

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Физический институт им. П.Н. Лебедева Российской академии наук

На правах рукописи

Тарусов Александр Андреевич

**Развернутые уравнения и их применение в  
пертурбативном анализе уравнений высших спинов и их  
мультичастичных обобщений**

Специальность 1.3.3 —  
«Теоретическая физика»

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
д.ф.-м.н., г.н.с., чл.-к.  
Васильев Михаил Андреевич

Москва — 2026

## Оглавление

<b>Введение</b>		<b>4</b>
<b>Глава 1</b>	<b>Вариационный принцип в системах развернутых уравнений</b>	<b>16</b>
1.1	Введение . . . . .	16
1.2	Разворачивание . . . . .	18
1.3	Расширение системы вариациями . . . . .	21
1.4	Бикомплекс в пространстве-мишени . . . . .	23
1.5	Обратная задача . . . . .	25
1.6	Фоновые поля . . . . .	27
1.7	Пример скалярного поля . . . . .	29
1.8	Выводы . . . . .	32
<b>Глава 2</b>	<b>Пертурбативный анализ уравнений высших спинов</b>	<b>33</b>
2.1	Уравнения высших спинов . . . . .	37
2.2	Теория возмущений . . . . .	39
2.3	Сдвиговая гомотопия . . . . .	41
2.4	Параметры сдвига общего положения . . . . .	43
2.5	Допустимые параметры гомотопического сдвига . . . . .	50
2.6	Сдвиг только на аргумент поля $\omega$ . . . . .	59
2.7	Выводы . . . . .	60
<b>Глава 3</b>	<b>Линейный анализ теории высших спинов, расширенной группой Кокстера</b>	<b>62</b>
3.1	Теории высших спинов, расширенные группами Кокстера . . . . .	64
3.1.1	Группы Кокстера и обрaмлённые алгебры Чередника . . . . .	64
3.1.2	Уравнения теории высших спинов, расширенной группой Кокстера . . . . .	66
3.2	Вложение пространства $AdS_4$ . . . . .	69
3.3	Первая теорема о массовой оболочке . . . . .	71

3.3.1	Обобщение сдвиговой гомотопии . . . . .	72
3.3.2	Первый порядок теории возмущения в теории высших спинов, расширенной группой Кокстера . . . . .	76
3.3.3	Первая теорема о массовой оболочке . . . . .	79
3.4	Динамическое содержание . . . . .	90
3.5	Выводы . . . . .	95
<b>Заключение</b>		<b>97</b>
<b>Список литературы</b>		<b>99</b>
<b>Приложение А Приложения к главе 1</b>		<b>109</b>
A.1	Вариационный бикомплекс . . . . .	109
<b>Приложение Б Приложение к главе 3</b>		<b>111</b>
B.1	Редукция до унитарных подмодулей теории высших спинов, расширенной группой Кокстера $B_2$ . . . . .	111

## Введение

**Актуальность темы.** Для описания эволюции физических систем с неизбежностью необходимо использовать дифференциальные уравнения. Существуют различные обобщения и способы получения систем уравнений в частных производных. Так, лагранжев формализм имеет широкое применение в классической физике и является ключевым элементом построения квантовой теории. Математическое обобщение, позволяющее рассматривать уравнения в частных производных в инвариантных терминах, называется расслоением джетов, которое содержит в себе функции вместе со всеми их производными до данного порядка. Дифференциальные уравнения в частных производных можно рассматривать как подмногообразие в расслоении джетов [1; 2]. Решениями уравнения являются сечения исходного расслоения, продолжения которых лежат в этом подмногообразии. На языке пространства джетов возможно обобщение лагранжевого подхода и, при наличии некоторых дополнительных условий, решение обратной вариационной задачи – построение действия для данных уравнений движения [3]. Подобная задача сопряжена с большим количеством сложностей, т.к. ответ часто зависит от изначального выбора полей теории, а также от допустимых локальных преобразований полей.

Весьма близкой к пространству джетов конструкцией является формализм развернутых уравнений, предложенный М.А. Васильевым [4–6] в контексте теории высших спинов, и являющийся в ней одним из ключевых инструментов. Кроме физических полей в формализме с необходимостью присутствуют поля, выражающиеся как производные физического поля – по прямой аналогии с джетами. Существенным отличием является использование языка дифференциальных форм. Это гарантирует координатно-независимую формулировку теории и, как следствие, естественную реализацию диффеоморфизмов. Вместе с условиями совместности на развернутую систему это обеспечивает калибровочную инвариантность. Условия совместности существенно ограничивают допустимые локальные переопределения полей, что в рассматриваемом ниже расширении

позволяет сформулировать критерий лагранжевости в более конструктивном виде.

Явный контроль за калибровочными преобразованиями (во многом аналогичный  $Q$ -дифференциалу из BV-формализма [7], [8]) необходим в теориях с бесконечным числом калибровочных полей, таких как теория высших спинов, применение в которой особенно интересно, т.к. теория высших спинов – один из претендентов на теорию квантовой гравитации – ещё одной фундаментальной проблемы теоретической физики. Объединение общей теории относительности с квантовой механикой не может быть достигнуто методами квантовой теории поля. Ещё до формализации механизма перенормировок потенциальные проблемы в теории квантовой гравитации были отмечены в работе Матвея Бронштейна [9]. Пертурбативная ОТО как квантовая теория является перенормируемой – в петлевом разложении возникают контрчлены, не фиксируемые конечным числом параметров [10; 11], а значит требует бесконечного числа измерений, что лишает теорию предсказательной силы.

Для построения квантовой теории, которая в своём классическом пределе воспроизводила бы общую теорию относительности, требовалось модифицировать саму теорию гравитации. Работы в этом направлении представлены, во-первых, работами над модифицированными теориями гравитации, в которых метрика пространства-времени остаётся единственным независимым полем, например [12; 13]. Полученные теории углубили понимание квантовой теории поля и предложили некоторые успешные космологические модели [14], но не смогли представить единую подходящую теорию. Большинству перенормируемых модифицированных теорий гравитации присущи другие недостатки, такие как неунитарность, что означает присутствие в теории состояний с отрицательной нормой, неизбежно приводящее к нестабильности в теории. Альтернативные, полностью новые подходы добавляют в рассмотрение новые независимые поля [15]. Существенного прогресса на сегодняшний день добились радикальные изменения – теория струн, супергравитация и теория высших спинов.

Теория струн [16–18] является одной из наиболее радикальных модификаций теории поля, основная идея которой заключается в переходе к рассмотрению протяженных объектов вместо точечных частиц. Привычные частицы понимаются в таком описании как возбуждение протяженных объектов — струн или бран. Наиболее успешные версии самой теории струн включают, как прави-

ло, суперсимметрию — симметрию, связывающую бозоны и фермионы. Теория также часто имеет внутреннюю симметрию на мировом листе, наблюдается ряд дуальностей между различными теориями.

Такое радикальное изменение теории, однако, сопровождается многими сложностями. Например, теории струн и М-теории формулируются, как правило, в большом числе измерений: 26 (бозонная струна), 10 (суперструна) или 11 (М-теория) [19]. Так как это явно расходится с нашими наблюдениями, требуется процедура компактификации, при которой «лишние» измерения становятся, например, конечными замкнутыми траекториями [20].

Расчеты в теории струн тоже оказываются затруднены, а непertурбативные результаты известны только в очень специальных случаях. Интерес представляет спектр теории, безмассовый сектор которого содержит гравитон — частицу спина 2, ассоциированную с квантовым гравитационным полем, а полный спектр — ещё и бесконечную башню массивных возбуждений сколь угодно высоких спинов.

Теории супергравитации, объединяющие суперсимметрию с гравитацией, являются часто связанным подходом — в частности, показано, что некоторые теории супергравитации можно рассматривать как низкоэнергетический предел теории суперструн [21]. Для изучения теории супергравитации был разработан особый подход так называемого гармонического суперпространства [22; 23], где вводятся дополнительные гармонические координаты, позволяющие описывать систему вне массовой оболочки в терминах суперполей (т.е. с явной суперсимметрией). Формулировка с помощью суперпространства оказалась удачной и для теории высших спинов [24; 25], где дополнительная симметрия, необходимая для непротиворечивой формулировки квантовой гравитации, введена как симметрия, связывающая безмассовые поля всех целых и полуцелых спинов. В этом случае дополнительные переменные позволяют объединить поля разных спинов в одно суперполе.

Другой подход в теории высших спинов, через развернутые уравнения, был развит в [6]. Уравнения теории записываются как бесконечная цепочка простых дифференциальных уравнений в терминах внешней алгебры дифференциальных форм (в чём и заключается развернутый формализм), что делает возможным пертурбативное рассмотрение. Присутствие в теории бесконечного числа полей также привносит особенности в рассмотрение.

Само существование взаимодействующей неабелевой калибровочной теории поля — факт крайне нетривиальный, даже на классическом уровне. В целом, в рамках стандартных предположений о локальности, лоренцевской инвариантности и калибровочной инвариантности наиболее фундаментальными примерами неабелевых калибровочных теорий являются:

- Теории Янга-Миллса — теории взаимодействующих полей спина 1;
- ОТО — теория взаимодействующих полей спина 2;
- Теории высших спинов — теории взаимодействующих полей всех целых и полуцелых спинов.

Существование последнего класса особенно нетривиально в свете теорем запрета [26—29].

Уравнения Васильева [6] описывают как раз третий случай. Хотя полное описание теории вне массовой оболочки пока не найдено (хотя в последние годы достигнут большой прогресс), наличие уравнений движения позволяет предположить существование квантовой теории такой, что взаимодействие полей высших спинов в низкоэнергетическом пределе подавлено членами с большим количеством производных. Количество производных играет важную роль, так как в теории присутствуют две константы взаимодействия:

- Безразмерная константа  $g$
- Размерная константа — радиус пространства (анти) де-Ситтера, появляющаяся при каждой паре производных

Размерный параметр кривизны  $AdS$  входит в структуру взаимодействий. Теория сформулирована в терминах безмассовых полей в пространстве анти де-Ситтера и не имеет описания в терминах безмассовых полей в плоском пространстве. Таким образом, эта теория обходит теоремы запрета, сформулированные для теорий с  $S$ -матрицей, что, как правило, подразумевает плоское пространство для определения асимптотических состояний.

Сами уравнения Васильева [6] сформулированы в развернутом виде — т. е. в виде цепочки простых дифференциальных уравнений на дифференциальные формы. Для простоты записи в уравнениях введены вспомогательные

переменные спинорного типа. Правая часть уравнений записана с помощью специального ассоциативного, так называемого «звёздочного» умножения, играющего ключевую роль [30]. Система уравнений имеет известное вакуумное решение, а также допускает пертурбативное рассмотрение над этим вакуумом. Гомотопическая процедура, применяемая для решения на каждом шаге, позволяет воспроизводить вершины в каждом порядке [31]. Её существование – прямое свойство системы как развернутой системы уравнений и в кохомологических терминах позволяет переписывать замены полей как выбор различных представителей кохомологии. Однако конкретный вид вершины имеет большое значение, в связи с чем параметры гомотопической процедуры должны быть правильно подобраны на каждом шаге [32].

В классических теориях с конечным числом степеней свободы локальность означает конечное число производных в уравнениях движения теории, что значит, что эволюция определяется локальным поведением системы.

В теории высших спинов потребовать выполнение такого условия нельзя априори, т.к. поле определенного спина кодируется как производная определенного порядка от мастер-полей. Т.к. в системе представлено бесконечное число спинов, в ней встретится и бесконечное число производных.

Ослабление этого условия для системы с бесконечным набором спинов носит название «спин-локальности», и заключается в требовании, что для каждого конечного подмножества полей система содержит конечное число производных [33]. Более того, для оптимизации анализа требуется добиваться наименьшего возможного числа производных в каждой вершине.

В постановке системы уравнений высших спинов число производных может меняться при замене переменных и подобрать правильную замену — нетривиальная задача. Т.к. замена параметра в гомотопической процедуре эквивалентна замене переменных для полей системы, то для сохранения спин-локальности необходимо правильно выбирать параметры гомотопической процедуры [34].

На данный момент алгоритма правильного выбора гомотопических параметров нет, но разработаны эффективные методы подсчёта, позволившие получить вершины вплоть до  $\Upsilon_{\omega CCC}$  в спин-локальном виде [35].

Рассмотрение мультичастичных состояний в теории высших спинов, её так называемого мультичастичного расширения, показывает, что в ней содержится

достаточное число степеней свободы, чтобы кодировать степени свободы теории струн [36], спектр которой содержит неограниченную башню полей всех спинов, где большинство состояний массивные. Более того, предварительные результаты показывают согласованность результатов, полученных в высокоэнергетическом пределе теории струн с результатами в мультичастичном расширении высших спинов [37].

Эти наблюдения мотивируют изучение мультичастичных и кокстеровских расширений как возможного шага к установлению связи между теориями высших спинов и некоторой теорией струн. Рабочая гипотеза на данный момент состоит в том, что возможно добиться массивного спектра в мультичастичном расширении теории высших спинов с помощью механизма спонтанного нарушения симметрии — аналогично механизму Хиггса [38], [39].

**Степень проработанности темы.** Развернутые уравнения, появившиеся в контексте теории высших спинов в работах [5; 6], представляют собой уравнения вида

$$dW^\Omega(\xi, x) = G^\Omega(W(\xi, x)), \quad d := \xi^n \frac{\partial}{\partial x^n}. \quad (1)$$

На функции  $G^A(W)$  дополнительно наложено условие совместности

$$G^A(W) \frac{\partial G^\Omega(W)}{\partial W^\Lambda} = 0. \quad (2)$$

Развернутые системы могут описывать как системы вне массовой оболочки, в которой поля старшего порядка выражаются через производные полей младшего порядка, и системы на массовой оболочке, в которых поля дополнительно подчинены некоторым уравнениям в частных производных. Важное замечание, сделанное в работе [40], состоит в том, что одна и та же система может интерпретироваться как система на массовой оболочке в пространстве-времени одной размерности, и как система вне массовой оболочки в пространстве времени другой размерности.

Важное дополнение конструкции, заключающееся в введении  $Q$ -дифференциала, было представлено в работе [40]. Важно, что дифференциал формулируется для так называемых универсальных систем, совместность которых не зависит от размерности, т.е. следует из правых частей уравнений, а не из-за наличия форм порядка выше размерности пространства-времени. В этой же работе выделены инвариантные функционалы теории условием  $Q$ -замкнутости. Ин-

вариантные функционалы, представленные как формы максимального порядка, естественным образом являются кандидатом на действие, формы меньшего порядка – на сохраняющиеся заряды. В настоящей диссертации будет представлена конструкция, позволяющая ввести в развернутую систему вариации и придать сохраняющимся функционалам смысл действия, получая уравнения движения как экстремали.

Наиболее широкое применение развернутые уравнения нашли в теории высших спинов, т.к. именно на языке развернутых уравнений сформулированы как уравнения высших спинов в реперном формализме [41], обобщающие уравнения Фронсдала [42], так и производящая система Васильева [31], кодирующая вершины нелинейной системы с помощью дополнительной спинорной переменной  $z$ . Более точно, уравнения Фронсдала описывают безмассовые поля произвольного спина с помощью абсолютно симметричного тензора ранга  $s$ , подчиненного условию так называемой двойной бесследовости:

$$\varphi^{nk}{}_{nkm_s, \dots m_s} = 0. \quad (3)$$

Это поле подчинено уравнениям

$$\square \varphi^{a(s)}(x) - s \partial^a \partial_m \varphi^{ma(s-1)}(x) + \frac{s(s-1)}{2} \partial^a \partial^a \varphi^{a(s-2)m}{}_m(x) = 0 \quad (4)$$

с явной калибровочной симметрией

$$\delta \varphi^{a(s)}(x) = \partial^a \xi^{a(s-1)}(x), \quad (5)$$

с бесследовым калибровочным параметром  $\xi$ . В записи используется компактное обозначение  $\alpha(n)$  для  $n$  симметризованных индексов одного типа.

Для обобщения уравнений Фронсдала вводятся один-формы  $\omega$  и ноль-формы напряженности  $C$  [5]. Для удобства описания компоненты поля сворачиваются с вспомогательными  $\mathfrak{sp}(4)$  спинорами  $Y^A = (y^\alpha, \bar{y}^{\dot{\alpha}})$ .

$$\omega(y, \bar{y}, x) = \sum_{n,m} \omega_{\alpha_1 \dots \alpha_n, \dot{\alpha}_1 \dots \dot{\alpha}_m}(x) y^{\alpha_1} \dots y^{\alpha_n} \bar{y}^{\dot{\alpha}_1} \dots \bar{y}^{\dot{\alpha}_m} \quad (6)$$

$$C(y, \bar{y}, x) = \sum_{n,m} C_{\alpha_1 \dots \alpha_n, \dot{\alpha}_1 \dots \dot{\alpha}_m}(x) y^{\alpha_1} \dots y^{\alpha_n} \bar{y}^{\dot{\alpha}_1} \dots \bar{y}^{\dot{\alpha}_m} \quad (7)$$

$$(8)$$

Спиноры подчинены коммутационным соотношениям

$$[y_\alpha, y_\beta]_* = 2i\epsilon_{\alpha\beta} \quad [\bar{y}_{\dot{\alpha}}, \bar{y}_{\dot{\beta}}]_* = 2i\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \quad [y_\alpha, \bar{y}_{\dot{\beta}}]_* = 0, \quad (9)$$

реализуемым специальным звёздочным произведением

$$(f * g)(Z, Y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int dU dV f(Z + U, Y + U) g(Z - V, Y + V) e^{iU_A V^A}. \quad (10)$$

Тогда полные нелинейные уравнения на  $\omega$ ,  $C$  записываются как

$$d\omega + \omega * \omega = \Upsilon(\omega, \omega, C) + \Upsilon(\omega, \omega, C, C) + \dots \quad (11)$$

$$dC + [\omega, C]_* = \Upsilon(\omega, C, C) + \Upsilon(\omega, C, C, C) + \dots \quad (12)$$

где в правой части появляются поправки всё более высоких порядков записанные как вершины  $\Upsilon$ .

В таком виде очевидна развернутая природа этих уравнений. На практике весьма важен конкретный вид вершин в правых частях уравнений (11), (12). Так, в частности, важно свойство «спин-локальности», которое соответствует тому, что при фиксированных спинах вершина содержит конечное число производных. Фиксация спина в этом условии чрезвычайно важна, т.к. количество производных в вершинах  $\Upsilon$  растёт со спином, поэтому теория не является локальной в привычном смысле. Поскольку выбор вершины не единственный, т.к. существует большой произвол, задающийся богатым набором калибровочных преобразований и замен полей, остро встаёт задача поиска представителя с наименьшим числом производных. Эта задача решена в малых порядках за счет введения производящей системы Васильева, которая, в свою очередь, является развернутой системой для вспомогательной спинорной переменной  $z$ . Разрешение производящей системы заключается в явном решении уравнения типа

$$df = g, \quad dg = 0, \quad (13)$$

что достигается с помощью гомотопии (например сдвиговой [34], хотя существуют и более общие техники, которые расширили набор возможных параметров [43]).

$$f(Z; Y; \theta) = [(Z^A + Q^A) \frac{\partial}{\partial \theta^A} \int_0^1 \frac{dt}{t} g(tZ - (1-t)Q; Y; t\theta)] + \\ + h(Y) + d_Z \epsilon(Z; Y; \theta) \quad (14)$$

Различные выборы гомотопии сводятся к добавлению точных форм, или, что аналогично, к полевым заменам. В низших порядках за счет выбора сдвига были достигнуты локальные результаты, хотя пространство параметров не было полностью использовано [44; 45]. Более общая дифференциальная гомотопия [43], разработанная в последние годы, ещё больше увеличивает пространство параметров в гомотопической процедуре и, успешно воспроизводя известные локальные результаты, обещает более удобный аппарат для обобщений или вычислений в более высоких порядках. В этом ключе задача выбора гомотопических параметров не только вычислительная, но и несёт в себе физический смысл – различные представители когомологического класса могут по-разному трактоваться с точки зрения локальности из-за числа производных. Поэтому важно перечислить максимально широкий класс гомотопических сдвигов, сохраняющих интерпретацию свободных уравнений, и приводящих к локальным (ультралокальным) [32; 33] вершинам.

Дальнейшим развитием теории высших спинов являются различные предложенные расширения. Так, мультичастичное расширение и расширение группой Кокстера, предложенные в [46], являются перспективными в контексте осуществления дуальности между теорией высших спинов и теорией струн. С существованием подобной дуальности согласуются расчеты в теории струн в пределе нулевого натяжения [37].

Возможно получение массивного спектра через размерную редукцию, но отдельно интересно нарушение предварительно расширенной симметрии высших спинов до пространственно-временной симметрии той же размерности. В качестве механизма было предложено рассматривать систему, порожденную универсальной обёртывающей алгеброй (мультичастичное расширение), которая содержит достаточно степеней свободы для описания массивного спектра теории струн. Наблюдаемое в работах [47–50] удвоение осцилляторов, что близко к введению двух копий алгебр высших спинов, нетривиально коммутирующих друг с другом, может быть реализовано расширением группой Кокстера  $B_2$ . В  $B_2$  теории присутствуют также две константы связи, одну из которых,

предполагается, можно связать с константой  $\alpha'$  в струнной теории.

Таким образом, для установления дуальности было предложено рассматривать систему, порожденную универсальной обёртывающей алгеброй (мультичастичное расширение) высших спинов, пополненной группой Кокстера [46]. Это пополнение происходит на уровне алгебры деформированных осцилляторов. В этой диссертации построено вложение пространства анти-де-Ситтера в подобное расширение, построены линеаризованные уравнения для произвольной группы, получены конкретные результаты для выделенного случая группы  $B_2$ .

Таким образом, в работе рассмотрены три взаимосвязанных аспекта развернутого формализма. Первый связан с вопросом условий массовой оболочки развернутых уравнений, получения их из вариационного принципа и решения обратной вариационной задачи. Второй касается выбора локального представителя вершин в теории возмущений высших спинов над  $AdS_4$ -фоном. Третий – к обобщению результатов на теории, расширенные группой Кокстера общего положения и, отдельно, группы  $B_2$  как наиболее вероятного претендента на связь с теорией струн.

Суммируя, **целями** данной диссертации являются:

1. Построение вариационного принципа на развернутых уравнениях
2. Расширение набора параметров в линейном анализе теории высших спинов в размерности 4 для поиска новых вершин, сохраняющих вид Первой теоремы о массовой оболочке
3. Анализ линейного порядка в теории высших спинов, расширенной группой Кокстера, с подробным рассмотрением группы  $B_2$

Поставленные цели достигаются решением следующих **задач**:

1. Введение дополнительных полей-вариаций и расширение  $Q$ -дифференциала в развернутой системе
2. Построение условия экстремальности и доказательство критерия лагранжескости, и тем самым решение обратной задачи вариационного исчисления

3. Рассмотрение линейного порядка теории высших спинов с новыми типами параметров сдвиговой гомотопии. Нахождение допустимых параметров, для получения ультралокальных вершин.
4. Поиск вложения пространства анти-де-Ситтера в систему уравнений высших спинов, расширенных группой Кокстера.
5. Проведение линейного анализа теории, расширенной группой Кокстера, над найденным  $AdS_4$  вакуумом, для группы Кокстера общего положения, а также для группы  $B_2$ .

**Положения, выносимые на защиту:**

1. Системы развернутых уравнений могут быть дополнены вариационным формализмом, позволяющим получать условия массовой оболочки как экстремали инвариантных функционалов
2. Для условия массовой оболочки в развернутой системы существует критерий лагранжевости.
3. В линейном порядке теории высших спинов существует новое семейство ультралокальных вершин, задаваемое так называемыми ослабленными однородными сдвигами.
4. Существует вложение  $AdS_4$ -фона в теорию высших спинов, расширенной группой Кокстера, единственное при условии антиэрмитовости и сохранения фильтрации, индуцированной идемпотентами.
5. Обобщение техники сдвиговой гомотопии позволяет получить выражения для линейных вершин в кокстеровском расширении теории высших спинов.
6. Вид линейных вершин в теории высших спинов, расширенной группой Кокстера общего положения. Явные выражения для вершин в случае группы  $B_2$ ; подтверждение, что данный вид согласуется с Первой теоремой о массовой оболочке.

**Методология и методы исследования.** В работе используются методы развернутой динамики, кохомологический анализ, методы теории деформаций,

гомотопическая техника решения производящей системы Васильева, а также алгебраические методы, связанные с деформированными осцилляторными алгебрами и группами Кокстера.

**Научная новизна, достоверность и личный вклад автора.** Новизна рассматриваемых вопросов, а также достоверность полученных результатов привели к продвижению в исследовании теорий, описываемых системами уравнений развернутого типа, в частности теорий высших спинов. Все представленные в диссертации результаты являются оригинальными и получены автором лично или при его непосредственном участии. Вклад автора в работы [51; 52] является определяющим. Вклад в работу [53] заключается в анализе вложения  $AdS_4$  фона, обобщении сдвиговой гомотопии и в получении и интерпретации линейных вершин (разделы 3, 5, 6). Приведенные в диссертации результаты являются актуальными, используются и развиваются как российскими, так и зарубежными научными группами.

**Научная и практическая значимость.** Изучаемые в диссертации проблемы представляют научный интерес в области теоретической и математической физики. Полученные в работе результаты могут быть применены для исследования лагранжеевности имеющихся теорий, а также для построения развернутых формулировок теорий с известным действием. Выполненные исследования в области теорий высших спинов, расширенных группами Кокстера, полезны для проверки дуальности теории струн и расширенных теорий высших спинов.

**Апробация работы.** Основные результаты работы опубликованы в трёх статьях [51–53] в журналах, индексируемых Web of Science и Scopus. Основные результаты, вошедшие в диссертацию, докладывались на семинарах лаборатории КТП ОТФ ФИАН, на международных конференциях “Supersymmetries and Quantum Symmetries” (SQS’22, SQS’24) в Дубне, “Efim Fradkin Centennial Conference” в Москве.

## Глава 1

### Вариационный принцип в системах развернутых уравнений

#### 1.1 Введение

Развернутый формализм служит инструментом для описания физических систем, и особенно теорий высших спинов (см. обзор [54]). Развернутые уравнения сформулированы исключительно в терминах дифференциальных форм  $W^\Lambda(x)$  на мировом листе  $M$  с координатами  $x$ , что по построению гарантирует координатную независимость системы. В приложениях к полевым системам развернутые системы включают бесконечные наборы дифференциальных уравнений первого порядка, подчиненных условиям совместности. Важно, что симметрии физической системы реализованы геометрически на дифференциальных формах развернутой системы. Максимально симметричная фоновая геометрия описывается уравнениями Маурера-Картана, которые сами по себе являются простейшим примером развернутых уравнений [40].

Система вне массовой оболочки – это набор условий, выражающий тензорные компоненты системы высокого ранга как производные примарных полей, которые в свою очередь не выражаются как производные других полей, с учетом условий совместности. (достижения в развитии теории высших спинов вне массовой оболочки [55; 56]). Развернутая система вне массовой оболочки описывает калибровочные преобразования системы и её симметрии, но не содержит динамических уравнений – т.е. уравнений в частных производных на примарные поля. Нетривиальная динамика в системах на массовой оболочке появляется после наложения дополнительных условий на поля  $W^\Lambda(x)$ , которые ограничивают некоторые производные примарных полей системы вне массовой оболочки.

Развернутые уравнения могут быть переформулированы естественным образом в терминах  $Q$ -дифференцирования, по которому можно сопоставлять инвариантные функционалы  $Q$ -когомологиям [40]. Вне массовой оболочки они

представляют собой различные калибровочно-инвариантные действия.

Тем не менее, одно наличие инвариантных функционалов ещё не задаёт условия, переводящие систему на массовую оболочку и не связывает её напрямую с лагранжевой структурой. В случае обычных уравнений в частных производных этот вопрос разрешается с помощью структуры вариационного исчисления и его математического обобщения в виде вариационного бикомплекса. Для развернутых систем, где производные на мировом листе отождествляются с действием  $Q$ -дифференциала, встаёт вопрос о постановке вариационной задачи в когомологических терминах. Одна из задач диссертации, разобранный в этой главе, посвящена построению такого обобщения.

Развернутые уравнения воспроизводят известные теоретико-полевые примеры и были успешно применены для описания калибровочной теории высших спинов [5; 31; 57]. Однако общая процедура получения набора условий, переводящих систему на массовую оболочку, не была получена явно в развернутом подходе, за исключением ряда случаев. Первый известный случай – формулировка  $d$ -мерной теории высших спинов на массовой оболочке как факторизация системы вне массовой оболочки по некоторому идеалу [54; 58]. Во втором случае действие и соответствующий формализм Баталина-Вилковыского были известны заранее, что позволило авторам [7; 8; 59] воспроизвести соответствующие развернутые системы. В этой главе диссертации задача обратная – проанализировать возможные виды развернутых уравнений Эйлера Лагранжа и найти соответствие между системой вне массовой оболочки и системой на массовой оболочке, полученной некоторым вариационным принципом. Другими словами, необходимо сформулировать условия, переводящие систему на массовую оболочку. В рамках поставленной задачи рассмотрение будет начинаться с развернутой системы вне массовой оболочки, и будет рассматриваться вопрос наложения условий, переводящих её на массовую оболочку как следствия некоторых уравнений Эйлера-Лагранжа. Это отличает постановку задачи от работ в литературе, в которой развернутая система строится по некоторому вариационному принципу для данного действия. Преимущество предложенного подхода в его широкой применимости – он подходит для любых развернутых систем, в том числе отличных от [7; 8; 59], например использующих спинорные переменные [5; 31; 55–57].

Для достижения этой цели вводятся дополнительные переменные-вариации

$\delta W^\Lambda$  как дифференциалы полей  $W^\Lambda$  в пространстве-мишени  $\mathcal{M}$ , на котором поля  $W^\Lambda$  служат локальными координатами. В таком случае можно обобщить дифференциал  $\mathcal{Q}$ , чтобы тот действовал как на  $W$ , так и на  $\delta W$ , а также ввести дополнительный дифференциал де Рама  $\delta$ , который действует на  $\Omega(\mathcal{M})$ . Можно заключить, что операторы  $\mathcal{Q}$  и  $\delta$  образуют бикомплекс

$$\mathcal{Q}^2 = 0, \quad \delta^2 = 0, \quad \mathcal{Q}\delta + \delta\mathcal{Q} = 0.$$

В этих терминах можно сформулировать инвариантные ограничения, переводящие систему на массовую оболочку, а также найти необходимые и достаточные условия, того, что получающаяся система лагранжева в примарных полях. Несмотря на то, что некоторые детали рассмотрения напоминают построение вариационного бикомплекса [3; 60], детали, связанные с рассмотрением развернутой системы существенно изменяют выводы. Явное установление связи с вариационным бикомплексом остаётся интересным вопросом для дальнейшего исследования.

## 1.2 Разворачивание

Широко известна возможность понижения порядка дифференциального уравнения за счет введения вспомогательных переменных. Этот подход имеет обобщение для дифференциальных уравнений в частных производных – пространство джетов [1]. Развернутые уравнения являются дальнейшим развитием этой идеи, подходящим для калибровочных теорий поля, особенно включающих гравитацию.

Система развернутых уравнений [5; 57] (также обзор [61]) – обобщение системы обычных уравнений в частных производных первого порядка, получаемое заменой дифференцирования по аргументам дифференциалом де Рама. Таким образом, динамические переменные теперь являются дифференциальными формами  $W^\Omega(x)$  в пространстве-времени, а система приобретает вид

$$dW^\Omega(\xi, x) = G^\Omega(W(\xi, x)), \quad d := \xi^n \frac{\partial}{\partial x^n}, \quad (1.1)$$

где  $\xi^n$  – дифференциал из касательного пространства, переобозначение традиционного  $dx^n$ , а правая часть  $G^\Omega(W(\xi, x))$  – некоторая функция полей  $W^\Omega(\xi, x)$ , содержащая внешние произведения дифференциальных форм  $W^\Omega(\xi, x)$  при одном и том же значении  $x$  (в  $G^\Omega(W)$  отсутствуют производные по координатам

пространства-времени  $x$ ; символ внешнего произведения опущен дальше по тексту. Дифференциалы  $\xi^n$  антикоммутируют ( $\xi^n \xi^m = -\xi^m \xi^n$ ). Правая сторона уравнения не может быть произвольной, т.к. дифференциал де Рама нильпотентен, что накладывает условия совместности  $dG^\Omega = 0$ , что эквивалентно

$$G^\Lambda(W) \frac{\partial G^\Omega(W)}{\partial W^\Lambda} = 0. \quad (1.2)$$

Условие совместности обеспечивает инвариантность системы (1.1) относительно калибровочных преобразований следующего вида

$$\delta_{gauge} W^\Omega(x) = d\epsilon^\Omega(x) + \epsilon^\Lambda(x) \frac{\partial G^\Omega(W(x))}{\partial W^\Lambda(x)}, \quad (1.3)$$

где

$$\deg \epsilon^\Lambda = \deg W^\Lambda - 1$$

здесь  $\deg \omega$  обозначает порядок дифференциальной формы  $\omega$ .

Вообще говоря, о калибровочной инвариантности можно говорить только в так называемых универсальных системах, в которых совместность системы обеспечивается правыми частями уравнений самой системы, без учета размерности пространства-времени, т.е. не используя тот факт, что  $(d+1)$ -формы аннулируются в  $d$ -мерном пространстве. Действительно, для неуниверсальных систем производная  $\frac{\partial G^\Omega}{\partial W^\Lambda}$  может не иметь смысла, что приводит к ненулевой производной заведомо нулевого члена, задающегося  $(d+1)$ -формой. В этой работе все рассматриваемые системы предполагаются универсальными, что верно для известных теорий, сформулированных с помощью развернутых уравнений и, в частности, для их важнейшего применения – теории высших спинов.

Для описания универсальных систем вводится  $Q$ -дифференциал (или, что то же самое, гомологическое векторное поле) следующего вида [40]

$$Q = G^\Omega(W) \frac{\partial}{\partial W^\Omega}, \quad (1.4)$$

который является нильпотентным (гомологическим),

$$Q^2 = 0$$

что следует из условий совместности (1.2). С помощью этого дифференциала можно записать универсальную развернутую систему в виде соотношения на дифференциалы

$$dF(W(x)) = QF(W(x)), \quad (1.5)$$

для произвольной функции  $F(W)$  на пространстве-мишени, параметризованном полями  $W^\Omega(\xi, x)$ .

С этой точки зрения можно интерпретировать развёрнутые уравнения как отождествление дифференцирования де Рама  $d$  на мировом листе  $M$  и дифференцирования  $Q$  на пространстве-мишени  $\mathcal{M}$ .

Надо отметить, что вид уравнений (1.1) означает, что правая часть  $G^\Lambda$  имеет степень формы  $p + 1$ , если у формы  $W^\Lambda$  степень  $p$ . Тогда само дифференцирование  $Q$  несёт степень

$$\deg Q = 1. \quad (1.6)$$

Следуя [40], рассмотрим  $Q$ -замкнутую функцию Лагранжа  $\mathcal{L}$ ,

$$Q\mathcal{L}(W) = 0 \quad (1.7)$$

вместе с  $(d - 1)$ -формой  $E$  и  $d$ -формой  $L$ , такими, что

$$dE = L - \mathcal{L}(W), \quad (1.8)$$

$$dL = 0. \quad (1.9)$$

Действие определяется как интеграл  $L$  по  $d$ -циклу  $M^d$

$$S = \int_{M^d} L \quad (1.10)$$

и оно, конечно, инвариантно относительно калибровочных преобразований (1.3) с полями  $E$  и  $L$  и калибровочными параметрами  $\epsilon_E$  и  $\epsilon_L$ , соответственно, а также калибровочными преобразованиями развёрнутой системы  $\epsilon^\Lambda(x)$ , соответствующими полям  $W^\Lambda(x)$ ,

$$\delta_{gauge} E = d\epsilon_E + \epsilon_L - \epsilon^\Lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial W^\Lambda}, \quad (1.11)$$

$$\delta_{gauge} L = d\epsilon_L. \quad (1.12)$$

Калибровочное преобразование 1.11 позволяет зафиксировать калибровку с помощью  $\epsilon_L(x)$ , так, чтобы положить  $E = 0$ . В результате

$$S = \int_{M^d} \mathcal{L}(W). \quad (1.13)$$

Таким образом можно избавиться от некогомологичной части действия и считать, что инвариантные функционалы развёрнутой системы соответствуют  $Q$ -когомологиям [40].  $Q$ -точные лагранжианы описывают полные производные по

соотношению дифференциалов (1.5), а значит могут быть опущены под интегралом.

Как было отмечено, развернутая система может быть вне массовой оболочки или на ней, в зависимости от того, кодирует ли она уравнения на динамические поля. Важно, что одна и та же система может интерпретироваться как находящаяся на массовой оболочке на мировом листе  $M^{d'}$ , так и вне неё на мировом листе меньшей размерности  $M^{d''}$ , (т.е. полагая  $d' > d''$ ) [62] – тривиальная зависимость по дополнительным переменным и будет условием массовой оболочки.

Значительное достоинство развернутого формализма состоит в том, что уравнения Маурера-Картана, которые описывают фоновую метрику в координатно-независимом виде, сами по себе имеют развернутый вид, а значит могут рассматриваться как часть развернутой системы. Пусть  $g$  – алгебра Ли с базисом  $\{T_a\}$  и скобкой Ли  $[\cdot, \cdot]$ . Полагая в развернутой системе (1.1)  $W = w = w^a T_a$  и  $G = -\frac{1}{2}[w, w]$ , легко проверить, что развернутое уравнение принимает вид уравнения нулевой кривизны (уравнения на плоскую связность)

$$dw + \frac{1}{2}[w, w] = 0. \quad (1.14)$$

Решения этого уравнения Маурера-Картана, как известно, являются различными  $g$ -инвариантными фоновыми связностями в гравитации в формулировке Картана [54].

### 1.3 Расширение системы вариациями

Рассмотрим некоторую развернутую систему и условия, переводящие её на массовую оболочку, т.е. условия на низшие производные в системе. Пусть развернутая система лагранжева, с функцией Лагранжа  $\mathcal{L}$ , удовлетворяющей условию  $Q$ -замкнутости (1.7). По аналогии с классическим курсом механики потребуем уравнений движения как условий экстремали функционала действия  $S = \int \mathcal{L}$ , т.е. наложим уравнения Эйлера-Лагранжа

$$\delta S(W) = \int_{M^d} \delta W^\Lambda(x) \frac{\partial \mathcal{L}(W)}{\partial W^\Lambda(x)} = 0, \quad (1.15)$$

где  $\delta W^\Lambda(x)$  – вариация поля  $W^\Lambda(x)$

$$\delta f(W) = \delta W^\Lambda(x) \frac{\partial f(W)}{\partial W^\Lambda(x)}. \quad (1.16)$$

Для дальнейшего анализа важно ввести градуировку для поля вариации  $\delta W^\Lambda$ , смещенную на единицу относительно  $W^\Lambda$ , что можно сделать, т.к. будут рассматриваться лишь линейные по вариациям выражения. Такое определение позволяет рассматривать вариации как дифференциалы в касательном пространстве к  $W^\Lambda$ . Более аккуратно, в дополнение к градуировке дифференциальных форм  $W^\Lambda$  на мировом листе, которую будем обозначать  $deg$

$$deg(W^\Lambda(x)) = p^\Lambda = deg(\delta W^\Lambda(x)). \quad (1.17)$$

Введём также градуировку по вариациям  $Deg$

$$Deg W^\Lambda(x) = 0, \quad Deg(\delta W^\Lambda(x)) = 1. \quad (1.18)$$

Коммутационные свойства градуированных объектов будем определять суммарной градуировкой

$$\pi = Deg + deg, \quad fg = (-1)^{\pi(f)\pi(g)} gf. \quad (1.19)$$

Поля  $W^\Lambda$  не произвольны, а подчинены некоторым развернутым уравнениям, не лежащим на массовой оболочке (1.1), как следствие, их вариации должны быть подчинены следствиям этих уравнений при взятии вариации.

$$d\delta W^\Lambda(x) = -\delta W^\Omega(x) \frac{\partial G^\Lambda(W)}{\partial W^\Omega(x)}, \quad (1.20)$$

где набегаёт лишний знак из-за сдвинутой на единицу градуировки вариации  $\delta W^\Lambda$  относительно формы  $W^\Lambda$ .

