\left(\frac{a+b+1}{2}\bar H(\bar u,\bar\partial)-\right.
$$
$$
\left.-\frac{\bar a+\bar b+1}{2}H(u,\partial)\right)\varepsilon^{\vec\lambda}_{D a+b-1,\bar a+\bar b+1}(u,\bar u)v^a\bar v^{\bar a}\Bigg\}\,. \quad (3.122)
$$

Используя линейную независимость два-форм (3.52), приходим к следующему списку элементов ядра

$$
\ker\sigma_-|_{\deg\Lambda=1}=\Bigg\{\lambda_-\in 2\mathbb{Z}\,,\lambda_+\in 4\mathbb{Z}:\quad \lambda_+=2(b+\bar b+2)\geq 4\,,\quad \lambda_-=2(a-\bar a):
$$

- $e(u,\bar u)\varepsilon^{\vec\lambda}_{0,0}v\,\bar v\,;$
- $e(\partial,\bar\partial)\varepsilon^{\vec\lambda}_{a+\frac{\lambda_+}{4},\bar a+\frac{\lambda_+}{4}}v^a\bar v^{\bar a}\,,\quad \forall a\,,\bar a\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\,;$
- $e(\partial,\bar\partial)\varepsilon^{\vec\lambda}_{a+b+1,\bar a+\bar b+1}v^a\bar v^{\bar a}:b>\bar b,\ a=\bar a+\bar b+1\,\oplus$

$\oplus\ e(\partial,\bar\partial)\varepsilon^{\vec\lambda}_{a+b+1,\bar a+\bar b+1}v^a\bar v^{\bar a}:b<\bar b,\ \bar a=a+b+1\,;$

- $e(u,\bar u)\varepsilon^{\vec\lambda}_{\frac{\lambda_+}{4}-2,\bar a+\frac{\lambda_+}{4}-2}\bar v^{\bar a}\,,\quad \forall\bar a\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\quad\oplus\quad e(u,\bar u)\varepsilon^{\vec\lambda}_{a+\frac{\lambda_+}{4}-2,\frac{\lambda_+}{4}-2}v^a\,,\quad\forall a\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\,;$
- $e(u,\bar u)\varepsilon^{\vec\lambda}_{b-1,\bar a+\bar b-1}\bar v^{\bar a}:b<\bar b\,,\ \bar a=b+1\quad\oplus\quad e(u,\bar u)\varepsilon^{\vec\lambda}_{a+b-1,\bar b-1}v^a:b>\bar b\,,\ a=\bar b+1\,;$
- $e(\partial,\bar u)\varepsilon^{\vec\lambda}_{b+1,\bar a+\bar b-1}\bar v^{\bar a}:b\geq\bar b\,,\forall\bar a\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\quad\oplus\quad e(\partial,\bar u)\varepsilon^{\vec\lambda}_{a+b+1,\bar b-1}v^a:b\geq\bar b\,,\forall a\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\,;$
- $e(u,\bar\partial)\varepsilon^{\vec\lambda}_{b-1,\bar a+\bar b+1}\bar v^{\bar a}:b\leq\bar b\,,\forall\bar a\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\quad\oplus\quad e(u,\bar\partial)\varepsilon^{\vec\lambda}_{a+b-1,\bar b+1}v^a:b\leq\bar b\,,\forall a\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\,;$
- $e(\partial,\bar u)\varepsilon^{\vec\lambda}_{b+1,\bar a+\bar b-1}\bar v^{\bar a}:b<\bar b\,,\bar a=b+1\quad\oplus\quad e(u,\bar\partial)\varepsilon^{\vec\lambda}_{a+b-1,\bar b+1}v^a:b>\bar b\,,a=\bar b+1\,;$
- $e(u,\bar u)\varepsilon^{\vec\lambda}_{\frac{\lambda_+}{4}-1,\bar a+\frac{\lambda_+}{4}-1}v\,\bar v^{\bar a+1}-\dfrac{2i(\bar a+1)\,(\lambda_++4\bar a)}{(\lambda_+-4\bar a-4)\,(\lambda_++2\bar a)}e(\partial,\bar u)\varepsilon^{\vec\lambda}_{\frac{\lambda_+}{4}-1\,,\bar a+\frac{\lambda_+}{4}-1}\bar v^{\bar a}-$

$-\dfrac{2i(\bar a+1)\,(\lambda_++4\bar a-4)\,\lambda_+}{(\lambda_+-4)\,(\lambda_++4\bar a-4)\,(\lambda_++2\bar a)}e(u,\bar\partial)\varepsilon^{\vec\lambda}_{\frac{\lambda_+}{4}-1,\bar a+\frac{\lambda_+}{4}-1}\bar v^{\bar a}:\quad \bar a\neq\dfrac{\lambda_+}{4}-1\,,\lambda_+\neq 4\,;$

- $e(u,\bar u)\varepsilon^{\vec\lambda}_{a+\frac{\lambda_+}{4}-1,\frac{\lambda_+}{4}-1}v^{a+1}\,\bar v-\dfrac{2i(a+1)\,(\lambda_++4a)}{(\lambda_+-4a-4)\,(\lambda_++2a)}e(u,\bar\partial)\varepsilon^{\vec\lambda}_{a+\frac{\lambda_+}{4}-1\,,\frac{\lambda_+}{4}-1}v^a-$

$-\dfrac{2i(a+1)\,(\lambda_++4a-4)\,\lambda_+}{(\lambda_+-4)\,(\lambda_++4a-4)\,(\lambda_++2a)}e(\partial,\bar u)\varepsilon^{\vec\lambda}_{a+\frac{\lambda_+}{4}-1,\frac{\lambda_+}{4}-1}v^a:\quad a\neq\dfrac{\lambda_+}{4}-1\,,\lambda_+\neq 4\,;$

- $e(\partial,\bar\partial)\varepsilon^{\vec\lambda}_{a+\frac{\lambda_+}{4}+k,\,\bar a+\frac{\lambda_+}{4}-k}v^a\bar v^{\bar a}-\xi e(\partial,\bar u)\varepsilon^{\vec\lambda}_{a+\frac{\lambda_+}{4}+k,\bar a+\frac{\lambda_+}{4}-k}v^{a+1}\bar v^{\bar a+1}:$

$$k\in\left\{2\,,\ldots\,,\frac{\lambda_+}{4}-1\right\}\,,\;\xi=\frac{i\,(\lambda_+-4k)\,(\lambda_+-4k-4a+4\bar a)}{16(a+1)(\bar a+1)}\;;$$

- $e(\partial,\bar\partial)\varepsilon^{\vec\lambda}_{a+\frac{\lambda_+}{4}-k,\,\bar a+\frac{\lambda_+}{4}+k}v^a\bar v^{\bar a}-\xi e(u,\bar\partial)\varepsilon^{\vec\lambda}_{a+\frac{\lambda_+}{4}-k,\bar a+\frac{\lambda_+}{4}+k}v^{a+1}\bar v^{\bar a+1}:$

$$k\in\left\{2\,,\ldots\,,\frac{\lambda_+}{4}-1\right\}\,,\;\xi=\frac{i\,(\lambda_+-4k)\,(\lambda_+-4k-4a+4\bar a)}{16(a+1)(\bar a+1)}\;\Bigg\}\,. \qquad (3.123)$$

Большая часть из приведенных элементов $\ker\sigma_-$ явно представима в σ_--точном виде. Для оставшихся элементов, используя (3.118), можно доказать отсутствие σ_--точного представления. В итоге,

$$H^1(\sigma_-)\supset\Bigg\{\lambda_-\in2\mathbb{Z}\,,\lambda_+\in4\mathbb{Z}:\quad\lambda_+=2(b+\bar b+2)\geq4\,,\quad\lambda_-=2(a-\bar a):$$

- $e(u,\bar u)\varepsilon^{\vec\lambda}_{0,0}v\,\bar v\,;$
- $e(u,\bar u)\varepsilon^{\vec\lambda}_{\frac{\lambda_+}{4}-2,\bar a+\frac{\lambda_+}{4}-2}\bar v^{\bar a}\,,\quad\forall\bar a\in\mathbb{Z}_{\geq0}\quad\oplus\quad e(u,\bar u)\varepsilon^{\vec\lambda}_{a+\frac{\lambda_+}{4}-2,\frac{\lambda_+}{4}-2}v^a\,,\quad\forall a\in\mathbb{Z}_{\geq0}\,;$
- $e(u,\bar u)\varepsilon^{\vec\lambda}_{b-1,\bar a+\bar b-1}\bar v^{\bar a}:b<\bar b\,,\,\bar a=b+1\quad\oplus\quad e(u,\bar u)\varepsilon^{\vec\lambda}_{a+b-1,\bar b-1}v^a:b>\bar b\,,\,a=\bar b+1\,;$
- $e(\partial,\bar u)\varepsilon^{\vec\lambda}_{b+1,\bar a-1}\bar v^{\bar a}:\bar a\geq1\quad\oplus\quad e(\partial,\bar u)\varepsilon^{\vec\lambda}_{b+\bar b+1,\bar b-1}v^a:b\geq\bar b\,,\;a=\bar b\,;$
- $e(u,\bar\partial)\varepsilon^{\vec\lambda}_{b-1,b+\bar b+1}\bar v^{\bar a}:b\leq\bar b\,,\;\bar a=b\quad\oplus\quad e(u,\bar\partial)\varepsilon^{\vec\lambda}_{a-1,\bar b+1}v^a:a\geq1\,;$
- $e(\partial,\bar u)\varepsilon^{\vec\lambda}_{b+1,b+\bar b}\bar v^{\bar a}:b<\bar b\,,\;\bar a=b+1\quad\oplus\quad e(u,\bar\partial)\varepsilon^{\vec\lambda}_{b+\bar b,\bar b+1}v^a:b>\bar b\,,\;a=\bar b+1\,;$
- $e(u,\bar u)\varepsilon^{\vec\lambda}_{\frac{\lambda_+}{4}-1,\,\bar a+\frac{\lambda_+}{4}-1}v\,\bar v^{\bar a+1}-\dfrac{2i(\bar a+1)\,(\lambda_++4\bar a)}{(\lambda_+-4\bar a-4)\,(\lambda_++2\bar a)}e(\partial,\bar u)\varepsilon^{\vec\lambda}_{\frac{\lambda_+}{4}-1\,,\,\bar a+\frac{\lambda_+}{4}-1}\bar v^{\bar a}-$

$$-\frac{2i(\bar a+1)\lambda_+}{(\lambda_+-4)\,(\lambda_++2\bar a)}e(u,\bar\partial)\varepsilon^{\vec\lambda}_{\frac{\lambda_+}{4}-1,\bar a+\frac{\lambda_+}{4}-1}\bar v^{\bar a}:\quad\bar a\neq\frac{\lambda_+}{4}-1\,,\lambda_+\neq4\,;$$

- $e(u,\bar u)\varepsilon^{\vec\lambda}_{a+\frac{\lambda_+}{4}-1,\,\frac{\lambda_+}{4}-1}v^{a+1}\,\bar v-\dfrac{2i(a+1)\,(\lambda_++4a)}{(\lambda_+-4a-4)\,(\lambda_++2a)}e(u,\bar\partial)\varepsilon^{\vec\lambda}_{a+\frac{\lambda_+}{4}-1\,,\,\frac{\lambda_+}{4}-1}v^a-$

$$-\frac{2i(a+1)\lambda_+}{(\lambda_+-4)\,(\lambda_++2a)}e(\partial,\bar u)\varepsilon^{\vec\lambda}_{a+\frac{\lambda_+}{4}-1,\frac{\lambda_+}{4}-1}v^a:\quad a\neq\frac{\lambda_+}{4}-1\,,\lambda_+\neq4\;\Bigg\}\,. \qquad (3.124)$$

Анализ «фермионного» оператора σ_- на прямых $|b-\bar b|=1$ дает дополнительные коциклы

$$H^1(\sigma_-) \supset \left\{ |b-\bar b| = 1 : \right.$$

- $e(u,\bar u)\varepsilon_{b-1,\bar a+\bar b-1}\bar v^{\bar a} \quad \oplus \quad e(u,\bar u)\varepsilon_{a+b-1,\bar b-1} v^a\,;$
- $e(u,\bar\partial)\varepsilon_{b-1,\bar a+\bar b+1}\bar v^{\bar a} \quad \oplus \quad e(u,\bar\partial)\varepsilon_{a+b-1,\bar b+1} v^a \,: b-\bar b = 1\,;$
- $\left. e(\partial,\bar u)\varepsilon_{b+1,\bar a+\bar b-1}\bar v^{\bar a} \quad \oplus \quad e(\partial,\bar u)\varepsilon_{a+b+1,\bar b-1} v^a \,: b-\bar b = -1 \right\}. \qquad (3.125)$

3.2.2 $H^{0,1,2}(\sigma_-)$: результаты

В итоге, имеем следующие результаты для младших групп когомологий оператора σ_-, определенного на полях ноль-формах C, отвечающих $(\mathrm{tw}\otimes\mathrm{adj})$-модулю.

$$\begin{aligned}
H^0(\sigma_-) = \Bigg\{ & \lambda_-,\lambda_+ \in 2\mathbb{Z}: \quad \lambda_+ = 2(b+\bar b+2) \geq 4\,, \quad \lambda_- = 2(a-\bar a) \\
(\mathbb{A}):\, & C^{\vec\lambda}_{\frac{|\lambda_-|}{2}+\frac{\lambda_+}{4}-1,\,\frac{\lambda_+}{4}-1}(u,\bar u)v^{\frac{|\lambda_-|}{2}}\,, \lambda_-\geq 0 \,\oplus\, C^{\vec\lambda}_{\frac{\lambda_+}{4}-1,\,\frac{|\lambda_-|}{2}+\frac{\lambda_+}{4}-1}(u,\bar u)\bar v^{\frac{|\lambda_-|}{2}}\,, \lambda_-\leq 0 : \lambda_+ \in 4\mathbb{Z}\,; \\
(\mathbb{B}):\, & C^{\vec\lambda}_{\frac{|\lambda_-|}{2}-1,\,\frac{\lambda_+}{2}-1}(u,\bar u)\bar v^{\frac{|\lambda_-|}{2}}\,, \lambda_-\leq -2 \,\oplus\, C^{\vec\lambda}_{\frac{\lambda_+}{2}-1,\,\frac{|\lambda_-|}{2}-1}(u,\bar u)v^{\frac{|\lambda_-|}{2}}\,, \lambda_-\geq 2 : \lambda_+ > 2|\lambda_-|\,; \\
(\mathbb{C}):\, & C_{\frac{|\lambda_-|}{2}+b,\bar b}(u,\bar u)\, v^{\frac{|\lambda_-|}{2}}\,, \lambda_-\geq 0 \,\oplus\, C_{b,\frac{|\lambda_-|}{2}+\bar b}(u,\bar u)\,\bar v^{\frac{|\lambda_-|}{2}}\,, \lambda_-\leq 0 : |b-\bar b| = 1 \Bigg\}.
\end{aligned} \qquad (3.126)$$

Классы 0-коциклов разбиваются на два отличающихся по четности $(b+\bar b)$ семейства. Четному значению суммы параметров $b,\bar b$ соответствуют коциклы $(\mathbb{A})$ и $(\mathbb{B})$, в то время как нечетному – $(\mathbb{C})$ и $(\mathbb{B})$. При этом коцикл $(\mathbb{B})$ существует лишь при выполнении определенного соотношения на веса алгебры $\mathfrak{sl}(2)\oplus\mathfrak{sl}(2)$, а именно $\lambda_+ > 2|\lambda_-| \geq 4$. Заметим, что классы $(\mathbb{B})$ и $(\mathbb{C})$ требуют $\lambda_+ > 4$, что эквивалентно нетривиальной зависимости поля от переменных Y_2, ассоциированных с присоединенной частью модуля $(\mathrm{tw}\otimes\mathrm{adj})$.

Для граничного значения веса $\lambda_+ = 4$ параметры $b = \bar b = 0$, т. е. поле ноль-форма C зависит лишь от переменных Y_1, описывающих (tw) модуль стандартной теории. В этом случае поле описывает обобщенные тензоры Вейля для симметричных безмассовых полей, что видно из формул для коциклов

$$C^{\vec\lambda}_{\frac{|\lambda_-|}{2},\,0}(u,\bar u)v^{\frac{|\lambda_-|}{2}} \quad \oplus \quad C^{\vec\lambda}_{0,\,\frac{|\lambda_-|}{2}}(u,\bar u)\bar v^{\frac{|\lambda_-|}{2}}\,, \qquad (3.127)$$

где полиномы от переменных $u, \bar{u}$ кодируют прямоугольные $\mathfrak{so}(3,1)$ диаграммы Юнга. При проведении унитарной редукции, обсуждавшейся в рамках главы 2, лишь поля веса $\lambda_+ = 4$ остаются нетривиальными.

