

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. П. Н. ЛЕБЕДЕВА РОССИЙСКОЙ
АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

Фатеев Илья Сергеевич

**Состояния частичной синхронизации в системах
осцилляторов с супердиффузионным типом
взаимодействия**

Специальность 1.3.3 –
«Теоретическая физика»

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
Полежаев Андрей Александрович

Москва — 2026

Оглавление

Введение	6
Глава 1 Обзор литературы	17
1.1 Общие представления о нелинейных распределенных системах.....	17
1.2 Подход к применению дробно-дифференциального исчисления.....	19
1.3 Подходы к определению динамики систем взаимодействующих нейронов. Состояния частичной синхронизации.....	20
1.3.1 Эмпирические свидетельства.....	20
1.3.2 Математические модели.....	24
1.4 Выводы главы	34
Глава 2 Построение системы супердиффузионно-связанных осцилляторов	35
2.1 Организация супердиффузионной связи	36
2.1.1 Общие положения	36
2.1.2 Обоснование супердиффузионного приближения.....	37
2.1.3 Определение дробного оператора Лапласа	39
2.1.4 Постановка управляющих параметров	40
2.1.5 Внедрение дробно-дифференциальных операторов.....	42
2.1.6 Сведение дробно-дифференциальных операторов к конечным разностям	43
2.1.7 Формирование дискретного подхода	46
2.1.8 Степенной отклик супердиффузионного уравнения на простейшее возмущение	50
2.2 Организация реакционно-супердиффузионной системы	51
2.2.1 Идеюное обоснование.....	51
2.2.2 Организация нелинейных механизмов активации точечных нейронов	52

2.2.3 Формирование многокомпонентного распределенного представления в континуальном смысле	53
2.2.4 Формирование многокомпонентного распределенного представления в дискретном смысле	54
2.3 Метрики для оценки состояний частичной синхронизации	56
2.3.1 Фактор синхронизации	56
2.3.2 Сила некогерентности	57
2.3.3 Параметр локального порядка	58
2.3.4 Классическая мера корреляции в пространстве	58
2.4 Выводы главы	59
Глава 3 Состояния частичной синхронизации в системе супердиффузионно связанных нейронов, организованных на основе одномерной и двумерной систем	61
3.1 Состояния частичной синхронизации, полученные на базе одномерных систем	61
3.1.1 Двухкомпонентная система с супердиффузией по первой компоненте	61
3.1.2 Двухкомпонентная система с супердиффузией по первой и второй компоненте	63
3.1.3 Трехкомпонентная система	65
3.1.4 Случай нулевых граничных условий	67
3.2 Состояния частичной синхронизации, полученные на базе двумерных систем	67
3.2.1 Двумерная двухкомпонентная система с супердиффузионным типом связи по одной компоненте	70
3.2.2 Двумерная двухкомпонентная система с супердиффузионной связью по обоим компонентам	72
3.2.3 Двумерная трехкомпонентная система	74
3.3 Выводы главы	77
Глава 4 Однородные и неоднородные синхронизационные переходы, воспроизведенные на базе ансамблей нейронов с супердиффузионной конфигурацией	78
4.1 Подробный анализ параметрического пространства супердиффузионных конфигураций	79

4.2 Модификация метрики и выявление дополнительных особенностей параметрического пространства	83
4.2.1 Формирование спектра дробных мер пространственной корреляции	83
4.2.2 Применение дробной меры пространственной корреляции	86
4.2.3 Выявление дополнительной информации о супердиффузионных конфигурациях нейронов при применении дробной меры пространственной корреляции	89
4.3 Выводы главы	90
Глава 5 Развитие аналитических представлений о супердиффузионных сетях, основываясь на реакционно-супердиффузионном подходе	93
5.1 Анализ расширенной линейной устойчивости	94
5.2 Формальное разделение конфигураций	96
5.2.1 Конфигурации, соответствующие фокусному типу неустойчивости	96
5.2.2 Конфигурации, соответствующие режиму несогласованной дробной Тьюринговской неустойчивости	97
5.3 Сопоставление развитых динамических режимов с аналитическими представлениями об устойчивости пространственных мод	99
5.3.1 Точечная система	99
5.3.2 Взаимосвязь между некогерентностью и неустойчивостью в фокусном смысле	99
5.3.3 Взаимосвязь между полной, а также частичной синхронизацией и устойчивостью узлового типа	101
5.3.4 Взаимосвязь между устойчивостью фокусного типа и развитием некогерентности	101
5.3.5 Несогласованная дробная Тьюринговская устойчивость как возможное динамическое явление, воспроизводимое на базе супердиффузионных конфигураций	102
5.3.6 Синхронизация, вызванная нелинейными эффектами. Влияние устойчивости узлового типа и несогласованной дробной Тьюринговской неустойчивости	105
5.4 Выводы главы	106

Заключение	108
Список литературы	111

Введение

Актуальность темы диссертационного исследования

Состояния частичной синхронизации, в частности *химерные* состояния [1—3], являются важными коллективными проявлениями, отражающими сложные иммерджентные свойства распределенных динамических систем различной природы. К основным системам, в рамках которых могут быть исследованы данные коллективные динамические режимы, могут быть отнесены ансамбли фазовых [1, 3—6], механических [7—9], химических [10—12], оптических [13, 14] и биологических осцилляторов, в частности, системы взаимодействующих нейронов [15—25].

Существенная важность состояний частичной синхронизации в контексте задач нейронаук обусловлена значимостью процессов синхронизации и рассинхронизации для широкого множества когнитивных процессов, в частности процессов передачи информации, обработки первичных сенсорных стимулов, консолидации памяти и удержания внимания различными участками как нового кортекса так и различными функциональными зонами головного мозга в целом. С эмпирической точки зрения, химерные состояния могут ассоциироваться с пространственно локализованной формой нейронной активности, называемой *бамповыми режимами*, которые возникают в областях мозга, ответственных за память, пространственную ориентацию и зрительное восприятие [26]. Связь между химерными состояниями и бампами рассматривается в [26—30] и представляет интерес как с фундаментальной, так и прикладной точек зрения. С другой стороны, в работах [31, 32] показано, что химерные состояния представляют собой важное связующее звено между динамическими особенностями нейронной активации и когнитивными процессами, а также метастабильной активностью головного мозга. Расширением концепции нейронных лавин в частности и критичности в целом является понятие лавин десинхронизации, установленное в работе [33] на основе технологии красителя, чувствительного к напряжению. Существуют иссле-

дования, подтверждающие возникновение состояний частичной синхронизации в сетях, организованных на основе определенного типа эмпирических структур нейронных связей [34—38]. В то же время исследования, рассматривающие математические модели сетевых конфигураций, имеют ключевое значение для понимания сложной коллективной динамики состояний частичной синхронизации в системах взаимодействующих нейронов [27, 39].

В данном контексте требуется комплексный анализ различных математических моделей, описывающих коллективную динамику систем взаимодействующих осцилляторов. Подобные модели позволяют получить важную информацию, связывающую свойства активации точечных элементов с характеристиками их взаимных связей. Это способствует лучшему пониманию динамической природы вышеописанных фундаментальных явлений, наблюдаемых как в рамках широкого спектра нейронаучных так и естественнонаучных направлений в целом. Сложности, связанные с многогранной и крайне комплексной структурой нейронных сетей головного мозга, являются большим вызовом для научного сообщества. Возможным способом продвижения является анализ математических моделей распределенных динамических систем с понятным образом организованным типом взаимодействия между соответствующими осциллирующими элементами, с целью изучения фундаментальных особенностей образования и развития состояний частичной синхронизации, воспроизведенных на базе данной топологии.

Говоря другими словами, особый интерес представляют различные топологии взаимосвязей между взаимодействующими элементами. Хорошо известно, что многие математические модели, ориентированные на аналитическое изучение систем взаимодействующих нейронов, основаны на интегро-дифференциальном представлении [40—42]. Для решения задач численного исследования особенно хорошо зарекомендовал себя подход с использованием степенных закономерностей [43—46]. Предыдущие исследования также были сосредоточены на: многослойных сетях [35, 47—50], системах с перекрёстной связью [51—54], симплицальных комплексах [55], иерархической структуре [19, 23, 56, 57], пространственно взвешенных связях [43—46, 58], системах с изменяющимися во времени связями [59], адаптивных системах [60—63], системах с гибридными [64] и комбинированными мультиплексными формами взаимодействия [65]. С формальной точки зрения, химерные состояния могут быть ассоциированы с процессами передачи информации между когерентными и некогерентными динамическими кластерами

[66—68].

Помимо численного исследования, крайне важно, чтобы рассматриваемая математическая модель также поддавалась аналитическому осмыслению. Это дает возможность глубже понять природу возникновения состояний частичной синхронизации, а также определить способы управления ими. Разбирая данный вопрос чуть подробнее, крайне важно определить значимые параллели с иными математическими концепциями. В частности, в совершенно различных независимых источниках удается обнаружить множественные связи и параллели между распределениями с тяжелыми хвостами и структурными, а также функциональными особенностями организации работы нервной ткани.

Степенные законы и распределения с тяжелыми хвостами, естественным образом возникающие на различных уровнях структурной и функциональной организации сложно устроенных нейронных сетей, позволили предложить ряд моделей, в которые степенные асимптотики «вложены» изначально. Концептуальные основы для определения распространения потенциала действия в неоднородной структуре нервной ткани были исследованы в [69—72]. Супердиффузионный подход с дробной производной по времени был использован для описания диффузии ионов кальция в цитозоле астроцитов [73]. В свою очередь, модель с дробной производной по времени и пространству была применена для описания кинетики кальция в нервных клетках [74]. Идентификацию аномальной диффузии как преобладающего кинетического процесса переноса ионов в шипиковых дендритах клеток Пуркинье можно найти в [75], а в дендритах пирамидальных клеток области CA1 гиппокампа — в [76].

Следует отметить, что обобщение идейной логики следует проводить крайне аккуратно. Дело в том, что детальное определение структуры связей и других характеристик биологических нейронов представляет собой чрезвычайно сложную и зачастую невыполнимую задачу. При этом важно также отметить, что появляется всё больше эмпирических данных, свидетельствующих о возникновении некоторых статистических закономерностей при описании систем взаимодействующих нервных клеток. В более общем плане накапливаются свидетельства в пользу наличия распределений с тяжёлыми хвостами для различных характеристик сложно-организованных сетей. Так, в работе [77] обсуждается возникновение распределений с тяжёлыми хвостами для различных уровней структурной и функциональной организации головного мозга. Исследование [78] указы-

вает на то, что связь с тяжёлыми хвостами может являться следствием обобщённого принципа самоорганизации в процессе обучения и Хеббовской пластичности. Важное указание на связь гамма-вспышек активности и распределения Леви можно обнаружить в [79]. В свою очередь, связь между степенными законами, реализацией критичности и статистикой формирования нейронных лавин известна уже довольно давно [80]. Все вышесказанное указывает на потенциальную актуальность и значимость применения дробного дифференциального исчисления при рассмотрении явлений различных масштабов в контексте задач нейронаук. Всестороннее изучение конкретных типов состояний частичной синхронизации, включающих химерные и уединенные состояния, в данной перспективе играет решающую роль.

Цель диссертационного исследования

Цель диссертационного исследования заключается в формировании и развитии дробно-дифференциального подхода к определению сложно организованных сетей взаимодействующих осциллирующих элементов, в частности нейронов, а также в выявлении фундаментальных закономерностей образования и развития широкого спектра состояний частичной синхронизации на базе данной топологии взаимодействия.

Для достижения этой цели были поставлены **основные задачи диссертационного исследования:**

1. Представить описание континуальной системы с позиции реакционно-супердиффузионного подхода. Выявить ключевые параллели данной постановки с актуальными направлениями исследований состояний частичной синхронизации.
2. Сформулировать подход к построению связанной дискретной системы с супердиффузионной конфигурацией, основанный на использовании явной разностной схемы аппроксимации дробного оператора Лапласа. Организовать супердиффузионные топологии, основанные как на одномерном, так и на двумерном континуальном приближении.
3. Исследовать возможность формирования различных состояний частичной синхронизации на базе систем с супердиффузионной конфигурацией.
4. Ввести новое параметрическое пространство показателей дробного оператора Лапласа, определяющее топологии супердиффузионного взаимодействия.

Продемонстрировать уместность его использования в контексте всестороннего изучения состояний частичной синхронизации, воспроизводимых на базе различных форм супердиффузионного взаимодействия. Модифицировать классическую меру пространственной корреляции на случай спектра дробных мер пространственной корреляции для более детализированного представления параметрического пространства показателей дробного оператора Лапласа.

5. Произвести аналитическое исследование реакционно-супердиффузионной системы с нелинейными функциями модели Hindmarsh-Rose. Предопределить связь между дискретными реализациями супердиффузионных систем нейронов с аналитическими свойствами реакционно-супердиффузионной системы в континуальном приближении.

Научная новизна результатов диссертационного исследования

Диссертационная работа представляет, систематизирует и обосновывает новый подход к описанию систем супердиффузионно-взаимодействующих нейронов, основанный на реакционно-супердиффузионном представлении. В частности, в работе делается акцент на возможности формирования различных состояний как полной, так и частичной синхронизации, а также развитой некогерентности на базе систем с различной топологией супердиффузионного взаимодействия. Среди важных результатов можно выделить:

1. Впервые представлено описание сети взаимодействующих нейронов с супердиффузионной схемой связи, организованной на основе явной разностной схемы аппроксимации дробного оператора Лапласа. Выделены идейные параллели супердиффузионной схемы взаимодействия а также лежащих в ее основе степенных функций, с различными биологическими аспектами организации нервной ткани.
2. Установлена возможность развития в системе с супердиффузионной топологией взаимодействия различных состояний частичной синхронизации, а также развитой некогерентности. Предопределен универсальный метод изучения нелинейно-динамических свойств развития состояний частичной синхронизации в многокомпонентной распределенной системе с супердиффузионной конфигурацией, основанный на исследовании параметрического пространства показателей дробного оператора Лапласа.

3. Впервые выявлены супердиффузионные конфигурации, для которых возможно формирование конкретных реализаций состояний частичной синхронизации. В частности, определены такие конфигурации, которые допускают возможность развития химерных и уединенных состояний, фазовых волн различных масштабов, а также их совместных реализаций для широкого набора однородно распределенных случайных начальных условий.
4. Определены параметрические области однородного и неоднородного синхронизационного перехода в параметрическом пространстве показателей дробного оператора Лапласа. Полученные результаты отражают сложное влияние изменения супердиффузионных конфигураций по отношению к процессам формирования и развития различных состояний полной и частичной синхронизации, а также развитой некогерентности. Для решения задачи разделения параметрических областей была модифицирована классическая мера пространственной корреляции на случай спектра дробных мер пространственной корреляции. В результате появилась дополнительная возможность различать химерные состояния с когерентной частью, организованной в виде крупномасштабной фазовой волны с различными характерными масштабами. Модифицированный подход применим не только к супердиффузионным конфигурациям, но и позволяет анализировать широкий спектр состояний частичной синхронизации в распределенных динамических системах с произвольной топологией связей между элементами.
5. Произведен расширенный линейный анализ реакционно-супердиффузионной системы с Hindmarsh-Rose нелинейностью. Впервые определено соответствие между типами устойчивости пространственных мод в линейном приближении и развитием различных состояний частичной синхронизации, воспроизведенных на базе допустимых конфигураций супердиффузионных сетей. Введено понятие несогласованной дробной Тьюринговской неустойчивости – динамического явления, которое может наблюдаться в многокомпонентных распределенных нелинейных динамических системах с несогласованным типом дробных пространственных производных для соответствующих компонент.

Фундаментальная и прикладная значимость

Изучение процессов полной и частичной синхронизации, а также развитой некогерентности является крайне перспективным направлением для широкого класса естественных наук. Особенную значимость они приобрели в контексте изучения коллективных режимов, возникающих в системах биологических нейронов. Принципиальная значимость исследования данной тематики в контексте задач нейронаук связана с их возможным отождествлением с процессами формирования функциональной связи и, как следствие, с обработкой информации различными участками как неокортекса, так и другими взаимодействующими функциональными зонами головного мозга.

Данные суждения определяют важность составления в биологическом смысле адекватных, в математическом смысле лаконичных и, наконец, в фундаментальном смысле аналитически исследуемых математических моделей для всестороннего осмысления распределенных динамических нелинейных систем, основанных на конкретном типе конфигураций.