Совместность уравнения (1.20) прямо следует из совместности развернутых уравнений (1.1), следствием которых оно является. Естественно, полная система уравнений (1.1) и (1.20) также совместна. Ключевая идея состоит в объединении полей  $W^\Lambda$  и их вариаций  $\delta W^\Omega$  в расширенный набор полей

$$\widetilde{W}^\Lambda(x) = (W^\Lambda(x), \delta W^\Omega(x)),$$

удовлетворяющих полной системе развернутых уравнений (1.1), (1.20).

Для системы уравнений на вариации можно ввести новый оператор  $Q'$ , задающий правые части уравнений (1.20) (будем опускать аргумент  $x$ , где это возможно, т.к. по нему действует только дифференциал де Рама  $d$ )

$$Q' := -\delta W^\Omega \frac{\partial G^\Lambda(W)}{\partial W^\Omega} \frac{\partial}{\partial \delta W^\Lambda}. \quad (1.21)$$

Т.к. операторы  $Q$  и  $Q'$  действуют на непересекающихся множествах переменных, их также можно объединить в один оператор, добившись полного единообразия системы

$$d\tilde{W}^A(x) = \mathcal{Q}\tilde{W}^A(x), \quad \mathcal{Q} := Q + Q'. \quad (1.22)$$

Несложно видеть, что таким образом построенный оператор  $\mathcal{Q}$  нильпотентен, как следствие условия совместности на правую часть уравнения (1.1),

$$\mathcal{Q}^2 = 0. \quad (1.23)$$

Это позволяет называть  $\mathcal{Q}$  дифференциалом на общей системе и приводит к появлению структуры бикомплекса, что будет изложено позже.

Так как оператор  $Q'$  определен только на вариациях, и, соответственно, действует тривиально на функции только от полей  $W^\Lambda$ , когомологии  $Q$  автоматически являются когомологиями полного оператора  $\mathcal{Q}$

$$H(Q) \subset H(\mathcal{Q}). \quad (1.24)$$

Из определений градуировки очевидно, что

$$\deg \mathcal{Q} = 1, \quad \text{Deg } \mathcal{Q} = 0. \quad (1.25)$$

Вариации  $\delta W^\Lambda$  являются полноценными полями расширенной системы развернутых уравнений, а значит, им соответствуют калибровочные параметры  $\delta\epsilon$  и калибровочное преобразование

$$\delta_{gauge} \delta W^\Omega = d(\delta\epsilon^\Omega) - (\delta\epsilon^\Lambda) \frac{\partial G^\Omega(W)}{\partial W^\Lambda} - (-1)^{p^\Lambda} \epsilon^\Lambda \delta W^\Phi \frac{\partial^2 G^\Omega(W)}{\partial W^\Phi \partial W^\Lambda}. \quad (1.26)$$

В то же время калибровочные преобразования (1.3) для полей  $W^\Omega$  не изменяются.

#### 1.4 Бикомплекс в пространстве-мишени

Благодаря правильным правилам коммутации можно ввести нильпотентный оператор

$$\delta := \delta W^\Lambda \frac{\partial}{\partial W^\Lambda}, \quad \delta^2 = 0, \quad (1.27)$$

который является дифференцированием де Рама в пространстве-мишени  $\mathcal{M}$  с координатами  $W^\Lambda$ , и действует на  $\Omega(\mathcal{M})$  и градуированный как

$$\deg \delta = 0, \quad \text{Deg} \delta = 1. \quad (1.28)$$

Неочевидное, но важное свойство:  $\mathcal{Q}$  и  $\delta$  антикоммутируют.

$$\{\mathcal{Q}, \delta\} = 0. \quad (1.29)$$

Этот факт можно проверить напрямую

$$\left\{ G^\Lambda(W) \frac{\partial}{\partial W^\Lambda} - \delta W^\Omega \frac{\partial G^\Lambda(W)}{\partial W^\Omega} \frac{\partial}{\partial \delta W^\Lambda}, \delta W^\Phi \frac{\partial}{\partial W^\Phi} \right\} = -\delta W^\Omega \frac{\partial G^\Lambda(W)}{\partial W^\Omega} \frac{\partial}{\partial W^\Lambda} + \\ + \delta W^\Phi \frac{\partial G^\Lambda(W)}{\partial W^\Phi} \frac{\partial}{\partial W^\Lambda} - \left( \delta W^\Phi \frac{\partial}{\partial W^\Phi} \delta W^\Omega \frac{\partial G^\Lambda(W)}{\partial W^\Omega} \right) \frac{\partial}{\partial \delta W^\Lambda} = 0, \quad (1.30)$$

где члены с двумя дифференцированиями с правой стороны зануляются, т.к. представляют собой антикоммутаторы нечетных векторных полей.

Подобного результата можно было ожидать, если рассмотреть  $\mathcal{Q}$  как производную Ли вдоль векторного поля  $G^\Lambda(W)$  по формуле Картана:

$$\mathcal{Q} := [i_G, \delta] = \left[ G^\Omega(W) \frac{\partial}{\partial \delta W^\Omega}, \delta W^\Lambda \frac{\partial}{\partial W^\Lambda} \right], \quad (1.31)$$

из которого очевидно следует (1.29), используя второе свойство из (1.27).

Уравнение (1.29) означает, что можно ввести полное дифференцирование

$$Q_{tot} := \mathcal{Q} + \delta \quad (1.32)$$

которое также будет нильпотентным

$$Q_{tot}^2 = 0. \quad (1.33)$$

Следовательно, дифференциалы  $\mathcal{Q}$  и  $\delta$  образуют бикомплекс. Хотя дифференциалы  $\mathcal{Q}$  и  $\delta$  имеют разные градуировки (1.25), (1.28), полный дифференциал  $Q_{tot}$  согласован с суммарной градуировкой (1.19).

По определению (1.16) оператор  $\delta$  есть не что иное, как оператор вариации. Как следствие условия антикоммутации (1.29) для любого  $\mathcal{Q}$ -замкнутого  $\mathcal{L}$ , его вариация  $\delta \mathcal{L}$  также  $\mathcal{Q}$ -замкнута. Это значит, что для любого инвариантного функционала системы, его вариация  $\mathcal{Q}$ -замкнута. Следовательно, в расширенной системе уравнения Эйлера-Лагранжа требуют  $\delta$ -замкнутости  $\mathcal{L}$ , но лишь с

точностью до полной производной на мировом листе. Т.к. развернутые уравнения вне массовой оболочки (1.22) связывают пространственные производные с действием оператора  $\mathcal{Q}$ , то условие на уравнения Эйлера-Лагранжа записывается как

$$\delta\mathcal{L} + \mathcal{Q}\Phi = 0, \quad (1.34)$$

где некоторое  $\Phi$  подобрано таким образом, что левая часть (1.34) содержит вариации только примарных полей  $W^\Lambda$ , но не их производных. Так как непримарные поля выражаются как производные, добавление подходящей  $\mathcal{Q}$ -точной формы  $\mathcal{Q}\Phi$  позволяет избавиться от них, что напоминает процедуру интегрирования по частям в классическом курсе механики. Пример подобной процедуры будет приведен для скалярного поля в разделе 1.7.

### 1.5 Обратная задача

Пусть  $\mathcal{E}(\delta W, W)$  – один-форма в пространстве-мишени  $\mathcal{M}$  и  $d$ -форма в пространстве-времени  $M^d$

$$Deg \mathcal{E} = 1, \quad deg \mathcal{E} = d. \quad (1.35)$$

Описывает ли условие, задающееся уравнением

$$\int_{M^d} \mathcal{E}(\delta W(x), W(x)) = 0 \quad (1.36)$$

с произвольными  $\delta W(x)$  и  $W(x)$ , которые подчинены уравнениям (1.20) и (1.1) соответственно, калибровочно-инвариантные уравнения? По аналогии с действиями, рассмотренными в [40], интеграл (1.36) калибровочно инвариантен тогда и только тогда, когда форма  $\mathcal{E}$  –  $\mathcal{Q}$ -замкнута.

$$\mathcal{Q}\mathcal{E}(\delta W, W) = 0. \quad (1.37)$$

Видно, что уравнения Эйлера-Лагранжа (1.34) удовлетворяют условию выше по построению. Первый член замкнут из требования замкнутости лагранжиана (1.7), а второй является точным.  $\mathcal{Q}$ -точные формы  $\mathcal{E}(\delta W, W)$  после интегрирования дают (1.36) как полная производная (1.22). Эквивалентно, нетривиальные инвариантные уравнения описываются когомологиями  $Deg = 1 H(\mathcal{Q})$ .

Условие (1.34) можно переформулировать как необходимое условие, чтобы  $\mathcal{E}$  задавало уравнения Эйлера-Лагранжа. Форма  $\mathcal{E}$  должна быть равна вариации Лагранжиана с точностью до  $\mathcal{Q}$ -точной формы. Из нильпотентности  $\delta$  тогда следует

$$\delta\mathcal{E} = \mathcal{Q}\delta\Phi \quad (1.38)$$

с некоторым  $\delta\Phi$ . Если это условие не выполнено, то уравнения (1.36), задаваемые  $\mathcal{E}$  не могут быть получены как вариация функционала, т.е. они не лагранжевы.

Если выполнено уравнение (1.38), то можно показать, что  $\mathcal{E}$  соответствует уравнениям Эйлера-Лагранжа. Используя лемму Пуанкаре в пространстве-мишени для дифференциала де Рама  $\delta$ , уравнение (1.38) переписывается в виде

$$\mathcal{E} + \mathcal{Q}\Phi = \delta\chi. \quad (1.39)$$

Т.к.  $\mathcal{E}$  –  $\mathcal{Q}$ -замкнута

$$\delta\mathcal{Q}\chi = 0. \quad (1.40)$$

А т.к.  $\chi$ , и, соответственно,  $\mathcal{Q}\chi$  – ноль-формы в пространстве-мишени, то из (1.40) следует, что  $\mathcal{Q}\chi$  не зависит от  $W$ . Но для ненулевого  $\mathcal{Q}\chi$ ,  $deg(\mathcal{Q}\chi) > 0$ , что заведомо неверно, если  $\mathcal{Q}\chi$  константа. Из этого противоречия следует, что  $\mathcal{Q}\chi$  равно нулю, а значит

$$\chi = \mathcal{L} + \mathcal{Q}\phi \quad (1.41)$$

с некоторым  $\mathcal{L}$  из  $H(\mathcal{Q})$ . Отсюда следует

$$\mathcal{E} = \delta\mathcal{L} + \mathcal{Q}(\Phi + \delta\phi), \quad (1.42)$$

что есть ни что иное, как вариация (1.34) с правильно подобранным  $\Phi$ . В результате получаем теорему

*Теорема:*

Уравнения (1.36), заданные  $\mathcal{E}$ , являются уравнениям Эйлера-Лагранжа тогда и только тогда, когда выполнено (1.38).

После приведения к виду, когда все вариации сведены к вариациям примарных полей  $W_{pr}$  – т.е. полей, которые не выражаются как производные других

$$\int_{M^d} \delta W_{pr}^i(x) e_i(W) = 0, \quad (1.43)$$

с помощью соотношения (1.20) и добавления полных производных в виде  $\mathcal{Q}$ -точных членов (т.е. выразив все  $\delta W^\Lambda$  через производные  $\delta W_{pr}^i$  с помощью (1.20)), из уравнения (1.36) следуют ограничения на  $W^\Lambda$ , а, значит, и  $W_{pr}^i(x)$ ,

$$e_i(W) = 0. \quad (1.44)$$

Это и есть обычные уравнения Эйлера-Лагранжа.

Уравнения (1.44) определены на полях развернутой системы и, следовательно, наследуют часть калибровочных преобразований первоначальной развернутой системы, которые не меняют многообразие (1.44). Среди таких возможных калибровочных преобразований некоторые сами по себе пропорциональны уравнениям движения  $e_i(W)$ , задающим подмногообразие и действуют на поля на массовой оболочке подобно калибровочным преобразованиям из так называемых открытых алгебр.

Наконец, нужно отметить, что вместо наложения условий (1.36), приводящих систему на массовую оболочку, можно отфакторизовываться по ним, т.е. отбрасывать все члены, пропорциональные подобным выражениям. Хотя наивно может казаться, что оба подхода эквивалентны, но в бесконечномерном случае это может быть не так. Например, в теории высших спинов [63] (также обзор [54]) подход через факторизацию был использован относительно идеала в алгебре высших спинов, в то время как подход через ограничения на массовую поверхность был разобран в статье [58].

## 1.6 Фоновые поля

В предыдущих разделах все поля неявно полагались динамическими, что можно сделать для теорий, в которых содержится динамический гравитационный сектор, например для теории высших спинов. Однако в теории могут присутствовать и фоновые поля, например описывающие фоновую геометрию. Для координатно-независимого описания пространства Минковского в теории фоновая геометрия задаётся уравнениями Маурера-Картана для алгебры Пуанкаре. Эти уравнения записываются в форме развернутых уравнений, но задают фиксированный фон

$$de^n - \omega^{nm} e_m = 0, \quad d\omega^{nm} - \omega^{nk} \omega_k^m = 0, \quad (1.45)$$

где  $e^n$  и  $\omega^{mn}$  – один-формы тетрады и лоренцевской связности, соответственно. Можно зафиксировать декартовы координаты  $e^m = dx^m$  и  $\omega^{nm} = 0$ .

В общем положении полезно различать фоновые поля  $w^\alpha(x)$  и динамические поля  $W^\Omega(x)$ . В самом общем положении развернутые уравнения имеют вид

$$dw^\alpha(x) = g^\alpha(w(x)), \quad (1.46)$$

$$dW^\Omega(x) = G^\Omega(w(x), W(x)). \quad (1.47)$$

Здесь подсистема (1.46) является автономной,

$$\frac{\partial g^\alpha}{\partial W^\Omega} = 0 \quad (1.48)$$

а вариация по фоновым полям нулевая

$$\delta w^\alpha = 0. \quad (1.49)$$

Уравнения на динамические поля (1.47) содержат как фоновые, так и динамические поля. Различные допустимые выборы фоновых полей, как правило, эквивалентны. Например, разные решения уравнения Маурера-Картана (1.45) с невырожденной тетрадой  $e^n$  описывают всё то же пространство Минковского, но в разных координатных системах.

Вариационная задача для набора полей, включающих фоновые, ставится только в отношении динамических полей с вариациями  $\delta W^\Omega$ , вариации для фоновых полей  $w^\alpha$  отсутствуют. Другие детали не претерпевают изменений из-за треугольного вида уравнений (1.46), (1.47). Это приводит к виду условий совместности

$$g^\alpha(w) \frac{\partial g^\beta(w)}{\partial w^\alpha} = 0, \quad (1.50)$$

$$g^\alpha(w) \frac{\partial G^\Omega(w, W)}{\partial w^\alpha} + G^\Omega(w, W) \frac{\partial G^\Omega(w, W)}{\partial W^\Lambda} = 0 \quad (1.51)$$

которые (вместе с условием (1.49)) позволяют определить дифференциалы  $Q$  и  $\mathcal{Q}$

$$Q = g^\alpha(w) \frac{\partial}{\partial w^\alpha} + G^\Omega(w, W) \frac{\partial}{\partial W^\Omega}, \quad Q^2 = 0, \quad (1.52)$$

$$\mathcal{Q} = g^\alpha(w) \frac{\partial}{\partial w^\alpha} + G^\Omega(w, W) \frac{\partial}{\partial W^\Omega} - \delta W^\Omega \frac{\partial G^\Lambda(w, W)}{\partial W^\Omega} \frac{\partial}{\partial \delta W^\Lambda}, \quad \mathcal{Q}^2 = 0. \quad (1.53)$$

Т.к. фоновые поля не варьируются, оператор  $\delta$ , определенный на динамических полях, не меняется

$$\delta = \delta W^\Omega \frac{\partial}{\partial W^\Omega}, \quad \delta^2 = 0 \quad (1.54)$$

и всё также удовлетворяет антикоммутиационным соотношениям бикомплекса (1.29).

## 1.7 Пример скалярного поля

Приведенное построение можно проиллюстрировать на примере скалярного поля, для которого хорошо изучен развернутый формализм [40; 64]. Развернутая система строится по уравнениям

$$dC(y, x) = dx^m \frac{\partial}{\partial y^m} C(y, x) \quad (1.55)$$

для которых можно ввести производящую функцию  $C(y, x)$

$$C(y, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} C_{m_1 \dots m_n}(x) y^{m_1} \dots y^{m_n}. \quad (1.56)$$

Легко показать, что эта система лежит вне массовой оболочки [40]. Настоящее скалярное поле в этой системе – нулевая компонента производящей функции  $C(x) := C(0, x)$  и является примарным полем, в то время как все остальные компоненты производящей функции (1.56) выражаются как производные  $C(x)$  через уравнение (1.55).

Систему можно привести на массовую оболочку, потребовав, например,

$$C_m^m = 0, \quad (1.57)$$

что эквивалентно наложению уравнения Клейна-Гордона  $\square C(x) = 0$  на примарное поле, что видно из уравнения (1.55).

Вводя фоновые поля, подчиненные уравнениям Маурера-Картана для алгебры Пуанкаре (1.45), как было описано в предыдущем разделе, уравнение (1.55) может быть переписано в координатно-независимом виде:

$$dC(y, x) = (\omega_{nm} y^n \frac{\partial}{\partial y_m} + e^m \frac{\partial}{\partial y^m}) C(y, x). \quad (1.58)$$

Следуя предписанию из раздела 1.3, можно расширить систему на вариации динамического поля

$$d\delta C(y, x) = -\delta C_m(y, x) (\omega_n^m y^n + e^m), \quad (1.59)$$

где

$$\delta C_m(y, x) = \delta \frac{\partial}{\partial y^m} C(y, x). \quad (1.60)$$

Форма инвариантного функционала действия для скалярного поля также известна [40].

$$\mathcal{L} = e^{n_1} e^{n_2} \dots e^{n_d} \epsilon_{n_1 \dots n_d} l(C, C_n, C_{nm}, \dots), \quad (1.61)$$

где  $l$  – произвольная лоренц-инвариантная функция. Условие лоренц-инвариантности следует из требования, что члены в правой части, зависящие от  $\omega^{nm}$ , должны сократиться после действия оператора  $Q$ , который строится по развернутым уравнениям (1.45) для плоской связности и (1.58) как

$$QC(y, x) = (\omega_{nm} y^n \frac{\partial}{\partial y_m} + e^m \frac{\partial}{\partial y^m}) C(y, x), \quad (1.62)$$

$$Qe^n = \omega^{nm} e_m, \quad (1.63)$$

$$Q\omega^{nm} = \omega^{nk} \omega_k^m. \quad (1.64)$$

В членах с тетрадой действие  $Q$  зануляется, т.к.  $\mathcal{L}$  – форма высшей степени и уже содержит  $d$  тетрад. В обычных терминах,  $l$  – произвольна лоренц-инвариантная функция, составленная из поля  $C(x)$  и его производных.

Для вариаций  $\delta C(y, x)$ , для которых необходимо записать соответствующие уравнения, можно расширить дифференциал  $Q$  до  $\mathcal{Q}$ , который совпадает с  $Q$  на полях  $C$ ,  $e^n$ ,  $\omega^{nm}$ , а на вариациях действует как

$$\mathcal{Q}\delta C(y, x) = -\delta C_m(y, x)(\omega_n^m y^n + e^m). \quad (1.65)$$

Теперь рассмотрим знакомое по классическому курсу механики лоренц-инвариантное действие для скалярного поля

$$l = C_m C^m.$$

Как известно, его вариация даёт правильные уравнения движения после избавления от полной производной. В терминах развернутых систем это добавление соответствующего  $\mathcal{Q}$ -точного члена.

Эту программу легко выполнить в декартовых координатах. Вариация действия

$$\begin{aligned} (\delta C_m) e^{n_1} e^{n_2} \dots e^{n_d} \epsilon_{n_1 \dots n_d} C^m &= d(\delta C_m) e^m e^{n_2} \dots e^{n_d} \epsilon_{n_1 \dots n_d} C^{n_1} = \\ &- \mathcal{Q}(d(\delta C) e^{n_2} \dots e^{n_d} \epsilon_{n_1 \dots n_d} C^{n_1}) + d(\delta C) e^m e^{n_2} \dots e^{n_d} \epsilon_{n_1 \dots n_d} C^m, \end{aligned} \quad (1.66)$$

явно  $\mathcal{Q}$ -замкнута (в этой формуле  $d$  – размерность пространства-времени). Она также  $\delta$ -точна по построению, т.к.  $e^i$  и  $\delta C$  нечетные, т.е. антикоммутирующие, элементы.

Отбрасывая  $\mathcal{Q}$ -точный член

$$\mathcal{E} = (\delta C)e^{n_1}e^{n_2}\dots e^{n_d}\epsilon_{n_1\dots n_d}C_m^m, \quad (1.67)$$

что при приравнивании нулю эквивалентно уравнению Клейна-Гордона в виде (1.57).

Выбор лагранжиана  $l$  в (1.61), однако, произвольный, как было отмечено в работе [40]. Лагранжианы из одного класса  $\mathcal{Q}$ -когомологии дают эквивалентные уравнения движения, т.к. отличаются на  $\mathcal{Q}$ -точную форму, не дающую вклад после интегрирования. Выбор же лагранжиана из другого когомологического класса даст отличные уравнения движения, в которых могут появиться член массы, нетривиальный потенциал, члены с производными высших порядков и/или члены с взаимодействием. Например,  $l = C_k C^k + m^2 C^2$ , как легко показать, даёт уравнения движения для массивного скаляра, в то время как функция Лагранжа  $l = C_{kl} C^{kl}$  накладывает уравнение с высшими производными  $\square^2 C(x) = 0$ . Это хороший пример того, что система вне массовой оболочки задаёт лишь симметрии скалярного поля, в то время как вся динамика определяется выбором условия массовой оболочки – в данном случае различных функций Лагранжа для скалярного поля.

Чтобы проиллюстрировать действенность критерия лагранжестности из раздела 1.5 приведем пример, когда он даёт отрицательный вывод. Для этого введем два скалярных поля со следующими уравнениями.

$$\mathcal{E} = e^{n_1}e^{n_2}\dots e^{n_d}\epsilon_{n_1,\dots,n_d}((\delta C_1)C_{1m}^m + (\delta C_2)C_{2m}^m + \delta C_2 C_1). \quad (1.68)$$

Эти уравнения  $\mathcal{E}$  Пуанкаре-инвариантны, а значит  $\mathcal{Q}$ -замкнутые. Их отличительной особенностью является несимметричный член взаимодействия. Вариация уравнения

$$\delta \mathcal{E} = e^{n_1}e^{n_2}\dots e^{n_d}\epsilon_{n_1,\dots,n_d}((\delta C_{1m}^m)(\delta C_1) + (\delta C_{2m}^m)(\delta C_2) + \delta C_1 \delta C_2). \quad (1.69)$$

Т.к. поля  $\delta C_1$  и  $\delta C_2$  примарные, так как являются образом примарных полей  $C_1$  и  $C_2$ , под действием дифференциала  $\delta$  не существует функции  $\Phi$ , которая бы разрешала (1.38), что означает нарушение условия теоремы из 1.5, следовательно, уравнения нелагранжевы, что очевидно из вида члена взаимодействия.

Дополняя член взаимодействия  $\delta C_2 C_1$  до симметричного вида  $\delta C_2 C_1 + \delta C_1 C_2$ , делает уравнения (1.68) лагранжевыми.

## 1.8 Выводы

В этой главе были описаны различия между развернутыми системами на массовой оболочке и вне её. Было предложено расширение развернутой системы с помощью дополнительных полей со сдвинутой градуировкой, благодаря чему на системе можно ввести дополнительный дифференциал  $\delta$  и структуру бикомплекса. В когомологических терминах определяется лагранжиан системы, а условия, переводящие систему на массовую оболочку, представлены как условия замкнутости функции Лагранжа относительно дополнительного дифференциала  $\delta$  (аналог условия экстремальности в классической механике) с точностью до  $\mathcal{Q}$ -точных членов (аналог полных производных).

Новым элементом по сравнению с работами [7; 8; 59] является перенос вариационной структуры непосредственно на пространство-мишень в развернутой системе, без предварительного знания действия или BV формулировки.

Для развернутой системы, расширенной вариациями доказан глобальный критерий лагранжевости уравнений, в этом смысле получена когомологическая формулировка обратной вариационной задачи. Полученные результаты распространены на случай с фоновыми (нединамическими) полями и проиллюстрированы на примере различных действий для скалярного поля.

## Глава 2

### Пертурбативный анализ уравнений высших спинов

Теории высших спинов – калибровочные теории поля, спектр которых включает калибровочные поля всех целых и полуцелых спинов. Нелинейные уравнения, описывающие безмассовые взаимодействующие поля всех спинов, были найдены в работах [6; 31]. Вакуумным решением этих уравнений служит максимально симметричное пространство постоянной кривизны  $(A)dS_4$ . По ряду соображений (например, унитарности) будем рассматривать только пространство отрицательной кривизны  $AdS_4$ . Радиус  $AdS_4$  является размерным параметром, что позволяет обезразмерить вершины с произвольным числом производных, из-за чего теория высших спинов не является локальной в обычном смысле. Вместо требования локальности (конечного числа производных) следует требовать так называемой спин-локальности, т.е. локальности для любого конечного набора спинов. Как конструктивно показано в работах [32–35; 44; 45; 65] требование спин-локальности можно удовлетворить в низших порядках. В первом порядке спин-локальность во вспомогательных спинорных переменных эквивалентна спин-локальности в пространстве времени. При выполнении некоторого условия так называемой проективной компактности этот результат можно распространить и на более высокие порядки [66].

В подходе [57] калибровочные поля высших спинов в  $AdS_4$  описываются дифференциальной один-формой  $\omega(Y; K|x)$ , в то время как поля материи кодируются ноль-формой  $C(Y; K|x)$ . Помимо пространственно-временной координаты  $x$  поля зависят от вспомогательных коммутирующих спинорных переменных  $Y_A = (y_\mu, \bar{y}_{\dot{\mu}})$ ,  $\mu, \dot{\mu} = 1, 2$ , и операторов Клейна  $K = (k, \bar{k})$ . Как  $\omega(Y; K|x)$ , так и  $C(Y; K|x)$  – регулярные функции  $Y^A$ , которые играют роль производящих функций для компонентных полей

$$F(Y; K|x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{n!m!} F^{\mu_1 \dots \mu_n, \dot{\mu}_1 \dots \dot{\mu}_m}(K|x) y_{\mu_1} \dots y_{\mu_n} \bar{y}_{\dot{\mu}_1} \dots \bar{y}_{\dot{\mu}_m}, \quad (2.1)$$

$F = \omega(Y; K|x)$  или  $C(Y; K|x)$ . Операторы Клейна задают автоморфизм системы, удваивают набор полей и определяют вид ковариантной производной, действующей на поле. Подробнее о них будет изложено в следующей главе.

Развернутая формулировка свободных полей высших спинов в секторе один-форм (что эквивалентно линейной вершине в развернутой системе) называется Первой Теоремой о массовой оболочке [57] (исчерпывающее рассмотрение в статье [67]).

$$R^{\mu(n), \dot{\mu}(m)}(x) = \delta_{0,n} h_{\nu \dot{\mu}} h^{\nu}_{\dot{\mu}} \bar{C}^{\dot{\mu}(m+2)}(x) + \delta_{0,m} h_{\mu \dot{\nu}} h^{\dot{\nu}}_{\mu} C^{\mu(n+2)}(x). \quad (2.2)$$

В записи используются символы Кронекера

$$\delta_{0,n} = \begin{cases} 1, & \text{при } n = 0, \\ 0, & \text{при } n \neq 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Дифференциальные формы перемножаются исключительно внешним произведением, символ опущен для краткости. Полностью симметричные мультиспиноры компактно записываются как  $\omega_{\mu(n), \dot{\mu}(m)}(x) = \omega_{\mu_1 \dots \mu_n, \dot{\mu}_1 \dots \dot{\mu}_m}(x)$ . Спинорные индексы поднимаются и опускаются спинорной метрикой по следующим правилам:  $A^\mu = \epsilon^{\mu\nu} A_\nu$ ,  $A_\mu = A^\nu \epsilon_{\nu\mu}$ ,  $\epsilon_{\nu\mu} = -\epsilon_{\mu\nu}$ ,  $\epsilon_{12} = \epsilon^{12} = 1$  (аналогично для антиголоморфных индексов). Кривизна (2.2) определяется как

$$R^{\mu(n), \dot{\mu}(m)}(x) := D_L \omega^{\mu(n), \dot{\mu}(m)}(x) + \lambda (n h^\mu_{\dot{\rho}}(x) \omega^{\mu(n-1), \dot{\rho} \dot{\mu}(m)}(x) + m h_{\dot{\rho}}^{\dot{\mu}}(x) \omega^{\rho \mu(n), \dot{\mu}(m-1)}(x)), \quad (2.4)$$

где  $\lambda$  – обратный радиус  $AdS$ , а  $D_L = d_x + \varpi + \bar{\varpi}$  – Лоренц-ковариантная производная, с дифференциалом де Рама по пространству-времени  $d_x$  и картановской спин-связностью  $(\varpi \oplus \bar{\varpi})$

$$D_L \omega_{\mu(n), \dot{\mu}(m)}(x) := d_x \omega_{\mu(n), \dot{\mu}(m)}(x) + n \varpi_\mu^\nu(x) \omega_{\nu \mu(n-1), \dot{\mu}(m)}(x) + m \bar{\varpi}_{\dot{\mu}}^{\dot{\nu}}(x) \omega_{\mu(n), \dot{\nu} \dot{\mu}(m-1)}(x).$$

Полевые компоненты спинов  $s = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots$  закодированы в ноль-формах  $C(Y; K|x)$  и один-формах  $\omega(Y; K|x)$

$$\omega^{\mu(n), \dot{\mu}(m)}(x) : n + m = 2(s - 1), \quad C^{\mu(n), \dot{\mu}(m)}(x) : |n - m| = 2s. \quad (2.5)$$

Поля Фронсдала описываются с помощью обобщённого реперного поля  $\omega^{\mu(n), \dot{\mu}(m)}(x)$ , где  $n = m$  в бозонном случае и  $|n - m| = 1$  в фермионном, другие значения  $n, m$  описывают производные поля Фронсдала. Также для описа-

ния необходимы напряжённости  $C(Y; K|x)$ , которые описывают калибровочно-инвариантные комбинации производных поля Фронсдала, что напрямую следует из Первой теоремы о массовой оболочке (2.2) и уравнения ковариантного постоянства:

$$\tilde{D}C(Y; K|x) := \left( D_L - \lambda h^{\mu\dot{\mu}} \left( y_\mu \bar{y}_{\dot{\mu}} + \frac{\partial^2}{\partial y^\mu \partial \bar{y}^{\dot{\mu}}} \right) \right) C(Y; K|x) = 0, \quad (2.6)$$

где

$$C(Y; K|x) = -C(Y; -K|x), \quad (2.7)$$

Эти уравнения (вместе с (2.2)) образуют полный набор свободных уравнений высших спинов для всех безмассовых полей на фоне  $AdS_4$ .

Из-за специфики «упаковки» компонентных полей в  $C$  и  $\omega$ , для любого фиксированного спина  $s$  максимальное число производных поля Фронсдала, закодированных в  $\omega^{\mu(n), \dot{\mu}(m)}(x)$  равно  $[s] - 1$ , в то время как для ноль-формы  $C^{\mu(n), \dot{\mu}(m)}(x) - \frac{n+m}{2} - \{s\}$ . Используя (2.5), можно заключить, что для каждого спина  $s$  есть конечный набор полей в  $\omega(Y; K|x)$ , но обязательно бесконечный набор в  $C(Y; K|x)$ , что и является причиной нелокальности.

Для анализа (спин-)локальности (в том числе в высших порядках) необходимо сохранять форму свободных уравнений (2.2). Действительно, не любая схема теории возмущений гарантированно воспроизводит вид свободных уравнений (2.2). Возможно продеформировать правую часть (2.2) [57], чтобы добиться её выражения через другие компоненты поля  $C(Y; K|x)$ . Но для физической интерпретации важна форма свободных уравнений, которую придётся восстановить некоторым переопределением полей в секторе ноль-форм  $C(Y; K|x)$ , физический смысл такого переопределения не ясен с точки зрения локальности, т.к. перемешивает компонентные поля разных рангов. Как следствие, анализ локальности вершин высшего порядка затруднён, пока не сделано переопределение полей, восстанавливающее Первую теорему о массовой оболочке именно в виде (2.2). Тем самым чрезвычайно важно сохранять свободные уравнения в виде (2.2) и делать лишь переопределения полей, сохраняющие вид Первой теоремы о массовой оболочке.

Для анализа уравнений высших спинов весьма удобно применять развёрнутый формализм [57]

$$d_x \omega = -\omega * \omega + \Upsilon(\omega, \omega, C) + \Upsilon(\omega, \omega, C, C) + \dots, \quad (2.8)$$

$$d_x C = -[\omega, C]_* + \Upsilon(\omega, C, C) + \dots, \quad (2.9)$$

где  $*$  обозначает мойяловское звёздочное произведение в алгебре высших спинов [68]

$$f(Y) * g(Y) = f(Y) e^{i\epsilon^{AB} \overleftarrow{\partial}_A \overrightarrow{\partial}_B} g(Y). \quad (2.10)$$

(см. также обзор в [30])

В формулировке производящей системы (предложена в [31]), получение вершин в правой части развернутых уравнений (2.8), (2.9) сводится к последовательному разрешению дифференциальных уравнений первого порядка относительно вспомогательной спинорной переменной, записанных с помощью нильпотентного дифференциала. Очевидно, из-за нильпотентности задача решается с точностью до точных форм и калибровочных преобразований. Свобода в выборе представителя кохомологии отвечает свободе переопределения полей системы. Таким образом, функциональный произвол в выборе полей, в которых записана система, переходит в произвол выбора гомотопической процедуры, с помощью которой разрешается уравнение. Наивный выбор сдвиговой гомотопии с нулевым параметром успешно воспроизводит свободные уравнения, но в высших порядках приводит к нелокальным вершинам [69]. Как было показано в [32], [34] существует, однако, подходящий выбор сдвиговой гомотопии, который понижает степень нелокальности в вершинах высшего порядка. Оператор сдвиговой гомотопии, помимо разрешения дифференциального уравнения, содержит выбор представителя гомотопии, различные выборы связаны друг с другом переопределением полей  $\omega(Y; K|x)$  и  $C(Y; K|x)$ . Сдвиговая гомотопия успешно применена для достижения спин-локальности в низших порядках теории возмущений [34; 35; 44; 45]. До сих пор в литературе был рассмотрен подкласс возможных сдвигов, зависящих только от аргументов поля  $C(Y; K|x)$ .

В данной главе, основанной на работе [52], будет рассмотрен более широкий класс аргументов оператора сдвиговой гомотопии, включающий производные по аргументу один-формы  $\omega(Y; K|x)$ . При этом линейный анализ в секторе ноль-форм  $C(Y; K|x)$ , параметризующих линейаризованные калибровочно-инвариантные кривизны, будет удерживаться в виде, сохраняющем форму Первой теоремы о массовой оболочке (2.2), т.к. в обратном случае будет нарушена интерпретация  $C(Y; K|x)$  в терминах производных поля Фронсдала, закодированного в  $\omega(Y; K|x)$ , что, как было отмечено выше, потребует замены, нарушающей локальность выражений. Это сильное условие ограничивает выбор поле-

вых переменных так, чтобы сохранить правую часть (2.2). Однако, будет показано, что сдвиги только на аргумент поля  $\omega$  не только сохраняют вид вершины, но вообще не меняют её с точностью до добавления точной формы. В то же время будет выделен класс согласованных сдвигов на аргументы полей  $C(Y; K|x)$  и  $\omega(Y; K|x)$ , продуцирующий новый однопараметрический класс ультралокальных вершин.