В случае веса $\lambda_+ > 4$ 0-коциклы соответствуют двухрядным $\mathfrak{so}(3,1)$ диаграммам Юнга общего положения, так что некоторые из них, например, коцикл ($\mathbb{A}$), возможно отождествить с обобщенным тензором Вейля для безмассовых и частично-безмассовых полей. Однако детальная интерпретация полученных коциклов в нередуцированной системе требует дальнейшего анализа, а именно достижения взаимно-однозначности склейки $\mathfrak{so}(3,2)$-модулей полей один-форм ω и полей ноль-форм C, о которой пойдет речь в следующем разделе.

$$H^1(\sigma_-) = \left\{ \lambda_- \in 2\mathbb{Z}\,, \lambda_+ \in 4\mathbb{Z}: \quad \lambda_+ = 2(b+\bar{b}+2) \geq 4\,, \quad \lambda_- = 2(a-\bar{a}): \right.$$

- $e(u,\bar{u})\varepsilon^{\vec{\lambda}}_{0,0} v\,\bar{v}\,;$
- $e(u,\bar{u})\varepsilon^{\vec{\lambda}}_{\frac{\lambda_+}{4}-2,\bar{a}+\frac{\lambda_+}{4}-2}\bar{v}^{\bar{a}}\,, \quad \forall \bar{a}\in\mathbb{Z}_{\geq 0} \quad \oplus \quad e(u,\bar{u})\varepsilon^{\vec{\lambda}}_{a+\frac{\lambda_+}{4}-2,\frac{\lambda_+}{4}-2} v^a\,, \quad \forall a\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\,;$
- $e(u,\bar{u})\varepsilon^{\vec{\lambda}}_{b-1,\bar{a}+\bar{b}-1}\bar{v}^{\bar{a}} : b<\bar{b}\,,\ \bar{a}=b+1 \quad \oplus \quad e(u,\bar{u})\varepsilon^{\vec{\lambda}}_{a+b-1,\bar{b}-1} v^a : b>\bar{b}\,,\ a=\bar{b}+1\,;$
- $e(\partial,\bar{u})\varepsilon^{\vec{\lambda}}_{b+1,\bar{a}-1}\bar{v}^{\bar{a}} : \bar{a}\geq 1 \quad \oplus \quad e(\partial,\bar{u})\varepsilon^{\vec{\lambda}}_{b+\bar{b}+1,\bar{b}-1} v^a : b\geq\bar{b}\,,\ a=\bar{b}\,;$
- $e(u,\bar{\partial})\varepsilon^{\vec{\lambda}}_{b-1,b+\bar{b}+1}\bar{v}^{\bar{a}} : b\leq\bar{b}\,,\ \bar{a}=b \quad \oplus \quad e(u,\bar{\partial})\varepsilon^{\vec{\lambda}}_{a-1,\bar{b}+1} v^a : a\geq 1\,;$
- $e(\partial,\bar{u})\varepsilon^{\vec{\lambda}}_{b+1,b+\bar{b}}\bar{v}^{\bar{a}} : b<\bar{b}\,,\ \bar{a}=b+1 \quad \oplus \quad e(u,\bar{\partial})\varepsilon^{\vec{\lambda}}_{b+\bar{b},\bar{b}+1} v^a : b>\bar{b}\,,\ a=\bar{b}+1\,;$
- $e(u,\bar{u})\varepsilon^{\vec{\lambda}}_{\frac{\lambda_+}{4}-1,\,\bar{a}+\frac{\lambda_+}{4}-1} v\,\bar{v}^{\bar{a}+1} - \dfrac{2i(\bar{a}+1)\,(\lambda_+ + 4\bar{a})}{(\lambda_+ - 4\bar{a}-4)\,(\lambda_+ + 2\bar{a})} e(\partial,\bar{u})\varepsilon^{\vec{\lambda}}_{\frac{\lambda_+}{4}-1\,,\bar{a}+\frac{\lambda_+}{4}-1}\bar{v}^{\bar{a}} -$
$- \dfrac{2i(\bar{a}+1)\lambda_+}{(\lambda_+ - 4)\,(\lambda_+ + 2\bar{a})} e(u,\bar{\partial})\varepsilon^{\vec{\lambda}}_{\frac{\lambda_+}{4}-1,\bar{a}+\frac{\lambda_+}{4}-1}\bar{v}^{\bar{a}} : \quad \bar{a}\neq\dfrac{\lambda_+}{4}-1\,, \lambda_+\neq 4\,;$
- $e(u,\bar{u})\varepsilon^{\vec{\lambda}}_{a+\frac{\lambda_+}{4}-1,\,\frac{\lambda_+}{4}-1} v^{a+1}\,\bar{v} - \dfrac{2i(a+1)\,(\lambda_+ + 4a)}{(\lambda_+ - 4a-4)\,(\lambda_+ + 2a)} e(u,\bar{\partial})\varepsilon^{\vec{\lambda}}_{a+\frac{\lambda_+}{4}-1\,,\,\frac{\lambda_+}{4}-1} v^a -$
$- \dfrac{2i(a+1)\lambda_+}{(\lambda_+ - 4)\,(\lambda_+ + 2a)} e(\partial,\bar{u})\varepsilon^{\vec{\lambda}}_{a+\frac{\lambda_+}{4}-1,\frac{\lambda_+}{4}-1} v^a : \quad a\neq\dfrac{\lambda_+}{4}-1\,, \lambda_+\neq 4\,;$
- $e(u,\bar{u})\varepsilon_{b-1,\bar{a}+\bar{b}-1}\bar{v}^{\bar{a}} \quad \oplus \quad e(u,\bar{u})\varepsilon_{a+b-1,\bar{b}-1} v^a : |b-\bar{b}|=1\,;$
- $e(u,\bar{\partial})\varepsilon_{b-1,\bar{a}+\bar{b}+1}\bar{v}^{\bar{a}} \quad \oplus \quad e(u,\bar{\partial})\varepsilon_{a+b-1,\bar{b}+1} v^a : b-\bar{b}=1\,;$
- $\left. e(\partial,\bar{u})\varepsilon_{b+1,\bar{a}+\bar{b}-1}\bar{v}^{\bar{a}} \quad \oplus \quad e(\partial,\bar{u})\varepsilon_{a+b+1,\bar{b}-1} v^a : b-\bar{b}=-1 \right\}. \qquad (3.128)$

Из полученных выражений для 1-коциклов снова видно разбиение на два семейства, отличающиеся по четности $(b+\bar{b})$. Также большинство коциклов существует лишь при $\lambda_+ > 4$, т. е. в случае нетривиальной зависимости от асоциированных с присоединенным модулем переменных. В случае $\lambda_+ = 4$ нетривиальными остаются классы

$$e(u,\bar{u})\varepsilon^{\vec{\lambda}}_{0,0} v\,\bar{v}\,, \tag{3.129}$$

$$e(\partial,\bar{u})\varepsilon^{\vec{\lambda}}_{1,\bar{a}-1}\bar{v}^{\bar{a}} : \bar{a} \geq 1 \quad \oplus \quad e(u,\bar{\partial})\varepsilon^{\vec{\lambda}}_{a-1,1} v^{a} \; : a \geq 1\,, \tag{3.130}$$

что совпадает с анализом из работ [86; 93]. Первый коцикл представляет собой безмассовое уравнение Клейна-Гордона из стандартной теории высших спинов, а второй класс кодирует уравнения на обобщенные тензоры Вейля.

По аналогии с рассмотрением в разделе 3.1.2, полученных представителей классов когомологий в терминах вспомогательных переменных $(u, \bar{u}, v, \bar{v})$ можно поднять до функций от Y_i в классе (LW, LW) векторов $\mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{sl}(2)$. Отличие от раздела 3.1.2 состоит в том, что восстановить полный список всех представителей за пределами класса младших векторов и их потомков нельзя из-за наличия нерасщепляемых расширений модулей Верма. Это обстоятельство сильно затрудняет анализ склейки сектора один-форм $(\mathrm{adj} \otimes \mathrm{adj})$ с сектором ноль-форм $(\mathrm{tw} \otimes \mathrm{adj})$ и $(\mathrm{adj} \otimes \mathrm{tw})$.

3.3 Анализ линейных вершин

В этом разделе проведем анализ вершины $\Upsilon(\Omega_{AdS}, \Omega_{AdS}, C)$ в уравнении (3.2) с точки зрения σ_--когомологий, полученных в разделах 3.1 и 3.2. Для упрощения положим константы связи $\eta_2 = \bar{\eta}_2 = 0$ и рассмотрим вершину

$$\begin{aligned}
\Upsilon^{\eta_1,\bar{\eta}_1}(\Omega,\Omega,C) = \Big[& \\
-\frac{i\eta_1}{2}\bar{H}(\bar{\partial}_1,\bar{\partial}_1)C(0,y_2,\bar{y}_1,\bar{y}_2;\hat{k}_1|x)*\hat{k}_1 - \frac{i\eta_1}{2}\bar{H}(\bar{\partial}_2,\bar{\partial}_2)C(y_1,0,\bar{y}_1,\bar{y}_2;\hat{k}_2|x)*\hat{k}_2 - & \\
-\frac{i\bar{\eta}_1}{2}H(\partial_1,\partial_1)C(y_1,y_2,0,\bar{y}_2;\hat{\bar{k}}_1|x)*\hat{\bar{k}}_1 - \frac{i\bar{\eta}_1}{2}H(\partial_2,\partial_2)C(y_1,y_2,\bar{y}_1,0;\hat{\bar{k}}_2|x)*\hat{\bar{k}}_2 \Big] & *I_1 I_2 .
\end{aligned} \tag{3.131}$$

Все результаты, получаемые для вершины $\Upsilon^{\eta_1,\bar{\eta}_1}(\Omega,\Omega,C)$, прямо переносятся на случай вершины $\Upsilon^{\eta_2,\bar{\eta}_2}(\Omega,\Omega,C)$ с помощью замены осцилляторов $Y_{1,2}$ на $Y_\pm$ и операторов Клейна $\hat{k}_1, \hat{k}_2$ на $\hat{k}_{12}, \hat{k}^+_{12}$.

Так как процедура получения когомологий σ_- в разделе 3.1 опиралась на разложение пространства p-форм с помощью Хау-дуальной к $\mathfrak{so}(3,2)$ алгебры

$\mathfrak{sl}^h(2)\oplus\mathfrak{sl}^v(2)$, то желательно было бы получить разложение вершины (3.131) по (HW, LW) векторам $\mathfrak{sl}^h(2)\oplus\mathfrak{sl}^v(2)$ и их потомкам.

Несложно провести разложение вершины $\Upsilon^{\eta_1,\bar\eta_1}(\Omega_{AdS},\Omega_{AdS},C)$ по базису полей первого ранга (3.81), т. е. представить вершину в виде

$$F(Y_1,Y_2|x)=\sum_{\substack{a,b,c\\ \bar a,\bar b,\bar c}}\frac{1}{(a+b)!(\bar a+\bar b)!}\zeta^c\bar\zeta^{\,\bar c}(\partial y_1)^a(\partial y_2)^b(\bar\partial\bar y_1)^{\bar a}(\bar\partial\bar y_2)^{\bar b}F^{\bar a,\bar b,\bar c}_{a,b,c}(u,\bar u|x)\,, \tag{3.132}$$

где

$$F^{\bar a,\bar b,\bar c}_{a,b,c}(u,\bar u|x):=F^{\bar a,\bar b,\bar c}_{a,b,c\,\alpha(a+b),\dot\alpha(\bar a+\bar b)}(x)\,u^{\alpha(a+b)}\bar u^{\dot\alpha(\bar a+\bar b)}\,. \tag{3.133}$$

В результате получается следующее разложение $\Upsilon^{\eta_1,\bar\eta_1}(\Omega_{AdS},\Omega_{AdS},C)$:

$$\begin{gathered}\bar H\left(\bar\partial_1,\bar\partial_1\right)C\Big(0,y_2,\bar y_1,\bar y_2;\hat k_1|x\Big)*\hat k_1=\sum_{\substack{\bar a,\bar b,\bar c\\ b}}\frac{1}{b!(\bar a+\bar b)!}\left\{\frac{\bar a(\bar a-1)(\bar a+\bar b+\bar c)(\bar a+\bar b+\bar c+1)}{(\bar a+\bar b)(\bar a+\bar b+1)}\times\right.\\ \times\bar\zeta^{\bar c}\left(\bar\partial\bar y_1\right)^{\bar a-2}(\partial y_2)^b\left(\bar\partial\bar y_2\right)^{\bar b}\bar H(\bar\partial,\bar\partial)-\frac{2\bar a\bar c(\bar a+\bar b+\bar c+1)}{(\bar a+\bar b)(\bar a+\bar b+2)}\bar\zeta^{\bar c-1}\left(\bar\partial\bar y_1\right)^{\bar a-1}(\partial y_2)^b\left(\bar\partial\bar y_2\right)^{\bar b+1}\times\\ \left.\times\bar H(\bar u,\bar\partial)+\frac{\bar c(\bar c-1)}{(\bar a+\bar b+1)(\bar a+\bar b+2)}\bar\zeta^{\bar c-2}\left(\bar\partial\bar y_1\right)^{\bar a}(\partial y_2)^b\left(\bar\partial\bar y_2\right)^{\bar b+2}\bar H(\bar u,\bar u)\right\}\times\\ \times C^{\bar a,\bar b,\bar c}_{0,b,0}\Big(u,\bar u;\hat k_1|x\Big)*\hat k_1,\end{gathered} \tag{3.134}$$

$$\begin{gathered}H\left(\partial_1,\partial_1\right)C\Big(y_1,y_2,0,\bar y_2;\hat{\bar k}_1|x\Big)*\hat{\bar k}_1=\sum_{\substack{a,b,c\\ \bar b}}\frac{1}{\bar b!(a+b)!}\left\{\frac{a(a-1)(a+b+c)(a+b+c+1)}{(a+b)(a+b+1)}\times\right.\\ \times\zeta^c(\partial y_1)^{a-2}(\partial y_2)^b\left(\bar\partial\bar y_2\right)^{\bar b}H(\partial,\partial)-\frac{2ac(a+b+c+1)}{(a+b)(a+b+2)}\zeta^{c-1}(\partial y_1)^{a-1}(\partial y_2)^{b+1}\left(\bar\partial\bar y_2\right)^{\bar b}\times\\ \left.\times H(u,\partial)+\frac{c(c-1)}{(a+b+1)(a+b+2)}\zeta^{c-2}(\partial y_1)^a(\partial y_2)^{b+2}\left(\bar\partial\bar y_2\right)^{\bar b}H(u,u)\right\}\times\\ \times C^{0,\bar b,0}_{a,b,c}\Big(u,\bar u;\hat{\bar k}_1|x\Big)*\hat{\bar k}_1,\end{gathered} \tag{3.135}$$

$$\begin{gathered}\bar H\left(\bar\partial_2,\bar\partial_2\right)C\Big(y_1,0,\bar y_1,\bar y_2;\hat k_2|x\Big)*\hat k_2=\sum_{\substack{\bar a,\bar b,\bar c\\ a}}\frac{1}{a!(\bar a+\bar b)!}\left\{\frac{\bar b(\bar b-1)(\bar a+\bar b+\bar c)(\bar a+\bar b+\bar c+1)}{(\bar a+\bar b)(\bar a+\bar b+1)}\times\right.\\ \times\bar\zeta^{\bar c}(\partial y_1)^a\left(\bar\partial\bar y_1\right)^{\bar a}\left(\bar\partial\bar y_2\right)^{\bar b-2}\bar H(\bar\partial,\bar\partial)+\frac{2\bar b\bar c(\bar a+\bar b+\bar c+1)}{(\bar a+\bar b)(\bar a+\bar b+2)}\bar\zeta^{\bar c-1}(\partial y_1)^a\left(\bar\partial\bar y_1\right)^{\bar a+1}\left(\bar\partial\bar y_2\right)^{\bar b-1}\times\end{gathered}$$

$$\times\bar{H}(\bar{u},\bar{\partial})+\frac{\bar{c}(\bar{c}-1)}{(\bar{a}+\bar{b}+1)(\bar{a}+\bar{b}+2)}\bar{\zeta}^{\bar{c}-2}(\partial y_1)^a\left(\bar{\partial}\bar{y}_1\right)^{\bar{a}+2}\left(\bar{\partial}\bar{y}_2\right)^{\bar{b}}\bar{H}(\bar{u},\bar{u})\Big\}\times$$
$$\times C^{\bar{a},\bar{b},\bar{c}}_{a,0,0}\left(u,\bar{u};\hat{k}_2|x\right)*\hat{k}_2, \quad (3.136)$$

$$H(\partial_2,\partial_2)C\left(y_1,y_2,\bar{y}_1,0;\hat{\bar{k}}_2|x\right)*\hat{\bar{k}}_2=\sum_{\substack{a,b,c\\ \bar{a}}}\frac{1}{\bar{a}!(a+b)!}\left\{\frac{b(b-1)(a+b+c)(a+b+c+1)}{(a+b)(a+b+1)}\times\right.$$
$$\times\zeta^c(\partial y_1)^a\left(\bar{\partial}\bar{y}_1\right)^{\bar{a}}(\partial y_2)^{b-2}H(\partial,\partial)+\frac{2bc(a+b+c+1)}{(a+b)(a+b+2)}\zeta^{c-1}(\partial y_1)^{a+1}\left(\bar{\partial}\bar{y}_1\right)^{\bar{a}}(\partial y_2)^{b-1}\times$$
$$\left.\times H(u,\partial)+\frac{c(c-1)}{(a+b+1)(a+b+2)}\zeta^{c-2}(\partial y_1)^{a+2}\left(\bar{\partial}\bar{y}_1\right)^{\bar{a}}(\partial y_2)^{b}H(u,u)\right\}\times$$
$$\times C^{\bar{a},0,0}_{a,b,c}\left(u,\bar{u};\hat{\bar{k}}_2|x\right)*\hat{\bar{k}}_2. \quad (3.137)$$

Следующим шагом должен быть переход к базису (HW, LW) векторов $\mathfrak{sl}^h(2)\oplus\mathfrak{sl}^v(2)$ и их потомков, а также сравнение разложения вершины (3.131) с представленными в разделе 3.1.2 2-коциклами (3.73). Однако провести данный переход оказывается технически трудно из-за сложности формул замены базиса

$$\zeta^c\,\bar{\zeta}^{\,\bar{c}}\,(\partial y_1)^a(\partial y_2)^b(\bar{\partial}\bar{y}_1)^{\bar{a}}(\bar{\partial}\bar{y}_2)^{\bar{b}}: a,b,c,\bar{a},\bar{b},\bar{c}\in\mathbb{Z}_{\geq 0} \quad (3.138)$$

на базис

$$E_v^N F_h^M\left(\sum_{p+q=l}\Gamma^{p,q}_{n,m,r}\zeta^p\bar{\zeta}^q\right)(\partial\bar{\partial}X)^r\,(\partial y_1)^n\left(\bar{\partial}\bar{y}_1\right)^m: \lambda_h=n+m\,,\,\lambda_v=2(r+l)\in 2\mathbb{Z}_{\geq 0}\,. \quad (3.139)$$

Фактически это удается проделать лишь для заданных значений $(a,b,c,\bar{a},\bar{b},\bar{c})$, а общие формулы перехода неизвестны. Тем не менее, на основе рассмотрения примеров полей малых спинов, для которых можно явно совершить переход к желаемому базису, удается сделать выводы о когомологической структуре вершины $\Upsilon^{\eta_1,\bar{\eta}_1}(\Omega_{AdS},\Omega_{AdS},C)$ и о склейке модулей один-форм $(\mathrm{adj}\otimes\mathrm{adj})$ с модулями ноль-форм $(\mathrm{tw}\otimes\mathrm{adj})$ и $(\mathrm{adj}\otimes\mathrm{tw})$.

Далее детально рассмотрим вершины (3.134)–(3.137) на примере (HW, LW) вектора веса $(\lambda_h,\lambda_v)=(0,0)$, а также (HW, LW) вектора веса $(\lambda_h,\lambda_v)=(2,0)$ и его потомков под действием понижающего горизонтальный вес генератора F_h.

В случае $(\lambda_h,\lambda_v)=(0,0)$ имеем одномерный модуль $\mathfrak{sl}^h(2)$, описываемый полем $\{\omega^{\vec{\lambda}0}_{\ 0,0,0}\}$. Для него вершина $\Upsilon^{\eta_1,\bar{\eta}_1}(\Omega_{AdS},\Omega_{AdS},C)$ дает Максвелло-подобный вклад

$$\Upsilon^{\eta_1,\bar\eta_1}(\Omega,\Omega,C)\Big|_{\substack{\lambda_h=0\\ \lambda_v=0}}=$$
$$=-\frac{i\eta_1}{2}\bar H(\bar\partial,\bar\partial)C^{2,0,0}_{0,0,0}\Big(u,\bar u;\hat k_1|x\Big)*\hat k_1-\frac{i\bar\eta_1}{2}H(\partial,\partial)C^{0,0,0}_{2,0,0}\Big(u,\bar u;\hat{\bar k}_1|x\Big)*\hat{\bar k}_1-$$
$$-\frac{i\eta_1}{2}\bar H(\bar\partial,\bar\partial)C^{0,2,0}_{0,0,0}\Big(u,\bar u;\hat k_2|x\Big)*\hat k_2-\frac{i\bar\eta_1}{2}H(\partial,\partial)C^{0,0,0}_{0,2,0}\Big(u,\bar u;\hat{\bar k}_2|x\Big)*\hat{\bar k}_2\,. \quad (3.140)$$

Каждый из членов вершины принадлежит $H^2(\sigma_-)$ для модуля $(\mathrm{adj}\otimes\mathrm{adj})$. Сравнение с формулами (3.88) и (3.126) указывает на то, что входящие в вершину компоненты поля C являются примарными относительно σ_- в случаях $(\mathrm{tw}\otimes\mathrm{adj})$ и $(\mathrm{adj}\otimes\mathrm{tw})$ модулей. Тем не менее, лишь сумма двух компонент

$$C^{2,0,0}_{0,0,0}\Big(u,\bar u;\hat k_1|x\Big)*\hat k_1+C^{0,2,0}_{0,0,0}\Big(u,\bar u;\hat k_2|x\Big)*\hat k_2 \quad (3.141)$$

и сопряженное с ней выражение можно интерпретировать как тензор Фарадея. Другими словами, настоящий вейлевский модуль лежит в сумме $(\mathrm{tw}\otimes\mathrm{adj})$ и $(\mathrm{adj}\otimes\mathrm{tw})$.