Предложенный подход к исследованию различных состояний частичной синхронизации, основанный на построении дискретных моделей с супердиффузионной конфигурацией взаимодействия, является идейно-актуальным, в широкой степени вариативным и определяет новые возможности для формирования конфигураций взаимодействия различных кортикальных структур. При этом континуальный предел данных уравнений, приводящих к реакционно-супердиффузионной постановке, способен преподнести ряд аналитических суждений, позволяющих более полно осмыслить сложные коллективные свойства, воспроизводимые на базе сетей с супердиффузионной топологией взаимодействия. Этим обеспечивается как фундаментальная, так и прикладная значимость такого подхода.

Новизна и значимость полученных результатов также подтверждается их публикацией в отечественных и зарубежных тематических научных журналах с высоким импакт-фактором, входящих в состав систем научного цитирования, таких как РИНЦ, Web of Science и Scopus.

Учитывая основной акцент работы на представлении распределенной нелинейной модели; обосновании ее структуры; изучении потенциальных динамических режимов, которые могут быть воспроизведены на базе различных конфигураций ее реализаций; а также на формировании аналитических представлений о полученных результатах, содержание диссертации соответствует паспорту специальности 1.3.3 — «Теоретическая физика» и затрагивает сразу несколько направле-

ний, отраженных в паспорте данной специальности. В частности, постановка задачи с Hindmarsh-Rose нелинейностью, связанной с динамикой точечного нейрона; сопоставление конфигураций систем, определенных на базе показателей дробного оператора Лапласа, с актуальными нейронаучными представлениями; связь состояний частичной синхронизации с различными когнитивными процессами; идейное соответствие между динамикой распределенной системы и откликом сети нейронов на внешний стимул – определяют, что работа выполнена в рамках исследований по созданию физических моделей когнитивных процессов (п.12). Исследование континуального предела дискретной системы, анализ реализованных динамических явлений и определение подходов к классификации состояний частичной синхронизации, в частности, химерных состояний, характеризующихся гиперхаотической динамикой, отсылают к задачам теории неравновесных систем и теории хаоса (п.10). Наконец, для решения поставленных задач проведено моделирование физических процессов на решетке (п.8) на основе реализации нелокального итерационного отображения, соответствующего разностной схеме аппроксимации дробного оператора Лапласа для уравнений с супердиффузионной связью.

Основные положения, выносимые на защиту

1. На основе разностной схемы аппроксимации дробного оператора Лапласа возможно построить сеть связанных осцилляторов с супердиффузионной топологией.
2. В распределенных системах нейронов, заданных на основе нелинейной модели Hindmarsh–Rose, с супердиффузионной топологией взаимодействия существуют и поддаются классификации различные состояния частичной синхронизации, включая химерные и уединенные состояния, фазовые волны, их различные комбинации, а также состояния развитой некогерентности.
3. Параметрическое пространство показателей дробного оператора Лапласа предопределяет разнообразие сетей с супердиффузионной топологией взаимодействия. На основе данного параметрического пространства возможно структурировать нелинейно-динамические свойства сетей с супердиффузионной топологией, связанные с развитием состояний частичной синхронизации.
4. Карты динамических режимов в параметрическом пространстве показате-

лей дробного оператора Лапласа могут быть глобально разделены на зоны однородных и неоднородных синхронизационных переходов, идейно соответствующих суперкритическому и субкритическому типам бифуркаций. С использованием спектра дробных мер пространственной корреляции можно выявлять более специфичные параметрические области, для которых характерно образование химерных состояний с когерентной частью в виде крупномасштабной фазовой волны.

5. Имеется соответствие между типами неустойчивости пространственных мод, установленными с помощью линейного анализа двухкомпонентной реакционно-супердиффузионной системы, и развитием конкретных режимов как полной, так и частичной синхронизации в сетях с различными конфигурациями супердиффузионного взаимодействия.

Достоверность результатов

Достоверность полученных результатов обеспечивается тщательным тестированием используемых вычислительных программ, реализацией состояний частичной синхронизации, уже зарекомендовавших свое проявление в системах с ярко выраженным нелокальным взаимодействием, предельным схождением результатов супердиффузионной модели к хорошо изученной классической диффузионной модели, а также согласованием результатов для сети с теоретическими осмыслениями на основе расширенного линейного анализа супердиффузионной системы.

Личный вклад

Результаты диссертационной работы, выносимые на защиту, получены соискателем лично. Автором были разработаны комплексы программ, в которых производился расчет и анализ состояний частичной синхронизации, воспроизводимых на базе супердиффузионной топологии, произведено аналитическое осмысление результатов с позиции линейного анализа, а также расширена одна из метрик классификации состояний частичной синхронизации.

Апробация работы

Основные результаты исследований, представленных в диссертации, были доложены на следующих всероссийских и международных конференциях, а также семинарах:

1. XXXIII международная конференция «Математика, Компьютер, Образование», 26 – 31 января 2026 г., Дубна.
2. Всероссийская конференция «Нелинейные дни в Саратове для молодых», 26 – 30 мая 2025 г., Саратов.
3. XXXII международная конференция «Математика, Компьютер, Образование», 27 – 31 января 2025 г., Пущино.
4. IX Всероссийский молодежный научный форум «Наука будущего – наука молодых», 29 октября – 1 ноября 2024 г., Самара.
5. XXI научная школа «Нелинейные волны», 5 – 11 ноября 2024 г., Нижний Новгород.
6. International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems, 28 июня – 3 июля 2024 г., Суздаль.
7. Всероссийская научная молодежная школа-конференция «Химия, физика, биология: пути интеграции», 22 – 24 апреля 2024 г., Москва.
8. XXXI международная конференция «Математика, Компьютер, Образование», 22 – 27 января 2024 г., Дубна.
9. Всероссийская конференция «Нелинейные дни в Саратове для молодых», 15 – 19 мая 2023 г., Саратов.

Результаты исследований обсуждались на большом семинаре Отделения теоретической физики (ОТФ) имени И.Е. Тамма, а также на внутренних семинарах лаборатории нелинейной динамики и теоретической биофизики.

Гранты и награды

Данная работа была поддержана грантом Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС» (с 2024 г.). Опубликованные результаты были поддержаны Премией им. И.Е. Тамма по теоретической физике в рамках конкурса молодежных научных работ в Физическом институте им. П.Н. Лебедева Российской академии наук (2024 г.). На основе обсуждаемых в тексте диссертации публикаций был получен грант РНФ, направленный на дальнейшее развитие данной тематики (с 2026 г.).

Публикации по теме диссертационного исследования

1. Fateev I., Polezhaev A. Fractional Correlation Measure for Spatial Coherence // International Journal of Bifurcation and Chaos. – 2026. – №. 7. – С. 2650078.
2. Fateev I., Polezhaev A. Analytical study of neural networks with superdiffusive coupling supporting chimera states // Physical Review E. – 2025. – Т. 112. – №. 1. – С. 014214.
3. Fateev I., Polezhaev A. Synchronization transitions in a system of superdiffusively coupled neurons: Interplay of chimeras, solitary states, and phase waves // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. – 2024. – Т. 34. – №. 9. – С. 093131.
4. Fateev I., Polezhaev A. Chimera states in a lattice of superdiffusively coupled neurons // Chaos, Solitons & Fractals. – 2024. – Т. 181. – С. 114722.
5. Фатеев И. С., Полежаев А. А. Химерные состояния в системах супердиффузионно связанных нейронов // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Физика. – 2024. – Т. 24. – №. 4. – С. 328-339.
6. Fateev I., Polezhaev A. Chimera states in a chain of superdiffusively coupled neurons // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. – 2023. – Т. 33. – №. 10. – С. 103110.
7. Fateev I. S., Polezhaev A. A. Dynamics of a chain of interacting neurons with nonlocal coupling, given by Laplace operator of fractional and variable orders with nonlinear Hindmarsh–Rose model functions // Bulletin of the Lebedev Physics Institute. – 2023. – Т. 50. – №. 6. – С. 243-252.

Объем и структура работы Диссертация состоит из введения, 5 глав, заключения и списка литературы. Полный объем диссертации составляет 125 страниц, включая 21 рисунок. Список литературы содержит 238 наименований.

Глава 1

Обзор литературы

Процессы коллективной активности в нелинейных распределенных динамических системах различной природы могут быть сопряжены с реализацией широкого множества динамических режимов. В контексте реакционно-диффузионного приближения, в качестве отправной точки для формирования общего подхода к изучению столь разнообразных свойств систем различной природы принято считать работу [81] и сформированную концепцию *морфогенеза*. Развитие дальнейших представлений было связано с концептуальными основами *самоорганизованного* поведения [82], а также исследованием динамики необратимых процессов в *открытых системах, далеких от термодинамического равновесия* [83]. В свою очередь, общие положения были основаны на более фундаментальных представлениях о нелинейности, теории динамических систем и качественной теории дифференциальных уравнений.

1.1. Общие представления о нелинейных распределенных системах

В настоящее время предложенные во второй половине XX века идеи не только являются концептуальным базисом для множества фундаментальных задач различных естественно-научных дисциплин: физики, химии, биологии, экологии, геологии и географии, но также имеют важное значение для широкого круга прикладных задач: теории информации, лингвистики, социологии и технологий машинного обучения. Для начала более подробного и предметного обсуждения необходимо детализировать современное состояние и «отчертить общие контуры» уже сформированной науки.

Производя важное обобщение, можно утверждать, что в системах связанных

осцилляторов могут быть реализованы различные динамические режимы, которые зависят как от особенностей активации самих элементов, так и от структуры их взаимной связи [27, 40, 84].

Одним из самых широко воспроизводимых сценариев коллективной активности являются фазовые волны [85]. Условия их возникновения, характеристики распространения, характерные пространственные масштабы и другие динамические особенности были хорошо изучены в системах с диффузионным типом связи. В частности, среди основных подходов к определению возбудимых сред можно выделить *реакционно-диффузионные системы*, основанные на нелинейных функциях моделей FitzHugh–Nagumo [86—89], Hindmarsh–Rose [86, 90—93], а также моделей типа Brusselator [94, 95], Oregonator (и др.), в точечной перспективе поддерживающие автоколебательную динамику. С другой стороны, аналитический подход был развит для моделей реакционно-диффузионных распределенных нелинейных систем, поддерживающих волны переключения. К важным представителям подобного класса систем можно отнести уравнение Колмогорова — Петровского — Пискунова — Фишера. Лаконичность и математическая универсальность указанных подходов к описанию возбудимых сред различной природы сопряжена как с разнообразием модификаций математических моделей, так и с широким кругом их потенциального применения к различным областям фундаментального и прикладного знания.

Сопутствующим нелинейным явлением, воспроизводимым на базе распределенных систем с возбудимой динамикой, является спонтанное формирование устойчивых пространственно-временных структур [81, 96]. В классической постановке диапазон, поддерживающий данное явление, охватывает сравнительно малую параметрическую область. Поскольку реальные системы самоорганизуются при довольно обширных как внутренних конфигурациях, так и комбинациях внешнего воздействия, важным веянием современных тенденций является модернизация классической реакционно-диффузионной парадигмы. Одним из возможных подходов является использование иммобильных компонент для расширения параметрической области, поддерживающей реализацию структур Тьюринга [97, 98]. С другой стороны, особое внимание приобрели системы с кросс-диффузионными слагаемыми, которые характеризуют взаимозависимое поведение кинетического процесса каждой компоненты в многокомпонентной системе [99—103]. В некоторых случаях оказывается оправданным подход к рассмотрению систем с нелиней-

ной диффузией. В рамках моделей данного класса рассматривается воздействие классического оператора Лапласа на нелинейную функцию компоненты [104]. Наконец, в некоторых точечных, а также распределенных нелинейных системах может быть реализована зависимость динамики от собственной предыстории. Исследование данного класса систем привело к интенсивному развитию математического аппарата, описывающего системы с временной задержкой [101, 105—107].

Стоит добавить, что для распределенных систем существуют и нелокальные в пространственном смысле модели [108]. В частности, трехкомпонентные системы с первой и второй иммобильными компонентами и квазистационарной распределенной третьей компонентой (реализующей передачу информации через средупосредника) могут быть сведены к системе интегро-дифференциальных уравнений [2, 109].

1.2. Подход к применению дробно-дифференциального исчисления

Для связи с последующими главами отметим, что математический аппарат классической нелинейной динамики распределенных систем может быть обобщен на *дробно-дифференциальный случай* [110, 111]. У данного подхода имеются свои неоспоримые преимущества. В частности, замена классических операторов дифференцирования их дробным аналогом в обезразмеренных нелинейных динамических моделях распределенных систем естественным образом внедряет дополнительные управляющие параметры — показатели дробно-дифференциальных операторов. В зависимости от особенностей самой рассматриваемой системы уравнений и типа замещаемой производной, данный подход формирует определенный вид зависимости системы от собственной предыстории для дробных операторов по времени (см., например [112, 113]), или нелокальный тип взаимодействия внутри компоненты для дробных производных по пространственной переменной (см., например [114, 115]). В контексте модернизации классической реакционно-диффузионной парадигмы часто используется обобщение классического оператора Лапласа его дробным аналогом.

1.3. Подходы к определению динамики систем взаимодействующих нейронов. Состояния частичной синхронизации

Как уже упоминалось выше, задачи нелинейной динамики распределенных динамических систем имеют множественные приложения практически во всех областях естественно-научного знания. При этом результаты диссертационного исследования в первую очередь посвящены развитию конкретных динамических режимов частичной синхронизации в системах взаимодействующих нейронов. Необходимо дополнительно отметить, что в системах связанных нейронов, как в биологическом, так и в математическом контексте, могут возникать разнообразные сценарии коллективной активности, ассоциируемые с когнитивными процессами. Их всестороннее изучение, с одной стороны, основано на различных экспериментальных свидетельствах крупномасштабной активности и состояний частичной синхронизации. С другой стороны, согласование наблюдаемых данных с теоретическими осмыслениями предопределяет возможные модели распределенных нелинейных динамических систем, на основе которых могут производиться исследования.

1.3.1. Эмпирические свидетельства

Крупномасштабная активность

Прежде всего, стоит отметить возникновение крупномасштабной скоррелированной нейронной активности, связанной с образованием фазовых волн [116—118]. Особая значимость их характеристик (направление распространения, внутренняя организация) в контексте широкого класса задач нейронаук приводит к построению разнообразных методов детектирования и обработки [119, 120]. Особенно важными в такой перспективе оказываются исследования, связывающие направление распространения фазовых волн с внутренней структурой кортикальных сетей [121]. В частности, их возникновение в первичном визуальном кортексе (*primary visual cortex*) может быть опосредовано внешним стимулом [120, 122, 123]. Роль данного коллективного явления сопряжена не только с обработкой и интеграцией информации от различных участков коры, а также процессами восприятия [124] и памяти [125], но и с системной адаптацией нейронной сети [126]. Вышеизложенное убедительно свидетельствует о значимости крупномас-

штабных кортикальных волн в многочисленных коллективных нейронных процессах.

Режимы частичной синхронизации

Современные представления явно указывают на резкую неоднородность структуры нервной ткани [127]. Следствием данного обстоятельства является возникновение некоррелированных процессов коллективной нейронной активности, по крайней мере при определенных условиях. Удивительным оказывается то, что процессы полной синхронизации с образованием фазовых волн и процессы с развитой некогерентностью часто не противоречат друг другу и могут сосуществовать как во временном [128], так и в пространственном смысле. В частности, в математическом контексте сосуществование пространственно когерентных и некогерентных областей, развитых в структурно однородных топологиях распределенных динамических систем осцилляторов, получило название «*химерное состояние*» [27].

Важно, что реализация процессов коллективной активности, воспроизводимых на разных масштабах, сопряжена с концепцией *критичности* в работе сложно сконфигурированных сетей биологических нейронов. Первым явным свидетельством данного предположения является исследование, посвященное образованию *нейронных лавин* [80]. Основной особенностью данных сценариев коллективной активности является четкое *степенное распределение* вероятности возникновения лавин с заданным числом активных элементов. Развитие дальнейших представлений было связано с поисками подобных проявлений в иных условиях [129], с уточнением подходов к определению формируемой статистики [130], уточнением границ концепции критичности [131—134], обсуждением ее клинической релевантности [135], а также развитием концепции самоорганизованной критичности [136]. Под последним понимается свойство системы поддерживать свою динамику около критического значения осуществляя саморегуляцию. Математические модели, на базе которых воспроизводилась критическая динамика были основаны на спайковых нейронных сетях (*Spiking neuron model*) с различной топологией внутренних связей [137—139]. Концептуальное развитие как эмпирических, так и теоретических подходов способствовало расширению понятия критичности до уровня диссинхронизационной активности [33].