## 2.1 Уравнения высших спинов

Как уже было сказано, в реперном подходе к теории высших спинов в  $AdS_4$  для описания системы используются производящие функции: один-форма  $\omega(y, \bar{y}; K|x)$  и ноль-форма  $C(y, \bar{y}; K|x)$ , которые представляют собой ряды по вспомогательным  $sp(4)$  спинорам  $Y_A = (y_\mu, \bar{y}_{\dot{\mu}})$ , а также могут зависеть от операторов Клейна  $K = (k, \bar{k})$ . В основе алгебры высших спинов лежит так называемое звёздочное произведение, которое будет использоваться в вейлевском упорядочении во всей диссертации (2.10) с  $sp(4)$  инвариантной билинейной формой  $\epsilon^{AB} = (\epsilon^{\mu\nu}, \epsilon^{\dot{\mu}\dot{\nu}})$ . Звёздочное произведение задаёт на спинорах  $Y_A$  следующие условия коммутации.

$$[y_\mu, y_\nu]_* = 2i\epsilon_{\mu\nu}, \quad [\bar{y}_{\dot{\mu}}, \bar{y}_{\dot{\nu}}]_* = 2i\epsilon_{\dot{\mu}\dot{\nu}}, \quad [y_\mu, \bar{y}_{\dot{\nu}}]_* = 0. \quad (2.11)$$

Следуя оригинальной работе [31], необходимо ввести в систему ещё одну пару вспомогательных спиноров  $Z_A = (z_\mu, \bar{z}_{\dot{\mu}})$  и обобщить звёздочное произведение на расширенный набор переменных

$$(f * g)(Z, Y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int dU dV f(Z + U, Y + U) g(Z - V, Y + V) e^{iU_A V^A}. \quad (2.12)$$

Для функций, зависящих только от  $Y_A$ , это определение совпадает с определением (2.10). Условия коммутации пополняются до

$$[Y_A, Y_B]_* = -[Z_A, Z_B]_* = 2i\epsilon_{AB}, \quad [Y_A, Z_B]_* = 0. \quad (2.13)$$

Полная производящая система, приведённая в [31], имеет вид

$$d_x W + W * W = 0, \quad (2.14)$$

$$d_x S + [W, S]_* = 0, \quad (2.15)$$

$$d_x B + [W, B]_* = 0, \quad (2.16)$$

$$S * S = i(\theta^A \theta_A + \eta B * \gamma + \bar{\eta} B * \bar{\gamma}), \quad (2.17)$$

$$[S, B]_* = 0, \quad (2.18)$$

с калибровочными преобразованиями

$$\delta W = d\xi + [W, \xi]_* \quad (2.19)$$

$$\delta B = [B, \xi]_*, \quad (2.20)$$

$$\delta S = [S, \xi]_*. \quad (2.21)$$

Здесь вводятся мастер-поля:  $W(Z, Y; K|x)$  – один-форма для записи полей  $\omega(Y; K|x)$  и  $B(Z, Y; K|x)$  – ноль-форма, кодирующая  $C(Y; K|x)$ . Пространственная ноль-форма  $S(Z, Y; K|x)$  играет вспомогательную роль, она является один-формой по дополнительному дифференциалу по переменной  $Z^A - dZ^A$ , для удобства обозначаемого как  $\theta^A = (\theta^\mu, \bar{\theta}^{\dot{\mu}})$ , которые несут в себе дополнительную градуировку 1 и антикоммутируют между собой и с дифференциалом де Рама,

$$\{\theta_A, \theta_B\} = \{\theta_A, d_x\} = 0. \quad (2.22)$$

В алгебре высших спинов есть центральные элементы  $\gamma$  и  $\bar{\gamma}$ , появляющиеся в правой части (2.17)

$$\gamma = e^{iz_\mu y^\mu} k \theta^\nu \theta_\nu, \quad \bar{\gamma} = e^{i\bar{z}_{\dot{\mu}} \bar{y}^{\dot{\mu}}} \bar{k} \bar{\theta}^{\dot{\nu}} \bar{\theta}_{\dot{\nu}} \quad (2.23)$$

Параметр  $\eta$  – свободный комплексный фазовый параметр, т.е.  $\eta \bar{\eta} = 1$ . Любые значения, кроме  $\eta = 1$  или  $\eta = i$ , нарушают четность в нелинейной теории высших спинов [70]. Операторы Клейна  $K = (k, \bar{k})$  определены соотношениями

$$\{k, y_\mu\} = \{k, z_\mu\} = 0, \quad [k, \bar{y}_{\dot{\mu}}] = [k, \bar{z}_{\dot{\mu}}] = 0, \quad k^2 = 1, \quad (2.24)$$

$$\{\theta_\mu, k\} = [\bar{\theta}_{\dot{\mu}}, k] = 0, \quad [k, \bar{k}] = 0, \quad (2.25)$$

и аналогично для  $\bar{k}$ . Из свойства  $k^2 = \bar{k}^2 = 1$  можно заключить, что зависимость от операторов Клейна  $k$  и  $\bar{k}$  в полях не выше квадратичной. Это позволяет

разделить поля на физические и топологические сектора по свойствам четности относительно операторов Клейна

$$W(Z, Y; K|x) = W(Z, Y; -K|x), \quad B(Z, Y; K|x) = -B(Z, Y; -K|x). \quad (2.26)$$

## 2.2 Теория возмущений

Развернутые уравнения (2.8), (2.9) получаются из нелинейной системы теории высших спинов (2.14)-(2.18) с помощью теории возмущений. Нулевой порядок задаётся вакуумным решением вида

$$W_0 = \Omega = \frac{i}{4}(\omega_{\mu\nu}(x)y^\mu y^\nu + \bar{\omega}_{\dot{\mu}\dot{\nu}}(x)\bar{y}^{\dot{\mu}}\bar{y}^{\dot{\nu}} + 2\lambda h_{\mu\dot{\mu}}(x)y^\mu\bar{y}^{\dot{\mu}}), \quad (2.27)$$

$$B_0 = 0, \quad (2.28)$$

$$S_0 = \theta^A Z_A. \quad (2.29)$$

Мастер-поля  $W_0, B_0, S_0$  решают уравнения (2.14)-(2.18), если отождествить  $\omega_{\mu\nu}(x), \bar{\omega}_{\dot{\mu}\dot{\nu}}(x)$  со спин-связностью  $AdS_4$  и  $h_{\mu\dot{\mu}}(x)$  с тетрадой  $AdS_4$ . Будем полагать радиус  $AdS$  равным единице и опускать в формулах  $\lambda = 1$ . Коммутатор произвольного поля с полем  $S_0$  пропорционален дифференциалу де Рама  $d_Z$

$$[S_0, f(Z, Y; K)]_* = -2i\theta^A \frac{\partial}{\partial Z^A} f(Z, Y; K) = -2id_Z f(Z, Y; K). \quad (2.30)$$

Уравнение (2.18) в первом порядке имеет вид

$$[S_0, B_1]_* + [S_1, B_0]_* = 0. \quad (2.31)$$

Из (2.28) и (2.30) следует, что  $B_1$  не зависит от  $Z$ , эта часть поля является полем  $C(Y; K|x) = B_1$  в развернутой системе. Тогда уравнение производящей системы (2.16) сводится к

$$d_x C(Y; K|x) + [\Omega, C(Y; K|x)]_* = 0, \quad (2.32)$$

которое даёт уравнение ковариантного постоянства (2.6) в физическом секторе по операторам Клейна. В топологическом секторе  $C(Y; K|x) = C(Y; -K|x)$  уравнение ковариантного постоянства выглядит иначе

$$\left( D_L + h^{\mu\dot{\mu}}(y_\mu \bar{\partial}_{\dot{\mu}} + \bar{y}_{\dot{\mu}} \partial_\mu) \right) C(Y; K|x) = 0. \quad (2.33)$$

Для топологических один-форм  $\omega(Y; K|x) = -\omega(Y; -K|x)$ , Первая теорема о массовой оболочке принимает вид [31]

$$R^{top}_{\alpha_1 \dots \alpha_n, \dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_m}(x) = - \left[ \delta_{0,n} m(m-1) h_{\gamma \dot{\beta}_1} \wedge h^{\gamma \dot{\beta}_2} \bar{C}_{\dot{\beta}_3 \dots \dot{\beta}_m}(x) + \delta_{0,m} n(n-1) h_{\alpha_1 \dot{\delta}} \wedge h_{\alpha_2}^{\dot{\delta}} C_{\alpha_3 \dots \alpha_n}(x) \right], \quad (2.34)$$

где

$$R^{top}_{\alpha_1 \dots \alpha_n, \dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_m}(x) = D_L \omega_{\alpha_1 \dots \alpha_n, \dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_m}(x) - h_{\alpha_1 \dot{\beta}_1}(x) \omega_{\alpha_2 \dots \alpha_n, \dot{\beta}_2 \dots \dot{\beta}_m}(x) - (n+1)(m+1) h^{\mu \dot{\mu}}(x) \omega_{\mu \alpha_1 \dots \alpha_n, \dot{\mu} \dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_m}(x). \quad (2.35)$$

Для выражения  $S_1$  через  $C$  необходимо разрешить уравнение (2.17)

$$-2id_Z S_1 = i\eta C * \gamma + i\bar{\eta} C * \bar{\gamma}. \quad (2.36)$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение с внешним дифференциалом  $d_Z$ . Решение для такого уравнения фиксируется выбором класса когомологии и представителя в нём. Уравнение общего положения

$$d_Z f(Z, Y; K; \theta) = g(Z, Y; K; \theta) \quad (2.37)$$

с совместной правой частью  $d_Z g(Z, Y; K; \theta) = 0$  решается гомотопическим трюком [71]. Можно проверить, что правая часть (2.36) совместна, т.е.  $d_Z$ -замкнута. Введём нильпотентный оператор [34]

$$\partial = (Z^A + Q^A) \frac{\partial}{\partial \theta^A}, \quad (2.38)$$

где  $Q$  может быть оператором, удовлетворяющим условию

$$\frac{\partial Q^B}{\partial Z^A} = 0. \quad (2.39)$$

Рассмотрим его антикоммутиатор с  $d_Z$

$$N = d_Z \partial + \partial d_Z = \theta^A \frac{\partial}{\partial \theta^A} + (Z^A + Q^A) \frac{\partial}{\partial Z^A} \quad (2.40)$$

и построим почти обратный к нему оператор

$$N^* g(Z, Y; \theta) := \int_0^1 \frac{dt}{t} g(tZ - (1-t)Q, Y; t\theta), \quad (2.41)$$

который хорошо определён при

$$g(-Q, Y; 0) = 0. \quad (2.42)$$

Сжимающий оператор гомотопии тогда можно определить как

$$\Delta_Q := \partial N^*, \quad \Delta_Q g(Z, Y; \theta) = (Z^A + Q^A) \frac{\partial}{\partial \theta^A} \int_0^1 \frac{dt}{t} g(tZ - (1-t)Q, Y; t\theta). \quad (2.43)$$

Он удовлетворяет соотношению

$$\{d_Z, \Delta_Q\} = 1 - h_Q \quad (2.44)$$

с проектором  $h_Q$

$$h_Q f(Z; \theta) = f(-Q; 0). \quad (2.45)$$

Тогда из разложения единицы можно восстановить одно из решений (2.37)

$$f = \Delta_Q g \quad (2.46)$$

с требованием

$$h_Q g = 0, \quad (2.47)$$

что выполнено для конкретного уравнения в теории высших спинов. Общее решение (2.37) получается добавлением точного и когомологического членов

$$f(Z, Y; \theta) = \Delta_Q g(Z, Y; \theta) + h(Y) + d_Z \epsilon(Z, Y; \theta), \quad (2.48)$$

Здесь  $h(Y)$  – представитель когомологии, а  $\epsilon(Z, Y; \theta)$  – параметр, дающий в уравнении  $d_Z$ -точный член. Выбор различных  $Q$  влияет на выбор  $h$  и  $\epsilon$  в решении. Можно сказать, что выбор  $Q$  в (2.46) неявно задаёт выбор полевых переменных, что, как было оговорено, важно для анализа локальности. Стандартная гомотопия, получающаяся при нулевом параметре  $Q = 0$ , введенная в [31], воспроизводит Первую теорему о массовой оболочке, однако нетривиальные сдвиги необходимы для получения локальных выражений в более высоких порядках теории возмущений [32; 33; 35].

### 2.3 Сдвиговая гомотопия

Пользуясь результатами [34], приведём свойства операторов  $\Delta_Q$  и  $h_Q$  из предыдущего раздела. Во-первых, операторы  $\Delta_Q$  и  $\Delta_P$  антикоммутируют

$$\Delta_Q \Delta_P = -\Delta_P \Delta_Q, \quad (2.49)$$

и удовлетворяют соотношению с  $h_Q$ ,

$$h_P \Delta_Q = -h_Q \Delta_P. \quad (2.50)$$

Забывая про антиголоморфные переменные  $(Z_A, Y_A, K) \rightarrow (z_\mu, y_\mu, k)$ , можно записать действие  $\Delta_b \Delta_a$  и  $h_c \Delta_b \Delta_a$  в виде гомотопических интегралов

$$\Delta_b \Delta_a f(z, y) \theta^\mu \theta_\mu = 2 \int_{[0,1]^3} d^3 \tau \delta(1 - \tau_1 - \tau_2 - \tau_3) (z + b)_\nu (z + a)^\nu f(\tau_1 z - \tau_3 b - \tau_2 a, y), \quad (2.51)$$

$$h_c \Delta_b \Delta_a f(z, y) \theta^\mu \theta_\mu = 2 \int_{[0,1]^3} d^3 \tau \delta(1 - \tau_1 - \tau_2 - \tau_3) (b - c)_\nu (a - c)^\nu f(-\tau_1 c - \tau_3 b - \tau_2 a, y). \quad (2.52)$$

Выражение (2.52) гарантирует следующее важное свойство для произвольного параметра  $\kappa$

$$h_{(\kappa+1)q_2 - \kappa q_1} \Delta_{q_2} \Delta_{q_1} = 0. \quad (2.53)$$

В анализе системы высших спинов важно применение формул (2.51), (2.52) к центральному элементу  $\gamma$

$$\Delta_b \Delta_a \gamma = 2 \int_{[0,1]^3} d^3 \tau \delta(1 - \tau_1 - \tau_2 - \tau_3) (z + b)_\nu (z + a)^\nu e^{i(\tau_1 z - \tau_2 a - \tau_3 b)_\mu y^\mu} k, \quad (2.54)$$

$$h_c \Delta_b \Delta_a \gamma = 2 \int_{[0,1]^3} d^3 \tau \delta(1 - \tau_1 - \tau_2 - \tau_3) (b - c)_\nu (a - c)^\nu e^{-i(\tau_1 c + \tau_2 a + \tau_3 b)_\mu y^\mu} k. \quad (2.55)$$

Ещё одно свойство  $\Delta_Q$  и  $h_P$  [34], которое требуется для доказательства того, что вершины уравнений не зависят от вспомогательного спинора  $z$

$$(\Delta_d - \Delta_c) (\Delta_a - \Delta_b) \gamma = (h_d - h_c) \Delta_a \Delta_b \gamma. \quad (2.56)$$

Из него следует

$$(\Delta_c \Delta_b - \Delta_c \Delta_a + \Delta_b \Delta_a) \gamma = h_c \Delta_b \Delta_a \gamma. \quad (2.57)$$

Неочевидное свойство гомотопического оператора было получено впервые в [34], оно носит название формулы звёздочного обмена и выполняется для функций, не зависящих от  $z$

$$\Delta_{q+\alpha y} (C(y; k) * \phi(z, y; k; \theta)) = C(y; k) * \Delta_{q+(1-\alpha)p+\alpha y} \phi(z, y; k; \theta), \quad (2.58)$$

$$\Delta_{q+\alpha y}(\phi(z, y; k; \theta) * k^m * C(y; k)) = \Delta_{q+(-1)^m(1-\alpha)p+\alpha y}(\phi(z, y; k; \theta)) * k^m * C(y; k). \quad (2.59)$$

Здесь введено обозначение для дифференцирования по полному аргументу ноль-формы

$$p_\mu C(Y; K) = C(Y; K)p_\mu := -i \frac{\partial}{\partial y^\mu} C(Y; K). \quad (2.60)$$

Частный вид формул звёздочного обмена для центрального элемента  $\gamma$  даёт

$$\Delta_q \gamma * C(y; k) = C(y; k) * \Delta_{q+2p} \gamma. \quad (2.61)$$

Аналогичные формулы имеют место для проектора  $h_q$

$$h_{q+\alpha y}(C(y; k) * \phi(z, y; k; \theta)) = C(y; k) * h_{q+(1-\alpha)p+\alpha y} \phi(z, y; k; \theta), \quad (2.62)$$

$$h_{q+\alpha y}(\phi(z, y; k; \theta) * k^m * C(y; k)) = h_{q+(-1)^m(1-\alpha)p+\alpha y}(\phi(z, y; k; \theta)) * k^m * C(y; k). \quad (2.63)$$

## 2.4 Параметры сдвига общего положения

Для расширения пространства допустимых сдвигов теперь необходимо вычислить вершину  $\Upsilon(\omega, \omega, C)$  с параметрами сдвига по аргументу поля  $\omega$ . Используя обозначения [34]

$$t_\mu \omega(Y; K|x) = -i \frac{\partial}{\partial y^\mu} \omega(Y; K|x). \quad (2.64)$$

Пертурбативный анализ системы начинается с уравнения на  $S_1$  (2.36). Решение (2.46) фиксируется выбором  $Q^\mu = q^\mu + \alpha y^\mu + \lambda p^\mu$  с произвольными константами  $q^\mu$ ,  $\alpha$ ,  $\lambda$ . Тогда поле  $S_1$  разбивается на голоморфную и антиголоморфную части  $S_1 = S_1^\eta + S_1^{\bar{\eta}}$ . Будем рассматривать голоморфный (т.е. независимый от  $\bar{\eta}$ ) сектор

$$S_1^\eta = -\frac{\eta}{2} \Delta_{q+\alpha y+\lambda p}(C * \gamma). \quad (2.65)$$

Далее решается следующий порядок уравнения на  $W$  (2.15)

$$d_z W_1^\eta = -\frac{i}{2} (d_x S_1^\eta + \omega * S_1^\eta + S_1^\eta * \omega). \quad (2.66)$$

Уравнение (2.66) разбивается на две подсистемы. Как было показано в [57], развернутые уравнения высших спинов остаются совместными для произвольной ассоциативной алгебры, в которой принимают значения поля  $\omega$  и  $C$ , что

означает наличие структуры так называемой  $A_\infty$ -алгебры [72; 73]. Следовательно, уравнения выполнены по отдельности

$$d_z W_1^{\eta(1)} = -\frac{i}{2} (d_x S_1^\eta|_{\omega * C} + \omega * S_1^\eta), \quad (2.67)$$

$$d_z W_1^{\eta(2)} = -\frac{i}{2} (d_x S_1^\eta|_{C * \omega} + S_1^\eta * \omega). \quad (2.68)$$

То, что уравнения (2.67) и (2.68) совместны по-отдельности, может быть проверено напрямую, используя уравнение (2.16) с важным замечанием, что из члена  $d_x d_z S_1^\eta$ , который разбивается на сумму, необходимо взять только то слагаемое, в котором имеется правильное упорядочивание полей  $\omega$  и  $C$ , как они появляются в (2.32).

Из подобного разделения системы следует, что можно применять независимые сдвиги для разных компонент поля  $W_1^\eta$ . Включим в решение уравнений (2.67) и (2.68) сдвиг, зависящий от  $t$ , т.е. полный параметр гомотопического оператора как  $Q_i^\mu = l_i^\mu + n_i t^\mu + \beta_i y^\mu$  (где  $l_i^\mu$  – константа). В статье [34] было показано, что однородные сдвиги вида  $\Delta_{\gamma(p+y)}$  в полях  $S$  и  $W$  не изменяют вид вершины любого порядка как следствие звёздочных формул обмена. Произвол на подобные однородные сдвиги позволяет зафиксировать сдвиг  $p$  в поле  $W_1$  нулём, так что выбранное решение является максимально общим выбором параметров сдвига с точки зрения вида вершин. В общем положении оба упорядочивания в поле  $W_1$  должны быть решены одной и той же гомотопической процедурой. Однако разрешён выбор разных сдвигов, т.к. любой сдвиг  $n_i$  сохраняет условия совместности неизменными, в то время как сдвиги,  $\beta_i y$ , как будет показано позднее, должны зануляться. Итого,

$$W_1^{\eta(1)} = \frac{1}{2i} \Delta_{l_1+n_1 t+\beta_1 y} (d_x S_1^\eta|_{\omega * C} + \omega * S_1^\eta), \quad (2.69)$$

$$W_1^{\eta(2)} = \frac{1}{2i} \Delta_{l_2+n_2 t+\beta_2 y} (d_x S_1^\eta|_{C * \omega} + S_1^\eta * \omega) \quad (2.70)$$

с некоторыми константами  $l_i^\mu$  и  $n_i$ . Подставляя (2.65) и используя звёздочные формулы обмена (2.58), (2.59), (2.61), можно получить

$$W_1^{\eta(1)} = \frac{\eta}{4i} \omega * C * \Delta_{l_1+n_1 t+\beta_1 y+(1-\beta_1)(t+p)} (\Delta_{\tilde{q}+(1-\alpha+\lambda)p} - \Delta_{\tilde{q}+(1-\alpha+\lambda)(t+p)}) \gamma, \quad (2.71)$$

$$W_1^{\eta(2)} = \frac{\eta}{4i} C * \omega * \Delta_{l_2+n_2 t+\beta_2 y+(1-\beta_2)(p+t)} (\Delta_{\tilde{q}+(1-\alpha+\lambda)(t+p)} - \Delta_{\tilde{q}+(1-\alpha+\lambda)p+2t}) \gamma, \quad (2.72)$$

с  $\tilde{q} = q + \alpha y$ .

Перейдём теперь к уравнению (2.14). В первом порядке

$$d\omega + \omega * \omega + dW_1^\eta + \omega * W_1^\eta + W_1^\eta * \omega = 0, \quad (2.73)$$

где поле  $W_1^\eta$  состоит из двух слагаемых  $W_1^\eta = W_1^{\eta(1)} + W_1^{\eta(2)}$ . Подставляя (2.71) и (2.72) и применяя формулы (2.57), (2.58), (2.59), (2.61) можно получить линейные вершины

$$d\omega + \omega * \omega + \Upsilon^\eta(\omega, \omega, C) + \Upsilon^\eta(C, \omega, \omega) + \Upsilon^\eta(\omega, C, \omega) = 0. \quad (2.74)$$

Прямое вычисление даёт [52]

$$\begin{aligned} \Upsilon^\eta(\omega, \omega, C) = & \frac{\eta}{4i} \omega * \omega * C * \\ & * \left[ h_{l_1+n_1(t_1+t_2)+\beta_1 y+(1-\beta_1)(p+t_1+t_2)} \Delta_{\tilde{q}+(1-\alpha+\lambda)(t_1+t_2+p)} \Delta_{\tilde{q}+(1-\alpha+\lambda)p} \gamma + \right. \\ & + h_{l_1+n_1 t_1+\beta_1 y+(1-\beta_1)(p+t_1+t_2)} \Delta_{\tilde{q}+(1-\alpha+\lambda)(t_2+p)} \Delta_{\tilde{q}+(1-\alpha+\lambda)(t_1+t_2+p)} \gamma + \\ & + h_{l_1+n_1 t_2+\beta_1 y+(1-\beta_1)(p+t_2)} \Delta_{\tilde{q}+(1-\alpha+\lambda)p} \Delta_{\tilde{q}+(1-\alpha+\lambda)(t_2+p)} \gamma + \\ & \left. + h_{\tilde{q}+(1-\alpha+\lambda)p} \Delta_{\tilde{q}+(1-\alpha+\lambda)(t_1+t_2+p)} \Delta_{\tilde{q}+(1-\alpha+\lambda)(t_2+p)} \gamma \right], \quad (2.75) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Upsilon^\eta(C, \omega, \omega) = & \frac{\eta}{4i} C * \omega * \omega * \\ & * \left[ h_{l_2+n_2 t_2+\beta_2 y+(1-\beta_2)(p+t_1+t_2)} \Delta_{\tilde{q}+(1-\alpha+\lambda)(t_1+t_2+p)} \Delta_{\tilde{q}+(1-\alpha+\lambda)(t_1+p)+2t_2} \gamma + \right. \\ & + h_{l_2+n_2(t_1+t_2)+\beta_2 y+(1-\beta_2)(p+t_1+t_2)} \Delta_{\tilde{q}+(1-\alpha+\lambda)p+2t_1+2t_2} \Delta_{\tilde{q}+(1-\alpha+\lambda)(t_1+t_2+p)} \gamma + \\ & + h_{l_2+n_2 t_1+\beta_2 y+(1-\beta_2)(p+t_1)+2t_2} \Delta_{\tilde{q}+(1-\alpha+\lambda)(t_1+p)+2t_2} \Delta_{\tilde{q}+(1-\alpha+\lambda)p+2t_1+2t_2} \gamma + \\ & \left. + h_{\tilde{q}+(1-\alpha+\lambda)p+2t_1+2t_2} \Delta_{\tilde{q}+(1-\alpha+\lambda)(t_1+p)+2t_2} \Delta_{\tilde{q}+(1-\alpha+\lambda)(t_1+t_2+p)} \gamma \right], \quad (2.76) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Upsilon^\eta(\omega, C, \omega) = & \frac{\eta}{4i} \omega * C * \omega * \\ & * \left[ h_{\tilde{q}+(1-\alpha)(t_1+t_2+p)} \Delta_{\tilde{q}+(1-\alpha+\lambda)(t_1+p)+2t_2} \Delta_{\tilde{q}+(1-\alpha+\lambda)(t_2+p)} \gamma + \right. \\ & + h_{\tilde{q}+(1-\alpha+\lambda)(t_1+p)+2t_2} \Delta_{\tilde{q}+(1-\alpha+\lambda)p+2t_2} \Delta_{\tilde{q}+(1-\alpha+\lambda)(t_2+p)} \gamma + \\ & + h_{l_1+n_1 t_1+\beta_1 y+(1-\beta_1)(t_1+t_2+p)} \Delta_{\tilde{q}+(1-\alpha+\lambda)(t_1+t_2+p)} \Delta_{\tilde{q}+(1-\alpha+\lambda)(t_2+p)} \gamma + \\ & + h_{l_2+n_2 t_2+\beta_2 y+(1-\beta_2)(p+t_1+t_2)} \Delta_{\tilde{q}+(1-\alpha+\lambda)(t_1+p)+2t_2} \Delta_{\tilde{q}+(1-\alpha+\lambda)(t_1+t_2+p)} \gamma + \\ & + h_{l_1+n_1 t_1+\beta_1 y+(1-\beta_1)(p+t_1)+2t_2} \Delta_{\tilde{q}+(1-\alpha+\lambda)p+2t_2} \Delta_{\tilde{q}+(1-\alpha+\lambda)(t_1+p)+2t_2} \gamma + \\ & \left. + h_{l_2+n_2 t_2+\beta_2 y+(1-\beta_2)(p+t_2)} \Delta_{\tilde{q}+(1-\alpha+\lambda)(t_2+p)} \Delta_{\tilde{q}+(1-\alpha+\lambda)p+2t_2} \gamma \right]. \quad (2.77) \end{aligned}$$

Можно сделать некоторые упрощения. Например, константные сдвиги можно положить равными нулю  $l_i^\mu = q^\mu = 0$ , т.к. при ненулевых значениях  $l_i^\mu$  и  $q^\mu$  нарушается лоренцовская ковариантность. Это происходит за счет того, что с ненулевыми параметрами появляются члены с  $\omega h$  в вершинах, а значит лоренцовская связность входит в выражение явно, а не только через ковариантную производную.

Теперь применим (2.55) и вычислим звездочные произведения в (2.75)-(2.77). Для удобства введены следующие обозначения показателей экспонент

$$\varkappa_{\omega\omega C}(y, t_i, p) = y^\mu(t_1 + t_2 + p)_\mu + t_1^\mu t_{2\mu} + (t_1 + t_2)^\mu p_\mu, \quad (2.78)$$

$$\varkappa_{\omega C\omega}(y, t_i, p) = y^\mu(t_1 + t_2 + p)_\mu + t_1^\mu p_\mu + (t_1 + p)^\mu t_{2\mu}, \quad (2.79)$$

$$\varkappa_{C\omega\omega}(y, t_i, p) = y^\mu(t_1 + t_2 + p)_\mu + p^\mu t_{1\mu} + (t_1 + p)^\mu t_{2\mu}. \quad (2.80)$$

В итоге вершины приобретают вид [52]

1) Члены  $\omega * \omega * C$

$$\begin{aligned} & \omega * \omega * C * h_{n_1(t_1+t_2)+\beta_1 y+(1-\beta_1)(p+t_1+t_2)} \Delta_{\alpha y+(1-\alpha+\lambda)(t_1+t_2+p)} \Delta_{\alpha y+(1-\alpha+\lambda)p} \gamma = \\ & = 2\omega \bar{*} \omega \bar{*} C \int_{[0,1]^3} d^3 \tau_i \delta(1 - \sum_{i=1}^3 \tau_i) (1 - \alpha + \lambda) \left[ (\alpha - \beta_1) y^\mu (t_1 + t_2)_\mu - \lambda p_\mu (t_1 + t_2)^\mu \right] \\ & \exp\{i \varkappa_{\omega\omega C}(y, t_i, p)\} \exp \left[ -i(y + t_1 + t_2 + p)^\nu (\tau_1 [n_1(t_1 + t_2) + (1 - \beta_1)(p + t_1 + t_2)] + \right. \\ & \quad \left. + \tau_2 [(1 - \alpha + \lambda)p] + \tau_3 [(1 - \alpha + \lambda)(t_1 + t_2 + p)]) \right]_\nu k, \quad (2.81) \end{aligned}$$

где остаточное звёздочное произведение по антропоморфным переменным  $\bar{y}_\mu$  обозначено как  $\bar{*}$

$$f(\bar{y}) \bar{*} g(\bar{y}) = f(\bar{y}) e^{i\epsilon^{\mu\nu} \overleftarrow{\partial}_\mu \overrightarrow{\partial}_\nu} g(\bar{y}), \quad (2.82)$$

$$\begin{aligned} & \omega * \omega * C * h_{n_1 t_1 + \beta_1 y + (1 - \beta_1)(p + t_1 + t_2)} \Delta_{\alpha y + (1 - \alpha + \lambda)(t_2 + p)} \Delta_{\alpha y + (1 - \alpha + \lambda)(t_1 + t_2 + p)} \gamma = \\ & = 2\omega \bar{*} \omega \bar{*} C \int_{[0,1]^3} d^3 \tau_i \delta(1 - \sum_{i=1}^3 \tau_i) (\alpha - 1 - \lambda) \left[ (\alpha - \beta_1) y^\mu t_{1\mu} - \lambda (p + t_2)_\mu t_1^\mu \right] \\ & \exp\{i \varkappa_{\omega\omega C}(y, t_i, p)\} \exp \left[ -i(y + t_1 + t_2 + p)^\nu (\tau_1 [n_1 t_1 + (1 - \beta_1)(p + t_1 + t_2)] + \right. \\ & \quad \left. + \tau_2 [(1 - \alpha + \lambda)(t_1 + t_2 + p)] + \tau_3 [(1 - \alpha + \lambda)(t_2 + p)]) \right]_\nu k, \quad (2.83) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \omega * \omega * C * h_{n_1 t_2 + \beta_1 y + (1 - \beta_1)(p + t_2)} \Delta_{\alpha y + (1 - \alpha + \lambda)p} \Delta_{\alpha y + (1 - \alpha + \lambda)(t_2 + p)} \gamma = \\
& = 2\omega^* \bar{\omega}^* C \int_{[0,1]^3} d^3 \tau_i \delta\left(1 - \sum_{i=1}^3 \tau_i\right) (\alpha - 1 - \lambda) \left[ (\alpha - \beta_1)(y + t_1)^\mu t_{2\mu} - \lambda p_\mu t_2^\mu \right] \\
& \exp\{i\mathcal{X}_{\omega\omega C}(y, t_i, p)\} \exp\left[-i(y + t_1 + t_2 + p)^\nu (\tau_1[n_1 t_2 + (1 - \beta_1)(p + t_2)] + \right. \\
& \quad \left. + \tau_2[(1 - \alpha + \lambda)(t_2 + p)] + \tau_3[(1 - \alpha + \lambda)p])_\nu\right] k, \quad (2.84)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \omega * \omega * C * h_{\alpha y + (1 - \alpha + \lambda)p} \Delta_{\alpha y + (1 - \alpha + \lambda)(t_1 + t_2 + p)} \Delta_{\alpha y + (1 - \alpha + \lambda)(t_2 + p)} \gamma = \\
& = 2\omega^* \bar{\omega}^* C \int_{[0,1]^3} d^3 \tau_i \delta\left(1 - \sum_{i=1}^3 \tau_i\right) (\alpha - 1 - \lambda)^2 t_2^\mu t_{1\mu} \exp\{i\mathcal{X}_{\omega\omega C}(y, t_i, p)\} \\
& \exp\left[-i(y + t_1 + t_2 + p)^\nu (\tau_1[(1 - \alpha + \lambda)p] + \tau_2[(1 - \alpha + \lambda)(t_2 + p)] + \right. \\
& \quad \left. + \tau_3[(1 - \alpha + \lambda)(t_1 + t_2 + p)])_\nu\right] k. \quad (2.85)
\end{aligned}$$

2) Члены  $\omega * C * \omega$

$$\begin{aligned}
& \omega * C * \omega * h_{\alpha y + (1 - \alpha + \lambda)(t_1 + t_2 + p)} \Delta_{\alpha y + (1 - \alpha + \lambda)(t_1 + p) + 2t_2} \Delta_{\alpha y + (1 - \alpha + \lambda)(t_2 + p)} \gamma = \\
& = 2\omega^* \bar{C}^* \bar{\omega} \int_{[0,1]^3} d^3 \tau_i \delta\left(1 - \sum_{i=1}^3 \tau_i\right) (1 + \alpha - \lambda)(\alpha - 1 - \lambda) t_1^\mu t_{2\mu} \\
& \exp\{i\mathcal{X}_{\omega C \omega}(y, t_i, p)\} \exp\left[-i(y + t_1 + t_2 + p)^\nu (\tau_1[(1 - \alpha + \lambda)(t_1 + t_2 + p)] + \right. \\
& \quad \left. + \tau_2[(1 - \alpha + \lambda)(t_2 + p)] + \tau_3[(1 - \alpha + \lambda)(t_1 + p) + 2t_2])_\nu\right] k, \quad (2.86)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \omega * C * \omega * h_{\alpha y + (1 - \alpha + \lambda)(t_1 + p) + 2t_2} \Delta_{\alpha y + (1 - \alpha + \lambda)p + 2t_2} \Delta_{\alpha y + (1 - \alpha + \lambda)(t_2 + p)} \gamma = \\
& = 2\omega^* \bar{C}^* \bar{\omega} \int_{[0,1]^3} d^3 \tau_i \delta\left(1 - \sum_{i=1}^3 \tau_i\right) (\alpha + 1 - \lambda)(\alpha - 1 - \lambda) t_1^\mu t_{2\mu} \\
& \exp\{i\mathcal{X}_{\omega C \omega}(y, t_i, p)\} \exp\left[-i(y + t_1 + t_2 + p)^\nu (\tau_1[(1 - \alpha + \lambda)(t_1 + p) + 2t_2] + \right. \\
& \quad \left. + \tau_2[(1 - \alpha + \lambda)(t_2 + p)] + \tau_3[(1 - \alpha + \lambda)p + 2t_2])_\nu\right] k, \quad (2.87)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \omega * C * \omega * h_{n_1 t_1 + \beta_1 y + (1 - \beta_1)(p + t_1 + t_2)} \Delta_{\alpha y + (1 - \alpha + \lambda)(t_1 + t_2 + p)} \Delta_{\alpha y + (1 - \alpha + \lambda)(t_2 + p)} \gamma = \\
& = -2\omega \bar{*} C \bar{*} \omega \int_{[0,1]^3} d^3 \tau_i \delta(1 - \sum_{i=1}^3 \tau_i) (\alpha - 1 - \lambda) \left[ (\alpha - \beta_1) y^\mu t_{1\mu} + \lambda (p + t_2)^\mu t_{1\mu} \right] \\
& \exp\{i\kappa_{\omega C \omega}(y, t_i, p)\} \exp \left[ -i(y + t_1 + t_2 + p)^\nu (\tau_1 [n_1 t_1 + (1 - \beta_1)(p + t_1 + t_2)] + \right. \\
& \quad \left. + \tau_2 [(1 - \alpha + \lambda)(t_2 + p)] + \tau_3 [(1 - \alpha + \lambda)(t_1 + t_2 + p)]) \right]_\nu k, \quad (2.88)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \omega * C * \omega * h_{n_2 t_2 + \beta_2 y + (1 - \beta_2)(p + t_1 + t_2)} \Delta_{\alpha y + (1 - \alpha + \lambda)(t_1 + p) + 2t_2} \Delta_{\alpha y + (1 - \alpha + \lambda)(t_1 + t_2 + p)} \gamma = \\
& = 2\omega \bar{*} C \bar{*} \omega \int_{[0,1]^3} d^3 \tau_i \delta(1 - \sum_{i=1}^3 \tau_i) (\alpha + 1 - \lambda) \left[ (\alpha - \beta_2) y^\mu t_{2\mu} + \lambda (p + t_1)^\mu t_{2\mu} \right] \\
& \exp\{i\kappa_{\omega C \omega}(y, t_i, p)\} \exp \left[ -i(y + t_1 + t_2 + p)^\nu (\tau_1 [n_2 t_2 + (1 - \beta_2)(t_1 + t_2 + p)] + \right. \\
& \quad \left. + \tau_2 [(1 - \alpha + \lambda)(t_1 + t_2 + p)] + \tau_3 [(1 - \alpha + \lambda)(t_1 + p) + 2t_2]) \right]_\nu k, \quad (2.89)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \omega * C * \omega * h_{n_1 t_1 + \beta_1 y + (1 - \beta_1)(p + t_1) + 2t_2} \Delta_{\alpha y + (1 - \alpha + \lambda)p + 2t_2} \Delta_{\alpha y + (1 - \alpha + \lambda)(t_1 + p) + 2t_2} \gamma = \\
& = 2\omega \bar{*} C \bar{*} \omega \int_{[0,1]^3} d^3 \tau_i \delta(1 - \sum_{i=1}^3 \tau_i) (\alpha - 1 - \lambda) \left[ (\alpha - \beta_1) (y + t_2)^\mu t_{1\mu} + \lambda p^\mu t_{1\mu} \right] \\
& \exp\{i\kappa_{\omega C \omega}(y, t_i, p)\} \exp \left[ -i(y + t_1 + t_2 + p)^\nu (\tau_1 [n_1 t_1 + (1 - \beta_1)(p + t_1) + 2t_2] + \right. \\
& \quad \left. + \tau_2 [(1 - \alpha + \lambda)p + 2t_2] + \tau_3 [(1 - \alpha + \lambda)(t_1 + p) + 2t_2]) \right]_\nu k, \quad (2.90)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \omega * C * \omega * h_{n_2 t_2 + \beta_2 y + (1 - \beta_2)(p + t_2)} \Delta_{\alpha y + (1 - \alpha + \lambda)(t_2 + p)} \Delta_{\alpha y + (1 - \alpha + \lambda)p + 2t_2} \gamma = \\
& = -2\omega \bar{*} C \bar{*} \omega \int_{[0,1]^3} d^3 \tau_i \delta(1 - \sum_{i=1}^3 \tau_i) (\alpha + 1 - \lambda) \left[ (\alpha - \beta_2) (y + t_1)^\mu t_{2\mu} + \lambda p^\mu t_{2\mu} \right] \\
& \exp\{i\kappa_{\omega C \omega}(y, t_i, p)\} \exp \left[ -i(y + t_1 + t_2 + p)^\nu (\tau_1 [n_2 t_2 + (1 - \beta_2)(p + t_2)] + \right. \\
& \quad \left. + \tau_2 [(1 - \alpha + \lambda)p + 2t_2] + \tau_3 [(1 - \alpha + \lambda)(t_2 + p)]) \right]_\nu k. \quad (2.91)
\end{aligned}$$

3) Члены  $C * \omega * \omega$

$$\begin{aligned}
& C * \omega * \omega * h_{n_2 t_2 + \beta_2 y + (1 - \beta_2)(t_1 + t_2 + p)} \Delta_{\alpha y + (1 - \alpha + \lambda)(t_1 + t_2 + p)} \Delta_{\alpha y + (1 - \alpha + \lambda)(t_1 + p) + 2t_2} \gamma = \\
& = -2C \bar{*} \omega \bar{*} \omega \int_{[0,1]^3} d^3 \tau_i \delta(1 - \sum_{i=1}^3 \tau_i) (\alpha + 1 - \lambda) \left[ (\alpha - \beta_2) y^\mu t_{2\mu} - \lambda (p + t_1)_\mu t_2^\mu \right] \\
& \exp\{i\chi_{C\omega\omega}(y, t_i, p)\} \exp \left[ -i(y + t_1 + t_2 + p)^\nu (\tau_1 [n_2 t_2 + (1 - \beta_2)(t_1 + t_2 + p)] + \right. \\
& \quad \left. + \tau_2 [(1 - \alpha + \lambda)(t_1 + p) + 2t_2] + \tau_3 [(1 - \alpha + \lambda)(t_1 + t_2 + p)]) \right]_\nu k, \quad (2.92)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& C * \omega * \omega * h_{n_2(t_1 + t_2) + \beta_2 y + (1 - \beta_2)(p + t_1 + t_2)} \Delta_{\alpha y + (1 - \alpha + \lambda)p + 2t_1 + 2t_2} \Delta_{\alpha y + (1 - \alpha + \lambda)(t_1 + t_2 + p)} \gamma = \\
& = 2C \bar{*} \omega \bar{*} \omega \int_{[0,1]^3} d^3 \tau_i \delta(1 - \sum_{i=1}^3 \tau_i) (\alpha + 1 - \lambda) \left[ (\alpha - \beta_2) y^\mu (t_1 + t_2)_\mu - \lambda p_\mu (t_1 + t_2)^\mu \right] \\
& \exp\{i\chi_{C\omega\omega}(y, t_i, p)\} \exp \left[ -i(y + t_1 + t_2 + p)^\nu (\tau_1 [n_2(t_1 + t_2) + (1 - \beta_2)(p + t_1 + t_2)] + \right. \\
& \quad \left. + \tau_2 [(1 - \alpha + \lambda)(t_1 + t_2 + p)] + \tau_3 [(1 - \alpha + \lambda)p + 2t_1 + 2t_2]) \right]_\nu k, \quad (2.93)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& C * \omega * \omega * h_{n_2 t_1 + \beta_2 y + (1 - \beta_2)(p + t_1) + 2t_2} \Delta_{\alpha y + (1 - \alpha + \lambda)(t_1 + p) + 2t_2} \Delta_{\alpha y + (1 - \alpha + \lambda)p + 2t_1 + 2t_2} \gamma = \\
& = -2C \bar{*} \omega \bar{*} \omega \int_{[0,1]^3} d^3 \tau_i \delta(1 - \sum_{i=1}^3 \tau_i) (\alpha + 1 - \lambda) \left[ (\alpha - \beta_2) (y + t_2)^\mu t_{1\mu} - \lambda p_\mu t_1^\mu \right] \\
& \exp\{i\chi_{C\omega\omega}(y, t_i, p)\} \exp \left[ -i(y + t_1 + t_2 + p)^\nu (\tau_1 [n_2 t_1 + (1 - \beta_2)(p + t_1) + 2t_2] + \right. \\
& \quad \left. + \tau_2 [(1 - \alpha + \lambda)p + 2t_1 + 2t_2] + \tau_3 [(1 - \alpha + \lambda)(t_1 + p) + 2t_2]) \right]_\nu k, \quad (2.94)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& C * \omega * \omega * h_{\alpha y + (1 - \alpha + \lambda)p + 2t_1 + 2t_2} \Delta_{\alpha y + (1 - \alpha + \lambda)(t_1 + p) + 2t_2} \Delta_{\alpha y + (1 - \alpha + \lambda)(t_1 + t_2 + p)} \gamma = \\
& = 2C \bar{*} \omega \bar{*} \omega \int_{[0,1]^3} d^3 \tau_i \delta(1 - \sum_{i=1}^3 \tau_i) (1 + \alpha - \lambda)^2 t_2^\mu t_{1\mu} \exp\{i\chi_{C\omega\omega}(y, t_i, p)\} \\
& \exp \left[ -i(y + t_1 + t_2 + p)^\nu (\tau_1 [(1 - \alpha + \lambda)p + 2t_1 + 2t_2] + \right. \\
& \quad \left. + \tau_2 [(1 - \alpha + \lambda)(t_1 + t_2 + p)] + \tau_3 [(1 - \alpha + \lambda)(t_1 + p) + 2t_2]) \right]_\nu k. \quad (2.95)
\end{aligned}$$

Прослеживаются схожие черты у вершин с разным упорядочиванием полей, которые происходят из антиавтоморфизма  $\rho$  на алгебре высших спинов

$$\rho\left(f(Z, Y; K; \theta)\right) = f(-iZ, iY; K; -i\theta), \quad (2.96)$$

который явно оставляет инвариантными полные нелинейные уравнения высших спинов (2.14)-(2.18) [30]. Легко проверить, что применение такого антиавтоморфизма в композиции с заменой  $\alpha \leftrightarrow -\alpha$ ,  $t_1 \leftrightarrow t_2$ ,  $n_1 \leftrightarrow -n_2$ ,  $\lambda \leftrightarrow -\lambda$  и  $\beta_1 \leftrightarrow -\beta_2$  переводит одни вершины в другие. Более конкретно, вершины  $\Upsilon^\eta(\omega, \omega, C)$  переходят в вершины  $\Upsilon^\eta(C, \omega, \omega)$ , в то время как половина вершин  $\Upsilon^\eta(\omega, C, \omega)$  переходит во вторую половину с тем же упорядочением.