В случае $(\lambda_h,\lambda_v)=(2,0)$ имеем трехмерный $\mathfrak{sl}^h(2)$-модуль $\{\omega^{\vec\lambda},F_h\omega^{\vec\lambda},F_h^2\omega^{\vec\lambda}\}$. Вектор $\omega^{\vec\lambda}$ отвечает трем $\mathfrak{so}(3,1)$-представлениям $\{\omega^{\vec\lambda 0}{}_{1,1,0},\omega^{\vec\lambda 0}{}_{2,0,0},\omega^{\vec\lambda 0}{}_{0,2,0}\}$ градуировок $G=\{0,\pm2\}$ относительно $G=|\hat N_u-\hat{\bar N}_u|+2\hat N_\chi$. Из раздела 3.1.2 следует, что примарные поля находятся в градуировке $G=0$, т. е. среди компонентных полей $\{\omega^{\vec\lambda 0}{}_{1,1,0},F_h\omega^{\vec\lambda 0}{}_{1,1,0},F_h^2\omega^{\vec\lambda 0}{}_{1,1,0}\}$. Эти примарные поля ассоциированы с гравитацией. Интересующая нас часть вершины (3.131), спроецированная на вес $(2,0)$, имеет вид

$$\Upsilon^{\eta_1,\bar\eta_1}(\Omega,\Omega,C)\Big|_{\substack{\lambda_h=2\\ \lambda_v=0}}=$$
$$=-\frac{i\eta_1}{4}\left(\bar\partial\bar y_1\right)^2\bar H(\bar\partial,\bar\partial)C^{4,0,0}_{0,0,0}\Big(u,\bar u;\hat k_1|x\Big)*\hat k_1-\frac{i\bar\eta_1}{4}\left(\partial y_1\right)^2H(\partial,\partial)C^{0,0,0}_{4,0,0}\Big(u,\bar u;\hat{\bar k}_1|x\Big)*\hat{\bar k}_1-$$
$$-\frac{i\eta_1}{2}\left(\bar\partial\bar y_1\right)^2\bar H(\bar u,\bar u)C^{0,0,2}_{0,0,0}\Big(u,\bar u;\hat k_2|x\Big)*\hat k_2-\frac{i\bar\eta_1}{2}\left(\partial y_1\right)^2H(u,u)C^{0,0,0}_{0,0,2}\Big(u,\bar u;\hat{\bar k}_2|x\Big)*\hat{\bar k}_2-$$
$$-\frac{i\eta_1}{4}\left(\bar\partial\bar y_1\right)^2\bar H\left(\bar u,\bar\partial\right)C^{1,1,1}_{0,0,0}\Big(u,\bar u;\hat k_2|x\Big)*\hat k_2-\frac{i\bar\eta_1}{4}\left(\partial y_1\right)^2H(u,\partial)C^{0,0,0}_{1,1,1}\Big(u,\bar u;\hat{\bar k}_2|x\Big)*\hat{\bar k}_2-$$
$$-\frac{i\eta_1}{4}\left(\partial y_1\right)^2\bar H(\bar\partial,\bar\partial)C^{0,2,0}_{2,0,0}\Big(u,\bar u;\hat k_2|x\Big)*\hat k_2-\frac{i\bar\eta_1}{4}\left(\bar\partial\bar y_1\right)^2H(\partial,\partial)C^{2,0,0}_{0,2,0}\Big(u,\bar u;\hat{\bar k}_2|x\Big)*\hat{\bar k}_2-$$
$$-\frac{i\eta_1}{24}(\bar\partial\bar y_1)^2\bar H(\bar\partial,\bar\partial)C^{2,2,0}_{0,0,0}\Big(u,\bar u;\hat k_2|x\Big)*\hat k_2-\frac{i\bar\eta_1}{24}\left(\partial y_1\right)^2H(\partial,\partial)C^{0,0,0}_{2,2,0}\Big(u,\bar u;\hat{\bar k}_2|x\Big)*\hat{\bar k}_2-$$

$$-i\eta_1(\partial y_1)\big(\bar\partial\bar y_1\big)\bar H(\bar u,\bar\partial)C^{0,1,1}_{1,0,0}\Big(u,\bar u;\hat k_2|x\Big)*\hat k_2-$$
$$-i\bar\eta_1(\partial y_1)\big(\bar\partial\bar y_1\big)H(u,\partial)C^{1,0,0}_{0,1,1}\Big(u,\bar u;\hat{\bar k}_2|x\Big)*\hat{\bar k}_2-$$
$$-\frac{i\eta_1}{6}(\partial y_1)(\bar\partial\bar y_1)\bar H(\bar\partial,\bar\partial)C^{1,2,0}_{1,0,0}\Big(u,\bar u;\hat k_2|x\Big)*\hat k_2-$$
$$-\frac{i\bar\eta_1}{6}(\partial y_1)\big(\bar\partial\bar y_1\big)H(\partial,\partial)C^{1,0,0}_{1,2,0}\Big(u,\bar u;\hat{\bar k}_2|x\Big)*\hat{\bar k}_2. \quad (3.142)$$

Из выражения для вершины замечаем, что компоненты поля C вдоль операторов Клейна $\hat k_1$ и $\hat{\bar k}_1$ порождают вейлевские коциклы. Более того, эти компоненты являются примарными с точки зрения σ_- в $(\mathrm{tw}\otimes\mathrm{adj})$ и $(\mathrm{adj}\otimes\mathrm{tw})$ модулях. Остальные члены разложения вершины, вовлекающие компоненты C вдоль $\hat k_2$ и $\hat{\bar k}_2$, можно разбить на три категории: дополняемые до 2-коцикла, σ_--точные члены и σ_--незамкнутые члены (σ_+-точные). Появление последних двух групп указывает на неудачность выбора стандартной сдвинутой гомотопии при получении линейных вершин в работе [100]. Следовательно, требуется найти гомотопию, приводящую сразу к вершине $\Upsilon(\Omega_{AdS},\Omega_{AdS},C)$, состоящей из 2-коциклов (3.73), или произвести переопределение полей ω, поглощающее нежелательные члены. Так как на данный момент требуемая гомотопия неизвестна, проведем явное переопределение поля ω. В процессе мы будем вынуждены использовать уравнения (2.42) и (2.43), записанные для полей ноль-форм ранга один $C^{\bar a,\bar b,\bar c}_{a,b,c}(u,\bar u;\hat K|x)$ (3.132). Эти уравнения приведены в приложении Б.4.

В градуировке $G=0$ вклады от вершины можно представить в σ_--точной форме и устранить переопределением полей $\omega^{\vec\lambda 0}{}_{2,0,0}(u,\bar u|x)$ и $\omega^{\vec\lambda 0}{}_{0,2,0}(u,\bar u|x)$.

$$\omega^{\vec\lambda 0}{}_{0,2,0}(u,\bar u|x)=\tilde\omega^{\vec\lambda 0}{}_{0,2,0}(u,\bar u|x)-\frac{i\eta_1}{4}e(\partial,\bar u)C^{0,1,1}_{1,0,0}\Big(u,\bar u;\hat k_2|x\Big)*\hat k_2-$$
$$-\frac{3i\bar\eta_1}{4}e(\partial,\bar u)C^{1,0,0}_{0,1,1}\Big(u,\bar u;\hat{\bar k}_2|x\Big)*\hat{\bar k}_2+\frac{i\eta_1}{3}e(\partial,\bar\partial)C^{1,2,0}_{1,0,0}\Big(u,\bar u;\hat k_2|x\Big)*\hat k_2\,, \quad (3.143)$$

$$\omega^{\vec\lambda 0}{}_{2,0,0}(u,\bar u|x)=\tilde\omega^{\vec\lambda 0}{}_{2,0,0}(u,\bar u|x)-\frac{3i\eta_1}{4}e(u,\bar\partial)C^{0,1,1}_{1,0,0}\Big(u,\bar u;\hat k_2|x\Big)*\hat k_2-$$
$$-\frac{i\bar\eta_1}{4}e(u,\bar\partial)C^{1,0,0}_{0,1,1}\Big(u,\bar u;\hat{\bar k}_2|x\Big)*\hat{\bar k}_2+\frac{i\bar\eta_1}{3}e(\partial,\bar\partial)C^{1,0,0}_{1,2,0}\Big(u,\bar u;\hat{\bar k}_2|x\Big)*\hat{\bar k}_2\,. \quad (3.144)$$

В итоге получаются уравнения

$$D_L\omega^{\vec\lambda 0}{}_{1,1,0}(u,\bar u|x)+e(u,\bar\partial)\tilde\omega^{\vec\lambda 0}{}_{0,2,0}(u,\bar u|x)+e(\partial,\bar u)\tilde\omega^{\vec\lambda 0}{}_{2,0,0}(u,\bar u|x)=0\,, \quad (3.145)$$

$$D_L\tilde{\omega}^{\vec{\lambda}0}{}_{2,0,0}(u,\bar{u}|x)+e(u,\bar{\partial})\omega^{\vec{\lambda}0}{}_{1,1,0}(u,\bar{u}|x)=-\frac{i\bar{\eta}_1}{2}H(\partial,\partial)C^{0,0,0}_{4,0,0}\left(u,\bar{u};\hat{\bar{k}}_1|x\right)*\hat{\bar{k}}_1+$$
$$+\frac{\bar{\eta}_1}{4}H(\partial,\partial)C^{0,0,1}_{1,3,0}\left(u,\bar{u};\hat{\bar{k}}_2|x\right)*\hat{\bar{k}}_2-\frac{i\bar{\eta}_1}{4}H(\partial,\partial)C^{0,0,0}_{2,2,0}\left(u,\bar{u};\hat{\bar{k}}_2|x\right)*\hat{\bar{k}}_2+$$
$$+\frac{1}{2}\bar{H}(\bar{\partial},\bar{\partial})\left[\eta_1C^{0,2,1}_{1,1,0}\left(u,\bar{u};\hat{k}_2|x\right)*\hat{k}_2+\bar{\eta}_1C^{1,1,0}_{0,2,1}\left(u,\bar{u};\hat{\bar{k}}_2|x\right)*\hat{\bar{k}}_2\right]-$$
$$-\frac{3i}{4}\bar{H}(\bar{\partial},\bar{\partial})\left[\eta_1C^{0,2,0}_{2,0,0}\left(u,\bar{u};\hat{k}_2|x\right)*\hat{k}_2+\bar{\eta}_1C^{2,0,0}_{0,2,0}\left(u,\bar{u};\hat{\bar{k}}_2|x\right)*\hat{\bar{k}}_2\right]-$$
$$-\frac{3i}{2}H(u,u)\left[\eta_1C^{0,0,2}_{0,0,0}\left(u,\bar{u};\hat{k}_2|x\right)*\hat{k}_2+\bar{\eta}_1C^{0,0,0}_{0,0,2}\left(u,\bar{u};\hat{\bar{k}}_2|x\right)*\hat{\bar{k}}_2\right]\,, \quad (3.146)$$

$$D_L\tilde{\omega}^{\vec{\lambda}0}{}_{0,2,0}(u,\bar{u}|x)+e(\partial,\bar{u})\omega^{\vec{\lambda}0}{}_{1,1,0}(u,\bar{u}|x)=-\frac{i\eta_1}{2}\bar{H}(\bar{\partial},\bar{\partial})C^{4,0,0}_{0,0,0}\left(u,\bar{u};\hat{k}_1|x\right)*\hat{k}_1+$$
$$+\frac{\eta_1}{4}\bar{H}(\bar{\partial},\bar{\partial})C^{1,3,0}_{0,0,1}\left(u,\bar{u};\hat{k}_2|x\right)*\hat{k}_2-\frac{i\eta_1}{4}\bar{H}(\bar{\partial},\bar{\partial})C^{2,2,0}_{0,0,0}\left(u,\bar{u};\hat{k}_2|x\right)*\hat{k}_2+$$
$$+\frac{1}{2}H(\partial,\partial)\left[\eta_1C^{0,2,1}_{1,1,0}\left(u,\bar{u};\hat{k}_2|x\right)*\hat{k}_2+\bar{\eta}_1C^{1,1,0}_{0,2,1}\left(u,\bar{u};\hat{\bar{k}}_2|x\right)*\hat{\bar{k}}_2\right]-$$
$$-\frac{3i}{4}H(\partial,\partial)\left[\eta_1C^{0,2,0}_{2,0,0}\left(u,\bar{u};\hat{k}_2|x\right)*\hat{k}_2+\bar{\eta}_1C^{2,0,0}_{0,2,0}\left(u,\bar{u};\hat{\bar{k}}_2|x\right)*\hat{\bar{k}}_2\right]-$$
$$-\frac{3i}{2}\bar{H}(\bar{u},\bar{u})\left[\eta_1C^{0,0,2}_{0,0,0}\left(u,\bar{u};\hat{k}_2|x\right)*\hat{k}_2+\bar{\eta}_1C^{0,0,0}_{0,0,2}\left(u,\bar{u};\hat{\bar{k}}_2|x\right)*\hat{\bar{k}}_2\right]\,. \quad (3.147)$$

Правые части уравнений (3.146) и (3.147) содержат все 2-коциклы из (3.73). Таким образом, представленная система описывает разложение тензора Римана на тензор Вейля, бесследовую компоненту тензора Риччи и скалярную кривизну.

Аналогичную процедуру можно проделать для полей $F_h\omega^{\vec{\lambda}}$, имеющих нулевой вес относительно горизонтальной $\mathfrak{sl}^h(2)$. Отвечающая им часть $\eta_1,\bar{\eta}_1$-вершины имеет вид

$$\Upsilon^{\eta_1,\bar{\eta}_1}(\Omega,\Omega,C)=$$
$$-\frac{i\eta_1}{2}\left(\bar{\partial}\bar{y}_1\right)\left(\partial y_2\right)\bar{H}(\bar{\partial},\bar{\partial})C^{3,0,0}_{0,1,0}\left(u,\bar{u};\hat{k}_1|x\right)*\hat{k}_1+\text{ к.с.}$$
$$-\frac{i\eta_1}{2}\left(\partial y_1\right)\left(\bar{\partial}\bar{y}_2\right)\bar{H}(\bar{\partial},\bar{\partial})C^{0,3,0}_{1,0,0}\left(u,\bar{u};\hat{k}_2|x\right)*\hat{k}_2+\text{ к.с.}$$
$$-\frac{i\eta_1}{8}\left(\bar{\partial}\bar{y}_1\right)\left(\bar{\partial}\bar{y}_2\right)\bar{H}(\bar{\partial},\bar{\partial})C^{3,1,0}_{0,0,0}\left(u,\bar{u};\hat{k}_1|x\right)*\hat{k}_1+\text{ к.с.}$$
$$+\frac{i\eta_1}{2}\left(\bar{\partial}\bar{y}_1\right)\left(\bar{\partial}\bar{y}_2\right)\bar{H}(\bar{u},\bar{\partial})C^{2,0,1}_{0,0,0}\left(u,\bar{u};\hat{k}_1|x\right)*\hat{k}_1+\text{ к.с.}$$
$$-\frac{i\eta_1}{8}\left(\bar{\partial}\bar{y}_1\right)\left(\bar{\partial}\bar{y}_2\right)\bar{H}(\bar{\partial},\bar{\partial})C^{1,3,0}_{0,0,0}\left(u,\bar{u};\hat{k}_2|x\right)*\hat{k}_2+\text{ к.с.}$$
$$-\frac{i\eta_1}{2}\left(\bar{\partial}\bar{y}_1\right)\left(\bar{\partial}\bar{y}_2\right)\bar{H}\left(\bar{u},\bar{\partial}\right)C^{0,2,1}_{0,0,0}\left(u,\bar{u};\hat{k}_2|x\right)*\hat{k}_2+\text{ к.с.}\;. \quad (3.148)$$

Используя формулы замены базиса

$$(\partial y_1)(\partial y_2)=\frac{1}{2}F_h(\partial y_1)(\partial y_1)\,,\quad \left(\bar\partial\bar y_1\right)\left(\bar\partial\bar y_2\right)=\frac{1}{2}F_h\left(\bar\partial\bar y_1\right)\left(\bar\partial\bar y_1\right)\,,\tag{3.149}$$

$$(\partial y_1)\left(\bar\partial\bar y_2\right)=\frac{1}{2}\left\{F_h(\partial y_1)\left(\bar\partial\bar y_1\right)+\left(\partial\bar\partial X\right)\right\}\,,\tag{3.150}$$

$$(\partial y_2)\left(\bar\partial\bar y_1\right)=\frac{1}{2}\left\{F_h(\partial y_1)\left(\bar\partial\bar y_1\right)-\left(\partial\bar\partial X\right)\right\}\,,\tag{3.151}$$

а также переопределение полей

$$\begin{aligned}\omega^{\vec\lambda_0}{}_{0,2,0}(u,\bar u|x)&=\tilde\omega^{\vec\lambda_0}{}_{0,2,0}(u,\bar u|x)+\\&+\frac{i\eta_1}{2}e(\partial,\bar\partial)\left\{C^{3,0,0}_{0,1,0}\left(u,\bar u;\hat k_1|x\right)*\hat k_1+C^{0,3,0}_{1,0,0}\left(u,\bar u;\hat k_2|x\right)*\hat k_2\right\}\,,\end{aligned}\tag{3.152}$$

$$\begin{aligned}\omega^{\vec\lambda_0}{}_{2,0,0}(u,\bar u|x)&=\tilde\omega^{\vec\lambda_0}{}_{2,0,0}(u,\bar u|x)+\\&+\frac{i\eta_1}{2}e(\partial,\bar\partial)\left\{C^{0,1,0}_{3,0,0}\left(u,\bar u;\hat{\bar k}_1|x\right)*\hat{\bar k}_1+C^{1,0,0}_{0,3,0}\left(u,\bar u;\hat{\bar k}_2|x\right)*\hat{\bar k}_2\right\}\,,\end{aligned}\tag{3.153}$$

получаем следующую систему уравнений

$$D_L\omega^{\vec\lambda_0}{}_{1,1,0}(u,\bar u|x)+e(u\,,\bar\partial)\tilde\omega^{\vec\lambda_0}{}_{0,2,0}(u,\bar u|x)+e(\partial\,,\bar u)\tilde\omega^{\vec\lambda_0}{}_{2,0,0}(u,\bar u|x)=0\,,\tag{3.154}$$

$$\begin{aligned}&D_L\tilde\omega^{\vec\lambda_0}{}_{2,0,0}(u,\bar u|x)+e(u,\bar\partial)\omega^{\vec\lambda_0}{}_{1,1,0}(u,\bar u|x)=\\&=-\frac{i\bar\eta_1}{4}H(\partial,\partial)\left\{C^{0,0,0}_{3,1,0}\left(u,\bar u;\hat{\bar k}_1|x\right)*\hat{\bar k}_1+C^{0,0,0}_{1,3,0}\left(u,\bar u;\hat{\bar k}_2|x\right)*\hat{\bar k}_2\right\}-\\&-\frac{\bar\eta_1}{2}H(\partial,\partial)\left\{C^{0,0,1}_{4,0,0}\left(u,\bar u;\hat{\bar k}_1|x\right)*\hat{\bar k}_1-C^{0,0,1}_{0,4,0}\left(u,\bar u;\hat{\bar k}_2|x\right)*\hat{\bar k}_2\right\}\,,\end{aligned}\tag{3.155}$$

$$\begin{aligned}&D_L\tilde\omega^{\vec\lambda_0}{}_{0,2,0}(u,\bar u|x)+e(\partial,\bar u)\omega^{\vec\lambda_0}{}_{1,1,0}(u,\bar u|x)=\\&=-\frac{i\eta_1}{4}\bar H(\bar\partial,\bar\partial)\left\{C^{3,1,0}_{0,0,0}\left(u,\bar u;\hat k_1|x\right)*\hat k_1+C^{1,3,0}_{0,0,0}\left(u,\bar u;\hat k_2|x\right)*\hat k_2\right\}-\\&-\frac{\eta_1}{2}\bar H(\bar\partial,\bar\partial)\left\{C^{4,0,0}_{0,0,1}\left(u,\bar u;\hat k_1|x\right)*\hat k_1-C^{0,4,0}_{0,0,1}\left(u,\bar u;\hat k_2|x\right)*\hat k_2\right\}\,.\end{aligned}\tag{3.156}$$

Видно, что правые части уравнений (3.155) и (3.156) содержат только коциклы Вейля. Это наблюдение, подкрепленное примером спина-1 (3.140), наводит на предположение о том, что уравнения (3.2) на поля один-формы ω, имеющие нулевой $\mathfrak{sl}^h(2)$-вес, содержат в правой части только коциклы Вейля, т. е. соответствующие полевые уравнения на примарные поля являются наложенными. При этом в случае ненулевого веса λ_h правая часть (3.2) содержит все 2-коциклы (3.73), включая отвечающие за полевые уравнения. Это сигнализирует о том, что некоторые из копий безмассовых и частично-безмассовых полей находятся вне массовой оболочки. Другими словами, некоторые примарные поля не подчинены никаким дифференциальным полевым уравнениям в соответствии с интерпретацией σ_--когомологий, изложенной в разделе 1.2.1.