Как уже было сказано, крайне значимыми частными случаями состояний ча-

стичной синхронизации являются так называемые *химерные состояния*. Во всем разнообразии собственных реализаций данные динамические режимы характеризуются кластеризацией некогерентных областей, развитых на уровне сформированной когерентности в изначально однородной системе [26, 27, 39]. Другими словами, под влиянием как конфигурационных, так и активационных собственных свойств изначально однородная динамическая система теряет внутреннюю симметрию, в результате чего в ней возникает согласованное сосуществование пространственного порядка (когерентных зон) и пространственного хаоса (некогерентных зон). С точки зрения прямых биофизических свидетельств, данные режимы коллективной активности могут быть, в частности, сопряжены с формированием θ -осцилляций в системе связи гиппокампа и неокортекса [140]. В общепринятом ключе химерные состояния связывают с так называемыми бамповыми режимами [29, 30], однополушарным сном, встречающимся у различных видов вторично-водных млекопитающих и птиц, а также с различными нарушениями осцилляций в α , β и γ частотных диапазонах [26]. Последние исследования убедительно демонстрируют, что описание многих когнитивных процессов может быть представлено в терминах химерных состояний [31]. Данные результаты могут быть интуитивно подтверждены путем математического моделирования модульных сетей нейронов на базе эмпирически установленных коннектомов и воспроизводства в рамках данных систем химеро-подобных состояний¹ [36, 38].

Помимо критичности, динамические особенности, сопровождающие режимы частичной синхронизации, тесно связаны с понятием *метастабильности*. Данное свойство систем особенно важно в контексте процессов переключения динамических режимов как под воздействием внешнего стимула так и в его отсутствии. Отождествление данной концепции с динамикой химерных состояний было описано в работе [32]. Детальное сравнение динамических особенностей систем, находящихся в критическом и метастабильном состоянии, можно обнаружить в работе [134]. Аналогично, концептуальная основа для связи химерных состояний с критическим режимом может быть сопряжена с максимизацией метастабильных состояний в нейронных сетях, находящихся в критическом состоянии [141]. Другая важная особенность химерных состояний в контексте задач нейронаук заключается в направленном переносе информации между некогерентными

¹Термин «химеро-подобный» (chimera-like) отсылает к первично динамической природе явления, которое изначально было получено в структурно однородной системе.

и когерентными участками [67, 68].

Представление о структурных и функциональных особенностях сетей нейронов

Помимо воспроизводимых сценариев коллективной активности систем связанных нейронов эмпирические свидетельства затрагивают и организацию их взаимной связи [142]. В частности, можно отметить ряд детальных исследований, в которых выделялись общие представления о структуре нейронной сети головного мозга [143]. С точки зрения как фундаментального понимания, так и понимания основных идейных предпосылок диссертационной работы, особенно важны свидетельства о формировании степенной статистики на базе конкретных коннектов [144]. Проведенные исследования указывают на связь данных распределений с процессами обучения Хебба [78], а также идейно отождествляют со структурной организацией сложных пространственно-распределенных систем, развитых сетевых структур и информационных систем [130, 145, 146].

При этом стоит понимать, что в полном смысле степенная статистика структурных и функциональных свойств сетей взаимодействующих нейронов быть реализована не может [130]. Данное обстоятельство связано прежде всего с количественными ограничениями рассматриваемых систем. Существуют и другие реализации связанные с образованием тяжелых хвостов, в более широком смысле отождествимые с вышеописанным свойством. В частности, имеются эмпирические подтверждения реализации иных форм распределений с тяжелыми хвостами (например, логнормальное распределение) для многих структурных характеристик нейронов, их соединений, а также динамических реализаций [77]. Среди основных можно выделить подчинение логнормальному закону: всплеск нейронной активности в *гиппокампе* и *энторинальной коре* [147]; линейные размеры шипиков, которые формируются на дендритах нейронов пятого кортикального слоя [148] и нейронов зоны CA1 гиппокампа [149]; распределение диаметров аксонов [150]; а также распределение синаптических весов [151, 152], восстановленных по регистрации пост-синаптических потенциалов [153]. Данные мезоскопические реализации могут быть дополнены иными мезоскопическими и макроскопическими свойствами кортико-кортикальных связей [154—156]. С формальной точки зрения логнормальный вид распределения связан с мультипликативным случайным процессом, строго связанным с нелинейностью рассматриваемой распределенной системы.

1.3.2. Математические модели

Говоря глобально, системы взаимодействующих нейронов характеризуются вариативной структурой внутренних связей. Следствием этой вариативности является широкое разнообразие моделей и подходов, описывающих данные системы. Попытка структурировать все разнообразие предложенных способов к описанию приводит к глобальному разделению на модели, задающие конкретные виды конфигураций между осциллирующими элементами, а также на модели, формирующие конкретный вид и динамическую основу самих осцилляторов [86]. Несмотря на большое количество общих свойств и подходов к аналитическому осмыслению, данные модели характеризуются различным уровнем абстракции описания конкретного явления. Как следствие, приобретает особенную значимость выбор динамической модели, на основе которой будет осуществляться описание состояний частичной синхронизации в системах взаимодействующих нейронов. Далее будут разобраны основные подходы к определению математических моделей систем взаимодействующих осцилляторов в общем контексте.

Модели фазовых осцилляторов

С точки зрения динамической природы точечных осцилляторов одним из самых понятных подходов к определению моделей с автоколебательной динамикой является построение системы фазовых осцилляторов. При этом, сложные коллективные явления в данных системах реализуются за счет нелинейности в организации их взаимных связей. Именно на базе систем фазовых осцилляторов были получены первые состояния, согласующие пространственную когерентность и некогерентность [1], которым позже присвоили название «химерное состояние» [3]. В перспективе дальнейшего изложения крайне важно отметить существование подходов сведения реакционно-диффузионных систем (с различной организацией мобильности компонент) к описанию через фазовую переменную [2].

Многие фундаментальные свойства состояний частичной синхронизации были получены именно на базе систем фазовых осцилляторов с различными конфигурациями связи. Так, в работе [157] был проанализирован спектр показателей Ляпунова $\Lambda_N(\nu)$, $\nu = (k - 1)/(N - 1)$ для химерного состояния в дискретной системе, состоящей из ста фазовых осцилляторов, а также получено аналитическое приближение в термодинамическом пределе. Авторами было показано, что

данная распределенная система имеет несколько положительных показателей Ляпунова, что характеризует ее как *гиперхаотическую*. Также, на базе систем логических осцилляторов (которые могут быть описаны в терминах фазовых) было показано, что время существования химерных состояний увеличивается экспоненциально с увеличением линейных размеров системы² [158]. На основе систем фазовых осцилляторов были предложены различные схемы контроля химерных состояний [159], а также проанализированы коллективные свойства обмена информационными характеристиками [67].

Как уже упоминалось, сложные пространственно-временные режимы в системах связанных осцилляторов сопряжены с нелинейной организацией взаимной связи, которая зависит от их фаз. Первичные представления о данной системе, ввиду нелинейности во взаимодействии осцилляторов с конкретными состояниями фаз, были получены путем численного моделирования. Дальнейшие исследования позволили определить виды интегральных ядер, подразумевающих аналитическое представление системы и исследование ее в различных приближениях. Благодаря системному развитию подхода, сочетающему в себе как численный анализ, так и аналитическое осмысление, модели фазовых осцилляторов являются одними из самых важных типов систем, используемых при построении моделей нейронной активности.

Сетевые модели

Описанные выше модели фазовых осцилляторов определялись в термодинамическом пределе через интегро-дифференциальное представление. При этом существуют аналоги данной модели, определенные и в дискретном ключе. В рамках задач коллективной активности сетей нейронов требуется с особым вниманием относиться к дискретной природе рассматриваемой структуры, на основе которой происходит воспроизводство динамики.

Помимо определения в дискретном ключе интегральных ядер, имеются совершенно самостоятельные подходы к организации сетевых структур, воспроизводящие наблюдаемые сценарии широкого набора эмпирических закономерностей. Особое внимание стоит уделить нескольким основным типам сетевых моделей: локальным сетям (local networks), регулярным сетям (regular networks), сетям малого мира (small world networks), безмасштабным сетям (scale-free networks), а

²Под линейными размерами системы в тексте понимается количество рассматриваемых осцилляторов в ансамбле.

также сетям со случайной топологией связи (random networks).

Структуры с локальным типом взаимодействия являются одним из самых базовых подходов к определению сетей взаимодействующих элементов, а также могут применяться для описания систем, имеющих пространственную размерность. Многие явные разностные схемы, в пределе аппроксимирующие уравнения в частных производных, могут быть интерпретированы в терминах сетей с локальным взаимодействием.

Регулярные сети являются формальным расширением систем с локальным взаимодействием. В них организация связи осуществляется на основе строгого, заранее predetermined количества элементов, с которыми будет взаимодействовать текущий узел. К простейшим типам регулярных сетей можно отнести конструкцию явной схемы аппроксимации второй разностью: для одномерного случая — взаимодействие двух узлов, образующих цепочку; для двумерного — четырех узлов, образующих решетку. Аналогично, в качестве примера можно привести кольцевую топологию с взаимодействием крайних узлов и нелокальное обобщение данной топологии, которое использовалось, например, в ансамблях фазовых осцилляторов [1, 3]. К значимым реализациям регулярных сетей можно отнести полносвязные (каждый нейрон связан с каждым) сети Хопфилда [160]. Прикладная значимость регулярных сетей может быть дополнена их фундаментальной значимостью в контексте сравнения с менее однородными сетевыми моделями, речь о которых пойдет далее.

Сети малого мира, основной подход к генерации которых предложен в работе [161], являются одними из самых популярных предложенных моделей структурной связи. Для изначально заданной регулярной структуры, состоящей из N элементов, каждый из которых связан с k количеством ближайших соседей, задается вероятность переподключения ребра p ($p = 0$ — регулярная структура, $p = 1$ — случайная структура и значение $0 < p < 1$ определяет сеть малого мира). Развитие многих сложных систем, состоящих из дискретного набора элементов, подчиняется топологии малого мира. Учитывая локальную специализацию нейронных кластеров и глобальную интеграцию их взаимной динамики, имеются основания полагать, что сети малого мира могут быть использованы при описании свойств как на макроуровне (например, согласование различных кортикальных зон через таламус и поясную кору), так и на микроуровнях (локальная связь в кортикальном слое и удаленная связь посредством длинного аксона пирамидальной клетки)

[162]. Последнее обстоятельство играет принципиальную роль в рамках диссертационного исследования.

Другим, не менее важным типом сетевых структур является безмасштабная топология [145]. Построение данной сетевой структуры может определяться вероятностью $P(k) \sim k^{-\gamma}$ того, что узел имеет степень k . Такой подход регламентирует наличие в системе хабов — узлов, имеющих большое число соединений с другими элементами сетевой структуры. Сравнение сетей малого мира и безмасштабных сетей в контексте задач нейронаук продолжает быть активным объектом дискуссий [143]. Концептуальная основа возникновения безмасштабной топологии в нейронных сетях может быть сформирована на базе ее реализации в иных естественных биологических, социальных и синтетических информационных сложных системах. В частности, можно выделить данную особенность взаимодействия элементов в функциональных сетях головного мозга [163] и иных частях нервной системы различных организмов [78, 144], в сетях научного взаимодействия [164], в топологии интернет соединений [165]).

Случайные сети являются примером одного из самых базовых подходов к определению сетевой структуры, достаточной информации о которой по каким-либо причинам на данном этапе у научного сообщества не имеется. Регламентация связей в рамках случайной топологии задается на основе распределения Пуассона [166]. В настоящее время одна из основных задач применения случайных сетей заключается в сравнении их свойств с предыдущими сетевыми конфигурациями в рамках различных как естественно-научных, социальных, так и прикладных реализаций.

Гиперсетевые модели

Часто оказывается, что взаимодействие элементов системы может быть организовано на базе одновременно действующих различных топологий соединения. В частности, такой подход может быть обусловлен совместным действием нескольких каналов передачи информации. В рамках задач нейронаук гиперсетевая структура может быть интерпретирована как совместное влияние как топологии нейронной сети, так и глиального, а также внеклеточного молекулярного взаимодействия [167]. Применение данной концепции к формированию химерных состояний в системах нейронов, соединенных как посредством нелинейного химического, так и линейного электрического синапса, представлено в работе [168].

Нелокальные итерационные отображения

К задаче формализации возникновения состояний частичной синхронизации на базе распределенных систем можно подойти с позиции нелокальных итерационных отображений. В то время как точечные итерационные отображения заняли основополагающую позицию в мировой науке, расширив границы теории хаоса [169] и продемонстрировав миру первые фрактальные множества [170], на базе нелокальных итерационных отображений были построены дискретные модели взаимодействующих нейронов и других систем связанных хаотических осцилляторов. В частности, исследование химерных состояний было организовано с использованием нелокальных логистических отображений [171, 172]. Конструктивное влияние внешнего шума на развитие химерных состояний было обнаружено на базе логистических отображений, отображений Рикера и Хенона [173]. Развитие химерных состояний было также проанализировано на базе двухмерных нелокальных кубических отображений [174].

Системы с адаптивной и переменной формой взаимодействия

Хорошо известно, что особенности взаимодействия нейронов характеризуются изменчивостью, сопряженной с процессами обучения и глобальной адаптацией системы к внешним условиям. Одним из основных свидетельств является так называемое правило Хебба. Для того чтобы определить динамические режимы в системах с переменной топологией, в исследовании [59] модернизировался подход к определению моделей путем изменения весовых коэффициентов, переводя их из разряда постоянных величин в разряд переменных.

Качественно новые результаты были получены в системах с адаптивной формой соединений, в которых весовые коэффициенты зависят от внутренней динамики компонент. Так, на базе модели с перекрестной связью между компонентами вводятся потенциалозависимые весовые коэффициенты и устанавливаются химерные состояния в исследуемой системе [60]. В работе [61], в свою очередь, вводится специальная синаптическая переменная, динамика которой зависит от состояния одной из компонент. Сложные пространственно-временные режимы частичной синхронизации возникают в системах фазовых осцилляторов [63] с адаптивной формой взаимодействия, а также в данных системах с двухслойной топологией [62].

Системы с перекрестной связью

Способы задания связи в многокомпонентных распределенных системах отличаются широким разнообразием формальных возможностей. В частности, перенимая концепцию организации системы фазовых осцилляторов с нелинейной функцией взаимодействия и экстраполируя ее на многокомпонентные распределенные системы, можно прийти к конфигурациям с перекрестной связью. Крайне важно, что динамические модели точечного нейрона часто могут быть описаны в многокомпонентном представлении. В этой перспективе данный подход существенно расширяет возможности реализации различных динамических режимов, воспроизведенных на базе пространственно-распределенных версий данных моделей.

В частности, на базе модели FitzHugh-Nagumo в системе с перекрестной связью удалось продемонстрировать возникновение химерных состояний в присутствии внешнего шумового воздействия [51]. Также была установлена возможность контроля над переходом системы к данным режимам с помощью введения параметра, характеризующего временную задержку [53]. Возникновение различных видов химерных состояний было получено при анализе влияния силы и радиуса взаимодействия между осцилляторами в системе с перекрестной связью [52]. Развитием идеи внедрения перекрестной связи в многокомпонентной системе для анализа возникновения химерных состояний является применение данной концепции для двухмерных систем нейронов [54].

Симплициальные комплексы

В самой широкой постановке в большинстве математических моделей рассматривается попарная структура связей. При этом возможным концептуальным расширением является взаимодействие большего количества элементов. Именно в такой постановке рассматриваются симплициальные комплексы. Для формирования базовых математических представлений были получены результаты о развитии режимов синхронизации в качестве некоторого устойчивого состояния [175]. В работе [176] используется определенная топологическая структура, основанная на разностях различных порядков. С точки зрения задач, связанных с нейронауками, были проанализированы нейронные сети высшего порядка с переменным взаимодействием [177].

Модели, организованные на основе эмпирических свидетельств

Крайне важным случаем, имеющим прямое отношение к экспериментальным свидетельствам, является построение модульных динамических моделей нейронов, заданных на основе реальных коннектомов³. Модульными эти структуры называются ввиду организованной топологии, которая подробно отображена на карте соединений. На ней, в частности, видно, что топологическая структура формирует модули или блоки нейронов со сравнительно высоким количеством соединений, и напротив, модули с небольшим количеством соединений. Важное следствие данных исследований заключается в реализации режимов частной синхронизации, в частности химеро-подобных состояний, на базе эмпирических модульных коннектомов [36, 38]. Конкретные приложения данного подхода возможно обнаружить в [178]. Примечательно, что существуют исследования, которые стремятся редуцировать сложную эмпирическую топологию к более фундаментальным концептам, в частности к фрактальной структуре связей [23]. Другая примечательная особенность данного подхода заключается в численном изучении процессов синхронизации при воздействии заданным стимулом на определенные зоны установленных коннектомов [179].