## 2.5 Допустимые параметры гомотопического сдвига

В предыдущем разделе были исключены ненулевые спиноры  $q^\mu$  или  $l_i^\mu$  из соображений лоренцевской инвариантности. Параметры  $\alpha$ ,  $\lambda$  и  $\beta_i$  требуют дополнительного анализа. Для сохранения формы Первой теоремы о массовой оболочке для  $AdS$ -фона  $\omega = \Omega$  вершины должны не зависеть от  $y$ , т.е. иметь вид:  $h_\mu^{\dot{\mu}} h^{\mu\dot{\nu}} \bar{\partial}_{\dot{\mu}} \bar{\partial}_{\dot{\nu}} C(0, \bar{y} | x)$  или  $h_\mu^{\dot{\mu}} h^{\mu\dot{\nu}} \bar{y}_{\dot{\mu}} \bar{y}_{\dot{\nu}} C(0, \bar{y} | x)$  в голоморфном секторе. Следовательно, необходимо проследить за зависимостью от  $y$  в полях  $C$ , образующих вершину. Для этого рассмотрим произведение двух фоновых полей  $\Omega$  и одного  $C$ , следя за видом  $hh\bar{\partial}\bar{\partial}C$ . Как было уже отмечено, аргументы полей  $\Omega$  и  $C$  могут быть вынесены в экспоненту, воспроизводя формулу Тейлора

$$f(a) = \exp\left(a \frac{d}{db}\right) f(b) \Big|_{b=0} \quad (2.97)$$

с вспомогательной переменной  $b$ . Для применения в вершине введем вспомогательные  $y_1$  и  $y_2$  для аргументов фоновых  $\Omega$  в упорядоченном произведении. Раскладывая произведение тетрад в базисные неприводимые два-формы как

$$h^{\nu\dot{\nu}} h^{\lambda\dot{\lambda}} = \frac{1}{2} H^{\nu\lambda} \epsilon^{\dot{\nu}\dot{\lambda}} + \frac{1}{2} \bar{H}^{\dot{\nu}\dot{\lambda}} \epsilon^{\nu\lambda}, \quad (2.98)$$

где базисные два-формы определены как

$$H^{\nu\lambda} = H^{(\nu\lambda)} := h_{\dot{\gamma}}^{\nu} h^{\lambda\dot{\gamma}}, \quad \bar{H}^{\dot{\nu}\dot{\lambda}} = H^{(\dot{\nu}\dot{\lambda})} := h_{\gamma}^{\dot{\nu}} h^{\gamma\dot{\lambda}}. \quad (2.99)$$

Легко проследить, что в голоморфном секторе присутствует только второй член формулы (2.98). Проецируясь на эту компоненту

$$\Omega^* \bar{\Omega}^* C \Big|_{\bar{H} \bar{\partial}^2} = C^* \bar{\Omega}^* \bar{\Omega} \Big|_{\bar{H} \bar{\partial}^2} = \frac{1}{8} \bar{H}^{\dot{\mu}\dot{\nu}} y_{1\nu} y_2^\nu \bar{\partial}_\mu \bar{\partial}_\nu C(0, \bar{y}; k, \bar{k}), \quad (2.100)$$

$$\Omega^* C^* \bar{\Omega} \Big|_{\bar{H} \bar{\partial}^2} = -\frac{1}{8} \bar{H}^{\dot{\mu}\dot{\nu}} y_{1\nu} y_2^\nu \bar{\partial}_\mu \bar{\partial}_\nu C(0, \bar{y}; -k, -\bar{k}). \quad (2.101)$$

Вспомогательные переменные  $y_{1,2}$  введены таким образом, что билинейные комбинации с операторами сдвига  $y^\mu t_{i\mu}$ ,  $p^\mu t_{i\mu}$  и  $t_1^\mu t_{2\mu}$  заменяют вспомогательные  $y_{1,2}$  "настоящим"  $y^\mu$ , производными по аргументам  $p^\mu$  или задают свертки с помощью  $t_1^\mu t_{2\mu}$ . Во всех вершинах предэкспонента содержит один из таких билинейных членов  $y^\mu t_{i\mu}$ ,  $p^\mu t_{i\mu}$  или  $t_1^\mu t_{2\mu}$ . Действие  $y^\mu t_{i\mu}$  и  $p^\mu t_{i\mu}$  на два фоновых поля  $\Omega$  и одно поле  $C$ , образующих вершину:

$$y^\mu t_{1\mu} \Omega^* \bar{\Omega}^* C \Big|_{\bar{H} \bar{\partial}^2} = y^\mu t_{1\mu} C^* \bar{\Omega}^* \bar{\Omega} \Big|_{\bar{H} \bar{\partial}^2} = \frac{i}{8} \bar{H}^{\dot{\mu}\dot{\nu}} y_\nu y_2^\nu \bar{\partial}_\mu \bar{\partial}_\nu C(0, \bar{y}; k, \bar{k}), \quad (2.102)$$

$$y^\mu t_{1\mu} \Omega^* C^* \bar{\Omega} \Big|_{\bar{H} \bar{\partial}^2} = -\frac{i}{8} \bar{H}^{\dot{\mu}\dot{\nu}} y_\nu y_2^\nu \bar{\partial}_\mu \bar{\partial}_\nu C(0, \bar{y}; -k, -\bar{k}), \quad (2.103)$$

$$p^\mu t_{1\mu} \Omega^* \bar{\Omega}^* C \Big|_{\bar{H} \bar{\partial}^2} = p^\mu t_{1\mu} C^* \bar{\Omega}^* \bar{\Omega} \Big|_{\bar{H} \bar{\partial}^2} = \frac{i}{8} \bar{H}^{\dot{\mu}\dot{\nu}} p_\nu y_2^\nu \bar{\partial}_\mu \bar{\partial}_\nu C(0, \bar{y}; k, \bar{k}), \quad (2.104)$$

$$p^\mu t_{1\mu} \Omega^* C^* \bar{\Omega} \Big|_{\bar{H} \bar{\partial}^2} = -\frac{i}{8} \bar{H}^{\dot{\mu}\dot{\nu}} p_\nu y_2^\nu \bar{\partial}_\mu \bar{\partial}_\nu C(0, \bar{y}; -k, -\bar{k}). \quad (2.105)$$

Ситуация с комбинациями  $y^\mu t_{2\mu}$  и  $p^\mu t_{2\mu}$  аналогична с точностью до замены вспомогательного  $y_2$  на  $y_1$  и дополнительного знака. Прямой анализ вершин, полученных в разделе 2.4, показывает, что невозможно получить верную форму Первой теоремы о массовой оболочке в присутствии членов  $y^\mu t_{i\mu}$  и  $p^\mu t_{i\mu}$  в предэкспоненте, т.к. в Первой теореме о массовой оболочке не содержится свёрток  $y_\mu$  и  $p_\mu$  с тетрадой  $h$ . Члены  $t_1^\mu t_{2\mu}$  приводят к правильной свёртке

$$t_1^\mu t_{2\mu} \Omega^* \bar{\Omega}^* C \Big|_{\bar{H} \bar{\partial}^2} = t_1^\mu t_{2\mu} C^* \bar{\Omega}^* \bar{\Omega} \Big|_{\bar{H} \bar{\partial}^2} = -\frac{1}{4} \bar{H}^{\dot{\mu}\dot{\nu}} \bar{\partial}_\mu \bar{\partial}_\nu C(0, \bar{y}; k, \bar{k}), \quad (2.106)$$

$$t_1^\mu t_{2\mu} \Omega^* C^* \bar{\Omega} \Big|_{\bar{H} \bar{\partial}^2} = \frac{1}{4} \bar{H}^{\dot{\mu}\dot{\nu}} \bar{\partial}_\mu \bar{\partial}_\nu C(0, \bar{y}; -k, -\bar{k}). \quad (2.107)$$

Подставляя в выражения для вершин (2.81)-(2.95), содержащих члены  $t_1^\mu t_{2\mu}$  в предэкспоненте, и интегрируя по гомотопическим параметрам  $\tau_i$  получим (ис-

пользуем обозначение  $y^{\mu(n)} = y^{\mu_1} \dots y^{\mu_n}$

$$\begin{aligned} \Omega * \Omega * C * h_{n_1 t_1 + \beta_1 + (1 - \beta_1)(p + t_1 + t_2)} \Delta_{\alpha y + (1 - \alpha + \lambda)(p + t_2)} \Delta_{\alpha y + (1 - \alpha + \lambda)(p + t_1 + t_2)} \gamma \Big|_{\bar{H} \bar{\partial}^2} = \\ \frac{\lambda(\alpha - 1 - \lambda)}{4} \bar{H}^{\bar{\mu}\bar{\nu}} \bar{\partial}_{\bar{\mu}} \bar{\partial}_{\bar{\nu}} \left[ C(0, \bar{y}; k, \bar{k}) + \right. \\ \left. + 2 \frac{\beta_1^{n+2} + (\alpha - \lambda)^{n+1} ((\alpha - \lambda)(n + 1) - \beta_1(n + 2))}{(n + 1)(n + 2)(\alpha - \lambda - \beta_1)^2} y^{\mu(n)} \bar{y}^{\dot{\mu}(m)} C_{\mu_1 \dots \mu_n, \dot{\mu}_1 \dots \dot{\mu}_m}(k, \bar{k}) \right] k, \end{aligned} \quad (2.108)$$

$$\begin{aligned} \Omega * \Omega * C * h_{n_1 t_2 + (1 - \beta_1)(p + t_2)} \Delta_{\alpha y + (1 - \alpha + \lambda)p} \Delta_{\alpha y + (1 - \alpha + \lambda)(t_2 + p)} \gamma \Big|_{\bar{H} \bar{\partial}^2} = \\ - \frac{(\alpha - \beta_1)(\alpha - 1 - \lambda)}{4} \bar{H}^{\bar{\mu}\bar{\nu}} \bar{\partial}_{\bar{\mu}} \bar{\partial}_{\bar{\nu}} \left[ C(0, \bar{y}; k, \bar{k}) + \right. \\ \left. + 2 \frac{\beta_1^{n+2} + (\alpha - \lambda)^{n+1} ((\alpha - \lambda)(n + 1) - \beta_1(n + 2))}{(n + 1)(n + 2)(\alpha - \lambda - \beta_1)^2} y^{\mu(n)} \bar{y}^{\dot{\mu}(m)} C_{\mu_1 \dots \mu_n, \dot{\mu}_1 \dots \dot{\mu}_m}(k, \bar{k}) \right] k, \end{aligned} \quad (2.109)$$

$$\begin{aligned} \Omega * \Omega * C * h_{\alpha y + (1 - \alpha + \lambda)p} \Delta_{\alpha y + (1 - \alpha + \lambda)(t_1 + t_2 + p)} \Delta_{\alpha y + (1 - \alpha + \lambda)(t_2 + p)} \gamma \Big|_{\bar{H} \bar{\partial}^2} = \\ = \frac{(1 - \alpha + \lambda)^2}{4} \bar{H}^{\bar{\mu}\bar{\nu}} \bar{\partial}_{\bar{\mu}} \bar{\partial}_{\bar{\nu}} C((\alpha - \lambda)y, \bar{y}; k, \bar{k}) k, \end{aligned} \quad (2.110)$$

$$\begin{aligned} \Omega * C * \Omega * h_{\alpha y + (1 - \alpha + \lambda)(t_1 + t_2 + p)} \Delta_{\alpha y + (1 - \alpha + \lambda)(t_1 + p) + 2t_2} \Delta_{\alpha y + (1 - \alpha + \lambda)(t_2 + p)} \gamma \Big|_{\bar{H} \bar{\partial}^2} = \\ = \frac{((\alpha - \lambda)^2 - 1)}{4} \bar{H}^{\bar{\mu}\bar{\nu}} \bar{\partial}_{\bar{\mu}} \bar{\partial}_{\bar{\nu}} C((\alpha - \lambda)y, \bar{y}; -k, -\bar{k}) k, \end{aligned} \quad (2.111)$$

$$\begin{aligned} \Omega * C * \Omega * h_{\alpha y + (1 - \alpha + \lambda)(t_1 + p) + 2t_2} \Delta_{\alpha y + (1 - \alpha + \lambda)p + 2t_2} \Delta_{\alpha y + (1 - \alpha + \lambda)(t_2 + p)} \gamma \Big|_{\bar{H} \bar{\partial}^2} = \\ = \frac{((\alpha - \lambda)^2 - 1)}{4} \bar{H}^{\bar{\mu}\bar{\nu}} \bar{\partial}_{\bar{\mu}} \bar{\partial}_{\bar{\nu}} C((\alpha - \lambda)y, \bar{y}; -k, -\bar{k}) k, \end{aligned} \quad (2.112)$$

$$\begin{aligned}
& \Omega * C * \Omega * h_{n_1 t_1 + \beta_1 y + (1 - \beta_1)(p + t_1) + 2t_2} \Delta_{\alpha y + (1 - \alpha + \lambda)p + 2t_2} \Delta_{\alpha y + (1 - \alpha + \lambda)(t_1 + p) + 2t_2} \gamma \Big|_{\bar{H}\bar{\partial}^2} = \\
& = -\frac{(\alpha - \beta_1)(\alpha - 1 - \lambda)}{4} \bar{H}^{\mu\nu} \bar{\partial}_{\mu} \bar{\partial}_{\nu} \left[ C(0, \bar{y}; -k, -\bar{k}) + \right. \\
& \left. + 2 \frac{\beta_1^{n+2} + (\alpha - \lambda)^{n+1} ((\alpha - \lambda)(n + 1) - \beta_1(n + 2))}{(n + 1)(n + 2)(\alpha - \beta_1 - \lambda)^2} y^{\mu(n)} \bar{y}^{\dot{\mu}(m)} C_{\mu_1 \dots \mu_n, \dot{\mu}_1 \dots \dot{\mu}_m}(-k, -\bar{k}) \right] k,
\end{aligned} \tag{2.113}$$

$$\begin{aligned}
& \Omega * C * \Omega * h_{n_1 t_1 + \beta_1 y + (1 - \beta_1)(p + t_1 + t_2)} \Delta_{\alpha y + (1 - \alpha + \lambda)(p + t_1 + t_2)} \Delta_{\alpha y + (1 - \alpha + \lambda)(t_2 + p)} \gamma \Big|_{\bar{H}\bar{\partial}^2} = \\
& = \frac{\lambda(\alpha - 1 - \lambda)}{4} \bar{H}^{\mu\nu} \bar{\partial}_{\mu} \bar{\partial}_{\nu} \left[ C(0, \bar{y}; -k, -\bar{k}) + \right. \\
& \left. + 2 \frac{\beta_1^{n+2} + (\alpha - \lambda)^{n+1} ((\alpha - \lambda)(n + 1) - \beta_1(n + 2))}{(n + 1)(n + 2)(\alpha - \beta_1 - \lambda)^2} y^{\mu(n)} \bar{y}^{\dot{\mu}(m)} C_{\mu_1 \dots \mu_n, \dot{\mu}_1 \dots \dot{\mu}_m}(-k, -\bar{k}) \right] k,
\end{aligned} \tag{2.114}$$

$$\begin{aligned}
& \Omega * C * \Omega * h_{n_2 t_2 + \beta_2 y + (1 - \beta_2)(p + t_2)} \Delta_{\alpha y + (1 - \alpha + \lambda)(t_2 + p)} \Delta_{\alpha y + (1 - \alpha + \lambda)p + 2t_2} \gamma \Big|_{\bar{H}\bar{\partial}^2} = \\
& = -\frac{(\alpha - \beta_2)(\alpha + 1 - \lambda)}{4} \bar{H}^{\mu\nu} \bar{\partial}_{\mu} \bar{\partial}_{\nu} \left[ C(0, \bar{y}; -k, -\bar{k}) + \right. \\
& \left. + 2 \frac{\beta_2^{n+2} + (\alpha - \lambda)^{n+1} ((\alpha - \lambda)(n + 1) - \beta_2(n + 2))}{(n + 1)(n + 2)(\alpha - \beta_2 - \lambda)^2} y^{\mu(n)} \bar{y}^{\dot{\mu}(m)} C_{\mu_1 \dots \mu_n, \dot{\mu}_1 \dots \dot{\mu}_m}(-k, -\bar{k}) \right] k,
\end{aligned} \tag{2.115}$$

$$\begin{aligned}
& \Omega * C * \Omega * h_{n_2 t_2 + \beta_2 y + (1 - \beta_2)(p + t_1 + t_2)} \Delta_{\alpha y + (1 - \alpha + \lambda)(t_1 + p) + 2t_2} \Delta_{\alpha y + (1 - \alpha + \lambda)(p + t_1 + t_2)} \gamma \Big|_{\bar{H}\bar{\partial}^2} = \\
& = \frac{\lambda(\alpha + 1 - \lambda)}{4} \bar{H}^{\mu\nu} \bar{\partial}_{\mu} \bar{\partial}_{\nu} \left[ C(0, \bar{y}; -k, -\bar{k}) + \right. \\
& \left. + 2 \frac{\beta_2^{n+2} + (\alpha - \lambda)^{n+1} ((\alpha - \lambda)(n + 1) - \beta_2(n + 2))}{(n + 1)(n + 2)(\alpha - \beta_2 - \lambda)^2} y^{\mu(n)} \bar{y}^{\dot{\mu}(m)} C_{\mu_1 \dots \mu_n, \dot{\mu}_1 \dots \dot{\mu}_m}(-k, -\bar{k}) \right] k,
\end{aligned} \tag{2.116}$$

$$\begin{aligned}
& C * \Omega * \Omega * h_{n_2 t_2 + \beta_2 y + (1 - \beta_2)(p + t_1 + t_2)} \Delta_{\alpha y + (1 - \alpha + \lambda)(p + t_1 + t_2)} \Delta_{\alpha y + (1 - \alpha + \lambda)(p + t_1) + 2t_2} \gamma \Big|_{\bar{H} \bar{\partial}^2} = \\
& = \frac{\lambda(\alpha + 1 - \lambda)}{4} \bar{H}^{\dot{\mu}\dot{\nu}} \bar{\partial}_{\dot{\mu}} \bar{\partial}_{\dot{\nu}} \left[ C(0, \bar{y}; k, \bar{k}) + \right. \\
& \left. + 2 \frac{\beta_2^{n+2} + (\alpha - \lambda)^{n+1} ((\alpha - \lambda)(n + 1) - \beta_2(n + 2))}{(n + 1)(n + 2)(\alpha - \beta_2 - \lambda)^2} y^{\mu(n)} \bar{y}^{\dot{\mu}(m)} C_{\mu_1 \dots \mu_n, \dot{\mu}_1 \dots \dot{\mu}_m}(k, \bar{k}) \right] k, \tag{2.117}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& C * \Omega * \Omega * h_{n_2 t_1 + \beta_2 y + (1 - \beta_2)(p + t_1) + 2t_2} \Delta_{\alpha y + (1 - \alpha + \lambda)(t_1 + p) + 2t_2} \Delta_{\alpha y + (1 - \alpha + \lambda)p + 2t_1 + 2t_2} \gamma \Big|_{\bar{H} \bar{\partial}^2} = \\
& = - \frac{(\alpha + 1 - \lambda)(\alpha - \beta_2)}{4} \bar{H}^{\dot{\mu}\dot{\nu}} \bar{\partial}_{\dot{\mu}} \bar{\partial}_{\dot{\nu}} \left[ C(0, \bar{y}; k, \bar{k}) + \right. \\
& \left. + 2 \frac{\beta_2^{n+2} + (\alpha - \lambda)^{n+1} ((\alpha - \lambda)(n + 1) - \beta_2(n + 2))}{(n + 1)(n + 2)(\alpha - \beta_2 - \lambda)^2} y^{\mu(n)} \bar{y}^{\dot{\mu}(m)} C_{\mu_1 \dots \mu_n, \dot{\mu}_1 \dots \dot{\mu}_m}(k, \bar{k}) \right] k, \tag{2.118}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& C * \Omega * \Omega * h_{\alpha y + (1 - \alpha + \lambda)p + 2t_1 + 2t_2} \Delta_{\alpha y + (1 - \alpha + \lambda)(t_1 + p) + 2t_2} \Delta_{\alpha y + (1 - \alpha + \lambda)(t_1 + t_2 + p)} \gamma \Big|_{\bar{H} \bar{\partial}^2} = \\
& = \frac{(1 + \alpha - \lambda)^2}{4} \bar{H}^{\dot{\mu}\dot{\nu}} \bar{\partial}_{\dot{\mu}} \bar{\partial}_{\dot{\nu}} C((\alpha - \lambda)y, \bar{y}; k, \bar{k}) k. \tag{2.119}
\end{aligned}$$

Объединяя результаты в общее выражение для вершин, получим

$$\begin{aligned}
& \Upsilon^\eta(\Omega, \Omega, C) + \Upsilon^\eta(\Omega, C, \Omega) + \Upsilon^\eta(C, \Omega, \Omega) \Big|_{\bar{H}\bar{\partial}^2} = \\
& \frac{\eta}{8i} \bar{H}^{\dot{\mu}\dot{\nu}} \bar{\partial}_{\dot{\mu}} \bar{\partial}_{\dot{\nu}} \left[ ((\alpha - \lambda)^2 + 1) C((\alpha - \lambda)y, \bar{y}; k, \bar{k}) + ((\alpha - \lambda)^2 - 1) C((\alpha - \lambda)y, \bar{y}; -k, -\bar{k}) \right] k - \\
& - \frac{\eta}{16i} \bar{H}^{\dot{\mu}\dot{\nu}} \bar{\partial}_{\dot{\mu}} \bar{\partial}_{\dot{\nu}} \left[ (\alpha - \beta_1 - \lambda)(\alpha - 1 - \lambda) + (\alpha - \beta_2 - \lambda)(\alpha + 1 - \lambda) \right] C(0, \bar{y}; k, \bar{k}) k - \\
& - \frac{\eta}{16i} \bar{H}^{\dot{\mu}\dot{\nu}} \bar{\partial}_{\dot{\mu}} \bar{\partial}_{\dot{\nu}} \left[ (\alpha - \beta_1 - \lambda)(\alpha - 1 - \lambda) + (\alpha - \beta_2 - \lambda)(\alpha + 1 - \lambda) \right] C(0, \bar{y}; -k, -\bar{k}) k - \\
& - \frac{\eta(\alpha - 1 - \lambda)}{8i} \frac{\beta_1^{n+2} + (\alpha - \lambda)^{n+1}((\alpha - \lambda)(n+1) - \beta_1(n+2))}{(n+1)(n+2)(\alpha - \beta_1 - \lambda)} \times \\
& \times \bar{H}^{\dot{\mu}\dot{\nu}} \bar{\partial}_{\dot{\mu}} \bar{\partial}_{\dot{\nu}} y^{\mu_1} \dots y^{\mu_n} \bar{y}^{\dot{\mu}_1} \dots \bar{y}^{\dot{\mu}_m} \left[ C_{\mu_1 \dots \mu_n, \dot{\mu}_1 \dots \dot{\mu}_m}(k, \bar{k}) + C_{\mu_1 \dots \mu_n, \dot{\mu}_1 \dots \dot{\mu}_m}(-k, -\bar{k}) \right] k - \\
& - \frac{\eta(\alpha + 1 - \lambda)}{8i} \frac{\beta_2^{n+2} + (\alpha - \lambda)^{n+1}((\alpha - \lambda)(n+1) - \beta_2(n+2))}{(n+1)(n+2)(\alpha - \beta_2 - \lambda)} \times \\
& \times \bar{H}^{\dot{\mu}\dot{\nu}} \bar{\partial}_{\dot{\mu}} \bar{\partial}_{\dot{\nu}} y^{\mu_1} \dots y^{\mu_n} \bar{y}^{\dot{\mu}_1} \dots \bar{y}^{\dot{\mu}_m} \left[ C_{\mu_1 \dots \mu_n, \dot{\mu}_1 \dots \dot{\mu}_m}(k, \bar{k}) + C_{\mu_1 \dots \mu_n, \dot{\mu}_1 \dots \dot{\mu}_m}(-k, -\bar{k}) \right] k. \quad (2.120)
\end{aligned}$$

Так как подсистемы с физическими и топологическими компонентами поля  $C(Y; K|x)$  (четные и нечетные по операторам Клейна  $K$ ) независимы, то Первая теорема о массовой оболочке должна восстанавливаться как для физических полей в виде (2.2), так и для топологических в виде (2.34). Таким образом удваивается пространство параметров  $\alpha^{e,o}$ ,  $\beta_i^{e,o}$ ,  $\lambda^{e,o}$  (индексы указывают на принадлежность полю чётного  $e$  или нечётного  $o$  сектора).

Для нечетных по  $K$  компонент  $C(Y; k, \bar{k}|x) = -C(Y; -k, -\bar{k}|x)$ :

$$\Upsilon^\eta(\Omega, \Omega, C) + \Upsilon^\eta(\Omega, C, \Omega) + \Upsilon^\eta(C, \Omega, \Omega) \Big|_{\bar{H}\bar{\partial}^2} = -\frac{i\eta}{4} \bar{H}^{\dot{\mu}\dot{\nu}} \bar{\partial}_{\dot{\mu}} \bar{\partial}_{\dot{\nu}} C((\alpha^o - \lambda^o)y, \bar{y}; K) k \quad (2.121)$$

вид Первой теоремы о массовой оболочке сохраняется при  $\alpha^o = \lambda^o$ .

Для четных компонент  $C(Y; k, \bar{k}) = C(Y; -k, -\bar{k})$ :

$$\begin{aligned}
& \Upsilon^\eta(\Omega, \Omega, C) + \Upsilon^\eta(\Omega, C, \Omega) + \Upsilon^\eta(C, \Omega, \Omega) \Big|_{\bar{H}\bar{\partial}^2} = \\
& = \frac{\eta}{4i}(\alpha^e - \lambda^e)^2 \bar{H}^{\dot{\mu}\dot{\nu}} \bar{\partial}_{\dot{\mu}} \bar{\partial}_{\dot{\nu}} C((\alpha^e - \lambda^e)y, \bar{y}; K)k - \\
& - \frac{\eta}{8i} \left( (\alpha^e - \lambda^e)(2\alpha^e + \beta_1^e - \beta_2^e - 2\lambda^e) + (\beta_1^e - \beta_2^e) \right) \bar{H}^{\dot{\mu}\dot{\nu}} \bar{\partial}_{\dot{\mu}} \bar{\partial}_{\dot{\nu}} \\
& C(0, \bar{y}; K)k + \frac{\eta}{4i} \bar{H}^{\dot{\mu}\dot{\nu}} \bar{\partial}_{\dot{\mu}} \bar{\partial}_{\dot{\nu}} y^{\mu_1} \dots y^{\mu_n} \bar{y}^{\dot{\mu}_1} \dots \bar{y}^{\dot{\mu}_m} C_{\mu_1 \dots \mu_n, \dot{\mu}_1 \dots \dot{\mu}_m}(k, \bar{k}) \\
& \left[ (\alpha^e - 1 - \lambda^e) \frac{(\beta_1^e)^{n+2} + (\alpha^e - \lambda^e)^{n+1}((\alpha^e - \lambda^e)(n+1) - \beta_1^e(n+2))}{(n+1)(n+2)(\alpha^e - \beta_1^e - \lambda^e)} + \right. \\
& \left. + (\alpha^e + 1 - \lambda^e) \frac{(\beta_2^e)^{n+2} + (\alpha^e - \lambda^e)^{n+1}((\alpha^e - \lambda^e)(n+1) - \beta_2^e(n+2))}{(n+1)(n+2)(\alpha^e - \beta_2^e - \lambda^e)} \right] k. \quad (2.122)
\end{aligned}$$

Так как в Первой теореме о массовой оболочке подобных членов нет, они должны зануляться. Разложение в ряд по  $y$  поля  $C(Y; K)$  приводит к бесконечной цепочке уравнений на параметры  $\alpha^e, \beta_i^e, \lambda^e$ .

$$\begin{aligned}
& (\alpha^e - 1 - \lambda^e) \frac{(\beta_1^e)^{n+2} + (\alpha^e - \lambda^e)^{n+1}((\alpha^e - \lambda^e)(n+1) - \beta_1^e(n+2))}{(n+1)(n+2)(\alpha^e - \beta_1^e - \lambda^e)} + \\
& + (\alpha^e + 1 - \lambda^e) \frac{(\beta_2^e)^{n+2} + (\alpha^e - \lambda^e)^{n+1}((\alpha^e - \lambda^e)(n+1) - \beta_2^e(n+2))}{(n+1)(n+2)(\alpha^e - \beta_2^e - \lambda^e)} + \\
& + (\alpha^e - \lambda^e)^{n+2} = 0, \forall n \in \mathbb{N}, \quad (2.123)
\end{aligned}$$

Из неё получается требование  $\alpha^e = \lambda^e$  и  $\beta_1^e = \beta_2^e$ . Причиной этого является факт, что на фоне  $AdS$  зависимость от  $t_i$  не может быть выше квадратичной, так что члены с  $t_1 t_2$  в предэкспоненте должны содержать экспоненциальную часть, одинаковую при  $t_i = 0$ , чтобы не нарушать вид Первой теоремы о массовой оболочке. Эти ограничения, однако, не сводят вершины только к тем, которые получаются при стандартной гомотопии (с нулевым параметром) для произвольного  $\omega$ , для которого могут появляться более высокие степени  $t_i$ .

Найдём возможные значения  $\beta_1^{e,o}$  и  $\beta_2^{e,o}$ , для этого рассмотрим члены с  $(y^\mu t_{i\mu} + p^\mu t_{i\mu}) \, hh \bar{\partial} \bar{\partial} C$

$$\begin{aligned}
& \Upsilon^\eta(\Omega, \Omega, C) + \Upsilon^\eta(\Omega, C, \Omega) + \Upsilon^\eta(C, \Omega, \Omega) \Big|_{\bar{H}\bar{\partial}^2} = \\
& -\frac{\eta}{16} \bar{H}^{\mu\nu} \bar{\partial}_\mu \bar{\partial}_\nu \left[ C_\rho(\bar{y}; k, \bar{k}) y^\rho \left( -\frac{\beta_1}{2} - \frac{\beta_2}{2} + \frac{\beta_1^2}{6} - \frac{\beta_2^2}{6} \right) - \right. \\
& \quad \left. - C_\rho(\bar{y}; -k, -\bar{k}) y^\rho \left( -\frac{\beta_1}{2} - \frac{\beta_2}{2} - \frac{\beta_1^2}{6} + \frac{\beta_2^2}{6} \right) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{(n+1)(n+2)} C_{\rho_1 \dots \rho_n}(\bar{y}; k, \bar{k}) y^{\rho_1} \dots y^{\rho_n} \left( -\beta_1^n (n+2 - \beta_1 n) - \beta_2^n (n+2 + \beta_2 n) \right) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{(n+1)(n+2)} C_{\rho_1 \dots \rho_n}(\bar{y}; -k, -\bar{k}) y^{\rho_1} \dots y^{\rho_n} \left( -\beta_1^n (n+2 + \beta_1 n) - \beta_2^n (n+2 - \beta_2 n) \right) \right]. \tag{2.124}
\end{aligned}$$

Из этого выражения выпадают члены с параметрами  $\alpha = \lambda$ , т.к. они входят с множителями вида  $a_\mu a^\mu = 0$  для некоторого спинора  $a_\mu$ . Т.к. параметры не влияют на аргументы поля  $C(Y; K)$ , то для сохранения вида Первой теоремы о массовой оболочке необходимо представить  $C(Y; K)$  в виде ряда, что опять даёт бесконечную цепочку алгебраических уравнений на параметры  $\beta_1$  и  $\beta_2$ . Проецируясь на физический (нечетный) сектор

$$\begin{aligned}
& \Upsilon^\eta(\Omega, \Omega, C) + \Upsilon^\eta(\Omega, C, \Omega) + \Upsilon^\eta(C, \Omega, \Omega) \Big|_{\bar{H}\bar{\partial}^2} = \\
& = -\frac{\eta}{16} \bar{H}^{\mu\nu} \bar{\partial}_\mu \bar{\partial}_\nu C_{\mu_1} y^{\mu_1}(\bar{y}; k, \bar{k}) \left( \beta_1^o + \beta_2^o \right) + \\
& \quad + -\frac{\eta}{8(n+1)} C_{\mu_1 \dots \mu_n} y^{\mu_1} \dots y^{\mu_n}(\bar{y}; k, \bar{k}) \left( (\beta_1^o)^n + (\beta_2^o)^n \right), \tag{2.125}
\end{aligned}$$

Для сохранения вида Первой теоремы о массовой оболочке необходимо исключить члены с зависимостью от  $y^\alpha$ , поэтому единственное решение:  $\beta_1^o = \beta_2^o = 0$ .

Повторяя для топологического сектора

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{3} C_{\mu_1}(\bar{y}; k, \bar{k}) \left( (\beta_1^e)^2 - (\beta_2^e)^2 \right) + \\
& \quad + \frac{2n}{(n+1)(n+2)} C_{\mu_1 \dots \mu_n}(\bar{y}; k, \bar{k}) \left( (\beta_1^e)^{n+1} - (\beta_2^e)^{n+1} \right) = 0, \tag{2.126}
\end{aligned}$$

т.к. в правой части Первой теоремы о массовой оболочке для топологического члена отсутствуют члены  $\bar{H}\bar{\partial}\bar{\partial}$  из чего следует равенство  $\beta_1^e = \beta_2^e$ .

Полностью аналогичные рассуждения могут быть проведены для членов  $s t_1^\mu t_{2\mu}$  и  $(y^\mu t_{i\mu} + p^\mu t_{i\mu})$  в секторе  $\bar{H}\bar{y}\bar{y}C$ . Из-за смены знака в произведениях  $\Omega\bar{*}\Omega\bar{*}C|_{\bar{H}\bar{y}\bar{y}}$  и  $C\bar{*}\Omega\bar{*}\Omega|_{\bar{H}\bar{y}\bar{y}}$  по сравнению  $\Omega\bar{*}\Omega\bar{*}C|_{\bar{H}\bar{\partial}^2}$  и  $C\bar{*}\Omega\bar{*}\Omega|_{\bar{H}\bar{\partial}^2}$ , четные и нечетные проекции немногим отличаются от (2.120) и (2.124). Пропуская вычисления, получаем  $\alpha^{e,o} = \lambda^{e,o}$ ,  $\beta_1^e = \beta_2^e = 0$  и  $\beta_1^o = \beta_2^o$ .

Можно проверить, что члены  $H_{\alpha\beta}y_1^\alpha y_2^\beta$  в вершинах (тут снова используются вспомогательные  $y_1$  и  $y_2$  соответствующие первому и второму множителю  $\Omega$  в произведении) не приводят к каким-либо ограничениям на параметрами. Итоговое ограничение на параметры в обоих секторах сводится к  $\alpha^{e,o} = \lambda^{e,o}$ . В то же время параметры сдвига на  $y$  в  $W_1$  с необходимостью зануляются  $\beta_1^{e,o} = \beta_2^{e,o} = 0$ .

Полученные результаты означают, что можно применять два независимых гомотопических оператора для нахождения  $S_1$  и  $W_1$ , если сдвиги на  $y$  и  $p$  связаны внутри каждого применения гомотопии как:

$$S_1 = -\frac{\eta}{2}\Delta_{a(y+p)}(C * \gamma) + c.c., \quad (2.127)$$

$$W_1 = -\frac{i}{2}\Delta_{b(y+p)}(d_x S_1 + \omega * S_1 + S_1 * \omega) + c.c. \quad (2.128)$$

с независимыми  $a$  и  $b$ . Такая гомотопическая процедура обобщает однородные сдвиги, предложенные в статье [34], где рассматривались только совпадающие параметры сдвигов  $a = b$ , которые полностью совпадают с вершинами стандартной гомотопии (гомотопии с нулевым параметром). Случай различных  $a$  и  $b$  получил название *ослабленного* однородного сдвига. Показано, что *ослабленный* однородный сдвиг позволяет получить вершины, отличные от вершин стандартной гомотопии на произвольном фоне теории высших спинов, но тем не менее воспроизводят вид Первой теоремы о массовой оболочке на фоне  $AdS_4$ .

Важно отметить полное выпадение параметров  $n_i$  из вершин (2.75)(2.77). Это наводит на мысль об отсутствии связи между сдвигами  $y, p$  и сдвигами по аргументу поля  $\omega$ , из чего следует? что последние никак не влияют на вид Первой теоремы о массовой оболочке. Для специального случая, когда присутствует только сдвиг на аргумент  $\omega$  ( $\alpha = \lambda = \beta_i = 0$ ) эти параметры не дают вклада и в высшие порядки нелинейных уравнений на  $AdS_4$ , т.к. они не кодируют переопределение полей, являясь полностью аналогичными стандартной нулевой гомотопии.