Более того, в общем случае склейка конечномерных неприводимых $\mathfrak{so}(3,2)$-модулей полей один-форм и неразложимых модулей полей ноль-форм не является взаимно-однозначной, так как $C^{\bar{a},\bar{b},\bar{c}}_{a,b,c}(u,\bar{u};\hat{K}|x)$ в правых частях уравнений (3.146), (3.147) и (3.155), (3.156) представимы в виде суммы (LW, LW) векторов алгебры $\mathfrak{sl}(2)\oplus\mathfrak{sl}(2)$ (3.76) и (3.77), их потомков, а также прообразов векторов из фактор-модулей нерасщепляемых расширений модулей Верма, обсуждавшихся в разделе 3.2 (такие векторы не представимы в виде суммы (LW, LW) векторов и их потомков). Каждый неприводимый конечномерный $\mathfrak{so}(3,2)$-модуль, соответствующий безмассовому или частично-безмассовому полю, присоединен к сумме компонент из некоторого набора неразложимых бесконечномерных $\mathfrak{so}(3,2)$-подмодулей $(\mathrm{tw}\otimes\mathrm{adj})$ и $(\mathrm{adj}\otimes\mathrm{tw})$.

В результате требуется произвести пересуммирование модулей ноль-форм и модулей один-форм, приводящее к взаимно-однозначной склейке. При этом пересуммирование должно вовлекать в себя компонентные поля вдоль разных операторов Клейна, как было замечено на примере полей младших спинов. Ожидается, что требуемое пересуммирование может быть выполнено с помощью подходящей дифференциальной или сдвинутой гомотопии [131; 132], автоматически приводящей к вершине $\Upsilon(\Omega_{AdS},\Omega_{AdS},C)$, состоящей только из 2-коциклов (3.73).

В случае рассмотрения унитарно-редуцированной системы коциклы, отвечающие полевым уравнениям, отсутствуют, и система находится на массовой оболочке. При этом все частично-безмассовые и большая часть безмассовых полей оказываются нединамическими, т. е. не подчиняющимися каким-либо дифференциальным полевым уравнениям.

3.4 Выводы

В этой главе был проведен анализ динамического содержания уравнений B_2-КВС-теории для полей один-форм ω со значениями в представлении $(\mathrm{adj}\otimes\mathrm{adj})$, а также полей ноль-форм C со значениями в $(\mathrm{tw}\otimes\mathrm{adj})$ и $(\mathrm{adj}\otimes\mathrm{tw})$.

Динамическое содержание было установлено путем вычисления когомологий оператора σ_- [54; 93]. Для корректного определения оператора σ_- была рассмотрена структура B_2-модулей относительно алгебры $\mathfrak{so}(3,2)$.

Выделение неразложимых $\mathfrak{so}(3,2)$-подмодулей проводилось с использованием коммутирующей алгебры $\mathfrak{sl}(2)\oplus\mathfrak{sl}(2)$. В случае модуля $(\mathrm{adj}\otimes\mathrm{adj})$ эти алгебры образуют Хау-дуальную пару [87]. В связи с этим поле ω раскладывается в прямую сумму конечномерных неприводимых представлений $\mathfrak{so}(3,2)$, причем пространства кратностей этих представлений организованы в неприводимые модули $\mathfrak{sl}^h(2)\oplus\mathfrak{sl}^v(2)$. Неприводимые представления $\mathfrak{so}(3,2)$ находятся во взаимно-однозначном соответствии с (HW, LW) векторами $\mathfrak{sl}^h(2)\oplus\mathfrak{sl}^v(2)$. Иная ситуация возникает для модулей $(\mathrm{tw}\otimes\mathrm{adj})$ и $(\mathrm{adj}\otimes\mathrm{tw})$, в которых принимают значения ноль-формы C. Было установлено, что соответствующие представления $\mathfrak{sl}(2)\oplus\mathfrak{sl}(2)$ на полиномах от Y_i имеют существенно более сложную структуру и содержат нерасщепляемые расширения модулей Верма. Наличие нерасщепляемых расширений $\mathfrak{sl}(2)\oplus\mathfrak{sl}(2)$-модулей приводит к невозможности получить полный список представителей классов когомологий как функций от Y_i, но, несмотря на некоторую потерю общности, когомологический анализ можно проводить на подмножестве (LW, LW) векторов алгебры $\mathfrak{sl}(2)\oplus\mathfrak{sl}(2)$.

Поля один-формы из сектора $(\mathrm{adj}\otimes\mathrm{adj})$ описывают безмассовые и частично-безмассовые поля, поскольку найденные когомологии $H^{0,1,2}(\sigma_-)$ соотносятся с ранее известными результатами для безмассовых [98] (получены в главе 1) и частично-безмассовых [91] (в этой статье когомологии приведены в виде диаграмм Юнга) полей. Двухчастичное поле $\omega(Y_1,Y_2)$ содержит все одночастичные поля в пространстве AdS_4 в бесконечном числе копий, т. е. $(\mathrm{adj}\otimes\mathrm{adj})$ является бесконечно приводимым $\mathfrak{so}(3,2)$-модулем. Хотя частично-безмассовые поля в AdS не являются унитарными, после унитарной редукции, полученной в главе 2, они становятся нединамическими. Компоненты ноль-форм C принадлежат неразложимым модулям, и когомологический анализ выявляет примарные поля и уравнения, отсутствующие в стандартной теории высших спинов. Интерпретация этих дополнительных полей и уравнений зависит от того, как устроено склеивание $\mathfrak{so}(3,2)$-модулей полей один-форм и полей ноль-форм в линеаризованной вершине.

Анализ склеивания между один- и ноль-формами показывает, что линеаризованная вершина содержит большое число нежелательных членов, не являющихся σ_--когомологическими ($\sigma_\pm$-точные). Это означает, что стандартная гомотопия, использованная в [100], является неоптимальной. Тем не менее, подходящее переопределение поля ω, оставляющее лишь 2-коциклы, можно подобрать явно, как это было продемонстрировано на примере полей младших спинов. Сравнение 2-коциклов с линеаризованными вершинами показало, что в специальном случае векторов нулевого веса относительно $\mathfrak{sl}^h(2)$ присутствует только когомология типа Вейля. В остальных случаях появляются также коциклы, связанные с полевыми уравнениями. Их возникновение обусловлено нетривиальной зависимостью от тех осцилляторов, которые описывают присоединенные модули в $(\mathrm{tw} \otimes \mathrm{adj})$ и $(\mathrm{adj} \otimes \mathrm{tw})$. В имеющейся форме вершины не обеспечивают взаимно-однозначного склеивания модулей $\mathfrak{so}(3,2)$, что осложняет интерпретацию компонент полей ноль-форм C. В связи с этим требуется нахождение способа пересуммирования полей (ω, C), устанавливающего явную однозначную связь между неприводимым конечномерным модулем $\mathfrak{so}(3,2)$ и бесконечномерным неразложимым (возможно приводимым) представлением. Ожидается, что подходящая гомотопия [131; 132] позволит решить эту задачу.

Устранение зависимости полей C от осцилляторов, отвечающих за присоединенный модуль, одновременно обеспечивает унитарность модуля ноль-форм и приводит к прозрачному взаимно-однозначному склеиванию в вершинах. Это, в свою очередь, позволяет дать ясную интерпретацию полей ω и C, а также уравнений, которым они удовлетворяют.

Результаты главы опубликованы в работе [99]. Основные результаты, описанные в главе, следующие:

1. Было получено содержание развернутой системы полей один-форм, принимающих значения в модуле $(\mathrm{adj} \otimes \mathrm{adj})$. Показано, что эти поля соответствуют бесконечному числу копий симметричных безмассовых и частично-безмассовых полей всех глубин безмассовости, организованных в неприводимые модули дуальной алгебры $\mathfrak{sl}^h(2) \oplus \mathfrak{sl}^v(2)$.

2. Получено содержание развернутой системы полей ноль-форм, принимающих значения в модуле $(\mathrm{tw} \otimes \mathrm{adj})$. Установлено, что относительно дуальной коммутирующей алгебры $\mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{sl}(2)$ поля раскладываются в сумму модулей Верма младшего веса и нерасщепляемых расширений модулей Верма. При унитарной редукции результаты совпадают с известными из стандартной теории высших спинов.

3. На примерах полей младших спинов изучена структура линеаризованной вершины $\Upsilon(\Omega_{AdS}, \Omega_{AdS}, C)$. Обнаружено, что для полей ненулевого веса относительно $\mathfrak{sl}^h(2)$ вершина содержит все 2-коциклы оператора σ_-, что отвечает системе вне массовой оболочки, в то время как для случая полей нулевого веса присутствуют лишь коциклы Вейля. При выполнении унитарной редукции нетривиальными остаются только коциклы Вейля.

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем:

1. Для развернутых систем, отвечающих присоединенному модулю стандартной теории высших спинов, в пространствах $Mink_d$ и AdS_4 с помощью обобщения теории Ходжа получены когомологии $H(\sigma_-)$. Найдена реализация в терминах $\mathfrak{so}(d-1,1)$-тензоров в случае пространства $Mink_d$ и $\mathfrak{so}(3,1)$-мультиспиноров в пространстве AdS_4 для примарных полей, калибровочно-инвариантных дифференциальных операторов на примарных полях, а также дифференциальных калибровочных параметров. Дано альтернативное доказательство Первой теоремы о массовой оболочке.
2. В теории высших спинов, расширенной конечной группой Кокстера, идентифицированы два типа модулей, отличающихся по теоретико-представленческим свойствам: запутанные и распутываемые. Сформулирован и доказан критерий распутываемости модуля, то есть необходимое и достаточное условие эквивалентности тензорному произведению модулей стандартной четырехмерной теории высших спинов, устанавливаемой в классе линейных преобразований осцилляторов. Критерий состоит в выполнении равенства $\left(R\bar{R}^T\right)^2 = \mathbf{1}$ для матриц отражений.
3. В теории высших спинов, расширенной группой Кокстера B_2, проведена классификация модулей по критерию наличия комплексно-эквивалентного унитарного модуля старшего или младшего веса. Классификация получена с помощью комплексного преобразования Боголюбова и автоморфизмов звездочной алгебры. Предъявлен механизм редукции к унитарному подсектору линеаризованной теории путем наложения граничных условий на ноль-формы C, а также сужения нелинейной системы до подпространства, инвариантного относительно автоморфизма четности, действующего на операторы Клейна.
4. В теории высших спинов, расширенной группой Кокстера B_2, установлено динамическое содержание уравнений для полей один-форм ω, принимаю-

щих значения в модуле $(\mathrm{adj}\otimes\mathrm{adj})$ (тензорном квадрате присоединенного модуля стандартной теории высших спинов), а также для полей ноль-форм C, принимающих значения в модуле $(\mathrm{tw}\otimes\mathrm{adj})$ (тензорном произведении твистованно-присоединенного и присоединенного модулей стандартной теории высших спинов). Показано, что один-формы ω описывают бесконечное число копий безмассовых и частично-безмассовых полей всех возможных глубин безмассовости, организованных в неприводимые представления алгебры $\mathfrak{sl}(2)\oplus\mathfrak{sl}(2)$. В случае модуля $(\mathrm{tw}\otimes\mathrm{adj})$ обнаружено, что пространства кратностей представлений $\mathfrak{so}(3,2)$ содержат нерасщепляемые расширения модулей Верма алгебры $\mathfrak{sl}(2)\oplus\mathfrak{sl}(2)$.

5. В теории высших спинов, расширенной группой Кокстера B_2, на примере полей младших спинов проведен анализ σ_--когомологического содержания вершины $\Upsilon(\Omega_{AdS},\Omega_{AdS},C)$ в секторе полей один-форм $(\mathrm{adj}\otimes\mathrm{adj})$. Показано, что для полей ω, имеющих ненулевой вес относительно алгебры $\mathfrak{sl}(2)$, сохраняющей суммарную степень мономов по переменным Y_i, вершина содержит все 2-коциклы оператора σ_-, что отвечает системе вне массовой оболочки, в то время как в случае полей нулевого веса присутствуют только когомологии типа Вейля, что соответствует системе на массовой оболочке. При этом унитарная редукция, осуществляемая с помощью наложения граничных условий на поля ноль-формы C, устраняет из вершины 2-коциклы, относящиеся к полевым уравнениям.

Полученные результаты могут быть использованы при дальнейшем исследовании кокстеровских расширений теории высших спинов, а также других развернутых систем, для которых требуется явное вычисление σ_--когомологий и анализ теоретико-представленческой структуры пространств полей.

Перспективными направлениями дальнейшей работы являются распространение проведенного анализа на другие конечные группы Кокстера, изучение унитарной редукции за пределами линеаризованного приближения, а также исследование роли кокстеровских расширений в механизмах нарушения высшеспиновой симметрии и в выявлении возможной связи теорий высших спинов с теорией струн.

Благодарности

Выражаю искреннюю благодарность своему научному руководителю Михаилу Андреевичу Васильеву за предоставленную возможность работать над интересными научными задачами, за советы и консультации, без которых настоящая работа была бы невозможна. Отдельно выражаю благодарность Александру Андреевичу Тарусову за совместную плодотворную работу по изучению кокстеровского расширения теории высших спинов и Алексею Станиславовичу Бычкову за работу по изучению динамического содержания развернутых уравнений в $Mink_d$ и AdS_4. Также благодарю Вячеслава Евгеньевича Диденко, Никиту Георгиевича Мисуну, Анатолия Валерьевича Корибута и Ольгу Александровну Гельфонд за консультации по вопросам высших спинов.

Список литературы

1. *Glashow S. L.* Partial Symmetries of Weak Interactions // Nucl. Phys. — 1961. — Т. 22. — С. 579—588. — DOI: 10.1016/0029-5582(61)90469-2.
2. *Weinberg S.* A Model of Leptons // Phys. Rev. Lett. — 1967. — Т. 19. — С. 1264—1266. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.19.1264.
3. *Salam A.* Weak and Electromagnetic Interactions // Conf. Proc. C. — 1968. — Т. 680519. — С. 367—377. — DOI: 10.1142/9789812795915_0034.
4. *Fritzsch H.*, *Gell-Mann M.*, *Leutwyler H.* Advantages of the Color Octet Gluon Picture // Phys. Lett. B. — 1973. — Т. 47. — С. 365—368. — DOI: 10.1016/0370-2693(73)90625-4.
5. *Englert F.*, *Brout R.* Broken Symmetry and the Mass of Gauge Vector Mesons // Phys. Rev. Lett. / под ред. J. C. Taylor. — 1964. — Т. 13. — С. 321—323. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.13.321.
6. *Higgs P. W.* Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons // Phys. Rev. Lett. / под ред. J. C. Taylor. — 1964. — Т. 13. — С. 508—509. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.13.508.
7. Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC / G. Aad [и др.] // Phys. Lett. B. — 2012. — Т. 716. — С. 1—29. — DOI: 10.1016/j.physletb.2012.08.020. — arXiv: 1207.7214 [hep-ex].
8. Observation of a New Boson at a Mass of 125 GeV with the CMS Experiment at the LHC / S. Chatrchyan [и др.] // Phys. Lett. B. — 2012. — Т. 716. — С. 30—61. — DOI: 10.1016/j.physletb.2012.08.021. — arXiv: 1207.7235 [hep-ex].
9. *Einstein A.* Die Feldgleichungen der Gravitation // Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften. — 1915. — С. 844—847.

10. *Einstein A.* Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie // Annalen Phys. — 1916. — Т. 49. — С. 769—822.

11. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger / B. P. Abbott [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2016. — Т. 116, вып. 6. — С. 061102. — DOI: `10.1103/PhysRevLett.116.061102`. — arXiv: `1602.03837 [gr-qc]`.

12. *Schwarz J. H.* Superstring theory // Physics Reports. — 1982. — Т. 89, № 3. — С. 223—322. — ISSN 0370-1573. — DOI: `10.1016/0370-1573(82)90087-4`.

13. *Green M. B.*, *Schwarz J. H.* Supersymmetrical string theories // Physics Letters B. — 1982. — Т. 109, № 6. — С. 444—448. — ISSN 0370-2693. — DOI: `10.1016/0370-2693(82)91110-8`.

14. Heterotic String / D. J. Gross, J. A. Harvey, E. Martinec, R. Rohm // Phys. Rev. Lett. — 1985. — Февр. — Т. 54, вып. 6. — С. 502—505. — DOI: `10.1103/PhysRevLett.54.502`.

15. *Schwarz J. H.* Does string theory have a duality symmetry relating weak and strong coupling? // International Conference on Strings 93. — 05.1993. — arXiv: `hep-th/9307121`.

16. *Schwarz J. H.* An SL(2,Z) multiplet of type IIB superstrings // Phys. Lett. B. — 1995. — Т. 360. — С. 13—18. — DOI: `10.1016/0370-2693(95)01405-5`. — arXiv: `hep-th/9508143`. — [Erratum: Phys.Lett.B 364, 252 (1995)].

17. *Polchinski J.*, *Witten E.* Evidence for heterotic - type I string duality // Nucl. Phys. B. — 1996. — Т. 460. — С. 525—540. — DOI: `10.1016/0550-3213(95)00614-1`. — arXiv: `hep-th/9510169`.

18. *Buscher T.* A symmetry of the string background field equations // Physics Letters B. — 1987. — Т. 194, № 1. — С. 59—62. — ISSN 0370-2693. — DOI: `10.1016/0370-2693(87)90769-6`.

19. *Hull C. M.*, *Townsend P. K.* Unity of superstring dualities // Nucl. Phys. B. — 1995. — Т. 438. — С. 109—137. — DOI: `10.1016/0550-3213(94)00559-W`. — arXiv: `hep-th/9410167`.