Модели, построенные на базе иерархической связи

Важным шагом к построению математических моделей, организованных на базе полученной информации об эмпирически зафиксированных формах нейронных соединений, являются иерархические модели. Их суть сводится к заданию сложной формы структур связей, организованных на масштабнo-инвариантном принципе и фрактальной топологии. К ключевым исследованиям, проявляющим важные особенности данного подхода, можно отнести работу [23], в которой производилось сопоставление динамических режимов, воспроизведенных на базе эмпирической модульной топологии связи и фрактальной топологии. Крайне важно, что реализация динамических режимов в представленном авторами параметрическом пространстве обладает общими закономерностями для сетей с модульной и фрактальной топологией связи. Дальнейшие исследования, отнесенные к задачам химической физики, продемонстрировали возникновение подвижных мультихимерных состояний на базе иерархических структур связи [180]. Для осцилляторов

³Здесь и далее под коннектомом понимается восстановленная структура нейронных связей.

Ван дер Поля была проанализирована связь между параметром, характеризующим временную задержку и параметром силы взаимодействия осцилляторов для сетей с фрактальной топологией связи [181]. Реализация спирально-волновых химерных состояний на базе регулярных и фрактальных топологий для двухмерных систем может быть обнаружена в работе [182].

Реакционно-диффузионные модели

В качестве возможного пути к определению систем взаимодействующих элементов имеет особое значение диффузионное приближение и реакционно-диффузионный подход [81]. Данное обстоятельство сопряжено с наиболее понятной и лаконичной математической формулировкой, для которой имеется возможность исследования как в линейном приближении, так и с помощью анализа слабой нелинейности. При этом на основе явной разностной схемы аппроксимации оператора Лапласа можно строить приближенные конфигурации. Как уже обсуждалось выше, локальный тип взаимодействия, который при этом формируется, является важным частным случаем регулярных сетей.

Классическое образование спиральных волн было обнаружено в системах с локальной связью на основе нелинейной модели Hindmarsh-Rose [183]. При этом одной из первых работ, в которой явно выделяется возможность развития состояния частичной синхронизации в системах с диффузионной связью является [109]. В ней формирование спиральной волны было сопряжено с развитием некогерентного центра. Стоит дополнительно отметить, что данная особенность реализовывалась в присутствии иммобильных и квазистационарных компонент. Дальнейшие исследования данных авторов способствовали развитию аналитического понимания процессов, лежащих в основе формирования некогерентного центра, а также сведению реакционно-диффузионной постановки к описанию через фазовую переменную [2]. Многочисленные исследования были направлены на модификацию реализуемого подхода [184, 185], а также проявляли интригующие результаты, связанные с более сложными режимами частичной синхронизации [186]. Аналогично, в работе [187] были рассмотрены несколько групп локально взаимодействующих фазовых осцилляторов. В частности, авторами было подтверждено возникновение и развитие в указанных системах химерных состояний.

В некоторых из вышеприведенных исследований использовались нелинейные функции, соответствующие динамике активации точечного нейрона. Подход, ос-

нованный на биофизически релевантной модели Морриса-Лекара, с конфигурацией, организованной на базе диффузионной связи, представлен в работе [188]. Стоит отметить, что конкретная форма локальной диффузионно-подобной связи может дополнять иные формы коммуникаций между элементами. Так, конфигурация системы, включающая как химический тип синапса, так и организацию электрического синапса, базирующегося на локальной связи, рассмотрена в работе [168]. В свою очередь, исследовались и процессы синхронизации на основе конфигураций сетей, в которых были объединены как локальная диффузионная связь, так и связь посредством мемристора [189], а также связь по полю [190].

Модели осцилляторов, организованные на основе аппарата дробно-дифференциального исчисления

Нетривиальный подход, расширяющий как возможности описания динамических характеристик осцилляторов, так и возможность определения точечных и распределенных динамических систем, основанных на мультикомпонентном представлении, может быть определен с помощью аппарата дробно-дифференциального исчисления [191]. Важное расширение понимания возникновения хаоса в мультикомпонентной классической системе Лоренца, организованной с помощью системы дробно-дифференциальных уравнений представлено в работе [112]. Подробное изучение бифуркационных процессов в системах, поддерживающих хаотичное поведение, изложено в [113]. Систематическим расширением указанных выше подходов к обобщенному исследованию динамических систем может являться представление гиперхаотичных моделей, организованных на базе дробно-дифференциального исчисления [192]. Применение изложенных выше концептуальных основ к задаче моделирования точечного нейрона представлено в работе [193].

Как уже упоминалось, с точки зрения нелинейно-динамического подхода определение систем с помощью дробно-дифференциальных операторов сопряжено с внедрением новых управляющих параметров, являющихся показателями дробных производных. Как с фундаментальной, так и с прикладной точек зрения данные параметры несут особую значимость, отражающую структурные особенности сформированных динамических систем. Ввиду нелокальной специфики дробных производных, в случае использования оператора дробного дифференцирования по времени, естественным образом формируется зависимость системы от

собственной предыстории. Внедрение дробных операторов по пространственной компоненте, в свою очередь, регламентирует нелокальность в рассматриваемой динамической системе и более полно отражено в следующем пункте.

Реакционно-супердиффузионные модели

Одним из возможных расширений изложенного выше подхода к определению конфигураций с локальной связью, организованной на основе классической диффузионной модели, является формирование системы с нелокальным взаимодействием, организованным на базе супердиффузионного обобщения. Эта идея оказывается достижимой благодаря возможности концептуального расширения классического оператора Лапласа до случая его дробного аналога. Сама идея данного перехода оказала плодотворное влияние на совершенно различные области современной физики и астрофизики, иных естественнонаучных дисциплин, а также экономики и социологии. Обсуждение моделей, которые были обогащены аппаратом дробно-дифференциального исчисления, а также математическая основа построения дробно-дифференциальных операторов подробно изложены в следующих монографиях: [110, 111]. Исследование неустойчивостей в системах с супердиффузионной конфигурацией для моделей с различной организацией нелинейной части изложено, например, в [114, 115]. В частности, исследование образования пространственно-временных структур в распределенных нелинейных системах с дробной организацией было изучено в рамках задач математической экологии [194]. Построение перекрестных типов соединений, организованных на базе супердиффузионного приближения также заняло особое положение в задачах моделирования экологических процессов [195]. При этом крайне важно учесть, что построение многомерного обобщения, организованного на базе супердиффузионного принципа, является крайне нетривиальной задачей. Возможные пути к представлению конфигураций, образующих анизотропную структуру связи, сформированную супердиффузионным типом соединения, могут быть обнаружены в исследованиях: [71, 72, 194, 196—198].

Для нейронаучных приложений особенно важным является развитие систематического подхода к определению кинетического процесса распространения ионов в цитозоле клеток нейронов, а также астроцитов [73, 74]. Связь аномально-диффузионного переноса и кинетики распространения ионов в дендритах нейронов с шипиками обсуждается в работах [75, 76] для области CA1 гиппокампа и некото-

рых групп пирамидальных клеток соответственно. Среди важных частных приложений, имеющих отношение к дальнейшему изложению материала, можно выделить применение дробного оператора Лапласа для описания резко-неоднородной структуры систем взаимодействующих осцилляторов, динамика которых базировалась на нелинейных функциях модели FitzHugh–Nagumo [69, 71, 198].

1.4. Выводы главы

В данной главе были рассмотрены актуальные подходы к исследованию сетей связанных нейронов. В частности, выделены биофизические представления об их коллективных свойствах, демонстрирующих развитие фазовых волн, а также состояний частичной синхронизации. Были разобраны модели, в рамках которых могут наблюдаться вышеизложенные коллективные сценарии и установлена их возможная связь с теоретико-информационными характеристиками. Произведено обсуждение математических моделей, построенных на базе аппарата дробно-дифференциального исчисления. Изложенные выше соображения формируют концептуальную основу последующего изложения и определяют возможность построения систем супердиффузионно-связанных нейронов.

Глава 2

Построение системы супердиффузионно-связанных осцилляторов

Разобранные выше подходы к воспроизведению и исследованию состояний частичной синхронизации в системах взаимодействующих осцилляторов отличаются крайне широким разнообразием. Подводя итог вышеизложенному, можно утверждать, что отличаться могут как особенности активации точечных элементов, так и конфигурации их взаимной связи (сети с безмасштабной топологией, сети малого мира, сети со случайной топологией, структуры основанные на локальном и регулярном типе связи, перекрестные топологии взаимодействия, мультиплексы), а также общие подходы к построению моделей (детерминистические системы, стохастические системы).

Для описания и всестороннего изучения конкретного физического явления, а именно возникновения и развития состояний частичной синхронизации в системе связанных нейронов ¹, необходимо определить модель, с одной стороны, имеющую явную биофизическую релевантность, с другой стороны, отражающую строгую математическую лаконичность. Следствием удовлетворения предложенной модели первому ключевому аспекту является возможность четкой интерпретации результатов со стороны нейрофизиологии и базовое идейное отождествление структурной организации биологических нейронных сетей с модельной системой. Следствием удовлетворения модели второму ключевому аспекту является возможность аналитического осмысления динамических режимов в исследуемых ансамблях нейронов.

¹В рамках данной диссертации понятия «осциллятор» и «нейрон» считаются тождественными, поскольку оба представляют собой автоколебательные нелинейные системы.

В исследованиях [199—201] была предложена и идейно развита модель, основанная на многокомпонентной распределенной системе реакционно-супердиффузионных уравнений, сочетающая в себе на базовом уровне скейлинговые особенности организации биологических нейронных сетей. Для описания широкого множества динамических проявлений точечного нейрона, при этом сохраняя математическую лаконичность самой постановки задачи, в качестве нелинейных функций была использована безразмерная трехкомпонентная модель Hindmarsh–Rose. Данная глава посвящена систематическому построению важных положений о супердиффузионной конфигурации взаимодействия на основе базовых представлений о сетевых структурах.

2.1. Организация супердиффузионной связи

2.1.1. Общие положения

В общей постановке под распределенной динамической системой понимается следующая форма:

$$\partial \vec{u}(\vec{r}, t) / \partial t = \vec{F}(\vec{u}, \nabla \vec{u}, \Delta \vec{u}, \dots, \mathcal{I}[\vec{u}], \vec{r}, t, \{\mu\}), \quad (2.1)$$

В которой \vec{u} определяет вектор состояния динамической системы, \vec{r} и t — пространственные и временные переменные, $\mathcal{I}[\vec{u}]$ — произвольный нелокальный оператор, $\{\mu\}$ — множество значений управляющих параметров.

Некоторым частным случаем такой постановки (с внедренной пространственной размерностью), получившим широкое применение в рамках задач широкого множества естественно-научных дисциплин, является реакционно-диффузионный подход:

$$\partial \vec{u}(\vec{r}, t) / \partial t = \vec{D} \Delta \vec{u}(\vec{r}, t) + \vec{f}(\vec{u}; t), \quad (2.2)$$

в котором $\Delta \vec{u}$ определяет тип диффузионного взаимодействия в непрерывном пределе, и $\vec{f}(\vec{u}; t)$ — нелинейная вектор-функция, определяющая активационные свойства в точечном приближении.

В дискретной перспективе организация динамической системы, описывающей ансамбль связанных осцилляторов в мультикомпонентном представлении², с про-

²Под мультикомпонентным представлением понимается случай, когда состояние каждого элемента описывается вектором $\vec{u}_i(t) = [u_i(t), v_i(t), \dots, m_i(t)]^T$. Одна из компонент, например, $u_i(t)$, может отождествляться с непосредственно наблюдаемым физическим процессом, тогда как остальные выступают в роли скрытых (сопутствующих) динамических переменных.

извольной, вообще говоря переменной, топологией попарного взаимодействия $w_{ij}(t)$, может быть построена на основе системы обыкновенных дифференциальных уравнений со связями:

$$\frac{d}{dt}\vec{u}_i(t) = \vec{f}(\vec{u}_i; t) + \sum_{j=0}^{N-1} w_{ij}(t)\vec{F}(\vec{u}_i, \vec{u}_j; t), \quad (2.3)$$

в которых \vec{u}_i — вектор, организованный на основе множества компонент, определяющих динамику точечного i -го элемента; $\vec{f}(\vec{u}_i; t)$ — нелинейная вектор-функция, связывающая компоненты динамической системы и определяющая активационные свойства в локальном (узловом) приближении; $\vec{F}(\vec{u}_i, \vec{u}_j; t)$ — вектор-функция, описывающая парное взаимодействие между i -м и j -м элементами.

Ввиду широкого разнообразия возможных топологий попарного взаимодействия, а также активационных характеристик в точечном и распределенном контексте, имеется особая значимость в обосновании любого нового подхода к определению систем взаимодействующих нейронов. Основная цель данной главы — ввести в систематическое рассмотрение конкретный вид конфигураций, основанный на аппарате дробно-дифференциального исчисления.

2.1.2. Обоснование супердиффузионного приближения

Идейно, представление супердиффузионной модели в качестве обобщенного принципа к построению сетей взаимодействующих нейронов базируется на нескольких важных особенностях:

1. Эмпирически установленная связь структурных особенностей биологических сетей нейронов с распределениями с тяжелыми хвостами [77, 78, 143], а также естественная связь дробно-дифференциальных операторов со степенными законами, которые являются частным, характерным случаем распределений с тяжелыми хвостами [110].
2. Традиционное определение супердиффузионного подхода для решения задач физической кинетики в резко неоднородных средах, в частности в средах фрактального типа [110, 111], идейно согласующаяся с резкой неоднородностью сетей биологических нейронов [127].
3. Нелокальная специфика дробных пространственных производных, основанная на интегро-дифференциальном представлении данных операторов [191],

концептуально совпадающая с множественностью синаптических связей пре-синаптического нейрона с группой постсинаптических нейронов [202].

4. Идеиная связь с иерархической концепцией, регламентирующей фрактальный тип кинетики, начиная с уровня распространения ионов в цитозоле нервных клеток [73, 74], включая возможность описания соединений нервных клеток как самоподобной структуры (см, например [23, 203]), заканчивая социальным уровнем взаимодействия, формирующим сложную систему с безмасштабными характеристиками [165].
5. Естественное внедрение удобных для потенциального анализа динамических режимов новых управляющих параметров — показателей дробного оператора Лапласа, связанных со структурной организацией распределенной системы.
6. Универсальность воспроизведения динамических сценариев, включающих крупномасштабные фазовые волны (в частности, возникающие и в нервной ткани [116, 117, 122, 204]) для большинства соответствующим образом сконфигурированных нелинейных распределенных динамических систем [2, 42, 205].
7. Наконец, важное свойство супердиффузионной модели, поддерживающей аналитический подход к изучению динамических реализаций ввиду как ярко выраженной континуальной интерпретации [114], так и возможности сравнительного анализа с частным случаем классической диффузионной парадигмы [69].

Следует отметить, что, несмотря на все вышеизложенные идейные соображения, формирующие отождествление супердиффузионной системы взаимодействующих нейронов с эмпирическими наблюдениями, предлагаемая модель является математической абстракцией. Она, как и абсолютное большинство подходов к описанию распространения потенциала действия в нервной ткани, не отражает *полностью* детальной топологии взаимодействия между нейронами. Детальная топология, в свою очередь, может быть основана лишь на конкретных коннектах. При этом, ввиду обширного разнообразия возможных проявлений структур связи (сопряженных с процессами обучения и адаптации) даже у представителей

одного вида, детальное описание структуры также не несет исчерпывающей информации о реализуемых динамических сценариях коллективной активности. В данном контексте приведенные выше идейные соображения являются концептуальной основой для построения качественной математической модели, основанной на расширенном представлении об одном из самых распространенных кинетических механизмов, встречающихся в живой и неживой природе — диффузии.