## 2.6 Сдвиг только на аргумент поля $\omega$

Покажем, как именно сдвиг только по аргументу  $\omega$  "выпадает" на вершинах  $\omega^2 C$  вне фона  $AdS_4$ . Для этого положим  $q^\mu = l_i^\mu = \beta_i = \alpha = \lambda = 0$ , оставляя только параметры  $n_i$  для сдвигов на аргумент поля  $\omega$ . Из вида предэкспонент (2.81) - (2.95) можно заметить, что ненулевые члены при параметрах  $\alpha = \lambda = \beta_i = 0$  имеют вид

$$\Upsilon^\eta(\omega, \omega, C) = \frac{\eta}{4i} \omega * \omega * C * h_p \Delta_{t_1+t_2+p} \Delta_{t_2+p} \gamma, \quad (2.129)$$

$$\Upsilon^\eta(\omega, C, \omega) = \frac{\eta}{4i} \omega * C * \omega * [h_{t_1+t_2+p} \Delta_{t_1+p+2t_2} \Delta_{t_2+p} \gamma + h_{t_1+p+2t_2} \Delta_{p+2t_2} \Delta_{t_2+p} \gamma], \quad (2.130)$$

$$\Upsilon^\eta(C, \omega, \omega) = \frac{\eta}{4i} C * \omega * \omega * h_{p+2t_1+2t_2} \Delta_{t_1+p+2t_2} \Delta_{t_1+t_2+p} \gamma. \quad (2.131)$$

Подставляя вершины в уравнение на  $\omega$  (2.74) получаем

$$\begin{aligned} d\omega + \omega * \omega + \omega * \omega * C * h_p \Delta_{t_1+t_2+p} \Delta_{t_2+p} \gamma + \omega * C * \omega * h_{t_1+t_2+p} \Delta_{t_1+p+2t_2} \Delta_{t_2+p} \gamma + \\ + \omega * C * \omega * h_{t_1+p+2t_2} \Delta_{p+2t_2} \Delta_{t_2+p} \gamma + C * \omega * \omega * h_{p+2t_1+2t_2} \Delta_{t_1+p+2t_2} \Delta_{t_1+t_2+p} \gamma = 0. \end{aligned} \quad (2.132)$$

Используя (2.55) и частичное звездочное произведение (только по голоморфным переменным) (2.82), получаем

$$\begin{aligned} \Upsilon^\eta(\omega, \omega, C) = \frac{\eta}{2i} \int_{[0,1]^3} d^3 \tau \delta(1 - \tau_1 - \tau_2 - \tau_3) e^{i(1-\tau_3) \partial_1^\mu \partial_{2\mu}} \partial^\nu \omega((1 - \tau_1) y, \bar{y}; K) \bar{*} \\ \bar{*} \partial_\nu \omega(\tau_2 y, \bar{y}; K) \bar{*} C(-i\tau_1 \partial_1 - i(1 - \tau_2) \partial_2, \bar{y}; K) k, \end{aligned} \quad (2.133)$$

$$\begin{aligned} \Upsilon^\eta(C, \omega, \omega) = \frac{\eta}{2i} \int_{[0,1]^3} d^3 \tau \delta(1 - \tau_1 - \tau_2 - \tau_3) e^{i(1-\tau_3) \partial_1^\mu \partial_{2\mu}} \\ C(i\tau_1 \partial_2 + i(1 - \tau_2) \partial_1, \bar{y}; K) \bar{*} \partial^\nu \omega(\tau_2 y, \bar{y}; K) \bar{*} \partial_\nu \omega(-(1 - \tau_1) y, \bar{y}; K) k, \end{aligned} \quad (2.134)$$

$$\begin{aligned} \Upsilon^\eta(\omega, C, \omega) = \frac{\eta}{2i} \int_{[0,1]^3} d^3 \tau \delta(1 - \tau_1 - \tau_2 - \tau_3) e^{i(1-\tau_3) \partial_1^\mu \partial_{2\mu}} \partial^\nu \omega(\tau_1 y, \bar{y}; K) \bar{*} \\ \bar{*} C(i(1 - \tau_2) \partial_2 - i(1 - \tau_1) \partial_1, \bar{y}; K) \bar{*} \partial_\nu \omega(-(1 - \tau_2) y, \bar{y}; K) k + \\ + \frac{\eta}{2i} \int_{[0,1]^3} d^3 \tau \delta(1 - \tau_1 - \tau_2 - \tau_3) e^{-i\tau_2 \partial_1^\mu \partial_{2\mu}} \partial^\nu \omega((1 - \tau_1) y, \bar{y}; K) \bar{*} \\ \bar{*} C(-i\tau_1 \partial_1 + i\tau_3 \partial_2, \bar{y}; K) \bar{*} \partial_\nu \omega(-(1 - \tau_3) y, \bar{y}; K) k. \end{aligned} \quad (2.135)$$

Кажется удивительным, что параметры  $n_{1,2}$  не появляются в вершинах (2.133)-(2.135) и последние полностью совпадают с вершинами, полученными стандартной гомотопией с нулевыми параметрами сдвига [34].

К тому же выводу можно прийти проще, используя свойства гомотопического оператора  $\Delta_Q$  и проектора на когомологии  $h_Q$  (2.57), приведенные в разделе 2.3. Тогда можно увидеть, что параметры  $n_i$  уходят уже на шаге вычисления  $W_1^\eta$ . Для примера рассмотрим  $W_1^{(1)}$  с параметром  $n_1$

$$W_1^{\eta(1)} = \frac{\eta}{4i} \omega * C * \Delta_{(n_1+1)t+p} (\Delta_p - \Delta_{(t+p)}) \gamma. \quad (2.136)$$

Используя свойство (2.57), получим

$$W_1^{\eta(1)} = \frac{\eta}{4i} \omega * C * (h_{(n_1+1)t+p} \Delta_p \Delta_{(t+p)} - \Delta_p \Delta_{(t+p)}) \gamma. \quad (2.137)$$

Второй член явно не зависит от  $n_1$ . Рассмотрим первый член, с кажущейся зависимостью от  $n_1$ . Воспользовавшись свойством (2.53) можно доказать, что он тождественно равен нулю, т.е.  $W_1^{\eta(1)}$  целиком не зависит от  $n_1$ . Аналогично,  $W_1^{\eta(2)}$  не зависит от  $n_2$ . Таким образом, зависимость от параметров  $n_i$  выпадает и полное поле  $W_1^\eta$  имеет тот же вид, что и при стандартной гомотопии с  $n_{1,2} = 0$ , а значит не изменяет вид Первой теоремы о массовой оболочке. Конечный вывод этого рассмотрения – сдвиги только на аргумент поля  $\omega$  не дают вклада в высшие поправки для полей и нелинейных уравнений теории высших спинов.

## 2.7 Выводы

В данной части диссертации проанализировано расширение гомотопической процедуры, разработанной в [34], на гомотопические операторы с параметрами сдвига, действующими на аргументы калибровочных полей высших спинов один-форм  $\omega$ , аргументы полей – ноль-форм высших спинов  $C$  и пропорциональные спинорным переменным  $Y^A$ .

Были найдены общие ограничения на параметры сдвига, при которых сохраняется каноническая форма свободных развернутых уравнений высших спинов, известную как Первая теорема о массовой оболочке [57]. Это необходимо для сохранения интерпретации ноль-форм  $C$  как производных калибровочных полей высших спинов. Нарушение этой формы потребовало бы переопределения полей, плохо контролируемых с точки зрения спин-локальности теории.

Показано, что условия, сохраняющие каноническую форму Первой теоремы о массовой оболочке, оставляют шесть свободных параметров  $(n_i^{e,o}, \alpha^{e,o})$ , четыре из которых  $(n_i^{e,o})$  связаны со сдвигами аргументов один-формы  $\omega$ , а остальные два  $(\alpha^{e,o})$  — со сдвигом  $(p + y)$ .

Таким образом, в пертурбативном анализе можно использовать различные гомотопические операторы  $\Delta_{a(y+p)}$  и  $\Delta_{n_i t + b(y+p)}$  для разрешения уравнений для  $S_1$  и  $W_1$  соответственно, всё ещё сохраняя форму Первой теоремы о массовой оболочке. В частном случае сдвигов по  $y$  и  $p$  эти результаты обобщают однородные сдвиги из [34] с  $a = b$ . Ослабляя это условие до ослабленных однородных сдвигов с независимыми  $a$  и  $b$ , показано, что ослабленные однородные сдвиги порождают однопараметрическое семейство (ультралокальных) вершин, которые отличаются от вершин, полученных с помощью обычной гомотопии в общем фоне ВС, но всё же сохраняют Первую теорему о массовой оболочке в фоне  $AdS_4$ .

В важном частном случае чистого  $\omega$ -сдвига, что удивительно, не только форма свободных уравнений высших спинов в  $AdS_4$  не зависит от параметров  $\omega$ -сдвига, но и все вершины  $\Upsilon^\eta(\omega, \omega, C)$ ,  $\Upsilon^\eta(\omega, C, \omega)$  и  $\Upsilon^\eta(C, \omega, \omega)$  остаются неизменными. Более того, в силу тождеств (2.53), первоначально полученных в [34], это объясняется тем фактом, что поправки первого порядка к полям — один-формам  $W_1^\eta(Z; Y|x)$  оказываются независимыми от параметров  $\omega$ -сдвига, и тем самым вклад от  $\omega$ -сдвига не распространяется в высшие порядки. Таким образом подобные сдвиги не приводят к физически различным вершинам, что позволяет отделить такие деформации гомотопической процедуры как тривиальные.

Найденное однопараметрическое семейство ультралокальных вершин может быть использовано для анализа более высоких порядков теории возмущений, где правильный подбор гомотопической процедуры может оказаться существенным для достижения спин-локального вида вершин. Идея расширения множества параметров гомотопической процедуры нашла дальнейшее развитие в технике дифференциальной гомотопии, предложенной в работе [43] и нашедшей успешное применение в [74], [75].

### Глава 3

## Линейный анализ теории высших спинов, расширенной группой Кокстера

Одним из фундаментальных вопросов в теории ВС является построение более общих моделей ВС, которые могли бы быть связаны с теорией струн. Аргументы в пользу того, что теория струн обладает высшими симметриями в высокоэнергетическом пределе, были приведены давно в [37; 76]. Хотя гипотеза о связи теории ВС с теорией струн поддерживается анализом высокоэнергетического предела струнных амплитуд [37] и прошла некоторые нетривиальные проверки [77–79], удовлетворительного понимания этой связи за пределами сектора свободных полей в безмассовом (бесщелевом) пределе теории струн [80–82] до сих пор нет.

Потенциальный кандидат на подходящую расширенную модель ВС был предложен в [46], где была построена новая класс калибровочных теорий высших спинов, связанных с различными группами Кокстера (см. [83] для подробного объяснения групп Кокстера). Эти расширенные модели основаны на деформированных осцилляторных алгебрах, известных как алгебры Чередника [84]. Модели ВС подобного типа могли быть сформулированы давно, так как связь алгебры Чередника с теорией ВС упоминалась ещё в [85]. Однако простое расширение этого класса не было сформулировано из-за проблемы с результирующим спектром состояний. В нём не оставалось места для безмассового состояния спина два, т.е. гравитона, что не позволяло описать гравитацию ВС. К счастью, расширение стандартных алгебр Чередника набором идемпотентов, известных как обрамлённые алгебры Чередника [46], позволило обойти проблему отсутствия безмассовых полей ВС в спектре.

В [46] была выдвинута гипотеза, что многокомпонентное расширение теории ВС, т.е. переход к теории, построенной на универсальной обёртывающей алгебре алгебры ВС (см. [36] для многокомпонентного расширения), основанной на группе Кокстера  $B_2$ , обладает достаточно богатой симметрией и спектром,

чтобы соответствовать теории струн. Если обозначить алгебру звёздочного произведения как  $A$ , то многокомпонентная алгебра  $M(A)$  изоморфна  $U(\text{Lie}(A))$ , где  $\text{Lie}(\bullet)$  строит алгебру Ли из ассоциативной через коммутаторы. Как векторное пространство  $M(A)$  представляет собой прямую сумму всех градуированно-симметричных тензорных степеней  $A$ . Таким образом,  $M(A)$  действует на пространстве всех многокомпонентных состояний. (Отметим, что построение многокомпонентной теории высших спинов несколько аналогично идее синглетонной струны, спектр которой представлен мультисинглетами [86; 87].) Эта гипотеза основывалась на нескольких аргументах. Во-первых, эта модель имеет две независимые константы связи, связанные с двумя классами сопряжённости группы  $B_2$ . Предполагалось, что они соответствуют константе связи ВС и струнной константе связи модели. Связанный с этим факт заключается в том, что в многокомпонентной модели ВС  $B_2$  есть место для полей, которые могут быть связаны с многоследовыми операторами в голографической картине. Другой мотивацией послужило наблюдение удвоенной алгебры ВС с нетривиальным смешиванием в контексте теории струн на специальном фоне [48; 50]. С этой точки зрения модель Кокстера  $B_2$  является простейшим нетривиальным расширением, обладающим двумя копиями алгебры ВС, связанными с парой ортогональных векторов, принадлежащих корневой системе  $B_2$ , которые нетривиально смешиваются добавленными перестановками. Это контрастирует с группой  $A_2$ , в которой ортогональные корневые векторы не существуют, что не позволяет иметь независимые копии. Связанный факт заключается в том, что  $A_2$  имеет единственный класс сопряжённости. С другой стороны, как утверждалось в [46], модели, основанные на группах Кокстера более высоких рангов, связаны с гораздо более богатыми тензорными расширениями теории струн.

Чтобы доказать предполагаемую связь между расширенной многокомпонентной моделью Кокстера  $B_2$  и теорией струн, необходимо спонтанно нарушить расширенную симметрию ВС до пространственно-временной симметрии и сравнить результирующий массивный спектр со струнным. Поскольку эта процедура требует знания теории на линейном уровне, должен быть проведён анализ линеаризованных многокомпонентных моделей ВС Кокстера (ВСК).

В данной диссертации рассмотрена линеаризацию общей теории ВСК, определено фоновое  $AdS_4$ -решение и, с помощью обобщения техники сдвинутой го-

мотопии [34] на модели ВСК, извлечен вид Первой теоремы о массовой оболочке (т.е. линеаризованных развёрнутых полевых уравнений) для общей группы Кокстера. Утверждается, что после редукции на унитарные подсекторы, динамические поля состоят из копий полей  $C$ , соответствующих стандартным обобщённым тензорам Вейля, и полей  $\omega$ , соответствующих полям Фронсдала, и их комбинаций.

### 3.1 Теории высших спинов, расширенные группами Кокстера

#### 3.1.1 Группы Кокстера и обрамлённые алгебры Чередника

Расширение теории высших спинов группой Кокстера было приведено в [46]. Приведем необходимую справку. Группа Кокстера  $C$  ранга  $p$  образована отражениями относительно корневых векторов  $v_a$  некоторой корневой системы в  $p$ -мерном Евклидовом пространстве  $V$  с заданным скалярным произведением  $(x, y) \in \mathbb{R}$ ,  $x, y \in V$ . Элементарное отражение  $v_a$  действует на  $x \in V$  естественным образом

$$R_{v_a} x^i = x^i - 2 \frac{(v_a, x)}{(v_a, v_a)} v_a^i, \quad R_{v_a}^2 = Id. \quad (3.1)$$

Наибольший интерес вызывают группы Кокстера, соответствующие группам  $A_p$  и  $B_p$  в классификации Картана. Их корневые системы задаются векторами  $v^{ij} = e^i - e^j$  для серии  $A_p$ , где  $e^i$  – элементы ортонормированного базиса в  $\mathbb{R}^{p+1}$ .  $V$  – подпространство размерности  $p$  в  $\mathbb{R}^{p+1}$ , являющееся линейной оболочкой  $v^{ij}$ . Корневая система  $B_p$  устроена сложнее и состоит из двух орбит

$$\mathcal{R}_1 = \{\pm e^i, 1 \leq i \leq p\}, \quad \mathcal{R}_2 = \{\pm e^i \pm e^j, 1 \leq i < j \leq p\}. \quad (3.2)$$

Это значит, что кроме перестановок группа  $B_p$  включает также отражения базисных ортов относительно  $v_{\pm}^i = \pm e^i$  [83].

Расширенная система высших спинов записывается с помощью идемпотент  $I_n$ , наборов осцилляторов  $q_{\alpha}^n$  и наборов операторов Клейна  $\hat{K}_v$  по одному на каждый вектор  $v$  в корневой системе (итого индексы пробегает значения  $\alpha \in \{1, 2\}$ ,  $n \in \{1, \dots, p\}$ ). Для  $I_n$  как для идемпотенты выполняются свойства

$$I_n I_m = I_m I_n, \quad I_n I_n = I_n, \quad I_n q_{\alpha}^n = q_{\alpha}^n I_n = q_{\alpha}^n, \quad I_m q_{\alpha}^n = q_{\alpha}^n I_m. \quad (3.3)$$

Важно, что по повторяющимся латинским индексам в формуле нет суммы. Действие операторов Клейна соответствует отражениям в группе Кокстера:

$$\hat{K}_v q_\alpha^n = R_v^n q_\alpha^m \hat{K}_v, \quad \hat{K}_v \hat{K}_u = \hat{K}_u \hat{K}_{R_u(v)} = \hat{K}_{R_v(u)} \hat{K}_v, \quad (3.4)$$

$$\hat{K}_v \hat{K}_v = \prod I_{i_1(v)} \dots I_{i_k(v)}, \quad \hat{K}_v = \hat{K}_{-v}, \quad (3.5)$$

$$(3.6)$$

Алгебра деформированных осцилляторов, играющая ключевую роль в производящей системе высших спинов, естественным образом обобщается с  $\mathcal{Z}_2$  группы Кокстера до произвольной

$$[q_\alpha^n, q_\beta^m] = -i\varepsilon_{\alpha\beta} \left( 2\delta^{nm} I_n + \sum_{v \in \mathcal{R}} \nu(v) \frac{v^n v^m}{(v, v)} \hat{K}_v \right), \quad (3.7)$$

где  $\mathcal{R}$  – набор всех орбит корневых векторов под действием группы Кокстера  $\mathcal{C}$ ,  $\nu(v)$  – функция определенная на орбитах (т.е. постоянная на элементах одной орбиты), а индексы  $i_1(v), \dots, i_k(v)$  кодируют идемпотенты  $I_n$ , соответствующие векторам, которые нетривиально преобразуются отражением  $R_v$ . Например, для группы  $B_p$  есть два разных вида операторов  $\hat{K}_{ij}$  – соответствующие векторам  $v^{ij}$  и  $\hat{K}_i$  – соответствующие ортам  $e^i$ . Как следствие, можно условно сопоставить новые операторы Клейна обычным, домноженным на идемпотенты

$$\hat{K}_v = K_v \prod I_{i_1(v)} \dots I_{i_k(v)}. \quad (3.8)$$

Новые операторы Клейна  $\hat{K}_v$  подчинены

$$I_n \hat{K}_v = \hat{K}_v I_n, \quad \forall n \in \{1, \dots, p\}, \quad (3.9)$$

$$I_n \hat{K}_v = \hat{K}_v I_n = \hat{K}_v, \quad \forall n \in \{i_1(v), \dots, i_k(v)\}. \quad (3.10)$$

Важно, что обычные операторы Клейна без идемпотент не появляются вовсе в конструкции обрамлённой алгебры Чередника. Ключевым свойством является, что коммутатор для  $q_\alpha^n$  удовлетворяет тождеству Якоби [46] благодаря тождеству Схоутена на двухкомпонентные спиноры.

Для произвольной группы Кокстера, как и в обычном случае, можно составить билинейные комбинации

$$t_{\alpha\beta} = \frac{i}{4} \sum_{n=1}^p \{q_\alpha^n, q_\beta^n\} I_n \quad (3.11)$$

образующие  $sp(2)$

$$[t_{\alpha\beta}, t_{\gamma\delta}] = \epsilon_{\beta\gamma} t_{\alpha\delta} + \epsilon_{\beta\delta} t_{\alpha\gamma} + \epsilon_{\alpha\gamma} t_{\beta\delta} + \epsilon_{\alpha\delta} t_{\beta\gamma}, \quad (3.12)$$

относительно которой осцилляторы  $q_\alpha^n$  образуют векторное представление

$$[t_{\alpha\beta}, q_\gamma^n] = \epsilon_{\beta\gamma} q_\alpha^n + \epsilon_{\alpha\gamma} q_\beta^n. \quad (3.13)$$

Главной чертой обрамлённой алгебры Чередника является присутствие  $I_n$ , которые позволяют разбить единичный оператор на сектора и задать фильтрацию на алгебре. Это позволяет преодолеть известную проблему неограниченного роста энергии вакуума в тензорных степенях алгебры [46]. Отметим, что обычная алгебра Чередника восстанавливается из обрамлённой алгебры факторизацией по соотношению эквивалентности, отождествляющим идемпотенты с единицей.

### 3.1.2 Уравнения теории высших спинов, расширенной группой Кокстера

Расширенная группой Кокстера производящая система теории высших спинов описывается, как и стандартная, с помощью мастер-полей  $W$ ,  $S$  и  $B$ , зависящих от пространственно-временных координат  $x$ . Эти поля, однако, зависят не от одного, а от  $p$  наборов вспомогательных спинорных переменных  $Y_A^n, Z_A^n$  ( $A \in \{1, \dots, 4\}$ ),  $n \in \{1, \dots, p\}$ , а также идемпотент  $I_n$ , нечетных дифференциалов  $dZ_n^A$  и операторов Клейна  $\hat{K}_v$  соответствующих корневым векторам группы Кокстера (полагается, что  $\hat{K}_{-v} = \hat{K}_v$ ). Поле  $W(Y, Z, I; \hat{K}|x)$  является пространственно-временной один-формой,  $S(Y, Z, I; \hat{K}|x)$  – пространственно-временно ноль-формой, но один формой по дифференциалам  $dZ$ , а поле  $B(Y, Z, I; \hat{K}|x)$  – ноль форма. Уравнения высших спинов расширяются с помощью обрамлённой алгебры Чередника (3.7) через измененное звёздочное произведение [31]

$$(f * g)(Y, Z, I) = \frac{1}{(2\pi)^{4p}} \int d^{4p} S d^{4p} T \exp \left( i S_n^A T_m^B C_{AB} \delta^{nm} \right) \times \\ \times f(Y_i + I_i S_i, Z_i + I_i S_i, I) g(Y + T, Z - T, I), \quad (3.14)$$

где

$$C_{AB} = \begin{pmatrix} \epsilon_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & \bar{\epsilon}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Требуем, чтобы осцилляторы  $Y_A^n, Z_A^n$  “испускали” и “поглощали” идемпотенты  $I_n$  (в формулах ниже не подразумевается суммирование по повторяющимся индексам):

$$Y_A^m * I_n = I_n * Y_A^m, \quad Y_A^n * I_n = I_n * Y_A^n = Y_A^n, \quad Z_A^m * I_n = I_n * Z_A^m, \quad (3.16)$$

$$Z_A^n * I_n = I_n * Z_A^n = Z_A^n, \quad I_n * I_n = I_n, \quad I_n * I_m = I_m * I_n. \quad (3.17)$$

Явно этого можно добиться переходом от осцилляторов  $Y_A, Z_A$  к тензорным произведениям  $Y_A^n = Y_A \otimes e^n, Z_A^n = Z_A \otimes e^n$ , где  $e^n$  – элемент из базиса корневого пространства, и соответственно “поглощает” и “испускает” соответствующие ему идемпотенты  $e^n I_n = I_n e^n = e^n$ . Важное следствие, что любой осциллятор несет в себе также идемпотенту с тем же индексом относительно группы Кокстера. Это, а также наличие в звёздочном произведении в явном виде идемпотент означает, что в выражениях не возникает “голых” (не умноженных на идемпотенту) констант. Именно это важно для разрешения проблемы роста вакуумной энергии с ростом спектра [46]. Благодаря идемпотентам, полная нелинейная система распадается на разные сектора по идемпотентам, которые перемешиваются в треугольной форме. Например, в теории, расширенной группой  $B_2$ , члены с  $I_2$  и  $I_1 I_2$  не появляются в уравнениях на зависящие от  $I_1$  поля (аналогично для  $I_2$ ), но произведение  $I_1$  и  $I_2$  даёт вклад в сектор, зависящий от  $I_1 I_2$ . В теории, расширенной группой  $B_p$  произвольного порядка, на нижнем уровне это даёт по копии стандартной теории высших спинов на каждую идемпотенту  $I_n$ . Их смешивание происходит в более высоких порядках по идемпотентам  $\prod_{n \in X} I_n$ , где  $X$  – подмножество значений кокстеровского индекса  $\{1, \dots, p\}$ .

Из свойств звёздочного произведения и идемпотенты  $I_n$

$$[Y_A^n, Y_B^m]_* = -[Z_A^n, Z_B^m]_* = 2iC_{AB}\delta^{nm}I_n, \quad [Y_A^n, Z_B^m]_* = 0. \quad (3.18)$$

Появление в правой части идемпотент отличает расширенный случай от стандартного и важно для неувеличения минимальной энергии.

Из (10) легко вывести правила умножения на осцилляторы

$$Y_A^n * = Y_A^n + i\hat{\partial}_{Y_A}^n - i\hat{\partial}_{Z_A}^n, \quad *Y_A^n = Y_A^n - i\hat{\partial}_{Y_A}^n - i\hat{\partial}_{Z_A}^n, \quad (3.19)$$

$$Z_A^n * = Z_A^n + i\hat{\partial}_{Y_A}^n - i\hat{\partial}_{Z_A}^n, \quad *Z_A^n = Z_A^n + i\hat{\partial}_{Y_A}^n + i\hat{\partial}_{Z_A}^n, \quad (3.20)$$

где введена сокращенная запись

$$\hat{\partial}_{Y_A}^n := I_n \partial_{Y_A}^n, \quad \hat{\partial}_{Z_A}^n := I_n \partial_{Z_A}^n. \quad (3.21)$$

Звёздочное произведение (3.14) допускает введение внутренних операторов Клейна  $\varkappa_v, \bar{\varkappa}_v$  на каждый корневой вектор  $v$

$$\varkappa_v = \exp\left(i \frac{v^n v^m}{(v, v)} z_{\alpha n} y_m^\alpha\right), \quad \bar{\varkappa}_v = \exp\left(i \frac{v^n v^m}{(v, v)} \bar{z}_{\dot{\alpha} n} \bar{y}_m^{\dot{\alpha}}\right). \quad (3.22)$$

Внутренние операторы Клейна  $\varkappa_v$  реализуют представление группы Кокстера с помощью звёздочного произведения

$$\varkappa_v * q_\alpha^n = R_v^n q_\alpha^m * \varkappa_v, \quad q_\alpha^n = y_\alpha^n, z_\alpha^n, \quad (3.23)$$

(аналогично для антиголоморфных осцилляторов  $\bar{q}_{\dot{\alpha}}$ ), т.к.  $v^n = e^n(v, e^n)$ , где  $e^n$  – базисный орт в корневом пространстве.

Как было показано в [46], нелинейная производящая система уравнений высших спинов обобщается на произвольную группу Кокстера  $\mathcal{C}$  как

$$d_x W + W * W = 0, \quad (3.24)$$

$$d_x B + W * B - B * W = 0, \quad (3.25)$$

$$d_x S + W * S + W * S = 0, \quad (3.26)$$

$$S * B - B * S = 0, \quad (3.27)$$

$$S * S = i \left( dZ^{A_n} dZ_{A_n} + \sum_i \sum_{v \in \mathcal{R}_i} \left[ \eta_i B \frac{v^n v^m}{(v, v)} dz_n^\alpha dz_{\alpha m} * \varkappa_v \hat{k}_v + \bar{\eta}_i B \frac{v^n v^m}{(v, v)} d\bar{z}_n^{\dot{\alpha}} d\bar{z}_{\dot{\alpha} m} * \bar{\varkappa}_v \hat{k}_v \right] \right), \quad (3.28)$$

где  $\varkappa_v \hat{k}_v$  действует на дифференциалы  $dz_n^\alpha$  как

$$\varkappa_v \hat{k}_v * dz_n^\alpha = R_{v_n}^m dz_m^\alpha * \varkappa_v \hat{k}_v, \quad (3.29)$$

Уравнения (3.24)-(3.28) совместны, что легко проверить, т.к. соотношение (3.7) удовлетворяет тождествам Якоби благодаря центральному элементу в (3.28).

Определим его как

$$\hat{\gamma}_i = \sum_{v \in \mathcal{R}_i} \frac{v^n v^m}{(v, v)} dz_n^\alpha dz_{\alpha m} * \varkappa_v \hat{k}_v. \quad (3.30)$$

Определим этот оператор и сопряженный ему  $\hat{\gamma}_i$  являются центральными для произведения (10), что вместе с (3.27) даёт  $[S, S * S]_* = 0$ . Уравнение (3.28) может быть представлено в виде (3.7) при подстановке  $S = dz_n^\alpha q_\alpha^n$ ,  $F_{i*}(B) = \nu(v)$  и переопределении операторов Клейна. Итого, условие  $[S, S * S]_* = 0$  эквивалентно тождеству Якоби на обрамлённой алгебре Чередника.

### 3.2 Вложение пространства $AdS_4$

Эта секция посвящена поиску вакуумного решения нелинейной системы (3.24)-(3.28), которое должно описывать фоновое пространство  $AdS_4$ . Очевидно, что анзац

$$B_0 = 0, \quad S_0 = dZ^{An} Z_{An}, \quad W = W_0(Y, I|x) \quad (3.31)$$

решает уравнения, при условии, связности  $W_0(Y, I|x)$  плоская

$$d_x W_0(Y, I|x) + W_0(Y, I|x) * W_0(Y, I|x) = 0. \quad (3.32)$$

Рассмотрим билинейный анзац для  $W_0(Y, I|x)$  из один-форм  $\omega_{\alpha\beta}^{nm}(I|x)$ ,  $\bar{\omega}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}^{nm}(I|x)$  и  $e_{\alpha\dot{\alpha}}^{nm}(I|x)$

$$W_0(Y, I|x) = -\frac{i}{4} \left( \omega_{\alpha\beta}^{nm}(I|x) y_n^\alpha y_m^\beta + \bar{\omega}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}^{nm}(I|x) \bar{y}_n^{\dot{\alpha}} \bar{y}_m^{\dot{\beta}} + 2e_{\alpha\dot{\alpha}}^{nm}(I|x) y_n^\alpha \bar{y}_m^{\dot{\alpha}} \right). \quad (3.33)$$

Подстановка (3.33) в (3.32) приводит к системе уравнений для  $\omega_{\alpha\beta}^{nm}(I|x)$ ,  $\bar{\omega}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}^{nm}(I|x)$  и  $e_{\alpha\dot{\alpha}}^{nm}(I|x)$ :

$$\left( d_x \omega_{\alpha\beta}^{nm} + \sum_q \varepsilon^{\gamma\lambda} \omega_{\alpha\gamma}^{nq} \wedge \omega_{\beta\lambda}^{mq} I_q + \sum_q \bar{\varepsilon}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} e_{\alpha\dot{\alpha}}^{nq} \wedge e_{\beta\dot{\beta}}^{mq} I_q \right) y_n^\alpha y_m^\beta = 0, \quad (3.34)$$

$$\left( d_x \bar{\omega}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}^{nm} + \sum_q \bar{\varepsilon}^{\dot{\gamma}\dot{\lambda}} \bar{\omega}_{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}^{nq} \wedge \bar{\omega}_{\dot{\beta}\dot{\lambda}}^{mq} I_q + \sum_q \varepsilon^{\alpha\beta} e_{\alpha\dot{\alpha}}^{nq} \wedge e_{\beta\dot{\beta}}^{mq} I_q \right) \bar{y}_n^{\dot{\alpha}} \bar{y}_m^{\dot{\beta}} = 0, \quad (3.35)$$

$$\left( d_x e_{\alpha\dot{\alpha}}^{nm} + \sum_q \varepsilon^{\gamma\lambda} \omega_{\alpha\gamma}^{nq} \wedge e_{\lambda\dot{\alpha}}^{qm} I_q + \sum_q \bar{\varepsilon}^{\dot{\gamma}\dot{\lambda}} \bar{\omega}_{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}^{nq} \wedge e_{\alpha\dot{\lambda}}^{qm} I_q \right) y_n^\alpha \bar{y}_m^{\dot{\alpha}} = 0. \quad (3.36)$$

Уточним анзац для  $W_0(Y, I|x)$  в виде

$$\omega_{\alpha\beta}^{nm}(I|x) = \omega_{\alpha\beta}(x) \delta^{nm}, \quad \bar{\omega}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}^{nm}(I|x) = \bar{\omega}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}(x) \delta^{nm}, \quad e_{\alpha\dot{\alpha}}^{nm}(I|x) = e_{\alpha\dot{\alpha}}(x) \delta^{nm}, \quad (3.37)$$

где введена  $\delta^{nm}$ , инвариантная относительно действия группы Кокстера (как подгруппы  $O(p)$ ). Это позволяет снять суммирование в уравнениях (3.34)-(3.36)

$$d_x \omega_{\alpha\beta} + \varepsilon^{\gamma\lambda} \omega_{\alpha\gamma} \wedge \omega_{\beta\lambda} + \bar{\varepsilon}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} e_{\alpha\dot{\alpha}} \wedge e_{\beta\dot{\beta}} = 0, \quad (3.38)$$

$$d_x \bar{\omega}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} + \bar{\varepsilon}^{\dot{\gamma}\dot{\lambda}} \bar{\omega}_{\dot{\alpha}\dot{\gamma}} \wedge \bar{\omega}_{\dot{\beta}\dot{\lambda}} + \varepsilon^{\alpha\beta} e_{\alpha\dot{\alpha}} \wedge e_{\beta\dot{\beta}} = 0, \quad (3.39)$$

$$d_x e_{\alpha\dot{\alpha}} + \varepsilon^{\gamma\lambda} \omega_{\alpha\gamma} \wedge e_{\lambda\dot{\alpha}} + \bar{\varepsilon}^{\dot{\gamma}\dot{\lambda}} \bar{\omega}_{\dot{\alpha}\dot{\gamma}} \wedge e_{\alpha\dot{\lambda}} = 0, \quad (3.40)$$

и получить уравнения на спин-связность  $\omega_{\alpha\beta}$ ,  $\bar{\omega}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$  и тетраду  $e_{\alpha\dot{\alpha}}$ , описывающие  $AdS_4$ . Итого, в теории, расширенной группой Кокстера общего положения, фоновый  $AdS_4$  представлен в виде один-формы

$$\Omega_{AdS}(Y|x) = -\frac{i}{4} \delta^{nm} \left( \omega_{\alpha\beta}(x) y_n^\alpha y_m^\beta + \bar{\omega}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}(x) \bar{y}_n^{\dot{\alpha}} \bar{y}_m^{\dot{\beta}} + 2e_{\alpha\dot{\alpha}}(x) y_n^\alpha \bar{y}_m^{\dot{\alpha}} \right). \quad (3.41)$$

Важным свойством такой связности  $AdS_4$  (3.41) является отсутствие явной зависимости от идемпотент  $I_n$ , следовательно, ковариантная производная, построенная по этой связности, сохраняет фильтрацию полей по идемпотентам. Это происходит по той причине, что введенные идемпотенты совпадают для голоморфных  $y_n^\alpha, z_n^\alpha, \hat{k}_v$  и антиголоморфных  $\bar{y}_n^{\dot{\alpha}}, \bar{z}_n^{\dot{\alpha}}, \hat{\bar{k}}_v$  переменных системы и операторов Клейна. Возможно рассматривать и модель  $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$  в  $4d$ -пространстве с удвоенным набором идемпотент  $I_n, \bar{I}_n$  и решать уравнение (3.32) уже там. Решение будет  $AdS_4$ , с явной зависимостью от идемпотент  $I_n, \bar{I}_n$ . Однако как было показано в низших порядках в [46], подобная модель не может быть обобщением стандартной теории высших спинов в  $AdS_4$ . Вместо этого она распадается на произведение двух теорий высших спинов в трёхмерном пространстве. Из (3.9) следует, что и  $I_n$  и  $\bar{I}_n$  коммутируют с операторами Клейна  $\hat{k}_v$  и  $\hat{\bar{k}}_v$  и  $I_n - \bar{I}_n$  образуют идеал  $\mathcal{J}$  в системе  $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ . В модели  $(\mathcal{C} \times \mathcal{C})/\mathcal{J}$  низшие состояния соответствуют безмассовым полям в  $4d$ , описываемым функциями от одного набора  $y_n^\alpha, z_n^\alpha, \bar{y}_n^{\dot{\alpha}}, \bar{z}_n^{\dot{\alpha}}$  и  $I_n$ , т.е. поля  $\omega$  и  $C$  –  $Z$ -независимые компоненты мастер-полей  $W$  и  $B$

$$\omega = \sum_i^p \omega \left( y_i, \hat{k}_i; \bar{y}_i, \hat{\bar{k}}_i | x \right) * I_i, \quad \omega \left( y_i, \hat{k}_i; \bar{y}_i, \hat{\bar{k}}_i | x \right) = \omega \left( y_i, -\hat{k}_i; \bar{y}_i, -\hat{\bar{k}}_i | x \right), \quad (3.42)$$

$$C = \sum_i^p C \left( y_i, \hat{k}_i; \bar{y}_i, \hat{\bar{k}}_i | x \right) * I_i, \quad C \left( y_i, \hat{k}_i; \bar{y}_i, \hat{\bar{k}}_i | x \right) = -C \left( y_i, -\hat{k}_i; \bar{y}_i, -\hat{\bar{k}}_i | x \right) \quad (3.43)$$

описывают безмассовые поля стандартной теории. Далее оставим выбор  $I_n$  таким, что они действуют одинаково как на голоморфные, так и на антиголоморфные переменные.

Можно заметить, что уравнение нулевой кривизны (3.32) допускает целое семейство решений, параметризованных вращениями  $SO(p, \mathbb{R})$  с явной зависимостью от идемпотент. Эти решения тоже описывают пространство  $AdS_4$ , например

$$\begin{aligned} \Omega_{AdS}(Y, I|x|A) &= \\ &= -\frac{i}{4} \left( \omega_{\alpha\beta}(x) \delta^{nm} y_n^\alpha y_m^\beta + \bar{\omega}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}(x) \delta^{nm} \bar{y}_n^{\dot{\alpha}} \bar{y}_m^{\dot{\beta}} + 2e_{\alpha\dot{\alpha}}(x) A^n{}_m y_n^\alpha \bar{y}^{\dot{\alpha}m} \right) \prod_{j=1}^p I_j, \end{aligned} \quad (3.44)$$

где

$$A^T A = \mathbb{1}, \quad A \in SO(p, \mathbb{R}). \quad (3.45)$$

Существование этого семейства решений связано с наличием  $SO(p, \mathbb{R})$ -инвариантных свёрток между параметрами интегрирования  $S_n^A$  и  $T_n^A$  в звёздочном произведении (10). Это позволяет переопределить переменные  $y_n^\alpha$  и  $\bar{y}_n^{\dot{\alpha}}$  таким образом, чтобы поглотить вращение из  $SO(p, \mathbb{R})$  и привести решение обратно к виду (3.41), домноженному на полный набор идемпотент. Однако такое переопределение несёт в себе также и переопределение действия операторов Клейна, а значит, изменяет структуру модулей. Может показаться, что имеется набор неэквивалентных вакуумов. Но дополнительно наложенное условие антиэрмитовости связности относительно сопряжения  $y^\dagger = \bar{y}$ , а также требование сохранения фильтрации по идемпотентам (а значит, отсутствие их в явном виде в фоновой связности) исключают какие-либо нетривиальные вращения  $A$ . Таким образом, выбранное решение (3.41) остаётся единственным.

### 3.3 Первая теорема о массовой оболочке

Этот раздел посвящен обобщению техники сдвиговой гомотопии, разработанной в [34] для применения в моделях, расширенных группой Кокстера и нахождения Первой теоремы о массовой оболочке (т.е. свободных уравнений) в расширенном случае. Линейные уравнения также определяют набор динамических полей в полной нелинейной теории.

### 3.3.1 Обобщение сдвиговой гомотопии

#### Стягивающий оператор гомотопии

Для получения развернутых уравнений в виде

$$d_x \omega = -\omega * \omega + \Upsilon(\omega, \omega, C) + \Upsilon(\omega, \omega, C, C) + \dots, \quad (3.46)$$

$$d_x C = -[\omega, C]_* + \Upsilon(\omega, C, C) + \dots \quad (3.47)$$

из производящей нелинейной системы в теории, расширенной группой Кокстера, необходимо последовательно решать уравнения вида

$$d_Z f(Y, Z, I; \hat{K}; dZ) = g(Y, Z, I; \hat{K}; dZ), \quad (3.48)$$

с некоторым  $g(Y, Z, I; \hat{K}; dZ)$ , составленным из комбинаций полей низших порядков, подчинённым условию совместности

$$d_Z g(Y, Z, I; \hat{K}; dZ) = 0. \quad (3.49)$$

Подобно тому, как это было сделано в предыдущей главе, эти уравнения решаются гомотопическим трюком, который, однако, требует некоторых изменений. На первом шаге, как и для обычной сдвиговой гомотопии [34], рассмотрим нильпотентный оператор гомотопии

$$\partial = (Z_n^A + I_n Q_n^A) \frac{\partial}{\partial dZ_n^A}, \quad (3.50)$$

с некоторым оператором  $Q_n^A$ , не зависящим от  $Z_n^A$ ,

$$\frac{\partial Q_m^B}{\partial Z_n^A} = 0. \quad (3.51)$$

Первое отличие процедуры заключается в наличии идемпотент  $I_n$  в определении гомотопического оператора, как и любого оператора с частной производной  $\partial$  в определении. Подобно обозначению для операторов Клейна, введём обозначение

$$\hat{Q}_n^A := I_n Q_n^A. \quad (3.52)$$

Далее, введём

$$N = \{d_Z, \partial\} \quad (3.53)$$

и его почти обратный

$$N^*g(Y, Z, I; dZ) := \int_0^1 \frac{dt}{t} g(Y, tZ_n - (1-t)\hat{Q}_n, I; tdZ), \quad g(Y, -\hat{Q}_n, I; 0) = 0, \quad (3.54)$$

определенный на дополнении к  $d_Z$ -когомологии.