20. *Greene B. R.*, *Plesser M. R.* Duality in Calabi-Yau Moduli Space // Nucl. Phys. B. — 1990. — Т. 338. — С. 15—37. — DOI: `10.1016/0550-3213(90)90622-K`.

21. *Fradkin E. S.*, *Vasiliev M. A.* Candidate to the Role of Higher Spin Symmetry // Annals Phys. — 1987. — Т. 177. — С. 63. — DOI: 10.1016/S0003-4916(87)80025-8.

22. *Vasiliev M. A.* Extended Higher Spin Superalgebras and Their Realizations in Terms of Quantum Operators // Fortsch. Phys. — 1988. — Т. 36. — С. 33—62.

23. *Gunaydin M.* Singleton and doubleton supermultiplets of space-time supergroups and infinite spin superalgebras // Trieste Conference on Supermembranes and Physics in 2+1 Dimensions. — 08.1989.

24. *Konshtein S. E.*, *Vasiliev M. A.* Massless Representations and Admissibility Condition for Higher Spin Superalgebras // Nucl. Phys. B. — 1989. — Т. 312. — С. 402—418. — DOI: 10.1016/0550-3213(89)90301-5.

25. *Vasiliev M. A.* Higher Spin Gauge Theories: Star-Product and AdS Space // The Many Faces of the Superworld / под ред. M. A. Shifman. — Singapore : World Scientific, 2000. — С. 533—610. — DOI: 10.1142/9789812793850_0030. — arXiv: hep-th/9910096.

26. *Eastwood M. G.* Higher symmetries of the Laplacian // Annals Math. — 2005. — Т. 161. — С. 1645—1665. — DOI: 10.4007/annals.2005.161.1645. — arXiv: hep-th/0206233.

27. *Vasiliev M. A.* Higher spin superalgebras in any dimension and their representations // JHEP. — 2004. — Т. 12. — С. 046. — DOI: 10.1088/1126-6708/2004/12/046. — arXiv: hep-th/0404124.

28. *Joung E.*, *Mkrtchyan K.* Notes on higher-spin algebras: minimal representations and structure constants // JHEP. — 2014. — Т. 05. — С. 103. — DOI: 10.1007/JHEP05(2014)103. — arXiv: 1401.7977 [hep-th].

29. *Dirac P. A. M.* Relativistic wave equations // Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences. — 1936. — Июль. — Т. 155, № 886. — С. 447—459. — ISSN 0080-4630. — DOI: 10.1098/rspa.1936.0111.

30. *Fierz M.*, *Pauli W.* On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field // Proc. Roy. Soc. Lond. A. — 1939. — Т. 173. — С. 211—232. — DOI: 10.1098/rspa.1939.0140.

31. *Singh L. P. S.*, *Hagen C. R.* Lagrangian formulation for arbitrary spin. 1. The boson case // Phys. Rev. D. — 1974. — Т. 9. — С. 898—909. — DOI: 10.1103/PhysRevD.9.898.

32. *Fronsdal C.* Massless Fields with Integer Spin // Phys. Rev. D. — 1978. — Т. 18. — С. 3624—3629. — DOI: 10.1103/PhysRevD.18.3624.

33. *Fang J.*, *Fronsdal C.* Massless Fields with Half Integral Spin // Phys. Rev. D. — 1978. — Т. 18. — С. 3630—3633. — DOI: 10.1103/PhysRevD.18.3630.

34. *Weinberg S.* Photons and Gravitons in S-Matrix Theory: Derivation of Charge Conservation and Equality of Gravitational and Inertial Mass // Physical Review. — 1964. — Авг. — Т. 135, 4B. — С. 1049—1056. — DOI: 10.1103/PhysRev.135.B1049.

35. *Coleman S.*, *Mandula J.* All Possible Symmetries of the *S* Matrix // Phys. Rev. — 1967. — Июль. — Т. 159, вып. 5. — С. 1251—1256. — DOI: 10.1103/PhysRev.159.1251.

36. *Weinberg S.*, *Witten E.* Limits on Massless Particles // Phys. Lett. B. — 1980. — Т. 96. — С. 59—62. — DOI: 10.1016/0370-2693(80)90212-9.

37. *Porrati M.* Universal Limits on Massless High-Spin Particles // Phys. Rev. D. — 2008. — Т. 78. — С. 065016. — DOI: 10.1103/PhysRevD.78.065016. — arXiv: 0804.4672 [hep-th].

38. *Fradkin E. S.*, *Vasiliev M. A.* On the Gravitational Interaction of Massless Higher Spin Fields // Phys. Lett. B. — 1987. — Т. 189. — С. 89—95. — DOI: 10.1016/0370-2693(87)91275-5.

39. *Bengtsson A. K.*, *Bengtsson I.*, *Brink L.* Cubic interaction terms for arbitrary spin // Nuclear Physics B. — 1983. — Т. 227, № 1. — С. 31—40. — ISSN 0550-3213. — DOI: 10.1016/0550-3213(83)90140-2.

40. *Metsaev R. R.* Generating function for cubic interaction vertices of higher spin fields in any dimension // Mod. Phys. Lett. A. — 1993. — Т. 8. — С. 2413—2426. — DOI: 10.1142/S0217732393003706.

41. *Metsaev R. R.* Cubic interaction vertices of massive and massless higher spin fields // Nucl. Phys. B. — 2006. — Т. 759. — С. 147—201. — DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2006.10.002. — arXiv: hep-th/0512342.

42. *Ponomarev D., Skvortsov E. D.* Light-Front Higher-Spin Theories in Flat Space // J. Phys. A. — 2017. — Т. 50, № 9. — С. 095401. — DOI: 10.1088/1751-8121/aa56e7. — arXiv: 1609.04655 [hep-th].

43. *Skvortsov E. D., Tran T., Tsulaia M.* Quantum Chiral Higher Spin Gravity // Phys. Rev. Lett. — 2018. — Т. 121, № 3. — С. 031601. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.121.031601. — arXiv: 1805.00048 [hep-th].

44. *Skvortsov E., Tran T., Tsulaia M.* More on quantum chiral higher spin gravity // Phys. Rev. D. — 2020. — Май. — Т. 101, вып. 10. — С. 106001. — DOI: 10.1103/PhysRevD.101.106001.

45. *Adamo T., Tran T.* Higher-spin Yang–Mills, amplitudes and self-duality // Lett. Math. Phys. — 2023. — Т. 113, № 3. — С. 50. — DOI: 10.1007/s11005-023-01673-z. — arXiv: 2210.07130 [hep-th].

46. *Serrani M.* On classification of (self-dual) higher-spin gravities in flat space // JHEP. — 2025. — Т. 08. — С. 032. — DOI: 10.1007/JHEP08(2025)032. — arXiv: 2505.12839 [hep-th].

47. *Vasil'ev M.* "Gauge" form of description of massless fields with arbitrary spin // Yad. Fiz. — 1980. — Т. 32, № 3. — С. 855—861. — ISSN 0044-0027.

48. *Cartan É.* Sur une généralisation de la notion de courbure de Riemann et les espaces à torsion // Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris. — 1922. — Т. 174. — С. 593—595.

49. *Cartan E.* Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée (première partie) // Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure. — 1923. — Т. 40. — С. 325—412. — DOI: 10.24033/asens.751.

50. *Cartan E.* Sur les variétés à connexion affine, et la théorie de la relativité généralisée (première partie) (Suite) // Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure. — 1924. — Т. 41. — С. 1—25. — DOI: 10.24033/asens.753.

51. *Cartan E.* Sur les variétés à connexion affine, et la théorie de la relativité généralisée (deuxième partie) // Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure. — 1925. — Т. 42. — С. 17—88. — DOI: 10.24033/asens.761.

52. *Vasiliev M. A.* Equations of Motion of Interacting Massless Fields of All Spins as a Free Differential Algebra // Phys. Lett. B. — 1988. — Т. 209. — С. 491—497. — DOI: 10.1016/0370-2693(88)91179-3.

53. *Vasiliev M. A.* Consistent Equations for Interacting Massless Fields of All Spins in the First Order in Curvatures // Annals Phys. — 1989. — T. 190. — C. 59—106. — DOI: 10.1016/0003-4916(89)90261-3.

54. *Shaynkman O. V.*, *Vasiliev M. A.* Scalar field in any dimension from the higher spin gauge theory perspective // Theor. Math. Phys. — 2000. — T. 123. — C. 683—700. — DOI: 10.1007/BF02551402. — arXiv: hep-th/0003123.

55. *Vasiliev M. A.* More on equations of motion for interacting massless fields of all spins in (3+1)-dimensions // Phys. Lett. B. — 1992. — T. 285. — C. 225—234. — DOI: 10.1016/0370-2693(92)91457-K.

56. *Prokushkin S. F.*, *Vasiliev M. A.* Higher spin gauge interactions for massive matter fields in 3-D AdS space-time // Nucl. Phys. B. — 1999. — T. 545. — C. 385—433. — DOI: 10.1016/S0550-3213(98)00839-6. — arXiv: hep-th/9806236.

57. *Vasiliev M. A.* Nonlinear equations for symmetric massless higher spin fields in (A)dS(d) // Phys. Lett. B. — 2003. — T. 567. — C. 139—151. — DOI: 10.1016/S0370-2693(03)00872-4. — arXiv: hep-th/0304049.

58. *Gross D. J.* High-energy symmetries of string theory // Phys. Rev. Lett. — 1988. — Март. — T. 60, вып. 13. — C. 1229—1232. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.60.1229.

59. *Gross D. J.*, *Mende P. F.* String theory beyond the Planck scale // Nuclear Physics B. — 1988. — T. 303, № 3. — C. 407—454. — ISSN 0550-3213. — DOI: 10.1016/0550-3213(88)90390-2.

60. *Sundborg B.* Stringy gravity, interacting tensionless strings and massless higher spins // Nucl. Phys. B Proc. Suppl. / под ред. D. P. Sorokin. — 2001. — T. 102. — C. 113—119. — DOI: 10.1016/S0920-5632(01)01545-6. — arXiv: hep-th/0103247.

61. *Sezgin E.*, *Sundell P.* Massless higher spins and holography // Nucl. Phys. B. — 2002. — T. 644. — C. 303—370. — DOI: 10.1016/S0550-3213(02)00739-3. — arXiv: hep-th/0205131. — [Erratum: Nucl.Phys.B 660, 403–403 (2003)].

62. *Bianchi M.*, *Morales J. F.*, *Samtleben H.* On stringy $AdS_5 \times S^5$ and higher spin holography // JHEP. — 2003. — Т. 07. — С. 062. — DOI: 10.1088/1126-6708/2003/07/062. — arXiv: hep-th/0305052.

63. Higher spin symmetry and N=4 SYM / N. Beisert, M. Bianchi, J. F. Morales, H. Samtleben // JHEP. — 2004. — Т. 07. — С. 058. — DOI: 10.1088/1126-6708/2004/07/058. — arXiv: hep-th/0405057.

64. *Bianchi M.* Higher spin symmetry (breaking) in N=4 sym theory and holography // Comptes Rendus Physique / под ред. G. Vilasi, G. Esposito, G. Lambiase, G. Marmo, G. Scarpetta. — 2004. — Т. 5. — С. 1091—1099. — DOI: 10.1016/j.crhy.2004.10.006. — arXiv: hep-th/0409292.

65. *Bianchi M.*, *Heslop P. J.*, *Riccioni F.* More on La Grande Bouffe // JHEP. — 2005. — Т. 08. — С. 088. — DOI: 10.1088/1126-6708/2005/08/088. — arXiv: hep-th/0504156.

66. *Bonelli G.* On the tensionless limit of bosonic strings, infinite symmetries and higher spins // Nucl. Phys. B. — 2003. — Т. 669. — С. 159—172. — DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2003.07.002. — arXiv: hep-th/0305155.

67. *Sagnotti A.*, *Tsulaia M.* On higher spins and the tensionless limit of string theory // Nucl. Phys. B. — 2004. — Т. 682. — С. 83—116. — DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2004.01.024. — arXiv: hep-th/0311257.

68. *Lindstrom U.*, *Zabzine M.* Tensionless strings, WZW models at critical level and massless higher spin fields // Phys. Lett. B. — 2004. — Т. 584. — С. 178—185. — DOI: 10.1016/j.physletb.2004.01.035. — arXiv: hep-th/0305098.

69. *Gaberdiel M. R.*, *Gopakumar R.* Higher Spins & Strings // JHEP. — 2014. — Т. 11. — С. 044. — DOI: 10.1007/JHEP11(2014)044. — arXiv: 1406.6103 [hep-th].

70. *Gaberdiel M. R.*, *Gopakumar R.* Stringy Symmetries and the Higher Spin Square // J. Phys. A. — 2015. — Т. 48, № 18. — С. 185402. — DOI: 10.1088/1751-8113/48/18/185402. — arXiv: 1501.07236 [hep-th].

71. *Ponomarev D.* Chiral higher-spin double copy // JHEP. — 2025. — Т. 01. — С. 143. — DOI: 10.1007/JHEP01(2025)143. — arXiv: 2409.19449 [hep-th].

72. *Didenko V. E.*, *Korybut A. V.* Toward higher-spin symmetry breaking in the bulk // Phys. Rev. D. — 2024. — T. 110, № 2. — C. 026007. — DOI: 10.1103/PhysRevD.110.026007. — arXiv: 2312.11096 [hep-th].

73. *Didenko V. E.*, *Faliakhov I. S.* Symmetry breaking in the self-dual higher-spin theory // Phys. Rev. D. — 2025. — T. 112, № 10. — C. 106010. — DOI: 10.1103/nmxv-c8kx. — arXiv: 2509.01477 [hep-th].

74. *Didenko V. E.* On holomorphic sector of higher-spin theory // JHEP. — 2022. — T. 10. — C. 191. — DOI: 10.1007/JHEP10(2022)191. — arXiv: 2209.01966 [hep-th].

75. *Didenko V. E.*, *Korybut A. V.* Interaction of symmetric higher-spin gauge fields // Phys. Rev. D. — 2023. — T. 108, № 8. — C. 086031. — DOI: 10.1103/PhysRevD.108.086031. — arXiv: 2304.08850 [hep-th]. — [Erratum: Phys.Rev.D 109, 069901 (2024)].

76. *Vasiliev M. A.* Multiparticle extension of the higher-spin algebra // Class. Quant. Grav. — 2013. — T. 30. — C. 104006. — DOI: 10.1088/0264-9381/30/10/104006. — arXiv: 1212.6071 [hep-th].

77. *Vasiliev M. A.* From Coxeter Higher-Spin Theories to Strings and Tensor Models // JHEP. — 2018. — T. 08. — C. 051. — DOI: 10.1007/JHEP08(2018)051. — arXiv: 1804.06520 [hep-th].

78. *Gelfond O. A.*, *Vasiliev M. A.* Operator algebra of free conformal currents via twistors // Nucl. Phys. B. — 2013. — T. 876. — C. 871—917. — DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2013.09.001. — arXiv: 1301.3123 [hep-th].

79. *Cherednik I.*, *Markov Y.* Hankel transform via double Hecke algebra // Iwahori-Hecke Algebras and their Representation Theory: Lectures given at the C.I.M.E. Summer School held in Martina Franca, Italy, June 28 - July 6, 1999. — Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2002. — C. 1—25. — ISBN 978-3-540-36205-0. — DOI: 10.1007/978-3-540-36205-0_1.

80. *Etingof P.*, *Ginzburg V.* Symplectic reflection algebras, Calogero-Moser space, and deformed Harish-Chandra homomorphism // Inventiones mathematicae. — 2002. — T. 147, № 2. — C. 243—348.

81. *Cherednik I.* Double Affine Hecke Algebras. T. 319. — Cambridge : Cambridge University Press, 2005. — (London Mathematical Society Lecture Note Series). — ISBN 978-0-521-60918-0. — DOI: 10.1017/CBO9780511546501.

82. *Etingof P.*, *Ma X.* Lecture notes on Cherednik algebras. — 2010. — arXiv: 1001.0432 [math.RT]. — URL: https://arxiv.org/abs/1001.0432.

83. The Calogero model: Anyonic representation, fermionic extension and supersymmetry / L. Brink, T. H. Hansson, S. Konstein, M. A. Vasiliev // Nucl. Phys. B. — 1993. — T. 401. — C. 591—612. — DOI: 10.1016/0550-3213(93)90315-G. — arXiv: hep-th/9302023.

84. *Vasiliev M. A.* Conformal higher spin symmetries of 4-d massless supermultiplets and osp(L,2M) invariant equations in generalized (super)space // Phys. Rev. D. — 2002. — T. 66. — C. 066006. — DOI: 10.1103/PhysRevD.66.066006. — arXiv: hep-th/0106149.

85. *Shaynkman O. V.*, *Vasiliev M. A.* Higher spin conformal symmetry for matter fields in (2+1)-dimensions // Theor. Math. Phys. — 2001. — T. 128. — C. 1155—1168. — DOI: 10.1023/A:1012399417069. — arXiv: hep-th/0103208.

86. *Gelfond O. A.*, *Vasiliev M. A.* Higher-Rank Fields and Currents // JHEP. — 2016. — T. 10. — C. 067. — DOI: 10.1007/JHEP10(2016)067. — arXiv: 1312.6673 [hep-th].

87. *Howe R.* Remarks on classical invariant theory // Trans. Am. Math. Soc. — 1989. — T. 313, № 2. — C. 539—570. — DOI: 10.1090/s0002-9947-1989-0986027-x.

88. *Vasiliev M. A.* Free Massless Fields of Arbitrary Spin in the de Sitter Space and Initial Data for a Higher Spin Superalgebra // Fortsch. Phys. — 1987. — T. 35, № 11. — C. 741—770. — DOI: 10.1002/prop.2190351103.

89. *Lopatin V. E.*, *Vasiliev M. A.* Free Massless Bosonic Fields of Arbitrary Spin in d-dimensional De Sitter Space // Mod. Phys. Lett. A. — 1988. — T. 3. — C. 257—270. — DOI: 10.1142/S0217732388000313.

90. Nonlinear higher spin theories in various dimensions / X. Bekaert, S. Cnockaert, C. Iazeolla, M. A. Vasiliev // 1st Solvay Workshop on Higher Spin Gauge Theories. — 2004. — C. 132—197. — arXiv: hep-th/0503128.

91. *Skvortsov E. D.* Gauge fields in (A)dS(d) within the unfolded approach: algebraic aspects // JHEP. — 2010. — Т. 01. — С. 106. — DOI: 10.1007/JHEP01(2010)106. — arXiv: 0910.3334 [hep-th].

92. *Henneaux M.*, *Teitelboim C.* Quantization of Gauge Systems. — Princeton, NJ : Princeton University Press, 1992. — ISBN 978-0-691-03769-1.

93. *Gelfond O. A.*, *Vasiliev M. A.* Higher rank conformal fields in the Sp(2M) symmetric generalized space-time // Theor. Math. Phys. — 2005. — Т. 145. — С. 1400—1424. — DOI: 10.1007/s11232-005-0168-9. — arXiv: hep-th/0304020.

94. *Vasiliev M. A.* Bosonic conformal higher-spin fields of any symmetry // Nucl. Phys. B. — 2010. — Т. 829. — С. 176—224. — DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2009.12.010. — arXiv: 0909.5226 [hep-th].

95. *Misuna N. G.*, *Vasiliev M. A.* Off-Shell Scalar Supermultiplet in the Unfolded Dynamics Approach // JHEP. — 2014. — Т. 05. — С. 140. — DOI: 10.1007/JHEP05(2014)140. — arXiv: 1301.2230 [hep-th].