2.1.3. Определение дробного оператора Лапласа

С целью формирования исчерпывающего представления о сетевых конфигурациях с супердиффузионной схемой соединения, необходимо воспользоваться некоторыми основополагающими соображениями, берущими свое начало в непрерывном пределе. Прежде всего, стоит начать с определения дробного оператора Лапласа в терминах интегрального преобразования Фурье:

$$\begin{aligned}
 -(-\Delta)^{\alpha/2} f(x) &= -\hat{\mathbb{F}}^{-1} \left\{ |\xi|^\alpha \hat{\mathbb{F}} \{ f(x) \} (\xi) \right\} (x) = \\
 &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} |\xi|^\alpha \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) e^{i\xi\eta} d\eta \right] d\xi. \quad (2.4)
 \end{aligned}$$

Как нетрудно видеть, данное выражение является одним из самых естественных обобщений классического оператора Лапласа на случай дробных порядков. Явную нелокальную специфику данного оператора, основываясь на определении (2.4), можно выделить, описывая его свойства в терминах дробных производных по пространственной компоненте. В свою очередь, после представления данного оператора через дробные производные по пространственному аргументу будет возможно предопределить весовые коэффициенты для сетевой структуры и в дискретном приближении. Дальнейший анализ будет сформирован для пространственно неограниченного случая. С учетом интегрирования вышестоящего выражения по частям и условия $f^{(n)}(x)|_{x=\pm\infty} = 0$ для $0 \leq n \leq m-1$, можно переписать интегральный оператор в правой части (2.4):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) e^{i\xi\eta} d\eta = (-1)^m (i\xi)^{-m} \int_{-\infty}^{\infty} f^{(m)}(\eta) e^{i\xi\eta} d\eta, \quad (2.5)$$

и представить дробный оператор Лапласа в форме, отражающей нелокальную специфику:

$$\begin{aligned}
 -(-\Delta)^{\alpha/2} f(x) &= (-1)^{m+1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} |\xi|^{\alpha} (i\xi)^{-m} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f^{(m)}(\eta) e^{i\xi\eta} d\eta \right] d\xi = \\
 &= (-1)^{m+1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f^{(m)}(\eta) \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi(\eta-x)} |\xi|^{\alpha} (i\xi)^{-m} d\xi \right] d\eta. \quad (2.6)
 \end{aligned}$$

2.1.4. Постановка управляющих параметров

Представленное выражение (2.6) уже явно отражает интегро-дифференциальную природу дробного оператора Лапласа, которую в дискретном приближении можно интерпретировать как конкретный вид взаимодействия элементов распределенной системы. Как следствие, дальнейшие выкладки основаны на определении типа ядер интегральных операторов. Вводя в рассмотрение определенный ранее интегральный оператор:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi(\eta-x)} |\xi|^{\alpha} (i\xi)^{-m} d\xi = \\
 &= \int_{-\infty}^0 e^{i\xi(\eta-x)} |\xi|^{\alpha} (i\xi)^{-m} d\xi + \int_0^{\infty} e^{i\xi(\eta-x)} |\xi|^{\alpha} (i\xi)^{-m} d\xi = \\
 &= i^m \int_0^{\infty} e^{i\xi(x-\eta)} \xi^{\alpha-m} d\xi + i^{-m} \int_0^{\infty} e^{i\xi(\eta-x)} \xi^{\alpha-m} d\xi, \quad (2.7)
 \end{aligned}$$

оказывается возможным выделение направлений нелокального влияния в одномерном случае. Учитывая расширенные свойства Гамма-функции:

$$\frac{\Gamma(\nu+1)}{s^{\nu+1}} \equiv \int_0^{\infty} t^{\nu} e^{-st} dt, \quad \text{Re}\{\nu\} > -1, \quad (2.8)$$

возможно определить прообразы весовых коэффициентов, уже на данном этапе отражающих степенные особенности взаимодействия между элементами:

$$I = i^m \frac{\Gamma(\alpha-m+1)}{[i(\eta-x)]^{\alpha-m+1}} + i^{-m} \frac{\Gamma(\alpha-m+1)}{[i(x-\eta)]^{\alpha-m+1}}. \quad (2.9)$$

При выполнении условия $-1 < \alpha - m \leq 0$, которое автоматически удовлетворяет супердиффузионной постановке, дальнейшие выкладки показывают:

$$\frac{\Gamma(\alpha - m + 1)}{(\eta - x)^{\alpha - m + 1}} \left[\frac{i^m}{i^{\alpha - m + 1}} + \frac{i^{-m}}{(-i)^{\alpha - m + 1}} \right], \quad \eta > x, \quad (2.10)$$

$$\frac{\Gamma(\alpha - m + 1)}{(x - \eta)^{\alpha - m + 1}} \left[\frac{i^m}{(-i)^{\alpha - m + 1}} + \frac{i^{-m}}{i^{\alpha - m + 1}} \right], \quad x > \eta. \quad (2.11)$$

Еще больше формализуя уравнения и вводя вспомогательные множители следующим образом:

$$\frac{\Gamma(\alpha - m + 1)}{(\eta - x)^{\alpha - m + 1}} \left(\frac{\Gamma(m - \alpha)}{\Gamma(m - \alpha)} \right) \left[(-1)^m i^{-(\alpha + 1)} + (-1)^m i^{\alpha + 1} \right], \quad \eta > x, \quad (2.12)$$

$$\frac{\Gamma(\alpha - m + 1)}{(x - \eta)^{\alpha - m + 1}} \left(\frac{\Gamma(m - \alpha)}{\Gamma(m - \alpha)} \right) \left[i^{\alpha + 1} + i^{-(\alpha + 1)} \right], \quad x > \eta, \quad (2.13)$$

а также, используя известное соотношение:

$$\Gamma(\alpha - m + 1)\Gamma(m - \alpha) = \frac{\pi}{\sin(\pi(m - \alpha))} = (-1)^{m-1} \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} \quad (2.14)$$

и понятное преобразование:

$$i^{-1-\alpha} + i^{\alpha+1} = e^{\pi/2(-\alpha-1)i} + e^{\pi/2(\alpha+1)i} = -2\sin(\pi/2\alpha) \quad (2.15)$$

оказывается возможным внедрение дополнительной формы представления для весовых коэффициентов:

$$\frac{-2\pi(-1)^{2m-1}\sin(\pi\alpha/2)}{(\eta - x)^{\alpha - m + 1}\Gamma(m - \alpha)\sin(\pi\alpha)}, \quad \eta > x, \quad (2.16)$$

$$\frac{-2\pi(-1)^{m-1}\sin(\pi\alpha/2)}{(x - \eta)^{\alpha - m + 1}\Gamma(m - \alpha)\sin(\pi\alpha)}, \quad x > \eta. \quad (2.17)$$

Наконец, преобразуя тригонометрическую часть:

$$\frac{-2\sin(\pi\alpha/2)}{\sin(\pi\alpha)} \equiv -\sec(\pi\alpha/2) = -\frac{1}{\cos(\pi\alpha/2)} \quad (2.18)$$

и упрощая выражения:

$$\frac{-\sec(\pi\alpha/2)\pi(-1)^{2m-1}}{(\eta - x)^{\alpha - m + 1}\Gamma(m - \alpha)} = \frac{\sec(\pi\alpha/2)\pi}{(\eta - x)^{\alpha - m + 1}\Gamma(m - \alpha)}, \quad \eta > x, \quad (2.19)$$

$$(-1)^{m-1} \frac{-\sec(\pi\alpha/2)\pi}{(x - \eta)^{\alpha - m + 1}\Gamma(m - \alpha)} = (-1)^m \frac{\sec(\pi\alpha/2)\pi}{(x - \eta)^{\alpha - m + 1}\Gamma(m - \alpha)}, \quad x > \eta \quad (2.20)$$

приходим к явной интегро-дифференциальной форме записи дробного оператора Лапласа:

$$\begin{aligned}
 -(-\Delta)^{\alpha/2} f(x) &= (-1)^m \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f^{(m)}(\eta) \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi(\eta-x)} |\xi|^\alpha (i\xi)^{-m} d\xi \right] d\eta = \\
 &= \frac{1}{2\cos(\pi\alpha/2)} \left[\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(m)}(\eta) d\eta}{(x-\eta)^{\alpha-m+1}} + \frac{(-1)^m}{\Gamma(m-\alpha)} \int_x^b \frac{f^{(m)}(\eta) d\eta}{(\eta-x)^{\alpha-m+1}} \right]. \quad (2.21)
 \end{aligned}$$

Выражение (2.21) определяет нелокальную специфику взаимодействия пространственно ориентированных элементов распределенной системы с параметрами $a \rightarrow -\infty$ и $b \rightarrow +\infty$. При этом, как видно, нелокальная связь определена в терминах степенных функций по обоим направлениям. Данную конструкцию уже на данном этапе возможно интерпретировать через сумму дробно-дифференциальных операторов.

2.1.5. Внедрение дробно-дифференциальных операторов

Существует достаточно много форм записи дробных производных. Среди двух основных можно выделить: дробные производные *Капуто* и *Римана — Лиувилля*. Стоит отметить, что оба типа указанных дробно-дифференциальных операторов имеют глубокую связь друг с другом, однако определяют систему по-разному. В частности, дробная производная Римана-Лиувилля определена как последовательное действие интегрального и дифференциального операторов, а дробная производная Капуто, наоборот, как первичное действие дифференциального оператора и последующее действие интегрального оператора. В частности, это отражает разницу данных операторов по отношению их воздействия к постоянной величине. При этом оба этих важных типа дробных производных могут быть применены к описанию дробного оператора Лапласа при соответствующих предположениях об исследуемых функциях.

В текущей постановке, для нас будет важна одна из самых популярных форм задания правосторонней ${}^C D_x^\alpha$ и левосторонней ${}^C D_b^\alpha$ дробной производной Капуто:

$${}^C D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(m)}(\eta)}{(x-\eta)^{\alpha-m+1}} d\eta, \quad (2.22)$$

$${}^C D_b^\alpha f(x) = \frac{(-1)^m}{\Gamma(m-\alpha)} \int_x^b \frac{f^{(m)}(\eta)}{(\eta-x)^{\alpha-m+1}} d\eta. \quad (2.23)$$

Именно такая форма записи позволяет первично определить одномерный дробный оператор Лапласа в форме:

$$-(-\Delta)^{\alpha/2} f(x) = -\frac{1}{2\cos(\pi\alpha/2)} \left[{}^C D_x^\alpha + {}^C D_\infty^\alpha \right] f(x), \quad \alpha \in (1, 2]. \quad (2.24)$$

Однако в контексте перехода от континуального представления к дискретному чаще используется иная форма. Для ее получения необходимо внедрение дополнительных преобразований и предположений.

2.1.6. Сведение дробно-дифференциальных операторов к конечным разностям

Для того чтобы вышеописанное выражение, определяющее тип взаимодействия в непрерывном случае, свести к системам распределенных дискретных элементов, необходимо правильно организовать конечные разности. Следует отметить существование подхода, который связывает иной тип дробных производных с центрированными и нецентрированными разностями. Формальное описание может начинаться с определения левосторонней и правосторонней производных Римана — Лиувилля:

$${}^{RL} D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dx^m} \int_a^x (x-\eta)^{m-\alpha-1} f(\eta) d\eta = \left[\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{d\xi^m} \int_a^\xi (\xi-\eta)^{m-\alpha-1} f(\eta) d\eta \right]_{\xi=x}, \quad (2.25)$$

$${}^{RL} D_b^\alpha f(x) = \frac{(-1)^m}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dx^m} \int_x^b (\eta-x)^{m-\alpha-1} f(\eta) d\eta = \left[\frac{(-1)^m}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{d\xi^m} \int_\xi^b (\eta-\xi)^{m-\alpha-1} f(\eta) d\eta \right]_{\xi=x}. \quad (2.26)$$

Для примера левосторонней производной ${}^RLD_x^\alpha$, рассматривая внутренний интеграл в правой части, с использованием интегрирования по частям можем получить:

$$\begin{aligned} \int_a^\xi (\xi - \eta)^{m-\alpha-1} f(\eta) d\eta &= \\ &= \left[f(\eta) \int (\xi - \eta)^{m-\alpha-1} d\eta \right] \Big|_a^\xi - \int_a^\xi \frac{-(\xi - \eta)^{m-\alpha}}{m-\alpha} f'(\eta) d\eta = \\ &= f(a) \frac{(\xi - a)^{m-\alpha}}{m-\alpha} + \int_a^\xi \frac{(\xi - \eta)^{m-\alpha}}{m-\alpha} f'(\eta) d\eta. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Используя вышеописанные преобразования, возможно заново определить левостороннюю дробную производную:

$$\begin{aligned} {}^RLD_x^\alpha f(x) &= \left[\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{d\xi^m} \left(f(a) \frac{(\xi - a)^{m-\alpha}}{m-\alpha} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_a^\xi \frac{(\xi - \eta)^{m-\alpha}}{m-\alpha} f'(\eta) d\eta \right) \right]_{\xi=x}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Это выражение явно демонстрирует влияние граничных условий на результат действия дробной производной Римана-Лиувилля. Аналогично, данное выражение определяет связь между дробными производными Римана-Лиувилля и Капуто и регламентирует класс функций, для которых эти дробно-дифференциальные операторы эквивалентны. Учитывая линейность классического оператора дифференцирования, стоит подробно рассмотреть оба слагаемых, на которые он действует. Для начала имеет смысл определить вклад граничных составляющих, зависящих от показателя дробного оператора α :

$$\begin{aligned} \frac{d^m}{d\xi^m} \left[\frac{(\xi - a)^{m-\alpha}}{m-\alpha} \right] &= \frac{d^{m-1}}{d\xi^{m-1}} (\xi - a)^{(m-\alpha-1)} = \\ &= \frac{d^{m-2}}{d\xi^{m-2}} \left[(m-\alpha-1)(\xi - a)^{m-\alpha-2} \right] = \\ &= \frac{d^{m-3}}{d\xi^{m-3}} \left[(m-\alpha-1)(m-\alpha-2)(\xi - a)^{m-\alpha-3} \right] = \dots = \\ &= (m-\alpha-1)(m-\alpha-2)(m-\alpha-3)\dots(-\alpha+1)(\xi - a)^{-\alpha}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

В таком случае:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} f(a)(m-\alpha-1)(m-\alpha-2)(m-\alpha-3)\dots(-\alpha+1)(\xi-a)^{-\alpha} = \\ & = f(a)(\xi-a)^{-\alpha} \frac{(m-\alpha-1)(m-\alpha-2)\dots(-\alpha+1)}{\Gamma(m-\alpha)} = \frac{f(a)(\xi-a)^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha+1)}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Рассматривая схожим образом интегральную составляющую, можно сформировать следующие выкладки:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{d\xi^m} \int_a^\xi \frac{(\xi-\eta)^{m-\alpha}}{m-\alpha} f'(\eta) d\eta = \\ & = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^{m-1}}{d\xi^{m-1}} \int_a^\xi (\xi-\eta)^{m-\alpha-1} f'(\eta) d\eta = \\ & = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \left(\frac{d^{m-1}}{d\xi^{m-1}} \left[f'(a) \frac{(\xi-a)^{m-\alpha}}{m-\alpha} \right] + \right. \\ & \quad \left. + \frac{d^{m-2}}{d\xi^{m-2}} \int_a^\xi (\xi-\eta)^{(m-\alpha-1)} f^{(2)}(\eta) d\eta \right). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Принимая во внимание, что регламентация супердиффузионного контекста происходит при значении $m = 2$, а также повторно реализуя данные действия с интегральной составляющей в (2.31), учитывая выражение (2.30) и формальную тождественность $x = \xi$ в соответствии с определениями (2.25) и (2.26), приходим к окончательному выражению, связывающему дробные производные Капуто и Римана-Лиувилля:

$${}^{RL}D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(m)}(\eta)}{(x-\eta)^{\alpha-m+1}} d\eta + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j)}(a)(x-a)^{j-\alpha}}{\Gamma(j+1-\alpha)}. \quad (2.32)$$

Выражение для правосторонней дробной производной можно получить выполняя аналогичные действия. С учетом наличия соответствующего множителя $(-1)^m$ для второго слагаемого в определении (2.21):

$${}^{RL}D_b^\alpha f(x) = \frac{(-1)^m}{\Gamma(m-\alpha)} \int_x^b \frac{f^{(m)}(\eta)}{(\eta-x)^{\alpha-m+1}} d\eta + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(-1)^j f^{(j)}(b)(b-x)^{j-\alpha}}{\Gamma(j+1-\alpha)}. \quad (2.33)$$

Говоря в общем, взаимную связь можно представить следующим образом:

$${}^{RL}D_{a+}^{\alpha}f(x) = {}^CD_{a+}^{\alpha}f(x) + \sum_{j=0}^{[\alpha]} \frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(1+j-\alpha)}(x-a)^{j-\alpha}, \alpha \neq 1, 2, 3, \dots, \quad (2.34)$$

$${}^{RL}D_{b-}^{\alpha}f(x) = {}^CD_{b-}^{\alpha}f(x) + \sum_{j=0}^{[\alpha]} \frac{(-1)^j f^{(j)}(b)}{\Gamma(1+j-\alpha)}(b-x)^{j-\alpha}, \alpha \neq 1, 2, 3, \dots. \quad (2.35)$$

Как видно, формальная тождественность правосторонних и левосторонних дробных производных достигается при организации весьма конкретных граничных условий: $f^{(j)}(a) = 0$ и $f^{(j)}(b) = 0$. Данная особенность имеет важное значение для построения дискретной разностной схемы, организованной на (2.25) и (2.26).