Сжимающий оператор гомотопии тогда имеет вид

$$\Delta_Q := \partial N^*, \quad (3.55)$$

$$\Delta_Q g(Y, Z; dZ) = \left( Z_n^A + \hat{Q}_n^A \right) \frac{\partial}{\partial dZ_n^A} \int_0^1 \frac{dt}{t} g(Y, tZ_i - (1-t)\hat{Q}_i, I; tdZ) \quad (3.56)$$

и также выполняет разложение единицы

$$\{d_Z, \Delta_Q\} = 1 - h_Q \quad (3.57)$$

для когомологического проектора  $h_Q$

$$h_Q f(Z, I; dZ) = f(-\hat{Q}_n, I; 0). \quad (3.58)$$

Тогда из разложения единицы получим частное решение (3.48)

$$f = \Delta_Q g \quad (3.59)$$

для  $h_Q g = 0$ . Общее решение (3.48) имеет вид

$$f(Y, Z, I; dZ) = \Delta_Q g(Y, Z, I; dZ) + h(Y, I) + d_Z \epsilon(Y, Z, I; dZ) \quad (3.60)$$

с представителем когомологии  $h(Y, I)$  и калибровочным параметром  $\epsilon(Y, Z, I; dZ)$ , задающим  $d_Z$ -точный член. Переход между разными  $Q$  означает различные выборы  $h$  и  $\epsilon$ -зависимых членов в решении. Итого, выбор  $Q$  в (3.59) кодирует выбор полевых переменных и важен для анализа локальности.

### Свойства оператора $\Delta_Q$

Рассмотрим свойства введённых  $\Delta_Q$  и  $h_Q$ . В большинстве своём их можно получить простым обобщением свойств, предъявленных в [34]. Во-первых, операторы  $\Delta_Q$  и  $\Delta_P$  всё так же антикоммутируют

$$\Delta_Q \Delta_P = -\Delta_P \Delta_Q \quad (3.61)$$

это свойство можно получить напрямую применением (3.56). Аналогично есть нетривиальное правило перестановки с проекторами на когомологии

$$h_P \Delta_Q = -h_Q \Delta_P. \quad (3.62)$$

Также

$$h_P h_Q = h_Q, \quad \Delta_P h_Q = 0 \quad (3.63)$$

и

$$\Delta_B - \Delta_A = [d_Z, \Delta_A \Delta_B] + h_A \Delta_B. \quad (3.64)$$

Последнее свойство следует из разложения единицы (3.57).

Ограничиваясь только голоморфными переменными из  $(Z_A^n, Y_A^n, \hat{K})$ , т.е.  $(z_\mu^n, y_\mu^n, \hat{k})$ , запишем явное действие  $\Delta_b \Delta_a$  и  $h_c \Delta_b \Delta_a$

$$\begin{aligned} \Delta_b \Delta_a f(y, z, I) dz^{n\mu} dz_{n\mu} &= 2 \int_{[0,1]^3} d^3 \tau \delta(1 - \tau_1 - \tau_2 - \tau_3) (z + \hat{b})_{m\nu} (z + \hat{a})^{m\nu} \times \\ &\times f(y, \tau_1 z - \tau_3 \hat{b} - \tau_2 \hat{a}, I), \end{aligned} \quad (3.65)$$

$$\begin{aligned} h_c \Delta_b \Delta_a f(y, z, I) dz^{n\mu} dz_{n\mu} &= 2 \int_{[0,1]^3} d^3 \tau \delta(1 - \tau_1 - \tau_2 - \tau_3) (\hat{b} - \hat{c})_{m\nu} (\hat{a} - \hat{c})^{m\nu} \times \\ &\times f(y, -\tau_1 \hat{c} - \tau_3 \hat{b} - \tau_2 \hat{a}, I), \end{aligned} \quad (3.66)$$

где  $\{\hat{a}_n, \hat{b}_n, \hat{c}_n\} = \{I_n a_n, I_n b_n, I_n c_n\}$ .

Важное следствие (3.66) состоит в том, что для любого значения  $\kappa$

$$h_{(\kappa+1)q_2 - \kappa q_1} \Delta_{q_2} \Delta_{q_1} = 0. \quad (3.67)$$

Применение (3.66) к компоненте центрального элемента вдоль заданного корневого вектора  $\hat{\gamma}_v$  (сам по себе  $\hat{\gamma}_v$  не является центральным), определенной как

$$\hat{\gamma}_v = \exp \left( i \frac{v^p v^q}{(v, v)} z_{\alpha p} y_q^\alpha \right) \frac{v^n v^m}{(v, v)} dz_n^\alpha dz_{\alpha m} \hat{k}_v \quad (3.68)$$

даёт

$$\begin{aligned} h_c \Delta_b \Delta_a \hat{\gamma}_v &= 2 \int_{[0,1]^3} d^3 \tau \delta(1 - \tau_1 - \tau_2 - \tau_3) (b - c)_{n\nu} (a - c)_m^\nu \frac{v^n v^m}{(v, v)} \times \\ &\times \exp \left\{ -i \frac{v^p v^q}{(v, v)} (\tau_1 c + \tau_2 a + \tau_3 b)_{p\alpha} y_q^\alpha \right\} \hat{k}_v. \end{aligned} \quad (3.69)$$

В этой формуле идемпотенты поглощены параметрами  $a, b, c$  и корневыми векторами  $v^n$ . Компонента центрального элемента  $\hat{\gamma}_v$  коммутирует со всеми осцилляторными переменными  $Y^A, Z^A$ , но нетривиально коммутирует с операторами Клейна

$$\hat{k}_u * \hat{\gamma}_v = \hat{\gamma}_{R_u(v)} * \hat{k}_u. \quad (3.70)$$

Ключевым свойством операторов  $\Delta_Q$  и  $h_P$ , на котором зиждится  $z$ -независимость вершин, получаемых из нелинейных уравнений

$$(\Delta_d - \Delta_c) (\Delta_a - \Delta_b) \hat{\gamma}_v = (h_d - h_c) \Delta_a \Delta_b \hat{\gamma}_v. \quad (3.71)$$

Действительно  $d_z \hat{\gamma}_v = 0$ ,  $h_a \hat{\gamma}_v = 0$ ,  $h_a \Delta_b \hat{\gamma}_v = 0$  и  $\Delta_a \Delta_b \Delta_c \hat{\gamma}_v = 0$ . Аналогично работе [34], можно показать, что (3.71) следует из (3.64).

В применениях важно следствие (3.71) для  $d = a$

$$(\Delta_c \Delta_b - \Delta_c \Delta_a + \Delta_b \Delta_a) \hat{\gamma}_v = h_c \Delta_b \Delta_a \hat{\gamma}_v. \quad (3.72)$$

Формулы звёздочного обмена для независящих от  $z$  элементов в теории, расширенной группой Кокстера, значительно изменяются

$$\Delta_{q+\alpha y}(C(y, I) * \phi(z, y, I; \hat{k}_v; dZ)) = C(y, I) * \Delta_{q+(1-\alpha)Ip+\alpha y} \phi(z, y, I; \hat{k}_v; dZ), \quad (3.73)$$

$$\Delta_{q+\alpha y}(\phi(z, y, I; dZ) * \hat{k}_v * C(y, I)) = \Delta_{q+(1+\alpha)IR_v(p)+\alpha y}(\phi(z, y, I; dZ) * \hat{k}_v) * C(y, I), \quad (3.74)$$

где

$$p_\mu^n C(Y, I; \hat{K}) = C(Y, I; \hat{K}) p_\mu^n := -i \frac{\partial}{\partial y_n^\mu} C(Y, I; \hat{K}). \quad (3.75)$$

По сравнению с формулами звёздочного обмена в стандартной теории [34] сдвиговой параметр  $p_\mu^n$  содержит идемпотенты в обеих формулах и отражается относительно корневого вектора с помощью  $\hat{k}_v$  в (3.74). Обычные формулы для стандартной теории соответствуют выбору группы Кокстера  $\mathbb{Z}_2$ , для которой матрицы отражения вырождаются в  $R_k = -1$ .

Центральный элемент в теории, расширенной группой Кокстера может быть получен как сумма  $\hat{\gamma}_v$  по корневым векторам в одной орбите  $\mathcal{R}_i$  с равным (единичным) весом, чтобы обеспечить инвариантность относительно группы Кокстера  $\mathcal{C}$ .

$$\hat{\gamma}_i = \sum_{v \in \mathcal{R}_i} \hat{\gamma}_v. \quad (3.76)$$

Обобщенные формулы звездочного обмена (3.73) и (3.74) позволяют вычислить

$$\Delta_{q+\alpha y} \hat{\gamma}_v * C(y, I) = C(y, I) * \Delta_{q+\alpha y+(1-\alpha)Ip-(1+\alpha)IR_v(p)} \hat{\gamma}_v. \quad (3.77)$$

следовательно,

$$\Delta_{q+\alpha y} \hat{\gamma}_i * C(y, I) = C(y, I) * \sum_{v \in \mathcal{R}_i} \Delta_{q+\alpha y+(1-\alpha)Ip-(1+\alpha)IR_v(p)} \hat{\gamma}_v. \quad (3.78)$$

Важно, что поле  $C$  не несёт в себе операторы Клейна в формулах звездочного обмена (3.73)-(3.74) и (3.77), хотя в работе [34] в подобных формулах  $C$  содержит оператор Клейна  $K$ . Это важно, т.к. в теории, расширенной группой Кокстера общего положения операторы Клейна  $\hat{K}_v$  и  $\hat{K}_u$  не коммутируют (3.4). Следовательно, необходимо контролировать место вставки операторов Клейна в каждом выражении. Возьмём в качестве конвенции, что все операторы Клейна в полях перенесены до упора направо в каждом выражении и упорядочены в том же порядке, что и поля, которые их содержали.

### 3.3.2 Первый порядок теории возмущения в теории высших спинов, расширенной группой Кокстера

Вакуумное решение полной нелинейной производящей системы (3.24)-(3.28) возьмём в виде

$$B_0(Y, Z, I; \hat{K}|x) = 0, \quad (3.79)$$

$$S_0(Y, Z, I; \hat{K}|x) = dZ^{\alpha n} Z_{\alpha n}, \quad (3.80)$$

$$W_0(Y, Z, I; \hat{K}|x) = \omega_0(Y, I; \hat{K}|x), \quad (3.81)$$

с некоторой плоской связностью  $\omega_0$ ,

$$d_x \omega_0(Y, I; \hat{K}|x) + \omega_0(Y, I; \hat{K}|x) * \omega_0(Y, I; \hat{K}|x) = 0. \quad (3.82)$$

Важно, что

$$[S_0, f(Y, Z, I; \hat{K})]_* = -2idZ_n^A \frac{\partial}{\partial Z_n^A} f(Y, Z, I; \hat{K}) = -2id_Z f(Y, Z, I; \hat{K}). \quad (3.83)$$

Тогда в первом порядке уравнение (3.27)

$$[S_0, B_1]_* + [S_1, B_0]_* = 0. \quad (3.84)$$

Из вакуумного решения и соотношения (3.83) очевидно, что  $B_1$  не зависит от вспомогательной переменной  $Z$ , назовём эту часть

$$B_1 = C(Y, I; \hat{K}|x). \quad (3.85)$$

Тогда из уравнения (3.25) следует

$$d_x C + [\omega, C]_* = 0, \quad (3.86)$$

что и задаёт уравнения ковариантного постоянства в секторе ноль-форм. Далее по тексту, чтобы упростить выражения в секторе один-форм объединим фоновую  $\omega_0(Y, I; \hat{K}|x)$  и  $Z$ -независимые флуктуации в первом порядке  $\omega_1(Y, I; \hat{K}|x)$  в поле

$$\omega(Y, I; \hat{K}|x) = \omega_0(Y, I; \hat{K}|x) + \omega_1(Y, I; \hat{K}|x). \quad (3.87)$$

Будем рассматривать уравнения в первом порядке. Это значит, что из полного поля  $\omega$  в условии ковариантного постоянства (3.86) присутствует только фоновое поле  $\omega_0$ , т.к. поле  $C$  само поле первого порядка.

Выражения для поправки  $S_1$  через ноль-формы  $C$  получается из решения (3.28)

$$-2id_Z S_1 = i \sum_l \left( \eta_l C * \hat{\gamma}_l + \bar{\eta}_l C * \hat{\bar{\gamma}}_l \right), \quad (3.88)$$

для центральных элементов  $\hat{\gamma}_l$  и  $\hat{\bar{\gamma}}_l$  (3.76) на орбите  $\mathcal{R}_l$ . Тогда для  $S_1 = S_1^\eta + S_1^{\bar{\eta}}$ , можно получить зависящий от константы  $\eta$  (т.е. голоморфный) сектор, используя нулевую гомотопию

$$S_1^\eta = - \sum_k \frac{\eta_k}{2} \Delta_0(C * \hat{\gamma}_k) = - \sum_k \frac{\eta_k}{2} \sum_{v \in \mathcal{R}_k} \Delta_0(C * \hat{\gamma}_v) = - \sum_k \frac{\eta_k}{2} \sum_{v \in \mathcal{R}_k} C * \Delta_{I_p} \hat{\gamma}_v. \quad (3.89)$$

Для  $S_1^{\bar{\eta}}$  выражение аналогичное.

Следующим шагом решается уравнение (3.26) в первом порядке

$$d_z W_1^\eta = \frac{1}{2i} (d_x S_1^\eta + \omega * S_1^\eta + S_1^\eta * \omega). \quad (3.90)$$

Используя обобщение принятых обозначений (2.64)

$$t_\mu^n \omega(Y, I; \hat{K}|x) = -i \frac{\partial}{\partial y_n^\mu} \omega(Y, I; \hat{K}|x), \quad (3.91)$$

нулевая гомотопия даёт

$$W_1^\eta = \frac{1}{4i} \sum_k \eta_k \sum_{v \in \mathcal{R}_k} \left( \omega * C * \Delta_{I(t+p)} \Delta_{Ip} \hat{\gamma}_v - C * \omega * \Delta_{I(t+p)} \Delta_{I(t+p-R_v(t))} \hat{\gamma}_v \right). \quad (3.92)$$

Наконец рассмотрим первое уравнение (3.24) в первом порядке

$$d_x \omega + \omega * \omega + d_x W_1^\eta + \omega * W_1^\eta + W_1^\eta * \omega + c.c. = 0. \quad (3.93)$$

Подставляя (3.92) и, применяя формулы (3.72)-(3.74), (3.77), получаем

$$d_x \omega + \omega * \omega = \Upsilon^\eta(\omega, \omega, C) + \Upsilon^\eta(\omega, C, \omega) + \Upsilon^\eta(C, \omega, \omega) + c.c., \quad (3.94)$$

где вершины

$$\Upsilon^\eta(\omega, \omega, C) = \frac{1}{4i} \sum_k \eta_k \sum_{v \in \mathcal{R}_k} \omega * \omega * C * h_{I(t_1+t_2+p)} \Delta_{Ip} \Delta_{I(p+t_2)} \hat{\gamma}_v, \quad (3.95)$$

$$\begin{aligned} \Upsilon^\eta(\omega, C, \omega) = & -\frac{1}{4i} \sum_k \eta_k \sum_{v \in \mathcal{R}_k} \omega * C * \omega * \left( h_{I(t_1+t_2+p)} \Delta_{I(p+t_1+t_2-R_v(t_2))} \Delta_{I(p+t_2)} \hat{\gamma}_v + \right. \\ & \left. + h_{I(p+t_1+t_2-R_v(t_2))} \Delta_{I(p+t_2-R_v(t_2))} \Delta_{I(p+t_2)} \hat{\gamma}_v \right), \quad (3.96) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Upsilon^\eta(C, \omega, \omega) = & \\ = & \frac{1}{4i} \sum_k \eta_k \sum_{v \in \mathcal{R}_k} C * \omega * \omega * h_{I(t_1+t_2+p)} \Delta_{I(p+t_1+t_2-R_v(t_2))} \Delta_{I(p+t_1+t_2-R_v(t_1+t_2))} \hat{\gamma}_v. \quad (3.97) \end{aligned}$$

Структурно вершины (3.95)-(3.97) схожи с вершинами в обычной теории [34], а значит стандартная Первая теорема о массовой оболочке должна следовать из разложения вершин над фоном  $AdS_4$ . Однако, расширенная модель включает множество операторов Клейна и соответствующие им элементы  $\hat{\gamma}_v$ , из-за которых появляются дополнительные члены по сравнению с обычной теорией. Важным отличием, которое, возможно, играет роль для поиска связи с теорией струн, является наличие многих констант связи  $\eta_k$ . В следующем разделе рассмотрим вершины (3.95)-(3.97) над фоном  $AdS_4$  как для теории расширенной группой Кокстера общего положения, так и в специальном случае группы  $B_2$ .

### 3.3.3 Первая теорема о массовой оболочке

#### Случай группы Кокстера общего положения

Этот раздел посвящен вычислению вершин  $\Upsilon^\eta(\Omega_{AdS}, \Omega_{AdS}, C)$ ,  $\Upsilon^\eta(\Omega_{AdS}, C, \Omega_{AdS})$  и  $\Upsilon^\eta(C, \Omega_{AdS}, \Omega_{AdS})$  со связностью  $AdS_4 \Omega_{AdS}(Y|x)$  (3.33). Используя (3.69), свойства идемпотент  $I_n$  и матриц отражения  $R_v^n$ , получаем

$$h_{I(t_1+t_2+p)} \Delta_{I_p} \Delta_{I(p+t_2)} \hat{\gamma}_v = 2 \int_{[0,1]^3} d^3\tau \delta(1 - \sum_i \tau_i) t_{2\alpha m} t_1^\alpha \frac{v^n v^m}{(v, v)} \times \\ \times \exp\left(-i \frac{v^a v^b}{(v, v)} (y_a^\alpha p_{\alpha b} + y_a^\alpha [\tau_1(t_1+t_2) + \tau_2 t_2]_{\alpha b})\right) * \hat{k}_v, \quad (3.98)$$

$$h_{I(t_1+t_2+p)} \Delta_{I(p+t_1+t_2-R_v(t_2))} \Delta_{I(p+t_1+t_2-R_v(t_1+t_2))} \hat{\gamma}_v = \\ = 2 \int_{[0,1]^3} d^3\tau \delta(1 - \sum_i \tau_i) t_{2\alpha m} t_1^\alpha \frac{v^n v^m}{(v, v)} \times \\ \times \exp\left(-i \frac{v^a v^b}{(v, v)} (y_a^\alpha [p+t_1+t_2]_{\alpha b} + y_a^\alpha [\tau_1 t_2 + \tau_2(t_1+t_2)]_{\alpha b})\right) * \hat{k}_v, \quad (3.99)$$

$$h_{I(t_1+t_2+p)} \Delta_{I(p+t_1+t_2-R_v(t_2))} \Delta_{I(p+t_2)} \hat{\gamma}_v = -2 \int_{[0,1]^3} d^3\tau \delta(1 - \sum_i \tau_i) t_{2\alpha m} t_1^\alpha \frac{v^n v^m}{(v, v)} \times \\ \times \exp\left(-i \frac{v^a v^b}{(v, v)} (y_a^\alpha [p+t_2]_{\alpha b} + y_a^\alpha [\tau_1 t_1 + \tau_2(t_1+t_2)]_{\alpha b})\right) * \hat{k}_v, \quad (3.100)$$

$$h_{I(p+t_1+t_2-R_v(t_2))} \Delta_{I(p+t_2-R_v(t_2))} \Delta_{I(p+t_2)} \hat{\gamma}_v = -2 \int_{[0,1]^3} d^3\tau \delta(1 - \sum_i \tau_i) t_{2\alpha m} t_1^\alpha \frac{v^n v^m}{(v, v)} \times \\ \times \exp\left(-i \frac{v^a v^b}{(v, v)} (y_a^\alpha [p+t_2]_{\alpha b} + y_a^\alpha [\tau_1(t_1+t_2) + \tau_2 t_2]_{\alpha b})\right) * \hat{k}_v. \quad (3.101)$$

В стандартной теории высших спинов структура деформированных осцилляторов гарантирует Лоренц-ковариантность системы уравнений [30]. Обрамленная алгебра Чередника (3.7) по построению является обобщением алгебры деформированных осцилляторов, таким, что сохраняется структура  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$  на билинейных комбинациях осцилляторов. Тем самым, подобное рассуждение гарантирует лоренц-ковариантность расширенной системы, т.е. члены с  $\omega\omega$  и  $\omega\epsilon$  сокращаются в вершинах (эквивалентно, спин-связность  $\omega$  входит только через

ковариантную производную). Предварительное выражение  $h\Delta\Delta$  даёт в секторе билинейном по тетрадам

$$\begin{aligned} & \Omega_{AdS}(Y|x) * \Omega_{AdS}(Y|x) * C(Y, I; \hat{K}_C|x) * h_{I(t_1+t_2+p)} \Delta_{Ip} \Delta_{I(p+t_2)} \hat{\gamma}_v \Big|_{ee} = \\ & = -\frac{1}{4} \frac{v^n v^m}{(v, v)} \bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \left[ \bar{y}_n^{\dot{\alpha}} \bar{y}_m^{\dot{\beta}} + i \bar{y}_n^{\dot{\alpha}} \bar{\partial}_m^{\dot{\beta}} + i \bar{y}_m^{\dot{\beta}} \bar{\partial}_n^{\dot{\alpha}} - \bar{\partial}_n^{\dot{\alpha}} \bar{\partial}_m^{\dot{\beta}} \right] C(\mathbb{P}_v(y), \bar{y}, I; \hat{K}_C|x) * \hat{k}_v, \end{aligned} \quad (3.102)$$

$$\begin{aligned} & C(Y, I; \hat{K}_C|x) * \Omega_{AdS}(Y|x) * \Omega_{AdS}(Y|x) * \\ & * h_{I(t_1+t_2+p)} \Delta_{I(p+t_1+t_2-R_v(t_2))} \Delta_{I(p+t_1+t_2-R_v(t_1+t_2))} \hat{\gamma}_v \Big|_{ee} = \\ & = -\frac{1}{4} \frac{v_k v_l}{(v, v)} \delta^{nm} \delta^{pq} R(\hat{K}_C)_n^k R(\hat{K}_C)_p^l \bar{R}(\hat{K}_C)_m^w \bar{R}(\hat{K}_C)_q^z \bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \left[ \bar{y}_w^{\dot{\alpha}} \bar{y}_z^{\dot{\beta}} - i \bar{y}_w^{\dot{\alpha}} \bar{\partial}_z^{\dot{\beta}} - \right. \\ & \quad \left. - i \bar{y}_z^{\dot{\beta}} \bar{\partial}_w^{\dot{\alpha}} - \bar{\partial}_w^{\dot{\alpha}} \bar{\partial}_z^{\dot{\beta}} \right] C(\mathbb{P}_v(y), \bar{y}, I; \hat{K}_C|x) * \hat{k}_v, \end{aligned} \quad (3.103)$$

$$\begin{aligned} & \Omega_{AdS}(Y|x) * C(Y, I; \hat{K}_C|x) * \Omega_{AdS}(Y|x) * \\ & h_{I(t_1+t_2+p)} \Delta_{I(p+t_1+t_2-R_v(t_2))} \Delta_{I(p+t_2)} \hat{\gamma}_v \Big|_{ee} = \\ & = \frac{1}{4} \frac{v^n v_k}{(v, v)} \delta^{pq} R(\hat{K}_C)_p^k \bar{R}(\hat{K}_C)_q^l \bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \left[ \bar{y}_n^{\dot{\alpha}} \bar{y}_l^{\dot{\beta}} - i \bar{y}_n^{\dot{\alpha}} \bar{\partial}_l^{\dot{\beta}} + i \bar{y}_l^{\dot{\beta}} \bar{\partial}_n^{\dot{\alpha}} + \bar{\partial}_n^{\dot{\alpha}} \bar{\partial}_l^{\dot{\beta}} \right] \times \\ & \quad \times C(\mathbb{P}_v(y), \bar{y}, I; \hat{K}_C|x) * \hat{k}_v, \end{aligned} \quad (3.104)$$

$$\begin{aligned} & \Omega_{AdS}(Y|x) * C(Y, I; \hat{K}_C|x) * \Omega_{AdS}(Y|x) * \\ & h_{I(p+t_1+t_2-R_v(t_2))} \Delta_{I(p+t_2-R_v(t_2))} \Delta_{I(p+t_2)} \hat{\gamma}_v \Big|_{ee} = \\ & = \frac{1}{4} \frac{v^n v_k}{(v, v)} \delta^{pq} R(\hat{K}_C)_p^k \bar{R}(\hat{K}_C)_q^l \bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \left[ \bar{y}_n^{\dot{\alpha}} \bar{y}_l^{\dot{\beta}} - i \bar{y}_n^{\dot{\alpha}} \bar{\partial}_l^{\dot{\beta}} + i \bar{y}_l^{\dot{\beta}} \bar{\partial}_n^{\dot{\alpha}} + \bar{\partial}_n^{\dot{\alpha}} \bar{\partial}_l^{\dot{\beta}} \right] \times \\ & \quad \times C(\mathbb{P}_v(y), \bar{y}, I; \hat{K}_C|x) * \hat{k}_v, \end{aligned} \quad (3.105)$$

где оставлены только члены с произведением двух тетрад  $e$

$$e^{\nu\dot{\nu}} e^{\lambda\dot{\lambda}} = \frac{1}{2} H^{\nu\lambda} \bar{\varepsilon}^{\dot{\nu}\dot{\lambda}} + \frac{1}{2} \bar{H}^{\dot{\nu}\dot{\lambda}} \varepsilon^{\nu\lambda}. \quad (3.106)$$

Базисные два формы определяются как

$$H^{\nu\lambda} = H^{(\nu\lambda)} := e^\nu_{\dot{\gamma}} e^{\lambda\dot{\gamma}}, \quad \bar{H}^{\dot{\nu}\dot{\lambda}} = H^{(\dot{\nu}\dot{\lambda})} := e_{\dot{\gamma}}^{\dot{\nu}} e^{\lambda\dot{\gamma}}. \quad (3.107)$$

Матрицы  $R(\hat{K}_C)$  и  $\bar{R}(\hat{K}_C)$  являются отражениями, соответствующими оператору Клейна  $\hat{K}_C$ . Поскольку, вообще говоря, операторы Клейна могут происходить как из полей  $C$ , так и из  $\omega$  (хотя последних не будет встречаться в настоящем анализе), а также из центрального элемента  $\hat{\gamma}_v$ , для определенности введен индекс для операторов Клейна  $\hat{K}_C$ , пришедших из поля  $C$ .

$$(\mathbb{P}_v)^n{}_m = \delta_m^n - \frac{v^n v_m}{(v, v)} \quad (3.108)$$

является проектором на плоскость, ортогональную корневому вектору  $v$ . Как проектор он уменьшает число спинорных переменных в аргументах поля  $C$ .

В выражениях выше, следуя принятой конвенции  $C(\mathbb{P}_v(y), \bar{y}, I; \hat{K}_C|x) * \hat{k}_v \equiv C(\mathbb{P}_v(y), \bar{y}, I|x) * \hat{k}_v * \hat{K}_C$ , т.е. операторы Клейна  $\hat{K}_C$  протянуты до упора вправо.

Полученные голоморфные вершины имеют вид

$$\Upsilon^\eta(\Omega_{AdS}, \Omega_{AdS}, C) = \frac{i}{16} \sum_k \eta_k \sum_{v \in \mathcal{R}_k} \frac{v^n v^m}{(v, v)} \bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \left[ \bar{y}_n^{\dot{\alpha}} \bar{y}_m^{\dot{\beta}} + i \bar{y}_n^{\dot{\alpha}} \bar{\partial}_m^{\dot{\beta}} + i \bar{y}_m^{\dot{\beta}} \bar{\partial}_n^{\dot{\alpha}} - \bar{\partial}_n^{\dot{\alpha}} \bar{\partial}_m^{\dot{\beta}} \right] \times \\ \times C(\mathbb{P}_v(y), \bar{y}, I; \hat{K}_C|x) * \hat{k}_v, \quad (3.109)$$

$$\Upsilon^\eta(C, \Omega_{AdS}, \Omega_{AdS}) = \frac{i}{16} \sum_k \eta_k \sum_{v \in \mathcal{R}_k} \frac{v_k v_l}{(v, v)} \delta^{nm} \delta^{pq} R(\hat{K}_C)_n^k R(\hat{K}_C)_p^l \bar{R}(\hat{K}_C)_m^w \bar{R}(\hat{K}_C)_q^z \\ \bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \left[ \bar{y}_w^{\dot{\alpha}} \bar{y}_z^{\dot{\beta}} - i \bar{y}_w^{\dot{\alpha}} \bar{\partial}_z^{\dot{\beta}} - i \bar{y}_z^{\dot{\beta}} \bar{\partial}_w^{\dot{\alpha}} - \bar{\partial}_w^{\dot{\alpha}} \bar{\partial}_z^{\dot{\beta}} \right] C(\mathbb{P}_v(y), \bar{y}, I; \hat{K}_C|x) * \hat{k}_v, \quad (3.110)$$

$$\Upsilon^\eta(\Omega_{AdS}, C, \Omega_{AdS}) = \frac{i}{8} \sum_k \eta_k \sum_{v \in \mathcal{R}_k} \frac{v^n v_k}{(v, v)} \delta^{pq} R(\hat{K}_C)_p^k \bar{R}(\hat{K}_C)_q^l \bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \left[ \bar{y}_n^{\dot{\alpha}} \bar{y}_l^{\dot{\beta}} - i \bar{y}_n^{\dot{\alpha}} \bar{\partial}_l^{\dot{\beta}} + \right. \\ \left. + i \bar{y}_l^{\dot{\beta}} \bar{\partial}_n^{\dot{\alpha}} + \bar{\partial}_n^{\dot{\alpha}} \bar{\partial}_l^{\dot{\beta}} \right] C(\mathbb{P}_v(y), \bar{y}, I; \hat{K}_C|x) * \hat{k}_v. \quad (3.111)$$

Для стандартной теории  $\mathcal{C} = \mathbb{Z}_2$  полная голоморфная вершина принимает вид

$$\Upsilon_{tot}^\eta(\Omega_{AdS}, \Omega_{AdS}, C) = \frac{i\eta}{4} \bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{y}^{\dot{\alpha}} \bar{y}^{\dot{\beta}} \left( C(0, \bar{y}; K_C|x) + C(0, \bar{y}; -K_C|x) \right) * k - \\ - \frac{i\eta}{4} \bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\partial}^{\dot{\alpha}} \bar{\partial}^{\dot{\beta}} \left( C(0, \bar{y}; K_C|x) - C(0, \bar{y}; -K_C|x) \right) * k, \quad (3.112)$$

т.е. воспроизводит обычную 4d Первую Теорему о массовой оболочке [57]. Более того, для группы Кокстера  $\mathcal{C}$  общего положения вид Первой теоремы о массовой оболочке сохраняется вдоль любого корневого вектора. Действительно, рассмотрим поля  $C(y, \bar{y}, I; \hat{k}_u|x)$ , где  $u$  – корневой вектор из орбиты  $\mathcal{R}_0$ . Тогда

$$\Upsilon_{tot}^{\eta_0}(\Omega_{AdS}, \Omega_{AdS}, C) = \frac{\eta_0 u^n u^m}{2i(u, u)} \bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\partial}_n^{\dot{\alpha}} \bar{\partial}_m^{\dot{\beta}} C(\mathbb{P}_u(y), \bar{y}, I; \hat{k}_u|x) * \hat{k}_u + \\ + \frac{i\eta_0}{16} \bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \sum_{v \in \mathcal{R}_0, v \neq \pm u} (...), \quad (3.113)$$

где  $\Upsilon_{tot}^{\eta_0}(\Omega_{AdS}, \Omega_{AdS}, C)$  – часть полной голоморфной вершины с  $\eta_0$ . Проектор  $\mathbb{P}_u$  приводит к ультралокальному виду в терминах работы [34], т.к. в его ядре лежат переменные  $Y$  вдоль корневого вектора  $u$ .

### Группа Кокстера $B_2$

Рассмотрим пример группы Кокстера  $B_2$ . Корневая система  $B_2$  состоит из двух орбит

$$\mathcal{R}_1 = \{\pm e^i, 1 \leq i \leq 2\}, \quad \mathcal{R}_2 = \{\pm e^1 \pm e^2\}. \quad (3.114)$$

Элементом из первой орбиты соответствуют операторы Клейна  $k_i, \bar{k}_i$ , второй – операторы  $k_{12}$ . По свойствам алгебры Чередника

$$\left\{ \hat{k}_i, \hat{k}_{12} | \hat{k}_i^2 = I_i, \hat{k}_{12}^2 = I_1 I_2, \hat{k}_1 \hat{k}_{12} = \hat{k}_{12} \hat{k}_2, \hat{k}_2 \hat{k}_{12} = \hat{k}_{12} \hat{k}_1, i \in \{1, 2\} \right\}. \quad (3.115)$$

Введём также дополнительный зависимый оператор Клейна

$$\hat{k}_{12}^+ := \hat{k}_1 \hat{k}_2 \hat{k}_{12}, \quad (3.116)$$

Задающий отражение относительно корневого вектора  $e^1 + e^2 \in \mathcal{R}_2$ . Легко построить матрицы отражения в двумерном пространстве, соответствующие полному набору операторов Клейна

$$R(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R(k_1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R(k_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.117)$$

$$R(k_{12}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R(k_1 k_2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad R(k_1 k_{12}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.118)$$

$$R(k_2 k_{12}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R(k_{12}^+) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.119)$$

Для антиголоморфных переменных операторы Клейна и матрицы отражения аналогичны.

Наивно, мастер-поле, зависящее от произвольного набора операторов Клейна в билинейном по идемпотентам секторе содержит  $2^6 = 64$  компонент (каждый оператор Клейна или присутствует, или нет)

$$C(Y_1, Y_2; \hat{K}|x) * I_1 I_2 = \sum_{a,b,c,\bar{a},\bar{b},\bar{c}=0}^1 C_{abc\bar{a}\bar{b}\bar{c}}(Y_1, Y_2|x) * I_1 I_2 * \hat{k}_1^a \hat{k}_2^b \hat{k}_{12}^c \hat{k}_1^{\bar{a}} \hat{k}_2^{\bar{b}} \hat{k}_{12}^{\bar{c}}. \quad (3.120)$$

Однако порядок группы  $B_2$  равен 8, поэтому произведения матриц отражения по голоморфным и антиголоморфным переменным раскладываются по тому же набору из 8 матриц

$$\delta^{nm} R(k)_n^k \bar{R}(\bar{k})_m^l = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}. \quad (3.121)$$

Таким образом в системе присутствует восьмикратное вырождение по операторам Клейна.