96. *Hodge W. V. D.* The Theory and Applications of Harmonic Integrals. — Cambridge : Cambridge University Press, 1941.

97. Parent field theory and unfolding in BRST first-quantized terms / G. Barnich, M. Grigoriev, A. Semikhatov, I. Tipunin // Commun. Math. Phys. — 2005. — Т. 260. — С. 147—181. — DOI: 10.1007/s00220-005-1408-4. — arXiv: hep-th/0406192.

98. *Bychkov A. S.*, *Ushakov K. A.*, *Vasiliev M. A.* The σ_- Cohomology Analysis for Symmetric Higher-Spin Fields // Symmetry. — 2021. — Т. 13, № 8. — С. 1498. — DOI: 10.3390/sym13081498. — arXiv: 2107.01736 [hep-th].

99. *Tarusov A. A.*, *Ushakov K. A.* The σ_- cohomology analysis for Coxeter higher spin B_2 model // JHEP. — 2026. — Т. 06. — С. 044. — DOI: 10.1007/JHEP06(2026)044. — arXiv: 2602.10788 [hep-th].

100. *Tarusov A. A.*, *Ushakov K. A.*, *Vasiliev M. A.* Linearized Coxeter higher-spin theories // JHEP. — 2025. — Т. 08. — С. 052. — DOI: 10.1007/JHEP08(2025)052. — arXiv: 2503.05948 [hep-th].

101. *Vasiliev M. A.* On Conformal, SL(4,R) and Sp(8,R) Symmetries of 4d Massless Fields // Nucl. Phys. B. — 2008. — Т. 793. — С. 469—526. — DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2007.10.017. — arXiv: 0707.1085 [hep-th].

102. *Chevalley C.*, *Eilenberg S.* Cohomology Theory of Lie Groups and Lie Algebras // Trans. Am. Math. Soc. — 1948. — Т. 63. — С. 85—124. — DOI: 10.1090/S0002-9947-1948-0024908-8.

103. *Didenko V. E.*, *Skvortsov E. D.* Elements of Vasiliev Theory // Introductory Lectures on Higher-Spin Theories. Т. 1028 / под ред. S. Fredenhagen. — Springer, 2024. — С. 269—456. — (Lecture Notes in Physics). — DOI: 10.1007/978-3-031-59656-8_3. — arXiv: 1401.2975 [hep-th].

104. *Tatarenko Y. A.* Bilinear higher-spin currents in the unfolded formalism // Nucl. Phys. B. — 2025. — Т. 1021. — С. 117205. — DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2025.117205. — arXiv: 2509.02364 [hep-th].

105. *Asherova R. M.*, *Smirnov Y. F.*, *Tolstoi V. N.* Projection operators for simple lie groups // Teor. Mat. Fiz. — 1971. — Т. 8. — С. 255—271. — DOI: 10.1007/BF01038003.

106. *Asherova R. M.*, *Smirnov Y. F.*, *Tolstoi V. N.* Projection operators for the simple lie groups. ii general scheme of constructing lowering operators. the case of the groups su(n) // Teor. Mat. Fiz. — 1973. — Т. 15. — С. 107—119. — DOI: 10.1007/BF01028268.

107. *Asherova R. M.*, *Smirnov Y. F.*, *Tolstoi V. N.* Description of a class of projection operators for semisimple complex Lie algebras // Matem. Zametki. — 1979. — Т. 26. — С. 499—504. — DOI: 10.1007/BF01140268.

108. *Zhelobenko D. P.* Representations of Reductive Lie Algebras. — Moscow : Nauka, 1994. — С. 352. — ISBN 5-02-014249-2.

109. *Vasiliev M. A.* Actions, charges and off-shell fields in the unfolded dynamics approach // Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. — 2006. — Т. 3. — С. 37—80. — DOI: 10.1142/S0219887806001016. — arXiv: hep-th/0504090.

110. *Misuna N.* On unfolded off-shell formulation for higher-spin theory // Phys. Lett. B. — 2019. — Т. 798. — С. 134956. — DOI: 10.1016/j.physletb.2019.134956. — arXiv: 1905.06925 [hep-th].

111. *Misuna N. G.* Off-shell higher-spin fields in AdS_4 and external currents // JHEP. — 2021. — Т. 12. — С. 172. — DOI: 10.1007/JHEP12(2021)172. — arXiv: 2012.06570 [hep-th].

112. *Hamermesh M.* Group Theory and Its Application to Physical Problems. — Reading, MA : Addison-Wesley, 1962. — (Addison-Wesley Series in Physics). — ISBN 978-0-201-02780-8.

113. *Metsaev R. R.* Massless mixed symmetry bosonic free fields in d-dimensional anti-de Sitter space-time // Phys. Lett. B. — 1995. — Т. 354. — С. 78—84. — DOI: 10.1016/0370-2693(95)00563-Z.

114. *Metsaev R. R.* Arbitrary spin massless bosonic fields in d-dimensional anti-de Sitter space // Lect. Notes Phys. / под ред. J. Wess. — 1999. — Т. 524. — С. 331—340. — DOI: 10.1007/BFb0104614. — arXiv: hep-th/9810231.

115. *Brink L.*, *Metsaev R. R.*, *Vasiliev M. A.* How massless are massless fields in AdS(d) // Nucl. Phys. B. — 2000. — Т. 586. — С. 183—205. — DOI: 10.1016/S0550-3213(00)00402-8. — arXiv: hep-th/0005136.

116. *Fronsdal C.* Singletons and Massless, Integral Spin Fields on de Sitter Space (Elementary Particles in a Curved Space. 7. // Phys. Rev. D. — 1979. — Т. 20. — С. 848—856. — DOI: 10.1103/PhysRevD.20.848.

117. *Bourbaki N.* Lie Groups and Lie Algebras: Chapters 4-6. — Springer Berlin Heidelberg, 2008. — (Elements de mathematique [series] ; ч. 4—6). — ISBN 9783540691716.

118. *Brink L.*, *Hansson T. H.*, *Vasiliev M. A.* Explicit solution to the N body Calogero problem // Phys. Lett. B. — 1992. — Т. 286. — С. 109—111. — DOI: 10.1016/0370-2693(92)90166-2. — arXiv: hep-th/9206049.

119. *Polychronakos A. P.* Exchange operator formalism for integrable systems of particles // Phys. Rev. Lett. — 1992. — Т. 69. — С. 703—705. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.69.703. — arXiv: hep-th/9202057.

120. *Flato M.*, *Fronsdal C.* One Massless Particle Equals Two Dirac Singletons: Elementary Particles in a Curved Space. 6. // Lett. Math. Phys. — 1978. — Т. 2. — С. 421—426. — DOI: 10.1007/BF00400170.

121. *Flato M.*, *Fronsdal C.* On DIS and Racs // Phys. Lett. B. — 1980. — Т. 97. — С. 236—240. — DOI: 10.1016/0370-2693(80)90591-2.

122. *Bolotin K. I., Vasiliev M. A.* Star product and massless free field dynamics in AdS(4) // Phys. Lett. B. — 2000. — Т. 479. — С. 421—428. — DOI: `10.1016/S0370-2693(00)00307-5`. — arXiv: `hep-th/0001031`.

123. *Didenko V. E., Vasiliev M. A.* Free field dynamics in the generalized AdS (super)space // J. Math. Phys. — 2004. — Т. 45. — С. 197—215. — DOI: `10.1063/1.1633022`. — arXiv: `hep-th/0301054`.

124. *Gunaydin M., Marcus N.* The Spectrum of the S^5 Compactification of the Chiral N=2, D=10 Supergravity and the Unitary Supermultiplets of U(2, 2/4) // Class. Quant. Grav. — 1985. — Т. 2. — С. L11—L17. — DOI: `10.1088/0264-9381/2/2/001`.

125. *Gunaydin M., Marcus N.* The Unitary Supermultiplet of $N = 8$ Conformal Superalgebra Involving Fields of Spin ≤ 2 // Class. Quant. Grav. — 1985. — Т. 2. — С. L19. — DOI: `10.1088/0264-9381/2/2/002`.

126. *Iazeolla C., Sundell P.* A Fiber Approach to Harmonic Analysis of Unfolded Higher-Spin Field Equations // JHEP. — 2008. — Т. 10. — С. 022. — DOI: `10.1088/1126-6708/2008/10/022`. — arXiv: `0806.1942 [hep-th]`.

127. *Basile T., Bekaert X., Joung E.* Twisted Flato-Fronsdal Theorem for Higher-Spin Algebras // JHEP. — 2018. — Т. 07. — С. 009. — DOI: `10.1007/JHEP07(2018)009`. — arXiv: `1802.03232 [hep-th]`.

128. *Vasiliev M. A.* Equations of motion for d = 3 massless fields interacting through Chern-Simons higher spin gauge fields // Mod. Phys. Lett. A. — 1992. — Т. 7. — С. 3689—3702. — DOI: `10.1142/S0217732392003116`.

129. Disentanglement of topological and dynamical fields in 3d higher-spin theory within shifted homotopy approach / A. V. Korybut, A. A. Sevostyanova, M. A. Vasiliev, V. A. Vereitin // Phys. Lett. B. — 2023. — Т. 838. — С. 137718. — DOI: `10.1016/j.physletb.2023.137718`. — arXiv: `2211.15778 [hep-th]`.

130. *Vasiliev M. A., Vereitin V. A.* Differential Contracting Homotopy in the Linearized 3d Higher-Spin Theory. — 2025. — Авг. — arXiv: `2508.11500 [hep-th]`.

131. Homotopy Properties and Lower-Order Vertices in Higher-Spin Equations / V. E. Didenko, O. A. Gelfond, A. V. Korybut, M. A. Vasiliev // J. Phys. A. — 2018. — Т. 51, № 46. — С. 465202. — DOI: 10.1088/1751-8121/aae5e1. — arXiv: 1807.00001 [hep-th].

132. *Vasiliev M. A.* Differential contracting homotopy in higher-spin theory // JHEP. — 2023. — Т. 11. — С. 048. — DOI: 10.1007/JHEP11(2023)048. — arXiv: 2307.09331 [hep-th].

133. *Skvortsov E. D.*, *Vasiliev M. A.* Geometric formulation for partially massless fields // Nucl. Phys. B. — 2006. — Т. 756. — С. 117—147. — DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2006.06.019. — arXiv: hep-th/0601095.

134. *Deser S.*, *Waldron A.* Gauge invariances and phases of massive higher spins in (A)dS // Phys. Rev. Lett. — 2001. — Т. 87. — С. 031601. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.87.031601. — arXiv: hep-th/0102166.

135. *Deser S.*, *Waldron A.* Partial masslessness of higher spins in (A)dS // Nucl. Phys. B. — 2001. — Т. 607. — С. 577—604. — DOI: 10.1016/S0550-3213(01)00212-7. — arXiv: hep-th/0103198.

136. *Zinoviev Y. M.* On Massive High Spin Particles in (A)dS. — 08.2001. — arXiv: hep-th/0108192 [hep-th].

137. *Grigoriev M.*, *Mkrtchyan K.*, *Skvortsov E.* Matter-free higher spin gravities in 3D: Partially-massless fields and general structure // Phys. Rev. D. — 2020. — Т. 102, № 6. — С. 066003. — DOI: 10.1103/PhysRevD.102.066003. — arXiv: 2005.05931 [hep-th].

138. *Basile T.*, *Dhasmana S.*, *Skvortsov E.* Chiral approach to partially-massless fields // JHEP. — 2023. — Т. 05. — С. 136. — DOI: 10.1007/JHEP05(2023)136. — arXiv: 2212.06226 [hep-th].

139. *Basile T.*, *Dhasmana S.* Partially-massless higher spin algebras in four dimensions // JHEP. — 2024. — Т. 12. — С. 152. — DOI: 10.1007/JHEP12(2024)152. — arXiv: 2407.11884 [hep-th].

140. *Zinoviev Y. M.* Partially massless spin 2 and supersymmetry // JHEP. — 2025. — Т. 04. — С. 019. — DOI: 10.1007/JHEP04(2025)019. — arXiv: 2412.04982 [hep-th].

141. *Zinoviev Y. M.* Partially massless spin 5/2 and supersymmetry // JHEP. — 2025. — Т. 06. — С. 046. — DOI: 10.1007/JHEP06(2025)046. — arXiv: 2503.16004 [hep-th].

142. *Zinoviev Y. M.* On massive higher spins and gravity. Part I. Spin 5/2 // JHEP. — 2025. — Т. 10. — С. 132. — DOI: 10.1007/JHEP10(2025)132. — arXiv: 2507.05744 [hep-th].

143. *Zinoviev Y. M.* On massive higher spins and gravity. Part II. Spin 3 // JHEP. — 2025. — Т. 10. — С. 231. — DOI: 10.1007/JHEP10(2025)231. — arXiv: 2508.06166 [hep-th].

144. *Zinoviev Y. M.* On massive higher spins and gravity. Part III. Spin 7/2 // JHEP. — 2026. — Т. 01. — С. 085. — DOI: 10.1007/JHEP01(2026)085. — arXiv: 2509.18884 [hep-th].

145. *Zinoviev Y. M.* On massive higher spins and gravity. IV. Arbitrary spin. — 2026. — Февр. — arXiv: 2602.13661 [hep-th].

146. *Buchbinder I. L.*, *Fedoruk S. A.*, *Krykhtin V. A.* On BRST Lagrangian description of partially massless bosonic fields // Eur. Phys. J. C. — 2026. — Т. 86, № 5. — С. 544. — DOI: 10.1140/epjc/s10052-026-15722-z. — arXiv: 2602.23091 [hep-th].

147. *Tatarenko Y. A.*, *Vasiliev M. A.* Bilinear Fronsdal currents in the AdS_4 higher-spin theory // JHEP. — 2024. — Т. 07. — С. 246. — DOI: 10.1007/JHEP07(2024)246. — arXiv: 2405.02452 [hep-th].

148. Introduction to representation theory / P. Etingof [и др.]. — 2011. — arXiv: 0901.0827 [math.RT].

149. *Humphreys J. E.* Representations of Semisimple Lie Algebras in the BGG Category $\mathcal{O}$. Т. 94. — American Mathematical Society, 2008. — (Graduate Studies in Mathematics). — ISBN 978-0-8218-4678-0.

150. *Benson D. J.* Representations and Cohomology. Volume 1: Basic Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras. Т. 30. — Cambridge : Cambridge University Press, 1991. — (Cambridge Studies in Advanced Mathematics). — ISBN 978-0-521-36134-7.

151. *Cartan H.*, *Eilenberg S.* Homological Algebra. T. 19. — Princeton, NJ : Princeton University Press, 1956. — (Princeton Mathematical Series). — ISBN 978-1-4008-8384-4. — DOI: 10.1515/9781400883844.

Приложение A

Приложения к главе 1

A.1 Мультииндексные обозначения

Следуя [47], симметричный набор из n индексов $(a_1, \ldots, a_n)$ будет обозначаться как $a(n)$. Тогда тензор, несущий набор из n симметризованных индексов, обозначается следующим образом:

$$T^{a(n)} \equiv T^{(a_1 a_2 \ldots a_n)} \,. \tag{A.1}$$

Если тензор имеет несколько групп симметризованных индексов $a_1(n_1)$, $a_2(n_2)$, $\ldots$, которые не связаны между собой какими-либо симметрийными соотношениями, то он имеет вид

$$T^{a_1(n_1)|a_2(n_2)|\ldots} \equiv T^{(a_{11}a_{12}\ldots a_{1n_1})|(a_{21}a_{22}\ldots a_{2n_2})|\ldots} \,, \tag{A.2}$$

где вертикальная линия | разделяет группы индексов, не связанные между собой симметрийными соотношениями. С точки зрения диаграмм Юнга эта ситуация соответствует тензорному произведению некоторого числа однострочных диаграмм:

$$T^{a_1(n_1)|a_2(n_2)|\ldots} \simeq \boxed{\quad a_1(n_1) \quad} \otimes \boxed{\quad a_2(n_2) \quad} \otimes \ \ldots \,. \tag{A.3}$$

Тензору, соответствующему некоторой диаграмме Юнга в симметричном базисе, сопоставляется выражение вида

$$T^{a(n),b(m),\ldots} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \boxed{\qquad\quad n \qquad\quad} \\ \boxed{\quad\ m \quad\ } \\ \ldots \end{array} \,. \tag{A.4}$$

Симметризация по n индексам выполняется по формуле:

$$\mathrm{Sym}(\bullet) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \sigma(\bullet) \,. \tag{A.5}$$

Все симметризованные тензорные индексы будем обозначать одной буквой. Например,

$$T^{a(n)|a} \equiv \frac{1}{(n+1)!} \sum_{\sigma \in S_{n+1}} T^{\sigma(a_1 \ldots a_n|a_{n+1})} \,. \qquad \text{(A.6)}$$

При работе со спинорными индексами $(\alpha, \dot{\alpha}) = 1, 2$ используются следующие правила подъема и опускания:

$$A_\alpha = A^\beta \epsilon_{\beta\alpha}, \qquad A^\alpha = \epsilon^{\alpha\beta} A_\beta, \qquad \epsilon_{\alpha\beta}\epsilon^{\gamma\beta} = \epsilon_\alpha{}^\gamma = \delta_\alpha{}^\gamma = -\epsilon^\gamma{}_\alpha \,, \qquad \text{(A.7)}$$

где $\epsilon_{\alpha\beta}$ – антисимметричный тензор, нормированный условием:

$$\epsilon_{\alpha\beta} = -\epsilon_{\beta\alpha}, \qquad \epsilon_{12} = 1 \,.$$

Для индексов $\dot{\alpha}$ правила аналогичны.