2.1.7. Формирование дискретного подхода

Поскольку формируемая система нейронов в самом общем положении является системой взаимодействующих пространственно разделенных элементов, связанных различными формами синаптической связи (химическими и электрическими), для их полноценного описания принципиальна именно дискретная форма записи. Основная задача данного пункта заключается в формировании дискретной системы, организованной на вышезаданном континуальном механизме. В частности, выражения, определенные в форме (2.25) и (2.26), возможно свести к описанию через центрированные и нецентрированные разности.

Аналитическое расширение концепции классической производной на случай дробного аналога возможно с помощью еще одного подхода, связанного с разностным описанием. В таком контексте одним из самых популярных способов задания соответствующего обобщения является дробная производная Грюнвальда — Летникова. Левосторонние и правосторонние аналоги определения данного дробно-дифференциального оператора возможно представить в форме:

$${}^{GL}D_{a+}^{\alpha}f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(x - jh), \quad (2.36)$$

$${}^{GL}D_{b-}^{\alpha}f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(x + jh). \quad (2.37)$$

В контексте данного обобщения крайне важно определить весовые коэффициенты, основываясь на фундаментальной связи между понятием факториала и гамма-

функцией:

$$(-1)^j \binom{\alpha}{j} \equiv \frac{(-1)^j \Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha - j + 1) \Gamma(j + 1)}. \quad (2.38)$$

Как несложно видеть, при показателях, равных целым значениям $\alpha = 1, 2, \dots$, данные конструкции определяют классические операторы дифференцирования. Более точная форма записи подразумевает $n \rightarrow \infty$ для дробных значений показателей.

Установление соответствия между дробными производными Римана-Лиувилля и дробными производными Грюнвальда — Летникова — нетривиальная задача. Для ее осуществления необходимо начинать с представления дробного интеграла и его связи с разностным оператором Δ_{\pm}^{α} :

$$\begin{aligned} {}_{-\infty}^{RL} I_x^{\mu} f(x) &\equiv {}_{-\infty}^{RL} D_x^{-\mu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_{-\infty}^x f(\xi) (x - \xi)^{\mu-1} d\xi = \\ &\frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^{\infty} \left[\exp(-\xi D_x) f(x) \right] \xi^{\mu-1} d\xi \rightarrow \lim_{\xi \rightarrow 0} \Delta_+^{-\mu} f(x) / \xi^{-\mu} \equiv {}_{-\infty}^{GL} D_x^{-\mu} f(x), \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} {}_x^{RL} I_{\infty}^{\mu} f(x) &\equiv {}_x^{RL} D_{\infty}^{-\mu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_x^{\infty} f(\xi) (\xi - x)^{\mu-1} d\xi = \\ &\frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^{\infty} \left[\exp(\xi D_x) f(x) \right] \xi^{\mu-1} d\xi \rightarrow \lim_{\xi \rightarrow 0} \Delta_-^{-\mu} f(x) / \xi^{-\mu} \equiv {}_x^{GL} D_{\infty}^{-\mu} f(x), \end{aligned} \quad (2.40)$$

организованным на базе следующей формы записи:

$$\begin{aligned} \Delta_{\pm}^{\alpha} f(x) &= \left(1 - \exp(\mp \xi D_x) \right)^{\alpha} f(x) = \\ &\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(x \mp j\xi) = \\ &\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha - j + 1) \Gamma(j + 1)} f(x \mp j\xi). \end{aligned} \quad (2.41)$$

В выражениях (2.39) и (2.40) показатель $\mu > 0$. Оператор D_x обозначает классическое дифференцирование целого порядка. В свою очередь, для сохранения единства формы изложения с приведенными ранее соотношениями, показатель

разностного оператора $\alpha = -\mu$. Важным пунктом в текущей постановке является определение операторов дифференцирования дробных порядков через разности дробных порядков:

$$D_{\pm}^{\nu} \equiv \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\Delta_{\pm}^{\nu}}{\xi^{\nu}}. \quad (2.42)$$

При этом, были использованы известные соотношения, определяющие оператор смещения:

$$f(x + \xi) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\xi^j}{j!} D_x^j f(x) = \exp(\xi D_x) f(x), \quad (2.43)$$

и его связь с классическим разностным оператором:

$$\Delta_{\pm} = I - \exp(\mp \xi D_x). \quad (2.44)$$

Вышеизложенные суждения были приведены для случая неограниченных пределов операторов суммирования, на основе которых определялись дробные разности. При этом область влияния нелокального оператора в дискретном случае может быть естественным путем ограничена. В рамках заданного подхода формируются производные Грюнвальда-Летникова с конечным пределом. Действительно, рассматривая класс функций $f(x)$, отличных от нуля на определенном заданном интервале $x > a$, можно внедрить переменную $\xi = (x - a)/J$, $j = 0, 1, 2, \dots, J$, на основе которой явно определить левостороннюю дробную производную:

$$\begin{aligned} {}^{GL}D_{a+}^{\nu} f(x) &= \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{\xi^{\nu}} \sum_{j=0}^{(x-a)/\xi} (-1)^j \frac{\Gamma(\nu + 1)}{j! \Gamma(\nu - j + 1)} f(x - j\xi) = \\ &= \lim_{J \rightarrow \infty} \left[\frac{J}{(x - a)} \right]^{\nu} \sum_{j=0}^J (-1)^j \frac{\Gamma(\nu + 1)}{j! \Gamma(\nu - j + 1)} f\left(x - j \left[\frac{x - a}{J} \right]\right), \end{aligned} \quad (2.45)$$

а также правостороннюю дробную производную для случая $x < b$:

$$\begin{aligned} {}^{GL}D_{b-}^{\nu} f(x) &= \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{\xi^{\nu}} \sum_{j=0}^{(b-x)/\xi} (-1)^j \frac{\Gamma(\nu + 1)}{j! \Gamma(\nu - j + 1)} f(x + j\xi) = \\ &= \lim_{J \rightarrow \infty} \left[\frac{J}{(b - x)} \right]^{\nu} \sum_{j=0}^J (-1)^j \frac{\Gamma(\nu + 1)}{j! \Gamma(\nu - j + 1)} f\left(x + j \left[\frac{b - x}{J} \right]\right). \end{aligned} \quad (2.46)$$

Очевидно, что определение класса функций, отличных от нуля на интервале (a, b) , могут подразумевать одновременное применение как левосторонней, так и правосторонней дробной производной. Именно на этом принципе и основывается

определение дробного оператора Лапласа для задач моделирования дискретных систем.

Переход от дробно-интегрального описания к описанию дробно-дифференциальному осуществляется с позиции применения к исходному выражению классического оператора дифференцирования [110]. При этом, осознавая необходимость внедрения связи с дробными разностями, данную процедуру уместно осуществить с позиции дискретного определения:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\Delta_{\pm}^m}{\xi^m} \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\Delta_{\pm}^{-\mu_q}}{\xi^{-\mu_q}} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\Delta_{\pm}^{m-\mu_q}}{\xi^{m-\mu_q}} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\Delta_{\pm}^{\alpha_q}}{\xi^{\alpha_q}}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (2.47)$$

Данный метод позволяет естественным образом задать дробную производную через дробный интеграл в соответствии с подходом Римана-Лиувилля к определению дробной производной и получить формальную тождественность левосторонних дробно-дифференциальных операторов:

$${}^{RL}D_a^{\alpha} f(x) \leftrightarrow {}^{GL}D_{a+}^{\alpha} f(x), \quad (2.48)$$

с правосторонними:

$${}^{RL}D_x^{\alpha} f(x) \leftrightarrow {}^{GL}D_{b-}^{\alpha} f(x). \quad (2.49)$$

Продемонстрированная связь определяет возможность отождествления дискретной системы, сформированной на базе представленных дробных разностей, с континуальной системой, организованной с помощью дробного оператора Лапласа и интегро-дифференциального подхода. Это имеет крайне важное значение для позиционирования модели в перспективе возможности ее аналитического исследования. Действительно, континуальная интерпретация в данной постановке идейно схожа со сведением ансамблей связанных осцилляторов к термодинамическому пределу. Однако для реализации такого подхода в абсолютном большинстве задач необходимо рассматривать конкретные формы взаимодействия и виды осцилляторов. Супердиффузионное обобщение в такой постановке является идейно более простым способом исследования динамической системы ввиду понятного классического прообраза кинетического механизма и его аналитического расширения в область дробных порядков.

2.1.8. Степенной отклик супердиффузионного уравнения на простейшее возмущение

В то время как степенная организация явно проявляет себя при описании дискретной системы, ее воспроизводство на уровне континуального представления кинетического механизма менее очевидно. Для демонстрации данного явления в непрерывном случае можно воспользоваться базовым подходом к определению «отклика системы» на пространственное дельта-возмущение. При этом мы естественным образом приходим к задаче определения функции Грина для супердиффузионного уравнения. Определив выражение для функции Грина следующим образом:

$$\frac{\partial G(\vec{r}, t; \vec{r}_0, t_0)}{\partial t} = -D(-\Delta)^{\alpha/2} G(\vec{r}, t; \vec{r}_0, t_0) + \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)\delta(t - t_0), \quad (2.50)$$

и применив к нему преобразование Фурье по пространственной компоненте и преобразование Лапласа по временной, получим алгебраическое уравнение на двойную трансформанту:

$$p\tilde{G}(\vec{k}, p, \vec{r}_0, t_0) = -D|\vec{k}|^\alpha \tilde{G}(\vec{k}, p, \vec{r}_0, t_0) + e^{i\vec{r}_0\vec{k}} e^{-pt_0} \quad (2.51)$$

и, соответственно:

$$\tilde{G} = \frac{e^{i\vec{k}\vec{r}_0} e^{-pt_0}}{p + D|\vec{k}|^\alpha}. \quad (2.52)$$

Применяя обратное преобразование Лапласа по временной компоненте и Фурье по пространственной, возможно сформировать решение:

$$G(\vec{r}, t; \vec{r}_0, t_0) = \left[D(t - t_0) \right]^{-3/\alpha} \rho_3^{(\alpha)} \left(|\vec{r} - \vec{r}_0| \left[D(t - t_0) \right]^{-1/\alpha} \right) H(t - t_0). \quad (2.53)$$

Данное выражение определяет динамику распространения фронта как отклика кинетической части системы на дельта-функцию. Важной частью данного решения является функция $\rho_3^{(\alpha)}(\cdot)$ — α -устойчивое сферически симметричное распределение Леви. Эта функция не выражается в виде других элементарных функций, однако именно она предопределяет формирование тяжелых хвостов в пространственном распределении $G(\vec{r}, t; \vec{r}_0, t_0)$. Существует два более известных варианта данной функции, соответствующих целочисленным значениям показателя α : распределение Коши ($\alpha = 1$) и распределение Гаусса ($\alpha = 2$). Стоит дополнительно отметить, что в последнем случае хвосты перестают быть степенными и

спадают сверхэкспоненциально, явно регламентируя особенности локальной топологии взаимодействия и в дискретном приближении.

2.2. Организация реакционно-супердиффузионной системы

2.2.1. Идеиное обоснование

Для формирования системы супердиффузионно взаимодействующих нейронов, помимо организации топологии сетевого взаимодействия, не менее важным является и определение нелинейных динамических моделей точечной активации осцилляторов. Особая важность данного пункта кроется в нескольких нюансах, сопряженных с идейным сочетанием теории динамических систем с аппаратом дробно-дифференциального исчисления для формирования открытой диссипативной распределенной многокомпонентной динамической системы.

Существует множество нелинейных моделей активации точечного нейрона, в различной степени учитывающих внутренние динамические процессы потенциалзависимых ионных каналов [206]. Одной из самых биофизически подробных качественных моделей нейронной динамики является динамическая модель Hodgkin-Huxley [207]. Схожий формализм был использован и в модели Morris–Lecar [208]. При этом тип организации нелинейностей в данных моделях подразумевает как сложности для аналитического осмысления, так и серьезные требования к вычислительным мощностям для проверки. Но самый главный нюанс состоит в том, что природа данных динамических нелинейных моделей подразумевает размерности физических переменных, входящих в их состав. Для формирования качественной модели, организованной на основе супердиффузионной сетевой структуры в самом общем виде, необходимо использовать динамические модели, не подразумевающие присутствия динамическим переменным размерностей. К таким моделям можно отнести иную популярную форму задания систем с автоколебательной динамикой — модель FitzHugh–Nagumo [87]. Прежде чем перейти к модели, выбранной для построения реакционно-супердиффузионной структуры, следует упомянуть ряд других нелинейных динамических моделей, способных воспроизводить различные сценарии активности точечного нейрона. В частности, стоит отметить дискретные модели Chialvo [209], Rulkov [210], а также Courbage-Nekorkin [211], организованные на базе двухкомпонентного итерационного отображения. Аналогично была определена модель Izhikevich как в

непрерывном, так и дискретном времени [212].

Наконец, учитывая вышеизложенные суждения, а также определяя подход, сочетающий как математическую лаконичность, так и возможность воспроизведения широкого диапазона возможных режимов точечной активности, нами было принято решение использовать модель Hindmarsh–Rose нейрона [91].

2.2.2. Организация нелинейных механизмов активации точечных нейронов

В общем случае трехкомпонентная динамическая модель Hindmarsh–Rose [HR3]³, ответственная за проявление разнообразной активности точечного нейрона, может быть представлена в следующей форме:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u = v - au^3 + bu^2 - m + I_{ext}, \\ \frac{d}{dt}v = c - du^2 - v, \\ \frac{d}{dt}m = r \left[s(u - u_0) - m \right]. \end{cases} \quad (2.54)$$

Параметр a в широком смысле отвечает за восстановление потенциала действия, b связан с процессами активации точечного нейрона. Значения параметров c и d определяют динамику потенциалозависимых ионных каналов и, как следствие, динамику быстрых ионных токов, связанных с процессами деполяризации. I_{ext} — значение внешнего ионного тока, влияющего на динамику потенциала действия и являющегося некоторым «стабилизационным» параметром в системе. В свою очередь, параметры s и u_0 определяют динамику медленных $r \ll 1$ ионных токов. Различные комбинации данных параметров связаны как с широким разнообразием внутренних процессов, происходящих в теле нейрона (с биофизической точки зрения), так и с возможными динамическими паттернами, включающими возможность единичного спайка, периодической активности, пачечной активности, а также возможности воспроизводства хаотических режимов (с точки зрения задач нелинейной динамики). Важные представления о некоторых комбинациях данных параметров и связанных с ними динамических реализациях точечного нейрона можно обнаружить в [213].

С целью более доступной формализации представления в некоторых частях ра-

³Здесь и далее квадратные скобки используются для обозначения конкретных составных частей исследуемой постановки.

боты была использована двухкомпонентная модель Hindmarsh–Rose [HR2]:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u = v - au^3 + bu^2 + I_{ext}, \\ \frac{d}{dt}v = c - du^2 - v. \end{cases} \quad (2.55)$$

Стоит отметить и иные формы определения двухкомпонентной модели с внедренными множителями, определяющими временные масштабы динамических реализаций точечной системы. Регламентация двухкомпонентной точечной системы в соответствующей форме, с одной стороны, была обусловлена базовыми критериями соответствия системе [HR3] в пределе $m = 0$, с другой стороны, попыткой формирования динамических реализаций, соответствующих «базовому» временному масштабу модели. Если дополнительно не оговорено, в качестве параметров используются следующие значения: $(a; b; c; d; I_{ext}) = (1; 3; 1; 5; 1.6)$ для [HR2, HR3] и $(u_0; s) = (-1.6; 4)$ для [HR3] моделей.