Получим для группы  $B_2$  явный вид Первой теоремы о массовой оболочке подстановкой в общие формулы. Введём обозначение

$$\Upsilon_{tot}^{\eta_1}(\Omega_{AdS}, \Omega_{AdS}, C) \Leftrightarrow \mathcal{R}_1, \quad \Upsilon_{tot}^{\eta_2}(\Omega_{AdS}, \Omega_{AdS}, C) \Leftrightarrow \mathcal{R}_2. \quad (3.122)$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\Upsilon_{tot}^{\eta_1}(\Omega_{AdS}, \Omega_{AdS}, C) &= \frac{i\eta_1}{8} \bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \left[ \bar{y}_1^{\dot{\alpha}} \bar{y}_1^{\dot{\beta}} + 2i\bar{y}_1^{\dot{\alpha}} \bar{\partial}_1^{\dot{\beta}} - \bar{\partial}_1^{\dot{\alpha}} \bar{\partial}_1^{\dot{\beta}} \right] C(0, y_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2, I; \hat{K}_C|x) * \hat{k}_1 + \\
&+ \frac{i\eta_1}{8} \bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \delta^{nm} \delta^{pq} R(\hat{K}_C)_n^1 R(\hat{K}_C)_p^1 \bar{R}(\hat{K}_C)_m^w \bar{R}(\hat{K}_C)_q^z \left[ \bar{y}_w^{\dot{\alpha}} \bar{y}_z^{\dot{\beta}} - 2i\bar{y}_w^{\dot{\alpha}} \bar{\partial}_z^{\dot{\beta}} - \bar{\partial}_w^{\dot{\alpha}} \bar{\partial}_z^{\dot{\beta}} \right] \times \\
&\times C(0, y_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2, I; \hat{K}_C|x) * \hat{k}_1 + \frac{i\eta_1}{4} \bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \delta^{pq} R(\hat{K}_C)_p^1 \bar{R}(\hat{K}_C)_q^l \bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \left[ \bar{y}_1^{\dot{\alpha}} \bar{y}_l^{\dot{\beta}} - i\bar{y}_1^{\dot{\alpha}} \bar{\partial}_l^{\dot{\beta}} + \right. \\
&+ \left. i\bar{y}_l^{\dot{\beta}} \bar{\partial}_1^{\dot{\alpha}} + \bar{\partial}_1^{\dot{\alpha}} \bar{\partial}_l^{\dot{\beta}} \right] C(0, y_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2, I; \hat{K}_C|x) * \hat{k}_1 + \frac{i\eta_1}{8} \bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \left[ \bar{y}_2^{\dot{\alpha}} \bar{y}_2^{\dot{\beta}} + 2i\bar{y}_2^{\dot{\alpha}} \bar{\partial}_2^{\dot{\beta}} - \bar{\partial}_2^{\dot{\alpha}} \bar{\partial}_2^{\dot{\beta}} \right] \times \\
C(y_1, 0, \bar{y}_1, \bar{y}_2, I; \hat{K}_C|x) * \hat{k}_2 &+ \frac{i\eta_1}{8} \bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \delta^{nm} \delta^{pq} R(\hat{K}_C)_n^2 R(\hat{K}_C)_p^2 \bar{R}(\hat{K}_C)_m^w \bar{R}(\hat{K}_C)_q^z \times \\
&\times \left[ \bar{y}_w^{\dot{\alpha}} \bar{y}_z^{\dot{\beta}} - 2i\bar{y}_w^{\dot{\alpha}} \bar{\partial}_z^{\dot{\beta}} - \bar{\partial}_w^{\dot{\alpha}} \bar{\partial}_z^{\dot{\beta}} \right] C(y_1, 0, \bar{y}_1, \bar{y}_2, I; \hat{K}_C|x) * \hat{k}_2 + \\
&+ \frac{i\eta_1}{4} \bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \delta^{pq} R(\hat{K}_C)_p^2 \bar{R}(\hat{K}_C)_q^l \bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \left[ \bar{y}_2^{\dot{\alpha}} \bar{y}_l^{\dot{\beta}} - i\bar{y}_2^{\dot{\alpha}} \bar{\partial}_l^{\dot{\beta}} + i\bar{y}_l^{\dot{\beta}} \bar{\partial}_2^{\dot{\alpha}} + \bar{\partial}_2^{\dot{\alpha}} \bar{\partial}_l^{\dot{\beta}} \right] \times \\
&\times C(y_1, 0, \bar{y}_1, \bar{y}_2, I; \hat{K}_C|x) * \hat{k}_2, \tag{3.123}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Upsilon_{tot}^{\eta_2}(\Omega_{AdS}, \Omega_{AdS}, C) &= \frac{i\eta_2}{16} \bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \left[ \bar{y}_1^{\dot{\alpha}} \bar{y}_1^{\dot{\beta}} + 2i\bar{y}_1^{\dot{\alpha}} \bar{\partial}_1^{\dot{\beta}} - \bar{\partial}_1^{\dot{\alpha}} \bar{\partial}_1^{\dot{\beta}} + \bar{y}_2^{\dot{\alpha}} \bar{y}_2^{\dot{\beta}} + 2i\bar{y}_2^{\dot{\alpha}} \bar{\partial}_2^{\dot{\beta}} - \bar{\partial}_2^{\dot{\alpha}} \bar{\partial}_2^{\dot{\beta}} - \right. \\
&- \left. 2\bar{y}_1^{\dot{\alpha}} \bar{y}_2^{\dot{\beta}} - 2i\bar{y}_1^{\dot{\alpha}} \bar{\partial}_2^{\dot{\beta}} - 2i\bar{y}_2^{\dot{\alpha}} \bar{\partial}_1^{\dot{\beta}} + 2\bar{\partial}_1^{\dot{\alpha}} \bar{\partial}_2^{\dot{\beta}} \right] \times \\
&\times C\left(\frac{1}{2}(y_1 + y_2), \frac{1}{2}(y_1 + y_2), \bar{y}_1, \bar{y}_2, I; \hat{K}_C|x\right) * \hat{k}_{12} + \frac{i\eta_2}{16} \bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \delta^{nm} \delta^{pq} \times \\
&\left( R(\hat{K}_C)_n^1 R(\hat{K}_C)_p^1 + R(\hat{K}_C)_n^2 R(\hat{K}_C)_p^2 - R(\hat{K}_C)_n^1 R(\hat{K}_C)_p^2 - R(\hat{K}_C)_n^2 R(\hat{K}_C)_p^1 \right) \times \\
&\bar{R}(\hat{K}_C)_m^w \bar{R}(\hat{K}_C)_q^z \left[ \bar{y}_w^{\dot{\alpha}} \bar{y}_z^{\dot{\beta}} - i\bar{y}_w^{\dot{\alpha}} \bar{\partial}_z^{\dot{\beta}} - i\bar{y}_z^{\dot{\beta}} \bar{\partial}_w^{\dot{\alpha}} - \bar{\partial}_w^{\dot{\alpha}} \bar{\partial}_z^{\dot{\beta}} \right] \times \\
C\left(\frac{1}{2}(y_1 + y_2), \frac{1}{2}(y_1 + y_2), \bar{y}_1, \bar{y}_2, I; \hat{K}_C|x\right) &* \hat{k}_{12} + \\
&+ \frac{i\eta_2}{8} \bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \delta^{pq} \left( R(\hat{K}_C)_p^1 - R(\hat{K}_C)_p^2 \right) \bar{R}(\hat{K}_C)_q^l \left[ \bar{y}_1^{\dot{\alpha}} \bar{y}_l^{\dot{\beta}} - i\bar{y}_1^{\dot{\alpha}} \bar{\partial}_l^{\dot{\beta}} + i\bar{y}_l^{\dot{\beta}} \bar{\partial}_1^{\dot{\alpha}} + \bar{\partial}_1^{\dot{\alpha}} \bar{\partial}_l^{\dot{\beta}} \right] \times \\
&\times C\left(\frac{1}{2}(y_1 + y_2), \frac{1}{2}(y_1 + y_2), \bar{y}_1, \bar{y}_2, I; \hat{K}_C|x\right) * \hat{k}_{12} + \\
\frac{i\eta_2}{8} \bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \delta^{pq} \left( R(\hat{K}_C)_p^2 - R(\hat{K}_C)_p^1 \right) &\bar{R}(\hat{K}_C)_q^l \left[ \bar{y}_2^{\dot{\alpha}} \bar{y}_l^{\dot{\beta}} - i\bar{y}_2^{\dot{\alpha}} \bar{\partial}_l^{\dot{\beta}} + \right. \\
&+ \left. i\bar{y}_l^{\dot{\beta}} \bar{\partial}_2^{\dot{\alpha}} + \bar{\partial}_2^{\dot{\alpha}} \bar{\partial}_l^{\dot{\beta}} \right] C\left(\frac{1}{2}(y_1 + y_2), \frac{1}{2}(y_1 + y_2), \bar{y}_1, \bar{y}_2, I; \hat{K}_C|x\right) * \hat{k}_{12} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{i\eta_2}{16} \bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \left[ \bar{y}_1^{\dot{\alpha}} \bar{y}_1^{\dot{\beta}} + 2i\bar{y}_1^{\dot{\alpha}} \bar{\partial}_1^{\dot{\beta}} - \bar{\partial}_1^{\dot{\alpha}} \bar{\partial}_1^{\dot{\beta}} + \bar{y}_2^{\dot{\alpha}} \bar{y}_2^{\dot{\beta}} + 2i\bar{y}_2^{\dot{\alpha}} \bar{\partial}_2^{\dot{\beta}} - \bar{\partial}_2^{\dot{\alpha}} \bar{\partial}_2^{\dot{\beta}} + 2\bar{y}_1^{\dot{\alpha}} \bar{y}_2^{\dot{\beta}} + \right. \\
& + \left. 2i\bar{y}_1^{\dot{\alpha}} \bar{\partial}_2^{\dot{\beta}} + 2i\bar{y}_2^{\dot{\alpha}} \bar{\partial}_1^{\dot{\beta}} - 2\bar{\partial}_1^{\dot{\alpha}} \bar{\partial}_2^{\dot{\beta}} \right] C \left( \frac{1}{2}(y_1 - y_2), -\frac{1}{2}(y_1 - y_2), \bar{y}_1, \bar{y}_2, I; \hat{K}_C | x \right) * \hat{k}_{12}^+ + \\
& + \frac{i\eta_2}{16} \bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \delta^{nm} \delta^{pq} \left( R(\hat{K}_C)_n^1 R(\hat{K}_C)_p^1 + R(\hat{K}_C)_n^2 R(\hat{K}_C)_p^2 + R(\hat{K}_C)_n^1 R(\hat{K}_C)_p^2 + \right. \\
& \left. R(\hat{K}_C)_n^2 R(\hat{K}_C)_p^1 \right) \bar{R}(\hat{K}_C)_m^w \bar{R}(\hat{K}_C)_q^z \left[ \bar{y}_w^{\dot{\alpha}} \bar{y}_z^{\dot{\beta}} - i\bar{y}_w^{\dot{\alpha}} \bar{\partial}_z^{\dot{\beta}} - i\bar{y}_z^{\dot{\beta}} \bar{\partial}_w^{\dot{\alpha}} - \bar{\partial}_w^{\dot{\alpha}} \bar{\partial}_z^{\dot{\beta}} \right] \times \\
& \times C \left( \frac{1}{2}(y_1 - y_2), -\frac{1}{2}(y_1 - y_2), \bar{y}_1, \bar{y}_2, I; \hat{K}_C | x \right) * \hat{k}_{12}^+ + \\
& + \frac{i\eta_2}{8} \bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \delta^{pq} \left( R(\hat{K}_C)_p^1 + R(\hat{K}_C)_p^2 \right) \bar{R}(\hat{K}_C)_q^l \left[ \bar{y}_1^{\dot{\alpha}} \bar{y}_l^{\dot{\beta}} - i\bar{y}_1^{\dot{\alpha}} \bar{\partial}_l^{\dot{\beta}} + i\bar{y}_l^{\dot{\beta}} \bar{\partial}_1^{\dot{\alpha}} + \bar{\partial}_1^{\dot{\alpha}} \bar{\partial}_l^{\dot{\beta}} \right] \times \\
& \times C \left( \frac{1}{2}(y_1 - y_2), -\frac{1}{2}(y_1 - y_2), \bar{y}_1, \bar{y}_2, I; \hat{K}_C | x \right) * \hat{k}_{12}^+ + \\
& + \frac{i\eta_2}{8} \bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \delta^{pq} \left( R(\hat{K}_C)_p^2 + R(\hat{K}_C)_p^1 \right) \bar{R}(\hat{K}_C)_q^l \left[ \bar{y}_2^{\dot{\alpha}} \bar{y}_l^{\dot{\beta}} - i\bar{y}_2^{\dot{\alpha}} \bar{\partial}_l^{\dot{\beta}} + i\bar{y}_l^{\dot{\beta}} \bar{\partial}_2^{\dot{\alpha}} + \bar{\partial}_2^{\dot{\alpha}} \bar{\partial}_l^{\dot{\beta}} \right] \times \\
& \times C \left( \frac{1}{2}(y_1 - y_2), -\frac{1}{2}(y_1 - y_2), \bar{y}_1, \bar{y}_2, I; \hat{K}_C | x \right) * \hat{k}_{12}^+. \tag{3.124}
\end{aligned}$$

Даже если не использовать явно вид оператора  $\hat{K}_C$ , из вида вершин (3.123) и (3.124) можно заключить, что дифференциальные операторы зависят от корневых векторов. Для упрощения вида вершин требуется перебрать все возможные комбинации операторов Клейна  $\hat{k}_v, \hat{\bar{k}}_v$ . Необходимо рассмотреть только 8 уникальных произведений матриц отражения  $R(\hat{k}_C) \bar{R}(\hat{\bar{k}}_C)^T$  (3.121).

$$R(\hat{k}_C) \bar{R}(\hat{\bar{k}}_C)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\Upsilon_{tot}^{\eta_1}(\Omega_{AdS}, \Omega_{AdS}, C) &= \frac{i\eta_1}{2} \bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{y}_1^{\dot{\alpha}} \bar{y}_1^{\dot{\beta}} C(0, y_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2, I; \hat{K}_C | x) * \hat{k}_1 + \\
& \frac{i\eta_1}{2} \bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{y}_2^{\dot{\alpha}} \bar{y}_2^{\dot{\beta}} C(y_1, 0, \bar{y}_1, \bar{y}_2, I; \hat{K}_C | x) * \hat{k}_2, \tag{3.125}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Upsilon_{tot}^{\eta_2}(\Omega_{AdS}, \Omega_{AdS}, C) &= \\
&= \frac{i\eta_2}{4} \bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}(\bar{y}_1 - \bar{y}_2)^{\dot{\alpha}}(\bar{y}_1 - \bar{y}_2)^{\dot{\beta}} C\left(\frac{1}{2}(y_1 + y_2), \frac{1}{2}(y_1 + y_2), \bar{y}_1, \bar{y}_2, I; \hat{K}_C|x\right) * \hat{k}_{12} + \\
&+ \frac{i\eta_2}{4} \bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}(\bar{y}_1 + \bar{y}_2)^{\dot{\alpha}}(\bar{y}_1 + \bar{y}_2)^{\dot{\beta}} C\left(\frac{1}{2}(y_1 - y_2), -\frac{1}{2}(y_1 - y_2), \bar{y}_1, \bar{y}_2, I; \hat{K}_C|x\right) * \hat{k}_{12}^+.
\end{aligned} \tag{3.126}$$

$$R(\hat{k}_C) \bar{R}(\hat{k}_C)^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\Upsilon_{tot}^{\eta_1}(\Omega_{AdS}, \Omega_{AdS}, C) &= -\frac{i\eta_1}{2} \bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\partial}_1^{\dot{\alpha}} \bar{\partial}_1^{\dot{\beta}} C(0, y_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2, I; \hat{K}_C|x) * \hat{k}_1 + \\
&+ \frac{i\eta_1}{2} \bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{y}_2^{\dot{\alpha}} \bar{y}_2^{\dot{\beta}} C(y_1, 0, \bar{y}_1, \bar{y}_2, I; \hat{K}_C|x) * \hat{k}_2,
\end{aligned} \tag{3.127}$$

$$\begin{aligned}
\Upsilon_{tot}^{\eta_2}(\Omega_{AdS}, \Omega_{AdS}, C) &= \\
&= \frac{i\eta_2}{4} \bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}(\bar{y}_2 - i\bar{\partial}_1)^{\dot{\alpha}}(\bar{y}_2 - i\bar{\partial}_1)^{\dot{\beta}} C\left(\frac{1}{2}(y_1 + y_2), \frac{1}{2}(y_1 + y_2), \bar{y}_1, \bar{y}_2, I; \hat{K}_C|x\right) * \hat{k}_{12} + \\
&+ \frac{i\eta_2}{4} \bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}(\bar{y}_2 + i\bar{\partial}_1)^{\dot{\alpha}}(\bar{y}_2 + i\bar{\partial}_1)^{\dot{\beta}} C\left(\frac{1}{2}(y_1 - y_2), -\frac{1}{2}(y_1 - y_2), \bar{y}_1, \bar{y}_2, I; \hat{K}_C|x\right) * \hat{k}_{12}^+.
\end{aligned} \tag{3.128}$$

$$R(\hat{k}_C) \bar{R}(\hat{k}_C)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\Upsilon_{tot}^{\eta_1}(\Omega_{AdS}, \Omega_{AdS}, C) &= \frac{i\eta_1}{2} \bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{y}_1^{\dot{\alpha}} \bar{y}_1^{\dot{\beta}} C(0, y_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2, I; \hat{K}_C|x) * \hat{k}_1 - \\
&- \frac{i\eta_1}{2} \bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\partial}_2^{\dot{\alpha}} \bar{\partial}_2^{\dot{\beta}} C(y_1, 0, \bar{y}_1, \bar{y}_2, I; \hat{K}_C|x) * \hat{k}_2,
\end{aligned} \tag{3.129}$$

$$\begin{aligned}
\Upsilon_{tot}^{\eta_2}(\Omega_{AdS}, \Omega_{AdS}, C) &= \\
&= \frac{i\eta_2}{4} \bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}(\bar{y}_1 - i\bar{\partial}_2)^{\dot{\alpha}}(\bar{y}_1 - i\bar{\partial}_2)^{\dot{\beta}} C\left(\frac{1}{2}(y_1 + y_2), \frac{1}{2}(y_1 + y_2), \bar{y}_1, \bar{y}_2, I; \hat{K}_C|x\right) * \hat{k}_{12} + \\
&+ \frac{i\eta_2}{4} \bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}(\bar{y}_1 + i\bar{\partial}_2)^{\dot{\alpha}}(\bar{y}_1 + i\bar{\partial}_2)^{\dot{\beta}} C\left(\frac{1}{2}(y_1 - y_2), -\frac{1}{2}(y_1 - y_2), \bar{y}_1, \bar{y}_2, I; \hat{K}_C|x\right) * \hat{k}_{12}^+.
\end{aligned} \tag{3.130}$$

$$R(\hat{k}_C)\bar{R}(\hat{k}_C)^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Upsilon_{tot}^{\eta_1}(\Omega_{AdS}, \Omega_{AdS}, C) &= -\frac{i\eta_1}{2}\bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\partial}_1^{\dot{\alpha}}\bar{\partial}_1^{\dot{\beta}}C(0, y_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2, I; \hat{K}_C|x) * \hat{k}_1 - \\ &\quad - \frac{i\eta_1}{2}\bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\partial}_2^{\dot{\alpha}}\bar{\partial}_2^{\dot{\beta}}C(y_1, 0, \bar{y}_1, \bar{y}_2, I; \hat{K}_C|x) * \hat{k}_2, \end{aligned} \quad (3.131)$$

$$\begin{aligned} \Upsilon_{tot}^{\eta_2}(\Omega_{AdS}, \Omega_{AdS}, C) &= \\ &= -\frac{i\eta_2}{4}\bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}(\bar{\partial}_1 - \bar{\partial}_2)^{\dot{\alpha}}(\bar{\partial}_1 - \bar{\partial}_2)^{\dot{\beta}}C\left(\frac{1}{2}(y_1 + y_2), \frac{1}{2}(y_1 + y_2), \bar{y}_1, \bar{y}_2, I; \hat{K}_C|x\right) * \hat{k}_{12} - \\ &\quad - \frac{i\eta_2}{4}\bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}(\bar{\partial}_1 + \bar{\partial}_2)^{\dot{\alpha}}(\bar{\partial}_1 + \bar{\partial}_2)^{\dot{\beta}}C\left(\frac{1}{2}(y_1 - y_2), -\frac{1}{2}(y_1 - y_2), \bar{y}_1, \bar{y}_2, I; \hat{K}_C|x\right) * \hat{k}_{12}^+. \end{aligned} \quad (3.132)$$

$$R(\hat{k}_C)\bar{R}(\hat{k}_C)^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Upsilon_{tot}^{\eta_1}(\Omega_{AdS}, \Omega_{AdS}, C) &= \\ &= \frac{i\eta_1}{8}\bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}(\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + i\bar{\partial}_1 - i\bar{\partial}_2)^{\dot{\alpha}}(\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + i\bar{\partial}_1 - i\bar{\partial}_2)^{\dot{\beta}}C(0, y_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2, I; \hat{K}_C|x) * \hat{k}_1 + \\ &\quad + \frac{i\eta_1}{8}\bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}(\bar{y}_1 + \bar{y}_2 - i\bar{\partial}_1 + i\bar{\partial}_2)^{\dot{\alpha}}(\bar{y}_1 + \bar{y}_2 - i\bar{\partial}_1 + i\bar{\partial}_2)^{\dot{\beta}}C(y_1, 0, \bar{y}_1, \bar{y}_2, I; \hat{K}_C|x) * \hat{k}_2, \end{aligned} \quad (3.133)$$

$$\begin{aligned} \Upsilon_{tot}^{\eta_2}(\Omega_{AdS}, \Omega_{AdS}, C) &= \\ &= -\frac{i\eta_2}{4}\bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}(\bar{\partial}_1 - \bar{\partial}_2)^{\dot{\alpha}}(\bar{\partial}_1 - \bar{\partial}_2)^{\dot{\beta}}C\left(\frac{1}{2}(y_1 + y_2), \frac{1}{2}(y_1 + y_2), \bar{y}_1, \bar{y}_2, I; \hat{K}_C|x\right) * \hat{k}_{12} + \\ &\quad + \frac{i\eta_2}{4}\bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}(\bar{y}_1 + \bar{y}_2)^{\dot{\alpha}}(\bar{y}_1 + \bar{y}_2)^{\dot{\beta}}C\left(\frac{1}{2}(y_1 - y_2), -\frac{1}{2}(y_1 - y_2), \bar{y}_1, \bar{y}_2, I; \hat{K}_C|x\right) * \hat{k}_{12}^+. \end{aligned} \quad (3.134)$$

$$R(\hat{k}_C)\bar{R}(\hat{k}_C)^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Upsilon_{tot}^{\eta_1}(\Omega_{AdS}, \Omega_{AdS}, C) &= \\ &= \frac{i\eta_1}{8} \bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}(\bar{y}_1 - \bar{y}_2 + i\bar{\partial}_1 + i\bar{\partial}_2)^{\dot{\alpha}}(\bar{y}_1 - \bar{y}_2 + i\bar{\partial}_1 + i\bar{\partial}_2)^{\dot{\beta}} C(0, y_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2, I; \hat{K}_C|x) * \hat{k}_1 + \\ &+ \frac{i\eta_1}{8} \bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}(\bar{y}_1 - \bar{y}_2 - i\bar{\partial}_1 - i\bar{\partial}_2)^{\dot{\alpha}}(\bar{y}_1 - \bar{y}_2 - i\bar{\partial}_1 - i\bar{\partial}_2)^{\dot{\beta}} C(y_1, 0, \bar{y}_1, \bar{y}_2, I; \hat{K}_C|x) * \hat{k}_2, \end{aligned} \quad (3.135)$$

$$\begin{aligned} \Upsilon_{tot}^{\eta_2}(\Omega_{AdS}, \Omega_{AdS}, C) &= \\ &= \frac{i\eta_2}{4} \bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}(\bar{y}_1 - \bar{y}_2)^{\dot{\alpha}}(\bar{y}_1 - \bar{y}_2)^{\dot{\beta}} C\left(\frac{1}{2}(y_1 + y_2), \frac{1}{2}(y_1 + y_2), \bar{y}_1, \bar{y}_2, I; \hat{K}_C|x\right) * \hat{k}_{12} - \\ &- \frac{i\eta_2}{4} \bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}(\bar{\partial}_1 + \bar{\partial}_2)^{\dot{\alpha}}(\bar{\partial}_1 + \bar{\partial}_2)^{\dot{\beta}} C\left(\frac{1}{2}(y_1 - y_2), -\frac{1}{2}(y_1 - y_2), \bar{y}_1, \bar{y}_2, I; \hat{K}_C|x\right) * \hat{k}_{12}^+. \end{aligned} \quad (3.136)$$

$$R(\hat{k}_C)\bar{R}(\hat{k}_C)^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Upsilon_{tot}^{\eta_1}(\Omega_{AdS}, \Omega_{AdS}, C) &= \\ &= \frac{i\eta_1}{8} \bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}(\bar{y}_1 - \bar{y}_2 + i\bar{\partial}_1 + i\bar{\partial}_2)^{\dot{\alpha}}(\bar{y}_1 - \bar{y}_2 + i\bar{\partial}_1 + i\bar{\partial}_2)^{\dot{\beta}} C(0, y_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2, I; \hat{K}_C|x) * \hat{k}_1 + \\ &+ \frac{i\eta_1}{8} \bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}(\bar{y}_1 + \bar{y}_2 - i\bar{\partial}_1 + i\bar{\partial}_2)^{\dot{\alpha}}(\bar{y}_1 + \bar{y}_2 - i\bar{\partial}_1 + i\bar{\partial}_2)^{\dot{\beta}} C(y_1, 0, \bar{y}_1, \bar{y}_2, I; \hat{K}_C|x) * \hat{k}_2, \end{aligned} \quad (3.137)$$

$$\begin{aligned} \Upsilon_{tot}^{\eta_2}(\Omega_{AdS}, \Omega_{AdS}, C) &= \\ &= \frac{i\eta_2}{4} \bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}(\bar{y}_2 - i\bar{\partial}_1)^{\dot{\alpha}}(\bar{y}_2 - i\bar{\partial}_1)^{\dot{\beta}} C\left(\frac{1}{2}(y_1 + y_2), \frac{1}{2}(y_1 + y_2), \bar{y}_1, \bar{y}_2, I; \hat{K}_C|x\right) * \hat{k}_{12} + \\ &+ \frac{i\eta_2}{4} \bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}(\bar{y}_1 + i\bar{\partial}_2)^{\dot{\alpha}}(\bar{y}_1 + i\bar{\partial}_2)^{\dot{\beta}} C\left(\frac{1}{2}(y_1 - y_2), -\frac{1}{2}(y_1 - y_2), \bar{y}_1, \bar{y}_2, I; \hat{K}_C|x\right) * \hat{k}_{12}^+. \end{aligned} \quad (3.138)$$

$$R(\hat{k}_C)\bar{R}(\hat{k}_C)^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \Upsilon_{tot}^{\eta_1}(\Omega_{AdS}, \Omega_{AdS}, C) = \\ & = \frac{i\eta_1}{8} \bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}(\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + i\bar{\partial}_1 - i\bar{\partial}_2)^{\dot{\alpha}}(\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + i\bar{\partial}_1 - i\bar{\partial}_2)^{\dot{\beta}} C(0, y_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2, I; \hat{K}_C|x) * \hat{k}_1 + \\ & + \frac{i\eta_1}{8} \bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}(\bar{y}_1 - \bar{y}_2 - i\bar{\partial}_1 - i\bar{\partial}_2)^{\dot{\alpha}}(\bar{y}_1 - \bar{y}_2 - i\bar{\partial}_1 - i\bar{\partial}_2)^{\dot{\beta}} C(y_1, 0, \bar{y}_1, \bar{y}_2, I; \hat{K}_C|x) * \hat{k}_2, \end{aligned} \quad (3.139)$$

$$\begin{aligned} & \Upsilon_{tot}^{\eta_2}(\Omega_{AdS}, \Omega_{AdS}, C) = \\ & = \frac{i\eta_2}{4} \bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}(\bar{y}_1 - i\bar{\partial}_2)^{\dot{\alpha}}(\bar{y}_1 - i\bar{\partial}_2)^{\dot{\beta}} C\left(\frac{1}{2}(y_1 + y_2), \frac{1}{2}(y_1 + y_2), \bar{y}_1, \bar{y}_2, I; \hat{K}_C|x\right) * \hat{k}_{12} + \\ & + \frac{i\eta_2}{4} \bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}(\bar{y}_2 + i\bar{\partial}_1)^{\dot{\alpha}}(\bar{y}_2 + i\bar{\partial}_1)^{\dot{\beta}} C\left(\frac{1}{2}(y_1 - y_2), -\frac{1}{2}(y_1 - y_2), \bar{y}_1, \bar{y}_2, I; \hat{K}_C|x\right) * \hat{k}_{12}^+. \end{aligned} \quad (3.140)$$

Можно заметить, что для всех вариантов, кроме  $R(\hat{k}_C)\bar{R}(\hat{k}_C)^T = \pm 1$ , полные голоморфные вершины содержат стандартные члены  $\bar{H}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\partial}_{i\dot{\alpha}}\bar{\partial}_{i\dot{\beta}}$  и  $\bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{y}_i^{\dot{\alpha}}\bar{y}_i^{\dot{\beta}}$ , наряду с новыми типами членов  $\bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}(\bar{y}_2 + i\bar{\partial}_1)^{\dot{\alpha}}(\bar{y}_2 + i\bar{\partial}_1)^{\dot{\beta}}$ , в которых перемещаются  $\bar{y}$  и  $\bar{\partial}$ . Наличие таких новых членов связано с появлением в расширенной теории полей, не лежащих в тензорных произведениях модулей обычной  $\mathbb{Z}_2$  теории (см. раздел 4 [53]). Такие так называемые «запутанные» модули присутствуют в моделях, расширенных любой группой Кокстера, кроме  $\mathbb{Z}_2$ .

Вершины (3.127) – (3.130) и (3.133) – (3.136) попарно переходят друг в друга заменой переменных, порождаемой автоморфизмом алгебры звёздочного произведения

$$y_{\alpha+} = \frac{1}{\sqrt{2}}(y_{\alpha 1} + y_{\alpha 2}), \quad y_{\alpha-} = \frac{1}{\sqrt{2}}(y_{\alpha 1} - y_{\alpha 2}), \quad (3.141)$$

$$\bar{y}_{\dot{\alpha}+} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{y}_{\dot{\alpha} 1} + \bar{y}_{\dot{\alpha} 2}), \quad \bar{y}_{\dot{\alpha}-} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{y}_{\dot{\alpha} 1} - \bar{y}_{\dot{\alpha} 2}), \quad (3.142)$$

который переводит друг в друга орбиты  $\mathcal{R}_1$  и  $\mathcal{R}_2$ . Этот автоморфизм связывает вершины  $(\Upsilon_{tot}^{\eta_1}, \Upsilon_{tot}^{\eta_2})$  в (3.127) - (3.130) и  $(\Upsilon_{tot}^{\eta_2}, \Upsilon_{tot}^{\eta_1})$  в (3.133) - (3.136).

Как показано в разделе 4 [53] ограничение на инвариантное подпространство инволютивного автоморфизма на операторах Клейна  $\hat{K}_v \rightarrow -\hat{K}_v$ , для которого в ядре лежат неунитарные модули и модули без структуры старшего

веса ноль-форм (т.е. не имеющие интерпретации в терминах частиц) и сохраняет модули, представляющие собой тензорные произведения присоединенного и твистованного-присоединенного модулей стандартной теории  $\{M_{tw\otimes adj}, M_{adj\otimes tw}\}$ , в которых существуют унитарные подмодули, оставляет только вершины (3.127)-(3.130) и (3.133)-(3.136). Можно заметить, что вершины (3.127)-(3.130) и (3.133)-(3.136) содержат как стандартные члены, подклеивающие модули ноль-форм  $\{M_{tw\otimes adj}, M_{adj\otimes tw}\}$  к модулям один-форм, которые представляют собой тензорные квадраты присоединенного и твистованного-присоединенного модуля  $\{M_{adj\otimes adj}, M_{tw\otimes tw}\}$ , но и новые члены, подклеивающие модули ноль-форм  $\{M_{tw\otimes adj}, M_{adj\otimes tw}\}$  к «запутанным» модулям один-форм. В секторе один-форм  $M_{adj\otimes adj}$  подклейка осуществляется членами  $\bar{H}\bar{d}\bar{d}$  и, следовательно, Первая теорема о массовой оболочке имеет ожидаемую форму. Этот сектор должен содержать несколько копий стандартных уравнений Фронсдала и полей из обычной системы. Другие сектора один-форм ранее в литературе не встречались и их физическая интерпретация находится в стадии изучения.

### 3.4 Динамическое содержание

Этот раздел посвящен анализу динамического содержания линейных уравнений. Анализ модулей, задаваемых уравнениями ковариантного постоянства [53], показывает, что не все модули полей теории являются унитаризуемыми, поэтому для рассмотрения физического смысла необходимо рассматривать теорию после редукции до унитарных подмодулей.

Предложенная редукция [53] сужает систему до инвариантного подпространства относительно автоморфизма чётности операторов Клейна, что исключает чётные по операторам Клейна поля  $S$  и нечётные  $\omega$ . Оставшиеся поля  $S$  лежат в тензорном произведении присоединенного и твистованного модулей обычной теории и на них дополнительно наложены необходимые для унитарности граничные условия, которые оставляют зависимость только от одной комбинации спиноров  $Y_i$ , таким образом, уравнения на поле  $S$  эквивалентны уравнениям в твистованном модуле обычной теории.

Процедура редукции [53], возможно, не единственна, однако является естественной отправной точкой как обобщение редукции в стандартной системе выс-

ших спинов.

$$\left( D_L - ie^{\alpha\dot{\alpha}}(y_{\alpha i}\bar{y}_{\dot{\alpha}i} - \partial_{\alpha i}\bar{\partial}_{\dot{\alpha}i}) \right) C(Y_i, I; \hat{K}_C|x) = 0, \quad (3.143)$$

с мультииндексом  $i = \{1, 2\}$  или  $\{+, -\}$ .  $y_{\pm}$  означает линейную комбинацию  $y_1 \pm y_2$ . В таком случае поля  $C(Y_i, I; \hat{K}_C|x)$  кодируют тензоры Вейля и их потомки, аналогично стандартной  $\mathbb{Z}_2$  теории. Благодаря фильтрации, задаваемой идемпотентами  $I_n$ , расширенная система распадается на секторы, так что 2 поля из сектора ноль-форм лежат в каждом секторе  $I_n$  и 32 нольформы в билинейном секторе  $I_1 I_2$ .

Так как остающиеся после редукции ноль-формы описывают тензоры Вейля и их потомки, которые полностью определяют динамику на линейном уровне, поля один-форм  $\omega$ , подклеивающиеся к ним (т.е. в линейные вершины для один-форм  $\omega$   $\Upsilon(\omega, \omega, C)$  входят именно такие ноль-формы  $C$ ) должны представлять собой комбинацию полей Фронсдала и, быть может, топологических полей, не несущих степеней свободы. В  $d = 4$  безмассовые поля смешанной симметрии не несут степеней свободы, поэтому поля Фронсдала – единственные распространяющиеся безмассовые поля, свободные от духов. Однако алгебра  $AdS_4$  допускает также особые, частично-безмассовые поля [88–96], не присутствующие в стандартной теории высших спинов по причине недостаточного числа осцилляторов. Из вида линейных уравнений ожидается (и явно показано в [97]), что в модели  $(d = 4, B_2)$  до унитарной редукции представлены поля, представляемые как произвольные двурядные диаграммы Юнга  $sp(4)$ , в спектре теории содержатся частично безмассовые поля [97].

Более подробно можно рассмотреть уравнение на  $\omega$ , которое принимает значение в тензорном произведении двух присоединенных модулей  $M_{adj \otimes adj}$ . Самый простой пример такого поля –  $\omega$ , не зависящее от операторов Клейна. Спроецировав уравнения из предыдущего раздела и выполнив редукцию по

инвариантному подпространству автоморфизма  $\hat{K}_v \rightarrow -\hat{K}_v$ , получаем

$$\begin{aligned}
& \left[ D_L + e^{\alpha\dot{\alpha}} \sum_{i=1}^2 (\bar{y}_{\dot{\alpha}i} \partial_{\alpha i} + y_{\alpha i} \bar{\partial}_{\dot{\alpha}i}) \right] \omega(y_1, y_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2, I|x) = \\
& = -\frac{i\eta_1}{2} \bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\partial}_1^{\dot{\alpha}} \bar{\partial}_1^{\dot{\beta}} C(0, y_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2, I; \hat{k}_1|x) * \hat{k}_1 - \\
& - \frac{i\eta_1}{2} \bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\partial}_2^{\dot{\alpha}} \bar{\partial}_2^{\dot{\beta}} C(y_1, 0, \bar{y}_1, \bar{y}_2, I; \hat{k}_2|x) * \hat{k}_2 - \\
& - \frac{i\eta_2}{2} \bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\partial}_-^{\dot{\alpha}} \bar{\partial}_-^{\dot{\beta}} C\left(y_+, 0, \bar{y}_+, \bar{y}_-, I; \hat{k}_{12}|x\right) * \hat{k}_{12} - \\
& - \frac{i\eta_2}{2} \bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\partial}_+^{\dot{\alpha}} \bar{\partial}_+^{\dot{\beta}} C\left(0, y_-, \bar{y}_+, \bar{y}_-, I; \hat{k}_{12}^+|x\right) * \hat{k}_{12}^+ + \text{с.с.} \quad (3.144)
\end{aligned}$$

Видно, что это уравнение структурно схоже с уравнением из стандартной теории, в котором осуществляется склейка поля  $\omega$  из присоединенного сектора с полем  $C$  в твистованном. Здесь, однако, поля  $C$  лежат в тензорном произведении твистованного и присоединенного модулей, а значит требуется налагать граничные условия (раздел 4 [53]), после которых остаётся только твистованный модуль, что делает сходство окончательно явным.

$$\begin{aligned}
& \left[ D_L + e^{\alpha\dot{\alpha}} \sum_{i=1}^2 (\bar{y}_{\dot{\alpha}i} \partial_{\alpha i} + y_{\alpha i} \bar{\partial}_{\dot{\alpha}i}) \right] \omega(y_1, y_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2, I|x) = \\
& = -\frac{i\eta_1}{2} \bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\partial}_1^{\dot{\alpha}} \bar{\partial}_1^{\dot{\beta}} C(0, \bar{y}_1, I; \hat{k}_1|x) * \hat{k}_1 - \frac{i\eta_1}{2} \bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\partial}_2^{\dot{\alpha}} \bar{\partial}_2^{\dot{\beta}} C(0, \bar{y}_2, I; \hat{k}_2|x) * \hat{k}_2 - \\
& - \frac{i\eta_2}{2} \bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\partial}_-^{\dot{\alpha}} \bar{\partial}_-^{\dot{\beta}} C\left(0, \bar{y}_-, I; \hat{k}_{12}|x\right) * \hat{k}_{12} - \frac{i\eta_2}{2} \bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\partial}_+^{\dot{\alpha}} \bar{\partial}_+^{\dot{\beta}} C\left(0, \bar{y}_+, I; \hat{k}_{12}^+|x\right) * \hat{k}_{12}^+ + \text{с.с.} \quad (3.145)
\end{aligned}$$

Модуль один-форм  $M_{adj \otimes adj}$  после полной редукции подклеивается к набору тензоров Вейля и, как и в стандартной теории, описывает несколько копий динамических полей и уравнений Фронсдала. Действительно, на линейном уровне можно разложить поле  $\omega$  на

$$\begin{aligned}
\omega(y_1, y_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2, I|x) & = \omega_1(y_1, \bar{y}_1, I|x) + \omega_2(y_2, \bar{y}_2, I|x) + \\
& + \omega_+(y_+, \bar{y}_+, I|x) + \omega_-(y_-, \bar{y}_-, I|x) + \dots, \quad (3.146)
\end{aligned}$$

где за многоточием скрываются члены, которые подклеиваются к полям  $C$ , исключённым из системы условиями унитарности. Например, после такого раз-

ложения уравнение на первую компоненту

$$\begin{aligned} [D_L + e^{\alpha\dot{\alpha}}(\bar{y}_{\dot{\alpha}1}\partial_{\alpha 1} + y_{\alpha 1}\bar{\partial}_{\dot{\alpha}1})] \omega_1(y_1, \bar{y}_1, I|x) = \\ = -\frac{i\eta_1}{2} \bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\partial}_1^{\dot{\alpha}} \bar{\partial}_1^{\dot{\beta}} C(0, \bar{y}_1, I; \hat{k}_1|x) * \hat{k}_1 + \text{с.с.} \end{aligned} \quad (3.147)$$

воспроизводит обычную Первую теорему о массовой оболочке из стандартной теории.

Как показано в разделе 3.1.2, все переменные  $Y_n^A$  «заряжены» соответствующими идемпотентами  $I_n$ , а константы, не умноженные на идемпотенты, просто отсутствуют. То есть идемпотенты организуют фильтрацию, разбивая систему на сектора, которые на линейном уровне независимы, но в высших порядках они перемешиваются треугольным образом. Рассмотрим, для примера, теорию, расширенную группой  $B_2$  (такое же разложение верно и для любой группы из серии  $B_p$ ). Все поля разделяются по трём секторам:  $F(Y_1; \hat{K}_1|x) * I_1$ ,  $F(Y_2; \hat{K}_2|x) * I_2$  и  $F(Y_1, Y_2; \hat{K}|x) * I_1 I_2$ , где  $F$  – какое-то из полей  $\omega$  или  $C$ . Благодаря присутствию идемпотент в звездочном произведении (10), поля из секторов  $I_2$  и  $I_1 I_2$  не дают вклада в сектор  $I_1$ , аналогично поля из секторов  $I_1$  и  $I_1 I_2$  не дают вклада в сектор  $I_2$ . Однако произведение полей из секторов  $I_1$  и  $I_2$  лежит в секторе  $I_1 I_2$ . Следовательно, вершины взаимодействия раскладываются по компонентам вдоль идемпотент  $I_n$  и билинейной комбинации  $I_1 I_2$ . Компоненты вершин уравнений вдоль  $I_n$  составлены из полей вдоль соответствующей идемпотенты  $I_n$  и полностью совпадают с вершинами из стандартной теории, где переменные  $Y^A$  заменены переменными  $Y_n^A$ . Вершины, пропорциональные  $I_1 I_2$  составлены из полей всех секторов и, соответственно, отличаются от стандартных.

Модули один-форм ([53]) перечисляются тензорными квадратами присоединенного модуля, квадратом твистованно-присоединенного, а также особым семейством так называемых запутанных модулей.

Модуль один-форм, представляющий собой тензорный квадрат присоединенного модуля  $M_{adj \otimes adj}$  с уравнением (3.145) раскладывается по идемпотентам следующим образом. В секторе  $I_n$  уравнение сводится к склейке одного присоединенного модуля  $\omega(Y_n; \hat{K}_n|x) * I_n$  из стандартной теории с твистованным модулем  $C(Y_n; \hat{K}_n|x) * I_n$ . Теория, расширенная группой Кокстера  $B_2$ , содержит две независимые копии стандартной теории высших спинов для каждой из переменных  $Y_n^A$ , находящихся в секторе  $I_n$ . Сектор же  $I_1 I_2$ , хотя и содержит те же уравнения на линейном уровне, значительно отличается в полной нелинейной

системе. Хотя динамические поля и уравнения в секторе один-форм найдены в модуле  $M_{adj \otimes adj}$  в склейке с  $\{M_{tw \otimes adj}, M_{adj \otimes tw}\}$  и ограниченными условиями унитарности на один-формы, могут существовать также и нединамические поля и уравнения на них, т.е. один-формы вне разложения (3.146), подклеивающиеся к ноль-формам, которые исключены сужением системы на унитарные подмодули. Подобные неунитарные модули могут быть весьма важны, т.к. значение топологических полей можно интерпретировать как параметры массы или константы связи в теории. Необходимый для полной классификации анализ с помощью когомологий вспомогательного оператора  $\sigma_-$  проведен в статье [97].