A.2 Коэффициенты в тензоре $\mathbb{Y}(n-1, m-1, 1^{p-2})$

$$\alpha_1 = \frac{(-3+n)(-2+n)(-1+n)(-3+d+2n)}{(-5+d+m+n)(-4+d+m+n)(-4+d+2n)(d^2+d(-8+m+3n)-2(-8+m+m^2+7n-3mn))}, \qquad \text{(A.8)}$$

$$\alpha_2 = \frac{(-2+n)(-1+n)}{(-4+d+m+n)(-4+d+2n)}, \qquad \text{(A.9)}$$

$$\alpha_3 = -\frac{2(-2+n)(-1+n)(-3+d+2n)}{(-4+d+m+n)(-4+d+2n)(d^2+d(-8+m+3n)-2(-8+m+m^2+7n-3mn))}, \qquad \text{(A.10)}$$

$$\alpha_4 = \frac{2(1+m-n)(-2+n)(-1+n)(-3+d+2n)}{(-5+d+m+n)(-4+d+m+n)(-4+d+2n)(d^2+d(-8+m+3n)-2(-8+m+m^2+7n-3mn))}, \qquad \text{(A.11)}$$

$$\alpha_5 = \frac{(-1+n)(-3+d+m+n)}{(-4+d+m+n)(-4+d+2n)}, \qquad \text{(A.12)}$$

$$\alpha_6 = -\frac{(-2+d+2m)(-1+n)}{(-4+d+2n)(d^2+d(-8+m+3n)-2(-8+m+m^2+7n-3mn))}, \tag{A.13}$$

$$\alpha_7 = \frac{(-1+n)(-3+d+2n)(16+d^2-7m-9n+2d(-4+m+n)+(m+n)^2)}{(-5+d+m+n)(-4+d+m+n)(-4+d+2n)(d^2+d(-8+m+3n)-2(-8+m+m^2+7n-3mn))}, \tag{A.14}$$

$$\alpha_8 = -\frac{(-1+n)}{(-4+d+m+n)}, \tag{A.15}$$

$$\alpha_9 = \frac{2(-1+n)(-3+d+2n)}{(-4+d+m+n)(d^2+d(-8+m+3n)-2(-8+m+m^2+7n-3mn))}, \tag{A.16}$$

$$\alpha_{10} = -\frac{(-3+d+2n)}{d^2+d(-8+m+3n)-2(-8+m+m^2+7n-3mn)}, \tag{A.17}$$

$$\alpha_{11} = -\frac{(-4+d+2m)(-1+n)(-3+d+2n)}{(-5+d+m+n)(-4+d+m+n)(d^2+d(-8+m+3n)-2(-8+m+m^2+7n-3mn))}, \tag{A.18}$$

$$\alpha_{12} = \frac{(14+d^2-6n+2m(-5+m+n)+d(-8+3m+n))}{(-4+d+m+n)(d^2+d(-8+m+3n)-2(-8+m+m^2+7n-3mn))}\,. \tag{A.19}$$

Приложение Б

Приложения к главе 3

Б.1 σ_--точные представления для элементов $\ker\sigma_-|_{\deg\Lambda=2}$

В данном разделе приводится σ_--точное представление для форм ($\mathbb{B}$), ($\mathbb{C}$), ($\mathbb{E}$), ($\mathbb{I}$), ($\mathbb{J}$) из (3.59). В полученных выражениях полиномы $R^{\vec{\lambda}}(u,\bar{u})$ и $\hat{R}^{\vec{\lambda}}(u,\bar{u})$ отличаются домножением на константу.

$$(\mathbb{B})\quad H(u,u)R^{\vec{\lambda}}_{n-2,m}(u,\bar{u})t^{\frac{\lambda v}{2}}=\sigma_-\left(e(u,\bar{u})\hat{R}^{\vec{\lambda}}_{n-2,m}(u,\bar{u})t^{\frac{\lambda v}{2}}\right), \tag{Б.1}$$

$$(\mathbb{C})\quad H(u,\partial)R^{\vec{\lambda}}_{\frac{\lambda_h}{2},\frac{\lambda_h}{2}}(u,\bar{u})t^{\frac{\lambda}{2}}=\sigma_-\Big(\lambda_h e(u,\bar{\partial})\hat{R}^{\vec{\lambda}}_{\frac{\lambda_h}{2},\frac{\lambda_h}{2}}(u,\bar{u})t^{\frac{\lambda}{2}}+$$
$$+(\lambda_h+4)e(\partial,\bar{u})\hat{R}^{\vec{\lambda}}_{\frac{\lambda_h}{2},\frac{\lambda_h}{2}}(u,\bar{u})t^{\frac{\lambda}{2}}\Big), \tag{Б.2}$$

$$(\mathbb{E})\quad H(u,\partial)R^{\vec{\lambda}}_{Cn,m}(u,\bar{u})t^{\frac{\lambda v}{2}}+\bar{H}(\bar{u},\bar{\partial})R^{\vec{\lambda}}_{\bar{C}n,m}(u,\bar{u})t^{\frac{\lambda v}{2}}-\frac{1}{4(\lambda_n+2)}\frac{m(\lambda_v+2n+4)}{n+1}\times$$
$$\times\left[nH(u,u)R^{\vec{\lambda}}_{Cn,m}(u,\bar{u})+(m+2)H(u,u)R^{\vec{\lambda}}_{\bar{C}n,m}(u,\bar{u})\right]\chi t^{\frac{\lambda v}{2}-1}=$$
$$=\sigma_-\left(e(\partial,\bar{u})\hat{R}^{\vec{\lambda}}_{Cn,m}(u,\bar{u})t^{\frac{\lambda v}{2}}-\frac{(m+1)(\lambda_v+2n+2)}{2n(\lambda_h+2)}e(u,\bar{u})\hat{R}^{\vec{\lambda}}_{Cn,m}(u,\bar{u})\chi t^{\frac{\lambda v}{2}-1}\right)+ \tag{Б.3}$$
$$+\sigma_-\left(e(\partial,\bar{u})\hat{R}^{\vec{\lambda}}_{\bar{C}n,m}(u,\bar{u})t^{\frac{\lambda v}{2}}+\frac{(m+1)(\lambda_v+2n+2)(n+2)}{2n^2(\lambda_h+2)}e(u,\bar{u})\hat{R}^{\vec{\lambda}}_{\bar{C}n,m}(u,\bar{u})\chi t^{\frac{\lambda v}{2}-1}\right), \tag{Б.4}$$

$$
\begin{aligned}
&(\mathbb{I})\quad H(u,\partial)R^{\vec{\lambda}}_{Cn+r,m+r}(u,\bar{u})\chi^{r}t^{l}+\bar{H}(\bar{u},\bar{\partial})R^{\vec{\lambda}}_{\bar{C}n+r,m+r}(u,\bar{u})\chi^{r}t^{l}-\\
&-\frac{m(n+r+l+2)}{2(r+1)(\lambda_h+r+2)(n+r+1)}\Big[(n+r)H(u,u)R^{\vec{\lambda}}_{Cn+r,m+r}(u,\bar{u})+\\
&+(m+r+2)H(u,u)R^{\vec{\lambda}}_{\bar{C}n+r,m+r}(u,\bar{u})\Big]\chi^{r+1}t^{l-1}+\\
&+\frac{r(\lambda_h+r+1)}{(m+1)(\lambda_v+2n+2)(n+r+1)}\Big[(m+r+2)H(\partial,\partial)R^{\vec{\lambda}}_{\bar{C}n+r,m+r}(u,\bar{u})-\\
&-(n+r+2)H(\partial,\partial)R^{\vec{\lambda}}_{Cn+r,m+r}\Big]\chi^{r-1}t^{l+1}=\frac{2(n+r)(n+r+2)}{(m+1)(\lambda_v+2n+2)(n+r+1)}\\
&\sigma_-\left(e(\partial,\bar{u})\hat{R}^{\vec{\lambda}}_{Cn+r,m+r}(u,\bar{u})\chi^{r}t^{l}-\frac{(m+1)(\lambda_v+2n+2)}{2(r+1)(\lambda_h+r+2)}e(u,\bar{u})\hat{R}^{\vec{\lambda}}_{Cn+r,m+r}(u,\bar{u})\chi^{r+1}t^{l-1}\right)-\\
&-\frac{2(m+r+2)(n+r)}{(m+1)(\lambda_v+2n+2)(n+r+1)}\sigma_-\Bigg(e(\partial,\bar{u})\hat{R}^{\vec{\lambda}}_{\bar{C}n+r,m+r}(u,\bar{u})\chi^{r}t^{l}+\\
&+\frac{(m+1)(\lambda_v+2n+2)(n+r+2)}{2(r+1)(n+r)(\lambda_h+r+2)}e(u,\bar{u})\hat{R}^{\vec{\lambda}}_{\bar{C}n+r,m+r}(u,\bar{u})\chi^{r+1}t^{l-1}\Bigg),
\end{aligned}
\tag{Б.5}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\mathbb{J})\quad\left(H(u,\partial)\chi^{\frac{\lambda_v}{2}}-\frac{\lambda_v+2n}{\lambda_v+2m+4}\bar{H}(\bar{u},\bar{\partial})\chi^{\frac{\lambda_v}{2}}-\frac{\lambda_v(\lambda_v+2\lambda_h+2)}{2(m+1)(\lambda_v+2n+2)}H(\partial,\partial)\chi^{\frac{\lambda_v}{2}-1}t\right)\times\\
&\times R^{\vec{\lambda}}_{Cn+\frac{\lambda_v}{2},m+\frac{\lambda_v}{2}}(u,\bar{u})=\frac{2(\lambda_v+2n)}{(m+1)(\lambda_v+2n+2)}\sigma_-\left(e(\partial,\bar{u})\hat{R}^{\vec{\lambda}}_{Cn+\frac{\lambda_v}{2},m+\frac{\lambda_v}{2}}(u,\bar{u})\chi^{\frac{\lambda_v}{2}}\right).
\end{aligned}
\tag{Б.6}
$$

Б.2 Нерасщепляемые расширения модулей

В этом приложении приводится краткое изложение доказательства соотношения (3.100).

Пусть заданы алгебра A (например, ассоциативная или алгебра Ли) и пара представлений (V,W). Поставим задачу классификации таких представлений U, для которых существует короткая точная последовательность

$$0\to V\xrightarrow{i}U\xrightarrow{p}W\to 0\,, \tag{Б.7}$$

где i – отображение вложения и p – отображение проекции. Это означает, что V является подмодулем в U, а фактор-модуль U/V изоморфен W.

Как последовательность векторных пространств данная последовательность всегда расщепляется (раскладывается в прямую сумму). Поэтому после выбора линейного разложения $U \simeq V \oplus W$ действие элемента $a \in A$ можно записать в блочно-треугольном виде

$$\rho_U(a) = \begin{pmatrix} \rho_V(a) & \phi(a) \\ 0 & \rho_W(a) \end{pmatrix} , \tag{Б.8}$$

где ρ_X – отображение представления. Недиагональный блок $\phi(a)$ описывает возможное смешивание двух представлений. Условие на отображение $\phi(a)$, следующее из согласованности действия алгебры, можно записать в виде условия замкнутости относительно некоторого нильпотентного линейного отображения δ. При изменении выбранного линейного разложения $U \simeq V \oplus W$ отображение $\phi(a)$ меняется на δ-точное выражение. Поэтому классы эквивалентности расширений определяются когомологиями $H(\delta)$.

Нулевой класс когомологий отвечает расщепляемому расширению. В этом случае существует гомоморфизм модулей

$$s : W \to U , \quad p \circ s = \mathrm{id}_W , \tag{Б.9}$$

и представление U изоморфно прямой сумме $V \oplus W$ как представление алгебры A. Нетривиальные классы δ-когомологий отвечают нерасщепляемым расширениям, для которых такого гомоморфизма s не существует.

Соответствующие когомологии $H(\delta)$ также обозначаются через $\mathrm{Ext}^1_A(W,V)$ (в [148; 149] Ext вводится для расширений модулей; в [150; 151] представлен подход с точки зрения категорий и гомологической алгебры).

В случае алгебр Ли $\mathfrak{g}$ группа $\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{g}}(W,V)$ связана с когомологиями алгебр Ли, а именно

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{g}}(W,V) \simeq H^1\left(\mathfrak{g}\,, \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(W,V)\right) , \tag{Б.10}$$

где $\Bbbk$ – некоторое поле (например, $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$). Для дальнейших вычислений будем считать, что поле $\Bbbk$ имеет характеристику нуль.

Рассмотрим $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2)$. Нас будут интересовать весовые представления, то есть представления, в которых оператор h диагонализуем. Кроме того, будем предполагать, что понижающий оператор f действует локально-нильпотентно: для любого вектора некоторая достаточно высокая степень оператора f аннулирует этот вектор. Именно представления такого типа возникают в главе 3. В дальнейшем группы Ext^1 вычисляются внутри данного класса представлений.

Рассмотрим короткую точную последовательность модулей Верма младшего веса

$$0 \to V(\lambda) \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} V(\mu) \to 0\,, \tag{Б.11}$$

где i – отображение вложения, p – отображение проекции, а $V(\lambda)$ и $V(\mu)$ – модули Верма младших весов λ и μ. В дальнейшем будем отождествлять модуль $V(\lambda)$ с его образом $i(V(\lambda)) \subset E$.

Модуль $V(\lambda)$ порождается вектором младшего веса w_λ:

$$hw_\lambda = \lambda w_\lambda\,, \quad fw_\lambda = 0\,. \tag{Б.12}$$

Базис модуля $V(\lambda)$ состоит из векторов $\{w_\lambda, ew_\lambda, e^2w_\lambda, \ldots\}$, на которых алгебра $\mathfrak{g}$ действует по формулам

$$\begin{aligned} he^n w_\lambda &= (\lambda + 2n)e^n w_\lambda\,, \\ fe^n w_\lambda &= -n(\lambda + n - 1)e^{n-1} w_\lambda\,. \end{aligned} \tag{Б.13}$$

Пусть $v_\mu \in V(\mu)$ – вектор младшего веса. Поскольку E является весовым модулем, а отображение p сохраняет веса, можно выбрать прообраз $w \in E$ вектора v_μ таким образом, чтобы

$$p(w) = v_\mu\,, \quad hw = \mu w\,. \tag{Б.14}$$

Для вектора w верно, что

$$p(fw) = fp(w) = fv_\mu = 0 \Rightarrow fw \in \ker(p) = V(\lambda)\,. \tag{Б.15}$$

Определим $x = fw \in V(\lambda)_{\mu-2}$, лежащий в подпространстве модуля $V(\lambda)$, порожденном векторами веса $\mu - 2$ (f понижает вес на 2).

Выбор прообраза w неоднозначен. Его можно заменить на

$$w' = w + u\,, \quad u \in V(\lambda)_\mu\,. \tag{Б.16}$$

При такой замене вектор x преобразуется по правилу

$$x' = fw' = x + fu\,. \tag{Б.17}$$

Таким образом, конкретный вид вектора x зависит от выбора прообраза w, но его класс по модулю образа оператора f от этого выбора не зависит.

Лемма Б.2.1. *E расщепляемое $\leftrightarrow x \in \mathrm{Im}\,(f : V(\lambda)_\mu \to V(\lambda)_{\mu-2})$.*

Доказательство. 1) Предположим, что расширение расщепляемое. Тогда существует гомоморфизм

$$s: V(\mu) \to E\,, \quad p \circ s = \mathrm{id}_{V(\mu)}\;. \tag{Б.18}$$

Вектор $s(v_\mu)$ – вектор младшего веса μ в E, так как

$$fs(v_\mu) = s(fv_\mu) = 0, \quad hs(v_\mu) = s(hv_\mu) = \mu s(v_\mu)\,. \tag{Б.19}$$

Векторы w и $s(v_\mu)$ проектируются на один и тот же вектор v_μ, т. е. $w - s(v_\mu) \in \ker(p) = V(\lambda)$. Пусть $u = w - s(v_\mu) \in V(\lambda)_\mu$, тогда

$$x = fw = f(s(v_\mu) + u) = fs(v_\mu) + fu = 0 + fu = fu\,. \tag{Б.20}$$

Следовательно,

$$x \in \mathrm{Im}\,(f : V(\lambda)_\mu \to V(\lambda)_{\mu-2})\;. \tag{Б.21}$$

2) Пусть $x \in \mathrm{Im}\,(f : V(\lambda)_\mu \to V(\lambda)_{\mu-2})$. Тогда существует вектор $u \in V(\lambda)_\mu$: $x = fu$. Определим $w' = w - u$. Для него верно, что

$$p\,(w') = p(w) - p(u) = v_\mu - 0 = v_\mu\,, \tag{Б.22}$$

$$hw' = h(w - u) = \mu w - \mu u = \mu w'\,, \tag{Б.23}$$

$$fw' = f(w - u) = x - x = 0\,. \tag{Б.24}$$

Следовательно, w' – это младший вектор веса μ в модуле E. Определим отображение $s : V(\mu) \to E$ на базисных векторах формулой

$$s(e^n v_\mu) = e^n w'\,. \tag{Б.25}$$

Это отображение является гомоморфизмом представлений и удовлетворяет условию $p \circ s = \mathrm{id}_{V(\mu)}$. Таким образом, расширение расщепляется.

□

Из доказанной леммы следует, что класс расширения определяется классом вектора x в факторпространстве

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{sl}(2)}\big(V(\mu), V(\lambda)\big) \simeq \frac{V(\lambda)_{\mu-2}}{fV(\lambda)_\mu}\,. \tag{Б.26}$$

Обратно, любой класс данного факторпространства задает расширение. Действительно, выберем вектор $x \in V(\lambda)_{\mu-2}$ и добавим к модулю $V(\lambda)$ формальные векторы

$$w, \quad ew, \quad e^2w, \quad \dots\,. \tag{Б.27}$$

Действие генераторов на этих векторах зададим формулами

$$h\left(e^{n} w\right)=(\mu+2 n) e^{n} w\,, \tag{Б.28}$$

$$e\left(e^{n} w\right)=e^{n+1} w\,, \tag{Б.29}$$

$$f\left(e^{n} w\right)=e^{n} x-n(\mu+n-1) e^{n-1} w\,. \tag{Б.30}$$

Непосредственная проверка показывает, что эти формулы согласованы с коммутационными соотношениями алгебры $\mathfrak{sl}(2)$.

Вычислим полученное факторпространство. Вес $\mu-2$ присутствует в модуле $V(\lambda)$ тогда и только тогда, когда $\mu=\lambda+2k$ для $k \in \mathbb{N}$. Рассмотрим $V(\lambda)_{\mu}=\operatorname{span}\left\{e^{k} w_{\lambda}\right\}$ и $V(\lambda)_{\mu-2}=\operatorname{span}\left\{e^{k-1} w_{\lambda}\right\}$. Тогда

$$f\left(e^{k} w_{\lambda}\right)=-k(\lambda+k-1) e^{k-1} w_{\lambda}\,. \tag{Б.31}$$

Оба весовых подпространства одномерны. Поэтому соответствующее расширение может быть нерасщепляемым только в том случае, когда оператор f аннулирует вектор $e^{k} w_{\lambda}$:

$$k(\lambda+k-1)=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda=1-k \in \mathbb{Z}_{\leq 0}\,. \tag{Б.32}$$

Следовательно,

$$\mu=\lambda+2 k=(1-k)+2 k=1+k \quad \Rightarrow \quad \mu=2-\lambda\,, \quad \lambda \in \mathbb{Z}_{\leq 0}\,. \tag{Б.33}$$

В результате

$$\operatorname{Ext}_{\mathfrak{sl}(2)}^{1}(V(\mu), V(\lambda)) \not\simeq 0 \leftrightarrow \mu=2-\lambda\,,\, \lambda \in \mathbb{Z}_{\leq 0}\,. \tag{Б.34}$$

Рассмотрим теперь алгебру $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{sl}(2)$ и короткую точную последовательность

$$0 \rightarrow V\left(\lambda_{1}, \lambda_{2}\right) \rightarrow E \rightarrow V\left(\mu_{1}, \mu_{2}\right) \rightarrow 0\,. \tag{Б.35}$$

Модуль Верма для прямой суммы алгебр является тензорным произведением:

$$V\left(\lambda_{1}, \lambda_{2}\right) \simeq V\left(\lambda_{1}\right) \otimes V\left(\lambda_{2}\right). \tag{Б.36}$$

Из формулы Кюннета [150; 151] следует

$$\begin{gathered}\operatorname{Ext}_{\mathfrak{g}}^{1}\left(V\left(\mu_{1}, \mu_{2}\right), V\left(\lambda_{1}, \lambda_{2}\right)\right) \simeq\Big(\operatorname{Ext}_{\mathfrak{sl}(2)}^{1}\left(V\left(\mu_{1}\right), V\left(\lambda_{1}\right)\right) \otimes \operatorname{Hom}_{\mathfrak{sl}(2)}\left(V\left(\mu_{2}\right), V\left(\lambda_{2}\right)\right)\Big) \oplus \\ \oplus\Big(\operatorname{Hom}_{\mathfrak{sl}(2)}\left(V\left(\mu_{1}\right), V\left(\lambda_{1}\right)\right) \otimes \operatorname{Ext}_{\mathfrak{sl}(2)}^{1}\left(V\left(\mu_{2}\right), V\left(\lambda_{2}\right)\right)\Big)\,.\end{gathered} \tag{Б.37}$$

Группа $\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{sl}(2)}(V(\mu), V(\lambda))$ была вычислена в (Б.34). Для использования формулы Кюннета требуется также вычислить пространство гомоморфизмов

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{sl}(2)}(V(\mu), V(\lambda))\,. \tag{Б.38}$$

Образ вектора младшего веса модуля $V(\mu)$ должен быть вектором младшего веса в модуле $V(\lambda)$. В модуле $V(\lambda)$ всегда имеется исходный вектор младшего веса w_λ. Кроме того, при $\lambda \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ существует дополнительный вектор младшего веса $e^{1-\lambda}w_\lambda$ с весом $2-\lambda$. Поэтому

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{sl}(2)}(V(\mu), V(\lambda)) \not\simeq 0 \leftrightarrow \mu = \lambda \quad \text{или} \quad (\mu = 2-\lambda\,,\ \lambda \in \mathbb{Z}_{\leq 0})\ . \tag{Б.39}$$

Если не накладывать дополнительных ограничений на веса, из формулы Кюннета следуют три возможных типа нерасщепляемых расширений:

$$(\mu_1, \mu_2) = (2-\lambda_1, \lambda_2)\,, \quad \lambda_1 \in \mathbb{Z}_{\leq 0}\,, \tag{Б.40}$$

$$(\mu_1, \mu_2) = (\lambda_1, 2-\lambda_2)\,, \quad \lambda_2 \in \mathbb{Z}_{\leq 0}\,, \tag{Б.41}$$

$$(\mu_1, \mu_2) = (2-\lambda_1, 2-\lambda_2)\,, \quad \lambda_{1,2} \in \mathbb{Z}_{\leq 0}\,. \tag{Б.42}$$

Из ограничения на веса (3.85) следует, что оба веса не могут одновременно быть неположительными, что исключает третий случай. В результате для расширений, реализуемых в кольце $\mathfrak{R} = \Lambda^\bullet(M) \otimes \mathbb{C}[y_1, y_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2]$, получаем

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{g}}\left(V\left(\mu_1, \mu_2\right), V\left(\lambda_1, \lambda_2\right)\right) \not\simeq 0 \leftrightarrow (\mu_1, \mu_2) = (2-\lambda_1, \lambda_2) \ \text{ или } \ (\mu_1, \mu_2) = (\lambda_1, 2-\lambda_2)\ , \tag{Б.43}$$

где в первом случае $(\lambda_1 \in \mathbb{Z}_{\leq 0}, \lambda_2 \in \mathbb{Z}_{>0})$, а во втором $(\lambda_1 \in \mathbb{Z}_{>0}, \lambda_2 \in \mathbb{Z}_{\leq 0})$.