2.2.3. Формирование многокомпонентного распределенного представления в континуальном смысле

Предложенный в предыдущих разделах кинетический механизм, описывающий взаимодействие элементов как в дискретном, так и в континуальном приближении, был основан на дробном операторе Лапласа и предполагал одну переменную. В то же время модели [HR3] (2.54) и [HR2] (2.55) являются многокомпонентными. Объединяя оба подхода: распределенное взаимодействие и многокомпонентную нелинейность, можно сформулировать комбинированную постановку задачи. В пределе распределенная многокомпонентная динамическая модель с дробной кинетикой в случае [HR3] нелинейности принимает следующий вид:

$$\begin{cases} \partial u(x, t)/\partial t = -D_u(-\Delta_x)^{\alpha_u/2}u(x, t) + v - au^3 + bu^2 - m + I_{ext}, \\ \partial v(x, t)/\partial t = -D_v(-\Delta_x)^{\alpha_v/2}v(x, t) + c - du^2 - v, \\ \partial m(x, t)/\partial t = r \left[s(u - u_0) - m \right]. \end{cases} \quad (2.56)$$

Использование дробного Лапласиана $-(-\Delta_x)^{\alpha_u/2}$ в первом уравнении системы регламентирует топологию нелокального типа взаимодействия между нейронами в дискретном приближении. В свою очередь, внедрение диффузии сразу по двум компонентам $-(-\Delta_x)^{\alpha_u/2}$ и $-(-\Delta_x)^{\alpha_v/2}$ обусловлено несколькими факторами. Прежде всего, имеется необходимость исследования представленной динамической системы в одной из самых полных постановок для всестороннего

определения динамических режимов в двухпараметрическом пространстве внедренных кинетических показателей (α_u, α_v) . С другой стороны, на качественном уровне внедрение диффузии по второй компоненте может быть отождествлено с внесинаптическими процессами передачи возбуждения между нейронами [214]. Отсутствие какой-либо связи по третьей компоненте связано с ее медленной эволюцией, а также вспомогательной ролью, расширяющей возможные динамические сценарии точечного нейрона при двухкомпонентном описании.

Аналогично, с точки зрения лаконичности, в работе рассматривается и двухкомпонентное представление, соответствующее случаю [HR2]:

$$\begin{cases} \partial u(x, t)/\partial t = -D_u(-\Delta_x)^{\alpha_u/2}u(x, t) + v - au^3 + bu^2 + I_{ext}, \\ \partial v(x, t)/\partial t = -D_v(-\Delta_x)^{\alpha_v/2}v(x, t) + c - du^2 - v. \end{cases} \quad (2.57)$$

2.2.4. Формирование многокомпонентного распределенного представления в дискретном смысле

Учитывая результаты пункта 2.1.7, а также внедрение явного многокомпонентного представления в континуальной перспективе в пункте 2.2.3, аналогичным образом необходимо представить и дискретную систему, соответствующую трёхкомпонентному случаю [HR3]:

$$\begin{cases} u_i^{t+1} = u_i^t + \left[D_u r_u^{(1)} \sum_{j=0}^{l_1(i)} g_u^{(j)} u_{i-j+1}^t + \right. \\ \quad \left. D_u r_u^{(2)} \sum_{j=0}^{l_2(i)} g_u^{(j)} u_{i+j-1}^t \right] + dt f_u(u_i^t, v_i^t, m_i^t), \\ v_i^{t+1} = v_i^t + \left[D_v r_v^{(1)} \sum_{j=0}^{l_1(i)} g_v^{(j)} v_{i-j+1}^t + \right. \\ \quad \left. D_v r_v^{(2)} \sum_{j=0}^{l_2(i)} g_v^{(j)} v_{i+j-1}^t \right] + dt f_v(u_i^t, v_i^t, m_i^t), \\ m_i^{t+1} = m_i^t + dt f_m(u_i^t, v_i^t, m_i^t), \end{cases} \quad (2.58)$$

и двухкомпонентному случаю [HR2]:

$$\begin{cases} u_i^{t+1} = u_i^t + \left[D_u r_u^{(1)} \sum_{j=0}^{l_1(i)} g_u^{(j)} u_{i-j+1}^t + \right. \\ \left. D_u r_u^{(2)} \sum_{j=0}^{l_2(i)} g_u^{(j)} u_{i+j-1}^t \right] + dt f_u(u_i^t, v_i^t), \\ v_i^{t+1} = v_i^t + \left[D_v r_v^{(1)} \sum_{j=0}^{l_1(i)} g_v^{(j)} v_{i-j+1}^t + \right. \\ \left. D_v r_v^{(2)} \sum_{j=0}^{l_2(i)} g_v^{(j)} v_{i+j-1}^t \right] + dt f_v(u_i^t, v_i^t). \end{cases} \quad (2.59)$$

Чтобы подчеркнуть преемственность непрерывного и дискретного подходов, дискретный шаг по времени здесь и далее обозначается как t . Обобщенные коэффициенты, «модулирующие» силу супердиффузионной связи, задаются в форме:

$$r_q^{(1)} = r_q^{(2)} = -\frac{\sec(\pi\alpha_q/2)}{2} dt (dx)^{-\alpha_q}, \quad q = \{u, v\}. \quad (2.60)$$

Весовые коэффициенты, определяющие тип взаимодействия заданы на основе следующего общего соотношения:

$$g_q^{(j)} = (-1)^j \binom{\alpha_q}{j} = \frac{(-1)^j \Gamma(\alpha_q + 1)}{\Gamma(\alpha_q - j + 1) \Gamma(j + 1)}, \quad q = \{u, v\}. \quad (2.61)$$

Можно убедиться, что выражение (2.61) допускает следующую рекуррентную форму записи:

$$g_q^{(0)} = 1 \text{ и } g_q^{(j)} = -\frac{\alpha_q - j + 1}{j} g_q^{(j-1)} \text{ для } j = 1, 2, \dots \quad (2.62)$$

Соотношения (2.58) и (2.59) формируют нелокальное итерационное отображение с перекрестными связями, организованными на основе нелинейных соотношений. Индексы i указывают на порядковый номер нейрона в заданной реализации. Для лаконичности дальнейшего изложения вводятся следующие обозначения для одномерной двухкомпонентной [1D2C] и одномерной трехкомпонентной [1D3C] систем.

Стоит отметить, что форма записи, в которой указывается нелинейная часть в дискретном случае, соответствует методу Эйлера. Данное представление хорошо формализует подход в контексте как дискретной, так и континуальной системы. При этом для повышения точности временной аппроксимации на этапе реализации данных нелокальных итерационных отображений было осуществлено разделение по физическим процессам, в рамках которого кинетическая часть рассчитывалась по явной схеме, а нелинейная составляющая — методом Рунге-Кутты 4-го

порядка. Как для [1D2C], так и для [1D3C] постановок использовались значения: $(D_u; D_v) = (10^{-4}; 10^{-6})$.

2.3. Метрики для оценки состояний частичной синхронизации

Для получения исчерпывающего представления о состояниях частичной синхронизации крайне важно организовать универсальный подход к их оценке. Для этого используются различные метрики. При этом стоит отметить, что для всестороннего понимания развитого динамического режима, к одной динамической реализации распределенной нелинейной системы могут быть применены сразу несколько независимых подходов. Поскольку метрики частичной синхронизации служат прежде всего инструментом оценки, исследователи часто адаптируют параметры под конкретные задачи или модифицируют существующие подходы. В рамках данного пункта будут описаны те метрики, которые были непосредственно использованы для исследований состояний частичной синхронизации в сетях, организованных на базе супердиффузионной топологии.

2.3.1. Фактор синхронизации

Базовое понимание о динамике состояния частичной синхронизации в распределенной системе может быть получено с использованием *фактора синхронизации* R , первоначально определенный в [215, 216] следующим образом:

$$R = \frac{\langle [F^t]^2 \rangle_t - \langle F^t \rangle_t^2}{1/N \sum_i (\langle [u_i^t]^2 \rangle_t - \langle u_i^t \rangle_t^2)}, \quad (2.63)$$

где

$$F^t = \frac{1}{N} \sum_i u_i^t \quad (2.64)$$

имеет смысл среднего поля компоненты u_i^t . Операция $\langle \cdot \rangle_t$ характеризует усреднение по временной составляющей. Основываясь на формулах (2.63) и (2.64), можно понять, что данная мера использует информацию о всей пространственно-временной реализации системы и возвращает единственное значение от $R \in [0, 1]$ в соответствии с реализуемым динамическим сценарием. Для системы, воспроизводящей синхронизационный режим характерно значение $R \rightarrow 1$, в свою очередь, некогерентный режим характеризуется $R \rightarrow 0$. Для состояния частичной синхронизации фактор синхронизации принимает промежуточное значение $0 < R < 1$.

2.3.2. Сила некогерентности

Дополнительное понимание об уровне развития пространственного беспорядка в системе можно получить с помощью так называемой *силы некогерентности* SI [217]. С использованием представлений, указанных в [218], нами данный показатель был определен следующим образом:

$$SI = 1 - \frac{1}{M} \sum_{p=1}^M S(p), \quad (2.65)$$

в котором:

$$S(p) = H\left(\delta_{SI} - \sigma(p)\right), \quad (2.66)$$

и

$$\sigma(p) = \left\langle \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=\Omega(n,p)}^{\Gamma(n,p)} [W_i^t - \langle W \rangle_r^t]^2} \right\rangle_t. \quad (2.67)$$

В указанном представлении $H(x)$ — функция Хевисайда, а δ_{SI} пороговое значение, которое подбирается, основываясь на конкретной реализации системы и заданном уровне некогерентности. Операции $\langle \cdot \rangle_r$ и $\langle \cdot \rangle_t$ характеризуют усреднение по пространственной и временной компонентам соответственно. Также, в определениях фигурируют локальные нецентрированные первые разности $W_i^t = u_i^t - u_{i+1}^t$. При этом разбиение исходной системы происходит на подобласти, общее число которых M и $n = N/M$, и следовательно $\Omega(n, p) = n(p - 1)$. В такой постановке индекс $p = 1, 2, 3, \dots, M$. Как следует из названия, развитой синхронизации соответствует значение $SI = 0$ (отсутствующая некогерентность), развитой некогерентности $SI = 1$, а состояние частичной синхронизации характеризуется $0 < SI < 1$. Аналогично фактору синхронизации (2.63), данная метрика использует всю информацию о пространственно-временной реализации системы и сопоставляет ей единственное значение. Использование независимых подобластей ($\Gamma(n, p) = pn - 2$) для оценки при условии полного усреднения, обусловлено установленным более точным откликом метрики по отношению к системам, состоящим из $N = 100$ нейронов. Результаты были дополнительно проверены для исходной реализации метрики, представленной в [218]. Оба подхода к определению дают эквивалентное разделение областей синхронизации и некогерентности.

2.3.3. Параметр локального порядка

Представление об областях с когерентной и некогерентной структурой возможно получить, основываясь на представлении параметра локального порядка [12, 26, 168, 219]. В контексте реакционно-диффузионных задач данную метрику возможно определить на основе [186]. С целью согласования метрики для оценки не только автоколебательного поведения, но и режимов пачечной активности в широком диапазоне нелинейных параметров [HR*m*], $m = 2, 3$ модели, было принято решение использовать следующее представление:

$$L_i^t = \left| \frac{1}{2d+1} \sum_{i' \in \Omega_i} e^{\sqrt{-1}\phi_{i'}^t} \right|, \quad (2.68)$$

с локальной переменной, которая несет в себе информацию об отношении компонент состояния:

$$\phi_i^t = \arctan\left(\frac{v_i^t}{w_i^t}\right). \quad (2.69)$$

В выражении (2.68) величина d ответственна за пространственную размерность рассматриваемой системы. В свою очередь, область Ω_i характеризует множество элементов, локально взаимодействующих с данным i . Как следует из названия, параметр локального порядка предоставляет возможность разделить когерентные и некогерентные области в распределенных системах. Сохранение оригинального наименования и обозначений отражает общий подход к построению метрики и концептуальную преемственность. Значение $L_i^t \rightarrow 1$ свидетельствует о том, что i -й элемент в t -й временной такт находится внутри когерентной группы, определенной в широком смысле согласованности отношений амплитуд компонент ввиду определения (2.69). Аналогично, значение $L_i^t \rightarrow 0$ свидетельствует о принадлежности элемента к некогерентной субпопуляции.

2.3.4. Классическая мера корреляции в пространстве

Современной и важной для широкого набора задач метрикой является мера пространственной корреляции [220]. Основная идея, фигурирующая в ее реализации, заключается в представлении состояния частичной синхронизации как состояния с различным набором локальных разностей. Действительно, пространственно скоррелированная структура должна обладать схожим набором разностей между элементами. Аналогично, интуитивно понятно, что структура, подразумевающая

развитую некогерентность, должна содержать набор разностей различной величины в рамках заданной динамической реализации системы. Определить данные разности можно различными способами, однако для систем, имеющих пространственную размерность, часто выбирают вторую разность для определения локальной кривизны:

$$|\hat{D}f| = |f_{i+1}^t - 2f_i^t + f_{i-1}^t|. \quad (2.70)$$

В данном выражении f_i^t обозначает состояние осциллятора с порядковым номером i в t -й временной такт. В дальнейшем, для определенных в рамках динамической реализации системы наборов разностей $|\hat{D}f|$, формируется плотность вероятности $g(t, |\hat{D}f|)$. Наконец, сопоставление динамической реализации конкретному значению, отражающему степень развития некогерентности в системе, можно построить на основе следующего соотношения:

$$g_0(t) = \int_0^{\delta} g(t, |\hat{D}f|) d|\hat{D}f|. \quad (2.71)$$

В указанной формулировке оно имеет понятный смысл, если учесть, что параметр δ_g характеризует пороговое значение, разделяющее набор разностей, которые исследователь отождествляет с когерентным и некогерентным режимом. Обычно данная граница определяется через максимальную разность, в реализации $\delta_g = 0.01 \times |\hat{D}f|_{max}$. Следует отметить, что при определении (2.71) использовалась форма нотации, представленная в работе [221]. Учитывая явную дискретность подхода данную метрику можно определить в форме [222]:

$$g_0(t) = \sum_{|\hat{D}f|=0}^{\delta} g(t; |\hat{D}f|). \quad (2.72)$$

В таком случае, значения $g_0 \rightarrow 1$ характерны для режима полной синхронизации, в то время как $g_0 \rightarrow 0$ определяют некогерентный режим. Подобно предыдущим метрикам, значения $0 < g_0 < 1$ связаны с состояниями частичной синхронизации.

2.4. Выводы главы

В данной главе был определен подход построения системы нейронов с супердиффузионной топологией взаимодействия. В частности, описаны основные особенности задания нелокального типа соединения с помощью дробного оператора

Лапласа. Определена континуальная одномерная система, организованная на основе системы реакционно-супердиффузионных уравнений. Продемонстрирован степенной отклик континуальной системы на дельта-возмущение, предопределяющий нелокальные особенности взаимодействия в дискретном приближении. Описан процесс дискретизации, основанный на разностной схеме аппроксимации дробного оператора Лапласа. Определена двухкомпонентная [1D2C] и трехкомпонентная [1D3C] дискретная система нейронов, организованная на основе разностной схемы аппроксимации дробного оператора Лапласа, а также нелинейных функций модели Hindmarsh-Rose. Определены основные метрики в одномерном приближении для определения и анализа состояний частичной синхронизации, воспроизведенных на базе супердиффузионной топологии.

Результаты данной главы задают основу для формирования представления о внедренном параметрическом пространстве (α_u, α_v) конфигураций супердиффузионных топологий, на основе которых в дальнейшем будет произведен анализ состояний частичной синхронизации.

Глава 3

Состояния частичной синхронизации в системе супердиффузионно связанных нейронов, организованных на основе одномерной и двумерной систем

На базе вышеизложенных суждений, формирующих свое концептуальное начало от непрерывных реакционно-супердиффузионных систем [(2.56) и (2.57)] и сводящихся к дискретной форме представления [(2.58) и (2.59)] имеет смысл сформировать динамическую систему и предопределить в ней набор параметров, для которых возможны реализации различных состояний частичной синхронизации. Основные результаты данной главы отражены в работах [200, 201].