Рассмотрим модуль один-форм  $\omega$  в произведении твистованных модулей  $M_{tw \otimes tw}$ , в котором лежит, например, поле  $\omega(Y_1, Y_2, I; \hat{k}_1 \hat{k}_2 | x)$ . После усечения системы с помощью автоморфизма на операторах Клейна уравнение на это поле приобретает вид

$$\left[ D_L - ie^{\alpha\dot{\alpha}} \sum_{i=1}^2 (y_{\alpha i} \bar{y}_{\dot{\alpha} i} - \partial_{\alpha i} \bar{\partial}_{\dot{\alpha} i}) \right] \omega(y_1, y_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2, I; \hat{k}_1 \hat{k}_2 | x) =$$

$$= \frac{i\eta_1}{2} \bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{y}_2^{\dot{\alpha}} \bar{y}_2^{\dot{\beta}} C(y_1, 0, \bar{y}_1, \bar{y}_2, I; \hat{k}_1 | x) * \hat{k}_2 + \quad (3.148)$$

$$+ \frac{i\eta_1}{2} \bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{y}_1^{\dot{\alpha}} \bar{y}_1^{\dot{\beta}} C(0, y_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2, I; \hat{k}_2 | x) * \hat{k}_1 +$$

$$+ \frac{i\eta_2}{2} \bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{y}_+^{\dot{\alpha}} \bar{y}_+^{\dot{\beta}} C\left(0, y_-, \bar{y}_+, \bar{y}_-, I; \hat{k}_{12} | x\right) * \hat{k}_{12}^+ +$$

$$+ \frac{i\eta_2}{2} \bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{y}_-^{\dot{\alpha}} \bar{y}_-^{\dot{\beta}} C\left(y_+, 0, \bar{y}_+, \bar{y}_-, I; \hat{k}_{12}^+ | x\right) * \hat{k}_{12}. \quad (3.149)$$

После наложения дополнительно граничных условий для унитарности ноль-форм правая часть имеет следующий вид:

$$\left[ D_L - ie^{\alpha\dot{\alpha}} \sum_{i=1}^2 (y_{\alpha i} \bar{y}_{\dot{\alpha} i} - \partial_{\alpha i} \bar{\partial}_{\dot{\alpha} i}) \right] \omega(y_1, y_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2, I; \hat{k}_1 \hat{k}_2 | x) =$$

$$= \frac{i\eta_1}{2} \bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{y}_2^{\dot{\alpha}} \bar{y}_2^{\dot{\beta}} C(y_1, \bar{y}_1, I; \hat{k}_1 | x) * \hat{k}_2 + \frac{i\eta_1}{2} \bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{y}_1^{\dot{\alpha}} \bar{y}_1^{\dot{\beta}} C(y_2, \bar{y}_2, I; \hat{k}_2 | x) * \hat{k}_1 +$$

$$+ \frac{i\eta_2}{2} \bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{y}_+^{\dot{\alpha}} \bar{y}_+^{\dot{\beta}} C\left(y_-, \bar{y}_-, I; \hat{k}_{12} | x\right) * \hat{k}_{12}^+ + \frac{i\eta_2}{2} \bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{y}_-^{\dot{\alpha}} \bar{y}_-^{\dot{\beta}} C\left(y_+, \bar{y}_+, I; \hat{k}_{12}^+ | x\right) * \hat{k}_{12}. \quad (3.150)$$

Это уравнение описывает подклейку модулей Вейля к модулю один-форм  $M_{tw \otimes tw}$ , что значит, что один-формы представляют собой некоторую (скорее

всего, нелокальную) комбинацию полей Фронсдала, хотя их явный вид пока не ясен. В правой стороне уравнения содержатся не только примарные поля ноль-формы, но и их потомки, что необходимо учитывать при кохомологическом анализе. Поля, подчиненные подобным уравнениям, были подробно исследованы в [98], где были найдены симметричные свойства полей и уравнений. Полученные там результаты указывают на топологичность данного сектора.

Более того, эти результаты могут быть распространены и на так называемые «запутанные» модули, которые связаны с модулями  $M_{tw \otimes tw}$  экспоненциальным анзацем [53]. Можно заключить, что примарные поля и уравнения в этом модуле описываются теми же диаграммами Юнга, что и в статье [98] для  $M_{tw \otimes tw}$  после некоторого пересуммирования и замены переменных. Поскольку экспоненциальный анзац явно нарушает градуировку, ответ скорее всего не имеет компактной записи в терминах осцилляторов  $Y_n^A$ . Можно ожидать, что поля в этом модуле также топологические.

### 3.5 Выводы

В данной главе проведён анализ линейного порядка теории возмущений для теории высших спинов, расширенной группой Кокстера.

Было показано, что для модели с факторизацией по  $I_n \sim \bar{I}_n$ , которая необходима для описания четырёхмерной теории, существует единственное, с точностью до ортогональных преобразований, вложение фонового решения  $AdS_4$ .

Для этого вида фонового решения построены линейные вершины теории. Полученные уравнения над фоном  $AdS_4$  содержат обобщение Первой теоремы о массовой оболочке. Показано, что копии стандартной теории присутствуют в расширенной, наряду с новыми секторами, требующими динамической интерпретации.

Для получения линейных вершин была обобщена техника сдвиговой гомотопии для теории, расширенной группой Кокстера общего положения. Отметим, что полученное в работе [43] обобщение сдвиговой гомотопии до так называемой дифференциальной представляет большой интерес для приложения в данной задаче.

Для группы Кокстера  $B_2$ , представляющей особый интерес в контексте связи с теорией струн, явно выписаны все получающиеся вершины линейного приближения. Среди них идентифицированы обобщения вершин стандартной

теории, производящие склейку один-форм в квадрате присоединенного модуля с динамическими ноль-формами, которые после унитарной редукции лежат в твистованном секторе, полностью идентично стандартной  $\mathbb{Z}_2$  теории. Полученные уравнения являются прямым обобщением Первой Теоремы о массовой оболочке и содержат множественные копии тензоров Вейля, полей Фронсдала и уравнений на них. До редукции до унитарных подсекторов в теории присутствуют и новые сектора, для полной интерпретации которых требуется выбор более сложной гомотопической процедуры для получения линейных вершин [97].

Полученные результаты необходимы для изучения высших порядков теории возмущений, в нелинейной системе, расширенной группой Кокстера.

## Заключение

В диссертации исследованы три взаимосвязанных применения развернутого формализма: построение вариационной структуры для развернутых систем, анализ свободы выбора представителей в гомотопической процедуре в пертурбативном анализе теории высших спинов и первый порядок теории возмущений для теории высших спинов, расширенной группой Кокстера. Полученные результаты показывают, что кохомологический язык развернутых систем является эффективным и позволяет формулировать условия массовой оболочки, контролировать локальность выбором представителей кохомологий и структуру расширений моделей высших спинов.

Основные результаты работы заключаются в следующем:

1. Построен вариационный принцип для развернутых систем уравнений. Введение дополнительных переменных для описания вариаций позволяет определить дополнительный дифференциал, задающий бикомплекс вместе с дифференциалом  $\mathcal{Q}$  расширенной развернутой системы.
2. Лагранжианы и их вариации описаны в кохомологических терминах в расширенной развернутой системе уравнений, а условия, переводящие систему на массовую оболочку, получены как условия замкнутости относительно дополнительного дифференциала с точностью до  $\mathcal{Q}$ -точных членов. Получен критерий лагранжевости условий, переводящих систему на массовую оболочку.
3. Рассмотрение новых параметров сдвиговой гомотопии, включающих сдвиги по аргументу поля один-формы  $\omega$  и ноль-формы  $C$ , позволило выписать новое однопараметрическое семейство ультралокальных линейных вершин. Показано, что сдвиги только на аргумент один-формы  $\omega$  являются тривиальными и не дают поправки в следующие порядки теории возмущений.
4. Для теории высших спинов, расширенной общей конечной группой Кокстера, получена реализация фона  $AdS_4$  как точного решения нелинейной

системы и показано, что эта реализация единственна при условиях антиэрмитовости и сохранения фильтрации, задаваемой идемпотентами.

5. С помощью обобщения сдвиговой гомотопии получены линейные вершины, зависящие от матриц отражения, задаваемых группой Кокстера.
6. Для представляющего особый интерес случая группы Кокстера  $B_2$  получено явное выражение для ультралокальных линейных вершин, согласующихся со стандартной  $\mathbb{Z}_2$  теорией высших спинов.

### Благодарности

Хотелось бы выразить искреннюю благодарность моему научному руководителю Михаилу Андреевичу Васильеву за удачный подбор интересных задач, за помощь советом в их решении, за формирование стиля научной работы. Также хочу поблагодарить соавтора Кирилла Александровича Ушакова с которым вместе были проведены исследования в области кокстеровского расширения теории высших спинов за его вклад и высокую рабочую этику. Выражаю благодарность Ольге Александровне Гельфонд, Вячеславу Евгениевичу Диденко, Никите Георгиевичу Мисуне и Анатолию Валерьевичу Корибуту за множественные консультации и полезные замечания.

## Список литературы

1. *Виноградов А. М.* Геометрия нелинейных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Серия: Проблемы геометрии. Москва, 1980. Т. 11. С. 89—134.
2. Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики / А. В. Бочаров [и др.] ; под ред. А. М. Виноградова, И. С. Красильщика. Москва : Факториал, 1997. С. 464. ISBN 5-88688-019-4.
3. *Anderson I. M.* Introduction to the Variational Bicomplex // Mathematical Aspects of Classical Field Theory. Т. 132 / под ред. М. J. Gotay, J. E. Marsden, V. Moncrief. Providence, RI : American Mathematical Society, 1992. С. 51—73. (Contemporary Mathematics).
4. *Vasiliev M. A.* Free Massless Fields of Arbitrary Spin in the de Sitter Space and Initial Data for a Higher Spin Superalgebra // Fortschritte der Physik. 1987. Т. 35, № 11. С. 741—770. DOI: 10.1002/prop.2190351103. Also published in Yad. Fiz. 45 (1987) 1784—1797.
5. *Vasiliev, Mikhail A.* Equations of Motion of Interacting Massless Fields of All Spins as a Free Differential Algebra // Phys. Lett. B. 1988. Т. 209. С. 491—497. DOI: 10.1016/0370-2693(88)91179-3.
6. *Vasiliev M. A.* Consistent equation for interacting gauge fields of all spins in (3+1)-dimensions // Phys. Lett. B. 1990. Т. 243. С. 378—382. DOI: 10.1016/0370-2693(90)91400-6.
7. Parent field theory and unfolding in BRST first-quantized terms / G. Barnich, M. Grigoriev, A. Semikhatov, I. Tipunin // Commun. Math. Phys. 2005. Т. 260. С. 147—181. DOI: 10.1007/s00220-005-1408-4. arXiv: hep-th/0406192.

8. *Barnich G., Grigoriev M.* First order parent formulation for generic gauge field theories // JHEP. 2011. T. 01. C. 122.  
DOI: 10.1007/JHEP01(2011)122. arXiv: 1009.0190 [hep-th].
9. *Bronstein M.* Quantentheorie schwacher Gravitationsfelder // Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion. 1936. T. 9. C. 140–157.
10. *'t Hooft, G. and Veltman, M. J. G.* One-loop divergencies in the theory of gravitation // Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Theor. 1974. T. 20. C. 69–94.  
URL: [https://www.numdam.org/item/AIHPA\\_1974\\_\\_20\\_1\\_69\\_0/](https://www.numdam.org/item/AIHPA_1974__20_1_69_0/).
11. *Goroff M. H., Sagnotti A.* The Ultraviolet Behavior of Einstein Gravity // Nucl. Phys. B. 1986. T. 266. C. 709–736.  
DOI: 10.1016/0550-3213(86)90193-8.
12. *Stelle K. S.* Renormalization of Higher-Derivative Quantum Gravity // Phys. Rev. D. 1977. T. 16. C. 953–965. DOI: 10.1103/PhysRevD.16.953.
13. *Fradkin E., Tseytlin A.* Renormalizable asymptotically free quantum theory of gravity // Nuclear Physics B. 1982. T. 201, № 3. C. 469–491.  
ISSN 0550-3213. DOI: [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(82\)90444-8](https://doi.org/10.1016/0550-3213(82)90444-8).
14. *Starobinsky A. A.* Spectrum of relict gravitational radiation and the early state of the universe // JETP Lett. 1979. T. 30. C. 682–685.  
Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. 30 (1979) 719-723.
15. *Horndeski G. W.* Second-order scalar-tensor field equations in a four-dimensional space // Int. J. Theor. Phys. 1974. T. 10. C. 363–384.  
DOI: 10.1007/BF01807638.
16. *Polyakov A. M.* Quantum Geometry of Bosonic Strings // Phys. Lett. B. 1981. T. 103. C. 207–210. DOI: 10.1016/0370-2693(81)90743-7.
17. *Green M. B., Schwarz J. H.* Anomaly cancellations in supersymmetric D=10 gauge theory and superstring theory // Phys. Lett. B. 1984. T. 149. C. 117–122. DOI: 10.1016/0370-2693(84)91565-X.
18. *Witten E.* String theory dynamics in various dimensions // Nucl. Phys. B. 1995. T. 443. C. 85–126. DOI: 10.1016/0550-3213(95)00158-0.  
arXiv: hep-th/9503124.

19. *Schwarz J. H.* Introduction to Superstring Theory. 2000.  
arXiv: hep-ex/0008017 [hep-ex].  
URL: <https://arxiv.org/abs/hep-ex/0008017>.
20. *Strominger A., Witten E.* New Manifolds for Superstring Compactification // Commun. Math. Phys. 1985. T. 101. C. 341.  
DOI: 10.1007/BF01216094.
21. *Polchinski J.* String theory. Vol. 2: Superstring theory and beyond. Cambridge University Press, 12.2007.  
(Cambridge Monographs on Mathematical Physics). ISBN 978-0-511-25228-0.  
DOI: 10.1017/CB09780511618123.
22. Unconstrained N=2 Matter, Yang-Mills and Supergravity Theories in Harmonic Superspace / A. S. Galperin, E. A. Ivanov, V. I. Ogievetsky, E. S. Sokatchev // Classical and Quantum Gravity. 1984. T. 1. C. 469—498.  
Erratum: Class. Quant. Grav. 2 (1985) 127.
23. *Ivanov E. A.* N=2 Supergravities in Harmonic Superspace // Handbook of Quantum Gravity. Springer, 2024.  
DOI: 10.1007/978-981-19-3079-9\_43-1. arXiv: 2212.07925 [hep-th].
24. *Buchbinder I., Ivanov E., Zaigraev N.* N=2 higher spins: superfield equations of motion, the hypermultiplet supercurrents, and the component structure // Journal of High Energy Physics. 2023. T. 2023, № 03. C. 036.  
DOI: 10.1007/JHEP03(2023)036. arXiv: 2212.14114 [hep-th].
25. *Ivanov E.* Higher spins in harmonic superspace // Theoretical and Mathematical Physics. 2023. T. 217. C. 1855—1869.  
DOI: 10.1134/S004057792312005X. arXiv: 2306.10401 [hep-th].
26. *Coleman S., Mandula J.* All Possible Symmetries of the S Matrix // Phys. Rev. 1967. T. 159. C. 1251—1256. DOI: 10.1103/PhysRev.159.1251.
27. *Weinberg S., Witten E.* Limits on massless particles // Physics Letters B. 1980. T. 96, № 1. C. 59—62. ISSN 0370-2693.  
DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(80\)90212-9](https://doi.org/10.1016/0370-2693(80)90212-9).
28. *Weinberg S.* Photons and Gravitons in S-Matrix Theory: Derivation of Charge Conservation and Equality of Gravitational and Inertial Mass // Phys. Rev. 1964. T. 135. B1049—B1056. DOI: 10.1103/PhysRev.135.B1049.

29. *Haag, Rudolf and Lopuszanski, Jan T. and Sohnius, Martin.* All Possible Generators of Supersymmetries of the s Matrix // Nucl. Phys. B. 1975. T. 88. C. 257—274. DOI: 10.1016/0550-3213(75)90279-5.
30. *Vasiliev M. A.* Higher spin gauge theories: Star product and AdS space. 1999. ОКТ. DOI: 10.1142/9789812793850\_0030. arXiv: hep-th/9910096.
31. *Vasiliev M. A.* More on equations of motion for interacting massless fields of all spins in (3+1)-dimensions // Phys. Lett. B. 1992. T. 285. C. 225—234. DOI: 10.1016/0370-2693(92)91457-K.
32. *Gelfond O. A., Vasiliev M. A.* Homotopy Operators and Locality Theorems in Higher-Spin Equations // Phys. Lett. B. 2018. T. 786. C. 180—188. DOI: 10.1016/j.physletb.2018.09.038. arXiv: 1805.11941 [hep-th].
33. *Gelfond O. A., Vasiliev M. A.* Spin-Locality of Higher-Spin Theories and Star-Product Functional Classes // JHEP. 2020. T. 03. C. 002. DOI: 10.1007/JHEP03(2020)002. arXiv: 1910.00487 [hep-th].
34. Homotopy Properties and Lower-Order Vertices in Higher-Spin Equations / V. E. Didenko, O. A. Gelfond, A. V. Korybut, M. A. Vasiliev // J. Phys. A. 2018. T. 51, № 46. C. 465202. DOI: 10.1088/1751-8121/aae5e1. arXiv: 1807.00001 [hep-th].
35. *Gelfond O. A., Korybut A. V.* Manifest form of the spin-local higher-spin vertex  $\Upsilon_{\omega CCC}^m$  // Eur. Phys. J. C. 2021. T. 81, № 7. C. 605. DOI: 10.1140/epjc/s10052-021-09401-4. arXiv: 2101.01683 [hep-th].
36. *Vasiliev M. A.* Multiparticle extension of the higher-spin algebra // Class. Quant. Grav. 2013. T. 30. C. 104006. DOI: 10.1088/0264-9381/30/10/104006. arXiv: 1212.6071 [hep-th].
37. *Gross D. J.* High-Energy Symmetries of String Theory // Phys. Rev. Lett. 1988. T. 60. C. 1229. DOI: 10.1103/PhysRevLett.60.1229.
38. *Englert F., Brout R.* Broken Symmetry and the Mass of Gauge Vector Mesons // Physical Review Letters. 1964. T. 13. C. 321—323. DOI: 10.1103/PhysRevLett.13.321.
39. *Higgs P. W.* Broken Symmetries, Massless Particles and Gauge Fields // Physics Letters. 1964. T. 12. C. 132—133. DOI: 10.1016/0031-9163(64)91136-9.

40. *Vasiliev M. A.* Actions, charges and off-shell fields in the unfolded dynamics approach // *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* 2006. Т. 3. С. 37—80.  
DOI: 10.1142/S0219887806001016. arXiv: hep-th/0504090.
41. *Васильев М. А.* Калибровочная форма описания безмассовых полей произвольного спина // *Ядерная физика.* 1980. Т. 32. С. 855—861.
42. *Fronsdal C.* Massless Fields with Integer Spin // *Phys. Rev. D.* 1978. Т. 18. С. 3624. DOI: 10.1103/PhysRevD.18.3624.
43. *Vasiliev, M. A.* Differential contracting homotopy in higher-spin theory // *JHEP.* 2023. Т. 11. С. 048. DOI: 10.1007/JHEP11(2023)048.  
arXiv: 2307.09331 [hep-th].
44. Limiting Shifted Homotopy in Higher-Spin Theory and Spin-Locality / V. E. Didenko, O. A. Gelfond, A. V. Korybut, M. A. Vasiliev // *JHEP.* 2019. Т. 12. С. 086. DOI: 10.1007/JHEP12(2019)086.  
arXiv: 1909.04876 [hep-th].
45. Spin-locality of  $\eta^2$  and  $\bar{\eta}^2$  quartic higher-spin vertices / V. E. Didenko, O. A. Gelfond, A. V. Korybut, M. A. Vasiliev // *JHEP.* 2020. Т. 12. С. 184. DOI: 10.1007/JHEP12(2020)184. arXiv: 2009.02811 [hep-th].
46. *Vasiliev M. A.* From Coxeter Higher-Spin Theories to Strings and Tensor Models // *JHEP.* 2018. Т. 08. С. 051. DOI: 10.1007/JHEP08(2018)051.  
arXiv: 1804.06520 [hep-th].
47. *Gaberdiel M. R., Gopakumar R.* Higher Spins & Strings // *JHEP.* 2014. Т. 11. С. 044. DOI: 10.1007/JHEP11(2014)044.  
arXiv: 1406.6103 [hep-th].
48. *Gaberdiel M. R., Gopakumar R.* Stringy Symmetries and the Higher Spin Square // *J. Phys. A.* 2015. Т. 48, № 18. С. 185402.  
DOI: 10.1088/1751-8113/48/18/185402. arXiv: 1501.07236 [hep-th].
49. *Gaberdiel, Matthias R. and Peng, Cheng and Zadeh, Ida G.* Higgsing the stringy higher spin symmetry // *JHEP.* 2015. Т. 10. С. 101.  
DOI: 10.1007/JHEP10(2015)101. arXiv: 1506.02045 [hep-th].
50. *Gaberdiel M. R., Gopakumar R.* String Theory as a Higher Spin Theory // *JHEP.* 2016. Т. 09. С. 085. DOI: 10.1007/JHEP09(2016)085.  
arXiv: 1512.07237 [hep-th].

51. *Tarusov A. A., Vasiliev M. A.* On the variational principle in the unfolded dynamics // *Phys. Lett. B.* 2022. T. 825. C. 136882.  
DOI: 10.1016/j.physletb.2022.136882. arXiv: 2111.12691 [hep-th].
52. *Tarusov A. A., Ushakov K. A., Vasiliev M. A.* Shifted homotopy analysis of the linearized higher-spin equations in arbitrary higher-spin background // *JHEP.* 2023. T. 03. C. 128. DOI: 10.1007/JHEP03(2023)128.  
arXiv: 2212.01908 [hep-th].
53. *Tarusov A. A., Ushakov K. A., Vasiliev M. A.* Linearized Coxeter higher-spin theories // *JHEP.* 2025. T. 08. C. 052.  
DOI: 10.1007/JHEP08(2025)052. arXiv: 2503.05948 [hep-th].
54. Nonlinear higher spin theories in various dimensions / Bekaert, X. and Cnockaert, S. and Iazeolla, Carlo and Vasiliev, M. A. // 1st Solvay Workshop on Higher Spin Gauge Theories. 2004. C. 132–197. arXiv: hep-th/0503128.
55. *Misuna N.* On unfolded off-shell formulation for higher-spin theory // *Phys. Lett. B.* 2019. T. 798. C. 134956. DOI: 10.1016/j.physletb.2019.134956.  
arXiv: 1905.06925 [hep-th].
56. *Misuna N. G.* Off-shell higher-spin fields in  $AdS_4$  and external currents // *JHEP.* 2021. T. 12. C. 172. DOI: 10.1007/JHEP12(2021)172.  
arXiv: 2012.06570 [hep-th].
57. *Vasiliev M. A.* Consistent Equations for Interacting Massless Fields of All Spins in the First Order in Curvatures // *Annals Phys.* 1989. T. 190. C. 59–106. DOI: 10.1016/0003-4916(89)90261-3.
58. *Sagnotti A., Sezgin E., Sundell P.* On higher spins with a strong  $Sp(2, R)$  condition // 1st Solvay Workshop on Higher Spin Gauge Theories. 2004. C. 100–131. arXiv: hep-th/0501156.
59. *Grigoriev M.* Parent formulations, frame-like Lagrangians, and generalized auxiliary fields // *JHEP.* 2012. T. 12. C. 048.  
DOI: 10.1007/JHEP12(2012)048. arXiv: 1204.1793 [hep-th].
60. *Anderson I. M.* The Variational Bicomplex : Technical Report / Utah State University. 1989.

61. *Boulanger N., Iazeolla C., Sundell P.* Unfolding Mixed-Symmetry Fields in AdS and the BMV Conjecture: I. General Formalism // JHEP. 2009. T. 07. C. 013. DOI: 10.1088/1126-6708/2009/07/013. arXiv: 0812.3615 [hep-th].
62. *Vasiliev M. A.* Holography, Unfolding and Higher-Spin Theory // J. Phys. A. 2013. T. 46. C. 214013. DOI: 10.1088/1751-8113/46/21/214013. arXiv: 1203.5554 [hep-th].
63. *Vasiliev M. A.* Nonlinear equations for symmetric massless higher spin fields in (A)dS(d) // Phys. Lett. B. 2003. T. 567. C. 139–151. DOI: 10.1016/S0370-2693(03)00872-4. arXiv: hep-th/0304049.
64. *Shaynkman O. V., Vasiliev M. A.* Scalar field in any dimension from the higher spin gauge theory perspective // Theor. Math. Phys. 2000. T. 123. C. 683–700. DOI: 10.1007/BF02551402. arXiv: hep-th/0003123.
65. *Vasiliev M. A.* Star-Product Functions in Higher-Spin Theory and Locality // JHEP. 2015. T. 06. C. 031. DOI: 10.1007/JHEP06(2015)031. arXiv: 1502.02271 [hep-th].
66. *Vasiliev M. A.* Projectively-compact spinor vertices and space-time spin-locality in higher-spin theory // Phys. Lett. B. 2022. T. 834. C. 137401. DOI: 10.1016/j.physletb.2022.137401. arXiv: 2208.02004 [hep-th].
67. *Bychkov A. S., Ushakov K. A., Vasiliev M. A.* Correction: Bychkov et al. The  $\sigma_-$  Cohomology Analysis for Symmetric Higher-Spin Fields. Symmetry 2021, 13, 1498 // Symmetry. 2021. T. 13, № 8. C. 1498. DOI: 10.3390/sym16091115. arXiv: 2107.01736 [hep-th].
68. *Vasiliev M. A.* Extended Higher Spin Superalgebras and Their Realizations in Terms of Quantum Operators // Fortsch. Phys. 1988. T. 36. C. 33–62.
69. Higher spin interactions in four-dimensions: Vasiliev versus Fronsdal / Boulanger, Nicolas and Kessel, Pan and Skvortsov, E. D. and Taronna, Massimo // J. Phys. A. 2016. T. 49, № 9. C. 095402. DOI: 10.1088/1751-8113/49/9/095402. arXiv: 1508.04139 [hep-th].
70. *Sezgin E., Sundell P.* Holography in 4D (super) higher spin theories and a test via cubic scalar couplings // JHEP. 2005. T. 07. C. 044. DOI: 10.1088/1126-6708/2005/07/044. arXiv: hep-th/0305040.

71. *Poincaré H.* Sur les résidus des intégrales doubles // Acta Mathematica. 1887. T. 9. C. 321—380. DOI: 10.1007/BF02406742.
72. *Stasheff J. D.* Homotopy Associativity of  $H$ -Spaces. I // Transactions of the American Mathematical Society. 1963. T. 108, № 2. C. 275—292. ISSN 0002-9947. DOI: 10.2307/1993608.
73. *Stasheff J. D.* Homotopy Associativity of  $H$ -Spaces. II // Transactions of the American Mathematical Society. 1963. T. 108, № 2. C. 293—312. ISSN 0002-9947. DOI: 10.2307/1993609.
74. *Vasiliev M. A., Vereitin V. A.* Differential Contracting Homotopy in the Linearized 3d Higher-Spin Theory. 2025. ABR. arXiv: 2508.11500 [hep-th].
75. *Kirakosiants P. T., Valerev D. A., Vasiliev M. A.* Quadratic corrections to the higher-spin equations by the differential homotopy approach // Nucl. Phys. B. 2026. T. 1023. C. 117290. DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2025.117290. arXiv: 2506.16634 [hep-th].
76. *Gross D. J., Mende P. F.* String Theory Beyond the Planck Scale // Nucl. Phys. B. 1988. T. 303. C. 407—454. DOI: 10.1016/0550-3213(88)90390-2.
77. *Bianchi M., Morales J. F., Samtleben H.* On stringy AdS(5) x S\*\*5 and higher spin holography // JHEP. 2003. T. 07. C. 062. DOI: 10.1088/1126-6708/2003/07/062. arXiv: hep-th/0305052.
78. Higher spin symmetry and N=4 SYM / N. Beisert, M. Bianchi, J. F. Morales, H. Samtleben // JHEP. 2004. T. 07. C. 058. DOI: 10.1088/1126-6708/2004/07/058. arXiv: hep-th/0405057.
79. *Bianchi M., Didenko V.* Massive higher spin multiplets and holography // 1st Solvay Workshop on Higher Spin Gauge Theories. 2004. C. 1—20. arXiv: hep-th/0502220.
80. *Lindstrom U., Zabzine M.* Tensionless strings, WZW models at critical level and massless higher spin fields // Phys. Lett. B. 2004. T. 584. C. 178—185. DOI: 10.1016/j.physletb.2004.01.035. arXiv: hep-th/0305098.
81. *Bonelli G.* On the tensionless limit of bosonic strings, infinite symmetries and higher spins // Nucl. Phys. B. 2003. T. 669. C. 159—172. DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2003.07.002. arXiv: hep-th/0305155.

82. *Sagnotti A., Tsulaia M.* On higher spins and the tensionless limit of string theory // Nucl. Phys. B. 2004. T. 682. C. 83—116.  
DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2004.01.024. arXiv: hep-th/0311257.
83. *Bourbaki N.* Lie Groups and Lie Algebras: Chapters 4–6.  
Berlin : Springer-Verlag, 2002. C. xii+300. (Elements of Mathematics).  
ISBN 978-3-540-42650-9.
84. *Cherednik I.* Double affine Hecke algebras and Macdonald's operators. 1992.  
Июль.
85. The Calogero model: Anyonic representation, fermionic extension and supersymmetry / Brink, L. and Hansson, T. H. and Konstein, S. and Vasiliev, Mikhail A. // Nucl. Phys. B. 1993. T. 401. C. 591—612.  
DOI: 10.1016/0550-3213(93)90315-G. arXiv: hep-th/9302023.
86. *Engquist J., Sundell P.* Brane partons and singleton strings // Nucl. Phys. B. 2006. T. 752. C. 206—279. DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2006.06.040.  
arXiv: hep-th/0508124.
87. *Engquist J., Sundell P., Tamassia L.* On Singleton Composites in Non-compact WZW Models // JHEP. 2007. T. 02. C. 097.  
DOI: 10.1088/1126-6708/2007/02/097. arXiv: hep-th/0701051.
88. *Deser, Stanley and Nepomechie, Rafael I.* Anomalous Propagation of Gauge Fields in Conformally Flat Spaces // Phys. Lett. B. 1983. T. 132. C. 321—324. DOI: 10.1016/0370-2693(83)90317-9.
89. *Deser S., Nepomechie R. I.* Gauge Invariance Versus Masslessness in De Sitter Space // Annals Phys. 1984. T. 154. C. 396.  
DOI: 10.1016/0003-4916(84)90156-8.
90. *Brink L., Metsaev R. R., Vasiliev M. A.* How massless are massless fields in AdS(d) // Nucl. Phys. B. 2000. T. 586. C. 183—205.  
DOI: 10.1016/S0550-3213(00)00402-8. arXiv: hep-th/0005136.
91. *Deser S., Waldron A.* Partial masslessness of higher spins in (A)dS // Nucl. Phys. B. 2001. T. 607. C. 577—604. DOI: 10.1016/S0550-3213(01)00212-7.  
arXiv: hep-th/0103198.
92. *Zinoviev Y. M.* On massive high spin particles in AdS. 2001. АВГ.  
arXiv: hep-th/0108192.

93. *Dolan L., Nappi C. R., Witten E.* Conformal operators for partially massless states // JHEP. 2001. T. 10. C. 016.  
DOI: 10.1088/1126-6708/2001/10/016. arXiv: hep-th/0109096.
94. *Zinoviev Y. M.* On massive mixed symmetry tensor fields in Minkowski space and (A)dS. 2002. Ноябрь. arXiv: hep-th/0211233.
95. *Skvortsov E. D., Vasiliev M. A.* Geometric formulation for partially massless fields // Nucl. Phys. B. 2006. T. 756. C. 117–147.  
DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2006.06.019. arXiv: hep-th/0601095.
96. *Khabarov M. V., Zinoviev Y. M.* Massive higher spin fields in the frame-like multispinor formalism // Nucl. Phys. B. 2019. T. 948. C. 114773.  
DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2019.114773. arXiv: 1906.03438 [hep-th].
97. *Tarusov A. A., Ushakov K. A.* The  $\sigma_-$  Cohomology Analysis for Coxeter HS  $B_2$  model // JHEP. 2026. T. 6. C. 44. DOI:10.1007/JHEP06(2026)044.  
arXiv: 2602.10788 [hep-th].
98. *Gelfond O. A., Vasiliev M. A.* Higher-Rank Fields and Currents // JHEP. 2016. T. 10. C. 067. DOI: 10.1007/JHEP10(2016)067.  
arXiv: 1312.6673 [hep-th].

## Приложение А

### Приложения к главе 1

#### А.1 Вариационный бикомплекс

После проделанного рассмотрения уместно провести более конкретные параллели с конструкцией вариационного бикомплекса [3], [60]. Вариационный бикомплекс – это двойной комплекс дифференциальных форм, определенный на бесконечном расслоении джетов для некоторого многообразия. При этом один из дифференциалов, естественным образом определенных на таком бикомплексе совпадает с оператором Эйлера-Лагранжа. Как уже было отмечено, развернутые уравнения имеют много общего с расслоениями джетов, так что естественно предположить существование обобщения, связывающего и бикомплексы на них. Попытаемся привести словарь терминов, позволяющий связать результаты в обоих подходах. Для обеих конструкций необходимо задать действие дифференциалов, действующих на дифференциальных формах над многообразием. В бикомплексе эти операторы несут названия  $d_H$  и  $d_V$  – горизонтальный и вертикальный соответственно. В подходе развернутых систем, изложенным выше, горизонтальному оператору  $d_H$  соответствует дифференциал де Рама на многообразии  $d$  (или отождествленный с ним по развернутым уравнениям  $\mathcal{Q}$ ), а вертикальному  $d_V$  – оператор  $\delta$ .

Важным преимуществом развернутого подхода является запись действия как интеграла от замкнутой формы. Это позволяет добавлять  $\mathcal{Q}$  точные члены, из-за чего можно добиться, чтобы в уравнениях присутствовали вариации только примарных полей.

Не требуя от системы подобных свойств, в подходе вариационного бикомплекса необходимо вводить внутренний оператор Эйлера  $I$ , который неявно задан как проектор, для которого  $d_H$  точные формы лежат в ядре

$$I \circ I = I \quad (1.1)$$

$$I \circ d_H = 0 \quad (1.2)$$

Более того, для дифференциальных форм  $\omega$  выполнено

$$I\omega - \omega = d_H\eta \quad (1.3)$$

Для некоторого  $\eta$ .

Из перечисленных свойств естественным образом следует локальное разложение

$$\omega = I\omega + d_H\eta \quad (1.4)$$

Условие, что некоторая форма  $\omega$  локально представляется в виде вариации (с точностью до  $d_H$  точных членов) с помощью  $I$  можно записать как

$$I \circ d_V\omega = 0 \quad (1.5)$$

Действительно, если  $\omega$  локально  $\delta_v$  точно, то она представляется в виде

$$\omega = \delta_V\lambda + d_H\eta, \quad (1.6)$$

где дополнительный  $d_h$ -точный член появляется за счёт ядра оператора  $I$ . В этом виде несложно сопоставиться с записью 1.42, где  $\omega \rightarrow \mathcal{E}$ ,  $\lambda \rightarrow \mathcal{L}$ ,  $\eta \rightarrow \Phi$ .

Рассматриваемые в диссертации развернутые системы позволяют не использовать неявно заданный проектор  $I$ , а явно добавлять  $\mathcal{Q}$  ( $d_H$ )-точные члены. Таким образом критерий лагранжевости становится прямо применим без дополнительных построений. Во-вторых, тривиальная топология по оператору  $\delta$  ( $d_V$  в терминах вариационного бикомплекса) позволяет поднять локальные утверждения до глобальных.

## Приложение Б

### Приложение к главе 3

#### Б.1 Редукция до унитарных подмодулей теории высших спинов, расширенной группой Кокстера $B_2$

Для интерпретации теории  $B_2$  как обобщения стандартной четырёхмерной теории высших спинов, необходимо избавиться от всех неунитаризуемых модулей в секторе ноль-форм. Редукция, предложенная в разделе 4 [53] за авторством К.А. Ушакова проходит в два этапа.

Во-первых, система сужается до инвариантного подпространства автоморфизма  $\hat{K}_v \rightarrow -\hat{K}_v$ . В производящей системе от операторов Клейна явно зависит только последнее уравнение:

$$S * S = i \left( dZ^{An} dZ_{An} + \sum_i \sum_{v \in \mathcal{R}_i} \left[ \eta_i B \frac{v^n v^m}{(v, v)} dz_n^\alpha dz_{\alpha m} * \varkappa_v \hat{k}_v + \bar{\eta}_i B \frac{v^n v^m}{(v, v)} d\bar{z}_n^{\dot{\alpha}} d\bar{z}_{\dot{\alpha} m} * \bar{\varkappa}_v \hat{k}_v \right] \right). \quad (2.1)$$

За счет дополнительного умножения на оператор Клейна, в инвариантном подпространстве преобразования четности оказываются только поля  $B$  (и, соответственно,  $C$ ), нечетные по операторам Клейна. Прямым наблюдением можно заметить, что тем самым остаются только ноль-формы лежащие в тензорном произведении присоединенного и твистованного модулей стандартной теории.

Из стандартной теории известно, что присоединенный модуль для ноль-форм является неунитаризуемым, как сумма конечномерных модулей некомпактной алгебры. Для исключения присоединенного фактора в линейном порядке можно наложить граничные условия. Для этого необходимо перейти к так называемым стереографическим координатам на  $AdS_4$

$$\begin{aligned}
e_{0\underline{n}}^{\alpha\dot{\beta}} &= -z^{-1}\sigma_{\underline{n}}^{\alpha\dot{\beta}}, \\
\omega_{0\underline{n}}^{\alpha\dot{\beta}} &= -\lambda^2(2z)^{-1}(\sigma_{\underline{n}}^{\alpha\dot{\beta}}x^{\beta\dot{\beta}} + \sigma_{\underline{n}}^{\beta\dot{\beta}}x^{\alpha\dot{\beta}}), \\
\bar{\omega}_{0\underline{n}}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} &= -\lambda^2(2z)^{-1}(\sigma_{\underline{n}}^{\alpha\dot{\alpha}}x_{\alpha}^{\dot{\beta}} + \sigma_{\underline{n}}^{\alpha\dot{\beta}}x_{\alpha}^{\dot{\alpha}}),
\end{aligned} \tag{2.2}$$

где  $\lambda$  – обратный радиус  $AdS_4$ ,

$$x_{\alpha\dot{\beta}} = \sigma_{\alpha\dot{\beta}}^a x_a, \quad x^2 = x_a x^a = \frac{1}{2} x_{\alpha\dot{\beta}} x^{\alpha\dot{\beta}}, \quad z = 1 + \lambda^2 x^2, \tag{2.3}$$

Тогда решения восстанавливаются из начальных данных как

$$C_{tw}(Y|x) = g^{-1} * C_{0tw}(Y) * \tilde{g}, \quad C_{adj}(Y|x) = g^{-1} * C_{0adj}(Y) * g, \tag{2.4}$$

где

$$g(y, \bar{y}|x) = 2 \frac{\sqrt{z}}{1 + \sqrt{z}} \exp \left[ \frac{i\lambda}{1 + \sqrt{z}} x^{\alpha\dot{\alpha}} y_{\alpha} \bar{y}_{\dot{\alpha}} \right] \tag{2.5}$$

и обратный

$$g^{-1}(y, \bar{y}|x) = \tilde{g}(y, \bar{y}|x) = 2 \frac{\sqrt{z}}{1 + \sqrt{z}} \exp \left[ -\frac{i\lambda}{1 + \sqrt{z}} x^{\alpha\dot{\alpha}} y_{\alpha} \bar{y}_{\dot{\alpha}} \right]. \tag{2.6}$$

Таким образом ветви решений выглядят как

$$\begin{aligned}
C_{tw}(Y|x) = z \exp \{ &-i\lambda x^{\alpha\dot{\alpha}} y_{\alpha} \bar{y}_{\dot{\alpha}} + i(\sqrt{z} - 1) y^{\alpha} p_{0\alpha} + \\
&i(\sqrt{z} - 1) \bar{y}^{\dot{\alpha}} \bar{p}_{0\dot{\alpha}} - i\lambda x^{\alpha\dot{\alpha}} p_{0\alpha} \bar{p}_{0\dot{\alpha}} \} C_{0tw}(Y), \tag{2.7}
\end{aligned}$$

$$C_{adj}(Y|x) = C_{0adj} \left( \frac{1}{\sqrt{z}} (y^{\alpha} + \lambda x^{\alpha\dot{\alpha}} \bar{y}_{\dot{\alpha}}), \frac{1}{\sqrt{z}} (\bar{y}^{\dot{\alpha}} + \lambda x^{\alpha\dot{\alpha}} y_{\alpha}) \right), \tag{2.8}$$

Обобщение до  $B_2$  случая – произведение ветвей, так как мы рассматриваем решение в тензорном произведении этих двух модулей. Из-за различных асимптотик, граничное условие

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{z}} C(Y_1, Y_2, I; \hat{K}|x) = 0 \tag{2.9}$$

допускает только тривиальную зависимость по игрекам в присоединенном секторе, редуцируя модуль ноль-форм до унитаризируемого сектора, эквивалентного твистованному в стандартной теории.