Б.3 Действие оператора P на (LW, LW) векторах в модуле $\mathfrak{sl}(2)\oplus\mathfrak{sl}(2)$

$$
\begin{aligned}
&e^{\alpha\dot\alpha}P_{\alpha\dot\alpha}\Psi^{\vec\lambda\bar a,\bar b}_{a,b}(Y_1,Y_2)=\\
&=\sum_{\substack{k=0,\dots,b\\ l=0,\dots,\bar b}}\frac{b!\bar b!(a+b+1)(\bar a+\bar b+1)}{i^{k+l}k!l!(b-k)!(\bar b-l)!(a+b+l+1)!(\bar a+\bar b+k+1)!}\Psi^{\bar a,\bar b,0}_{a,b,0}\times\\
&\times\Big[\frac{k}{(a+b+1)\left(\bar a+\bar b+1\right)}\zeta^l\bar\zeta^{k-1}\left(\partial y_1\right)^{a+k}\left(\partial y_2\right)^{b-k+1}(\bar\partial\bar y_1)^{\bar a+l+1}(\bar\partial\bar y_2)^{\bar b-l}e\left(u,\bar u\right)+\\
&+\frac{l}{(a+b+1)\left(\bar a+\bar b+1\right)}\zeta^{l-1}\bar\zeta^{k}\left(\partial y_1\right)^{a+k+1}\left(\partial y_2\right)^{b-k}\left(\bar\partial\bar y_1\right)^{\bar a+l}\left(\bar\partial\bar y_2\right)^{\bar b-l+1}e(u,\bar u)-\\
&-\frac{i}{(a+b+1)(\bar a+\bar b+1)}\zeta^{l}\bar\zeta^{k}\left(\partial y_1\right)^{a+k+1}\left(\partial y_2\right)^{b-k}\left(\bar\partial\bar y_1\right)^{\bar a+l+1}\left(\bar\partial\bar y_2\right)^{\bar b-l}e(u,\bar u)+\\
&+\frac{i\,l\,k}{(a+b+1)(\bar a+\bar b+1)}\zeta^{l-1}\bar\zeta^{k-1}\left(\partial y_1\right)^{a+k}\left(\partial y_2\right)^{b-k+1}\left(\bar\partial\bar y_1\right)^{\bar a+l}\left(\bar\partial\bar y_2\right)^{\bar b-l+1}e(u,\bar u)-\\
&-\frac{(a+k)(\bar b-l)(\bar a+\bar b+k+1)}{(a+b+1)(\bar a+\bar b+1)}\zeta^{l+1}\bar\zeta^{k}\left(\partial y_1\right)^{a+k-1}\left(\partial y_2\right)^{b-k}\left(\bar\partial\bar y_1\right)^{\bar a+l}\left(\bar\partial\bar y_2\right)^{\bar b-l-1}e(\partial,\bar\partial)-\\
&-\frac{(b-k)(\bar a+l)(a+b+l+1)}{(a+b+1)(\bar a+\bar b+1)}\zeta^{l}\bar\zeta^{k+1}\left(\partial y_1\right)^{a+k}\left(\partial y_2\right)^{b-k-1}\left(\bar\partial\bar y_1\right)^{\bar a+l-1}\left(\bar\partial\bar y_2\right)^{\bar b-l}e(\partial,\bar\partial)-\\
&-\frac{i(b-k)(\bar b-l)}{(a+b+1)(\bar a+\bar b+1)}\zeta^{l+1}\bar\zeta^{k+1}\left(\partial y_1\right)^{a+k}\left(\partial y_2\right)^{b-k-1}(\bar\partial\bar y_1)^{\bar a+l}(\bar\partial\bar y_2)^{\bar b-l-1}e(\partial,\bar\partial)+\\
&+\frac{i(a+k)(\bar a+l)(a+b+l+1)(\bar a+\bar b+k+1)}{(a+b+1)(\bar a+\bar b+1)}\times\\
&\times\zeta^{l}\bar\zeta^{k}\left(\partial y_1\right)^{a+k-1}\left(\partial y_2\right)^{b-k}\left(\bar\partial\bar y_1\right)^{\bar a+l-1}\left(\bar\partial\bar y_2\right)^{\bar b-l}e(\partial,\bar\partial)+\\
&+\frac{(\bar b-l)(\bar a+\bar b+k+1)}{(a+b+1)(\bar a+\bar b+1)}\zeta^{l}\bar\zeta^{k}\left(\partial y_1\right)^{a+k}\left(\partial y_2\right)^{b-k+1}(\bar\partial\bar y_1)^{\bar a+l}\left(\bar\partial\bar y_2\right)^{\bar b-l-1}e(u,\bar\partial)-\\
&-\frac{l(\bar a+l)}{(a+b+1)(\bar a+\bar b+1)}\zeta^{l-1}\bar\zeta^{k+1}\left(\partial y_1\right)^{a+k+1}\left(\partial y_2\right)^{b-k}\left(\bar\partial\bar y_1\right)^{\bar a+l-1}\left(\bar\partial\bar y_2\right)^{\bar b-l}e(u,\bar\partial)-\\
&-\frac{i(\bar b-l)}{(a+b+1)(\bar a+\bar b+1)}\zeta^{l}\bar\zeta^{k+1}\left(\partial y_1\right)^{a+k+1}\left(\partial y_2\right)^{b-k}\left(\bar\partial\bar y_1\right)^{\bar a+l}\left(\bar\partial\bar y_2\right)^{\bar b-l-1}e(u,\bar\partial)-\\
&-\frac{il(\bar a+l)(\bar a+\bar b+k+1)}{(a+b+1)(\bar a+\bar b+1)}\zeta^{l-1}\bar\zeta^{k}\left(\partial y_1\right)^{a+k}\left(\partial y_2\right)^{b-k+1}\left(\bar\partial\bar y_1\right)^{\bar a+l-1}(\bar\partial\bar y_2)^{\bar b-l}e(u,\bar\partial)-\\
&-\frac{k(a+k)}{(a+b+1)(\bar a+\bar b+1)}\zeta^{l+1}\bar\zeta^{k-1}\left(\partial y_1\right)^{a+k-1}\left(\partial y_2\right)^{b-k}\left(\bar\partial\bar y_1\right)^{\bar a+l+1}\left(\bar\partial\bar y_2\right)^{\bar b-l}e(\partial,\bar u)+
\end{aligned}
$$

$$+\frac{(b-k)(a+b+l+1)}{(a+b+1)(\bar{a}+\bar{b}+1)}\zeta^{l}\bar{\zeta}^{k}\left(\partial y_{1}\right)^{a+k}\left(\partial y_{2}\right)^{b-k-1}\left(\bar{\partial}\bar{y}_{1}\right)^{\bar{a}+l}\left(\bar{\partial}\bar{y}_{2}\right)^{\bar{b}-l+1}e(\partial,\bar{u})-$$
$$-\frac{i(b-k)}{(a+b+1)(\bar{a}+\bar{b}+1)}\zeta^{l+1}\bar{\zeta}^{k}\left(\partial y_{1}\right)^{a+k}\left(\partial y_{2}\right)^{b-k-1}\left(\bar{\partial}\bar{y}_{1}\right)^{\bar{a}+l+1}\left(\bar{\partial}\bar{y}_{2}\right)^{\bar{b}-l}e(\partial,\bar{u})-$$
$$\left.-\frac{ik(a+k)(a+b+l+1)}{(a+b+1)(\bar{a}+\bar{b}+1)}\zeta^{l}\bar{\zeta}^{k-1}\left(\partial y_{1}\right)^{a+k-1}\left(\partial y_{2}\right)^{b-k}\left(\bar{\partial}\bar{y}_{1}\right)^{\bar{a}+l}\left(\bar{\partial}\bar{y}_{2}\right)^{\bar{b}-l+1}e(\partial,\bar{u})\right]\times$$
$$\times\,\psi_{a+b,\bar{a}+\bar{b}}(u,\bar{u})\,. \tag{Б.44}$$

Б.4 Уравнения на ноль-формы $(\mathrm{adj} \otimes \mathrm{tw})$ и $(\mathrm{tw} \otimes \mathrm{adj})$ в базисе полей ранга-1

- Модуль $(\mathrm{adj} \otimes \mathrm{tw})$:

$$
\begin{aligned}
& D_L C^{\bar a,\bar b,\bar c}_{a,b,c}(u,\bar u;\hat K|x) - (\bar c+1) e(u,\bar u) C^{\bar a,\bar b-1,\bar c+1}_{a-1,b,c}(u,\bar u;\hat K|x) - \\
& - (c+1) e(u,\bar u) C^{\bar a-1,\bar b,\bar c}_{a,b-1,c+1}(u,\bar u;\hat K|x) - \\
& - i e(u,\bar u) C^{\bar a,\bar b-1,\bar c}_{a,b-1,c}(u,\bar u;\hat K|x) + i(c+1)(\bar c+1) e(u,\bar u) C^{\bar a-1,\bar b,\bar c+1}_{a-1,b,c+1}(u,\bar u;\hat K|x) + \\
& + \frac{(b+1)(\bar a+1)(\bar a+\bar b+\bar c+2)}{(a+b+1)(a+b+2)(\bar a+\bar b+1)(\bar a+\bar b+2)} e(\partial,\bar\partial) C^{\bar a+1,\bar b,\bar c}_{a,b+1,c-1}(u,\bar u;\hat K|x) + \\
& + \frac{(a+1)(\bar b+1)(a+b+c+2)}{(a+b+1)(a+b+2)(\bar a+\bar b+1)(\bar a+\bar b+2)} e(\partial,\bar\partial) C^{\bar a,\bar b+1,\bar c-1}_{a+1,b,c}(u,\bar u;\hat K|x) - \\
& - \frac{i(a+1)(\bar a+1)}{(a+b+1)(a+b+2)(\bar a+\bar b+1)(\bar a+\bar b+2)} e(\partial,\bar\partial) C^{\bar a+1,\bar b,\bar c-1}_{a+1,b,c-1}(u,\bar u;\hat K|x) + \\
& + \frac{i(b+1)(\bar b+1)(a+b+c+2)(\bar a+\bar b+\bar c+2)}{(a+b+1)(a+b+2)(\bar a+\bar b+1)(\bar a+\bar b+2)} e(\partial,\bar\partial) C^{\bar a,\bar b+1,\bar c}_{a,b+1,c}(u,\bar u;\bar K|x) + \\
& + \frac{(\bar a+1)(\bar a+\bar b+\bar c+2)}{(\bar a+\bar b+1)(\bar a+\bar b+2)} e(u,\bar\partial) C^{\bar a+1,\bar b,\bar c}_{a-1,b,c}(u,\bar u;\hat K|x) - \\
& - \frac{(c+1)(\bar b+1)}{(\bar a+\bar b+1)(\bar a+\bar b+2)} e(u,\bar\partial) C^{\bar a,\bar b+1,\bar c-1}_{a,b-1,c+1}(u,\bar u;\hat K|x) + \\
& + \frac{i(\bar a+1)}{(\bar a+\bar b+1)(\bar a+\bar b+2)} e(u,\bar\partial) C^{\bar a+1,\bar b,\bar c-1}_{a,b-1,c}(u,\bar u;\hat K|x) + \\
& + \frac{i(\bar b+1)(c+1)(\bar a+\bar b+\bar c+2)}{(\bar a+\bar b+1)(\bar a+\bar b+2)} e(u,\bar\partial) C^{\bar a,\bar b+1,\bar c}_{a-1,b,c+1}(u,\bar u;\hat K|x) - \\
& - \frac{(b+1)(\bar c+1)}{(a+b+2)(a+b+1)} e(\partial,\bar u) C^{\bar a,\bar b-1,\bar c+1}_{a,b+1,c-1}(u,\bar u;\hat K|x) + \\
& + \frac{(a+1)(a+b+c+2)}{(a+b+2)(a+b+1)} e(\partial,\bar u) C^{\bar a-1,\bar b,\bar c}_{a+1,b,c}(u,\bar u;\hat K|x) + \\
& + \frac{i(a+1)}{(a+b+2)(a+b+1)} e(\partial,\bar u) C^{\bar a,\bar b-1,\bar c}_{a+1,b,c-1}(u,\bar u;\hat K|x) + \\
& + \frac{i(b+1)(\bar c+1)(a+b+c+2)}{(a+b+2)(a+b+1)} e(\partial,\bar u) C^{\bar a-1,\bar b,\bar c+1}_{a,b+1,c}(u,\bar u;\hat K|x) = 0\,.
\end{aligned}
\tag{Б.45}
$$

- Модуль $(\mathrm{tw}\otimes\mathrm{adj})$:

$$
\begin{aligned}
&D_L C^{\bar a,\bar b,\bar c}_{a,b,c}(u,\bar u;\hat K|x) + (\bar c+1)e(u,\bar u)C^{\bar a-1,\bar b,\bar c+1}_{a,b-1,c}(u,\bar u;\hat K|x)+\\
&+(c+1)e(u,\bar u)C^{\bar a,\bar b-1,\bar c}_{a-1,b,c+1}(u,\bar u;\hat K|x)-\\
&-ie(u,\bar u)C^{\bar a-1,\bar b,\bar c}_{a-1,b,c}(u,\bar u;\hat K|x) + i(c+1)(\bar c+1)e(u,\bar u)C^{\bar a,\bar b-1,\bar c+1}_{a,b-1,c+1}(u,\bar u;\hat K|x)-\\
&-\frac{(a+1)(\bar b+1)(\bar a+\bar b+\bar c+2)}{(a+b+1)(a+b+2)(\bar a+\bar b+1)(\bar a+\bar b+2)}e(\partial,\bar\partial)C^{\bar a,\bar b+1,\bar c}_{a+1,b,c-1}(u,\bar u;\hat K|x)-\\
&-\frac{(b+1)(\bar a+1)(a+b+c+2)}{(a+b+1)(a+b+2)(\bar a+\bar b+1)(\bar a+\bar b+2)}e(\partial,\bar\partial)C^{\bar a+1,\bar b,\bar c-1}_{a,b+1,c}(u,\bar u;\hat K|x)-\\
&-\frac{i(b+1)(\bar b+1)}{(a+b+1)(a+b+2)(\bar a+\bar b+1)(\bar a+\bar b+2)}e(\partial,\bar\partial)C^{\bar a,\bar b+1,\bar c-1}_{a,b+1,c-1}(u,\bar u;\hat K|x)+\\
&+\frac{i(a+1)(\bar a+1)(a+b+c+2)(\bar a+\bar b+\bar c+2)}{(a+b+1)(a+b+2)(\bar a+\bar b+1)(\bar a+\bar b+2)}e(\partial,\bar\partial)C^{\bar a+1,\bar b,\bar c}_{a+1,b,c}(u,\bar u;\bar K|x)+\\
&+\frac{(\bar b+1)(\bar a+\bar b+\bar c+2)}{(\bar a+\bar b+1)(\bar a+\bar b+2)}e(u,\bar\partial)C^{\bar a,\bar b+1,\bar c}_{a,b-1,c}(u,\bar u;\hat K|x)-\\
&-\frac{(c+1)(\bar a+1)}{(\bar a+\bar b+1)(\bar a+\bar b+2)}e(u,\bar\partial)C^{\bar a+1,\bar b,\bar c-1}_{a-1,b,c+1}(u,\bar u;\hat K|x)-\\
&-\frac{i(\bar b+1)}{(\bar a+\bar b+1)(\bar a+\bar b+2)}e(u,\bar\partial)C^{\bar a,\bar b+1,\bar c-1}_{a-1,b,c}(u,\bar u;\hat K|x)-\\
&-\frac{i(\bar a+1)(c+1)(\bar a+\bar b+\bar c+2)}{(\bar a+\bar b+1)(\bar a+\bar b+2)}e(u,\bar\partial)C^{\bar a+1,\bar b,\bar c}_{a,b-1,c+1}(u,\bar u;\hat K|x)-\\
&-\frac{(a+1)(\bar c+1)}{(a+b+2)(a+b+1)}e(\partial,\bar u)C^{\bar a-1,\bar b,\bar c+1}_{a+1,b,c-1}(u,\bar u;\hat K|x)+\\
&+\frac{(b+1)(a+b+c+2)}{(a+b+2)(a+b+1)}e(\partial,\bar u)C^{\bar a,\bar b-1,\bar c}_{a,b+1,c}(u,\bar u;\hat K|x)-\\
&-\frac{i(b+1)}{(a+b+2)(a+b+1)}e(\partial,\bar u)C^{\bar a-1,\bar b,\bar c}_{a,b+1,c-1}(u,\bar u;\hat K|x)-\\
&-\frac{i(a+1)(\bar c+1)(a+b+c+2)}{(a+b+2)(a+b+1)}e(\partial,\bar u)C^{\bar a,\bar b-1,\bar c+1}_{a+1,b,c}(u,\bar u;\hat K|x)=0\,. \qquad (\text{Б}.46)
\end{aligned}
$$