3.1. Состояния частичной синхронизации, полученные на базе одномерных систем

3.1.1. Двухкомпонентная система с супердиффузией по первой компоненте

Для построения последовательного изложения мы сначала воспроизвели динамику [1D2C] системы с [HR2] нелинейностью. Как уже было указано, реализация системы воспроизводилась с использованием разделения по физическим процессам, где кинетическая часть была определена на основе явной итерационной нелокальной схемы (2.59), а нелинейная часть (2.55) с помощью метода Рунге-Кутты 4-го порядка. В качестве начальных условий использовались однородно распределенные на интервале $(-1, 1)$ случайные начальные условия [Uniformly Distributed Random Initial Conditions, UDRIC] по u и v компоненте, соответствующие гра-

нице притяжения предельного цикла для каждого осциллятора, входящего в состав распределенной системы. Динамика системы с супердиффузионной связью по первой компоненте $\alpha_u < 2$ и классической диффузионной связью по второй $\alpha_v = 2$ представлена на Рис.3.1 и проявляет особенности зарождения некогерентного сценария, в частности при $\alpha_u = 1.4$ ¹. Значения, определяющие параметры нелокальности $l_1 = l_2 = l - 1$ и $l = 10$. Если дополнительно не указано, коэффициенты дискретизации в случае [1D2C] и [1D3C] постановок для данной главы: $dt = 0.01$ и $dx = 0.005$. Состояния системы для различных временных фрагмен-

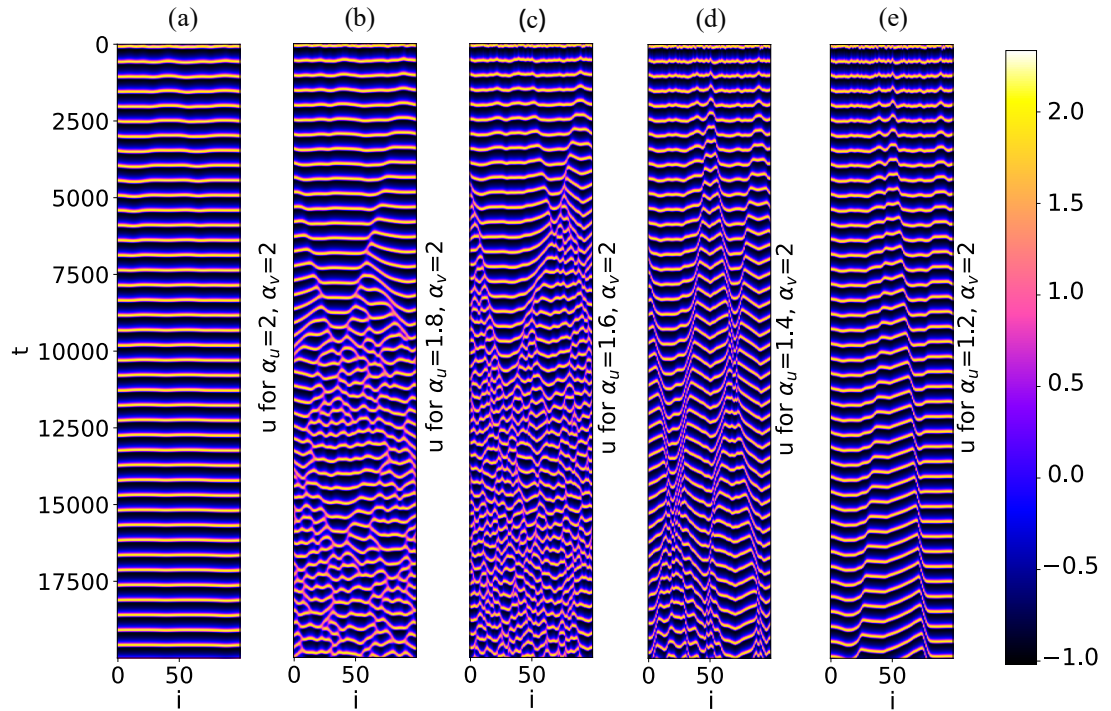


Рис. 3.1: Динамика одномерной двухкомпонентной системы [1D2C] с супердиффузионной связью по первой компоненте ($\alpha_u < 2$) и классической диффузионной связью по второй компоненте $\alpha_v = 2$. Продемонстрирован переход от синхронизации (a) при $(\alpha_u = 2, \alpha_v = 2)$, к химерному (d) ($\alpha_u = 1.4, \alpha_v = 2$) и уединенному (e) ($\alpha_u = 1.2, \alpha_v = 2$) состоянию через промежуточные режимы, характеризующиеся образованием фазовых волн различных масштабов (b) ($\alpha_u = 1.8, \alpha_v = 2$) и (c) ($\alpha_u = 1.6, \alpha_v = 2$).

тов явно демонстрирующих переход от синхронизации к образованию химерных состояний, продемонстрированы на Рис.3.2.

¹В целях лаконичности изложения без ущерба общности дополнительные детали указаны в описании к рисункам.

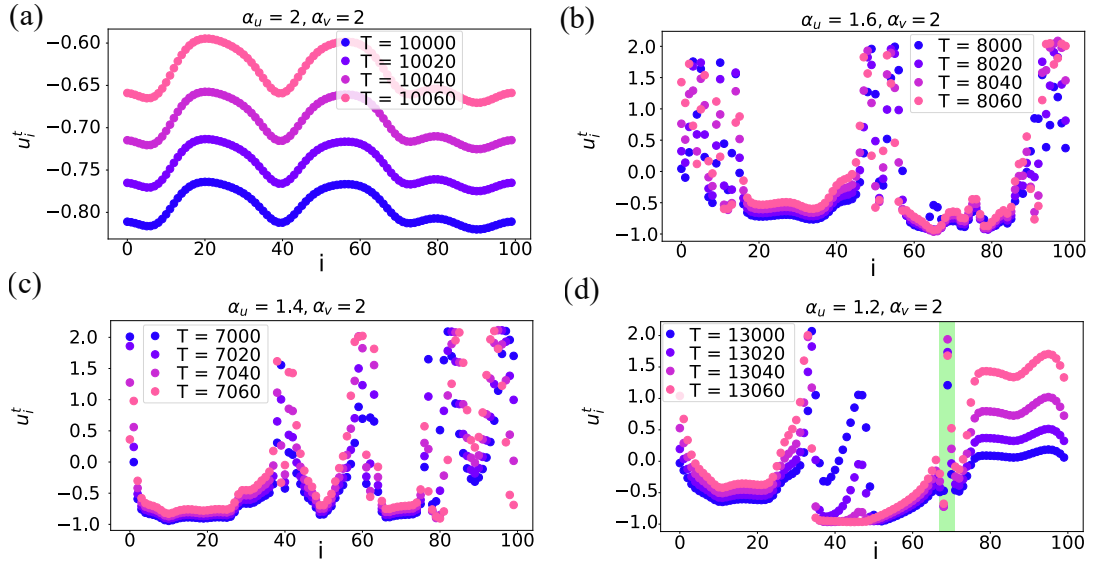


Рис. 3.2: Состояния [1D2C] системы для указанных фрагментов времени $t = T$, соответствующие результатам, представленным на Рис.3.1. Синхронизация наблюдается при $(\alpha_u = 2, \alpha_v = 2)$ (a), образование химерного состояния при $(\alpha_u = 1.4, \alpha_v = 2)$ (d) и уединенного состояния, обозначенного зеленым прямоугольником при $(\alpha_u = 1.2, \alpha_v = 2)$ (e). Изменение масштабов фазовых волн представлено на рисунках (b) $(\alpha_u = 1.8, \alpha_v = 2)$ и (c) $(\alpha_u = 1.6, \alpha_v = 2)$.

3.1.2. Двухкомпонентная система с супердиффузией по первой и второй компоненте

Важные общие суждения о распределенной системе можно вынести на основе анализа ее параметров. Одними из ключевых переменных супердиффузионной постановки являются показатели дробного оператора Лапласа (α_u, α_v) , ответственные за топологии супердиффузионного взаимодействия. Зависимости $R(\alpha_u, \alpha_v)$ (2.63), $SI(\alpha_u, \alpha_v)$ (2.65), отражающие уровень развития некогерентности в [1D2C] системе для различных значений I_{ext} , представлены на Рис. 3.3. Для конкретных конфигураций супердиффузионных сетей (отмеченных в параметрическом пространстве) на рисунке также были представлены динамические реализации. Для задач текущего исследования было выбрано характерное значение $\delta_{SI} = 0.4$, основываясь на данных Рис.3.4 (c,d) и $M = 20$.

Представленный анализ и согласованность указанных метрик позволяют сделать важный вывод о связи конфигураций супердиффузионных сетей с динамическими режимами полной синхронизации $SI \rightarrow 0, R \rightarrow 1$, частичной синхронизации $0 < SI < 1, 0 < R < 1$ и развитой некогерентности $SI \rightarrow 1, R \rightarrow 0$. В частности, показано, что развитие пространственного беспорядка сопряжено с развитой нелокальной топологией взаимодействия между элементами обеих ком-

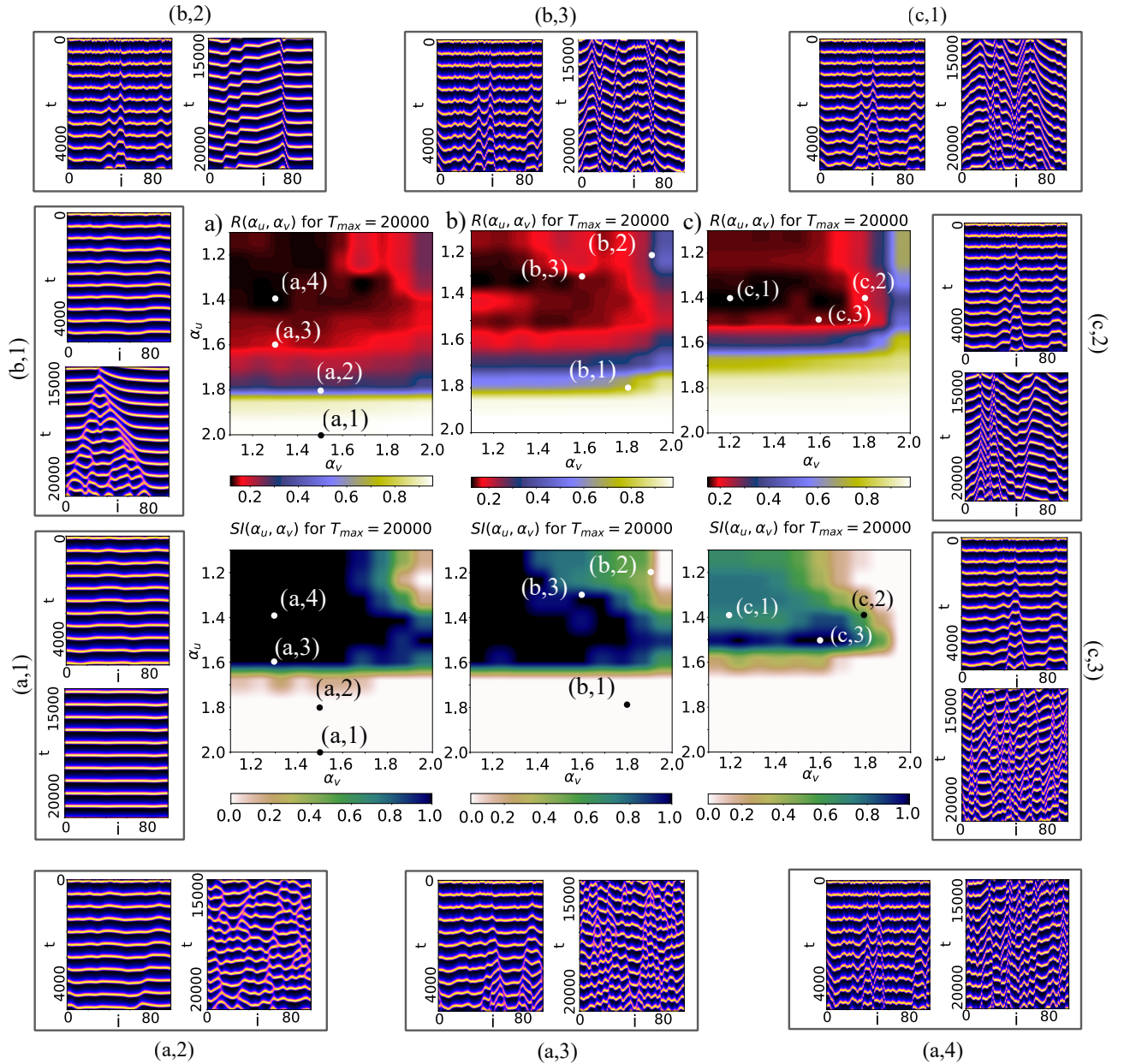


Рис. 3.3: Значения фактора синхронизации $R(\alpha_u, \alpha_v)$ (2.63) и силы некогерентности $SI(\alpha_u, \alpha_v)$ (2.65) для возможных комбинаций параметров (α_u, α_v) [1D2C] системы с [HR2] нелинейностью. (а) $I_{ext} = 1.6$, (б) $I_{ext} = 1.8$, (с) $I_{ext} = 2.0$. $R = 1$ и $SI = 0$ соответствуют режиму полной синхронизации (белая область). В свою очередь, $R = 0$ и $SI = 1$ характеризуют режим полной некогерентности (черная область). Крупномасштабные структуры наблюдаются при $0.3 < R < 1$ и $SI = 0$. Различные виды химерных состояний формируются в диапазоне $0.2 < R < 0.3$ и $0 < SI < 1$. Переходный режим от химер к развитой некогерентности (или состояниям с изначально развитой некогерентностью) наблюдается при $R < 0.2$ и $SI \rightarrow 1$. На рисунке показано анизотропное развитие области некогерентности в пространстве параметров (α_u, α_v) , ответственных за конфигурации [1D2C] системы.

понтент ($\alpha_u < 1.5, \alpha_v < 1.5$), в свою очередь полная синхронизация связана с локальным типом взаимодействия по первой компоненте $\alpha_u \rightarrow 2.0$ и не так сильно зависит от топологических особенностей взаимодействия элементов второй ком-

ПОНЕНТЫ α_v .

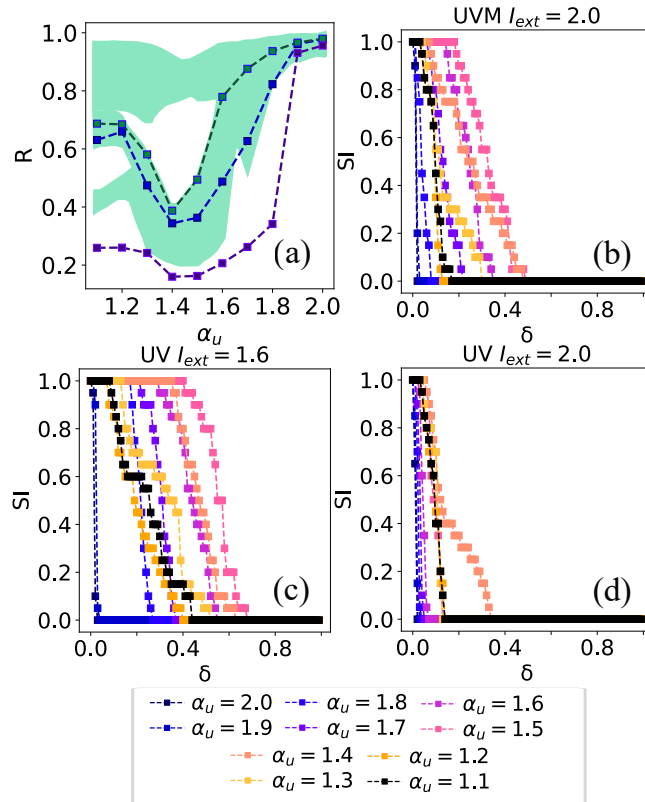


Рис. 3.4: Метрики, отражающие развитые состояния как полной, так и частичной синхронизации для различных значений I_{ext} . На рисунке (a) представлен фактор синхронизации [1D2C] системы $R(\alpha_u, \alpha_v = 2)$ для $I_{ext} = 1.6$ (синяя линия), $I_{ext} = 2.0$ (зеленая линия). Значения $R(\alpha_u)$, соответствующие [1D3C] случаю для $I_{ext} = 2.0$, отображены фиолетовой линией. Зеленые области характеризуют диапазон значений $R(\alpha_u)$, формируемых в [1D2C] системах, организованных на базе 15 различных [UDRIC]. На рисунке (b) представлена сила некогерентности $SI(\alpha_u)$ для различных пороговых значений δ в рамках [1D3C] систем и значения $I_{ext} = 2.0$. Рисунки (c), (d) описывают зависимость $SI(\alpha_u)$ от порогового значения δ в [1D2C] случае с целью оптимальной калибровки метрики на основе параметров $I_{ext} = 1.6$ и $I_{ext} = 2.0$ соответственно.

3.1.3. Трехкомпонентная система

Важное понимание развития динамических режимов в трехкомпонентной системе [1D3C] с [HR3] нелинейностью можно получить на основе ее сопоставления с системой двухкомпонентной [1D2C], [HR2]. Сравнительный анализ ключевых метрик представлен на Рис. 3.4. На фрагменте (a) представлено сравнение фактора синхронизации $R(\alpha_u \leq 2, \alpha_v = 2.0)$ для трех систем. Синяя и зеленая линии соответствуют [1D2C] системе с классической диффузией по второй компоненте $\alpha_v = 2.0$, а также с $I_{ext} = 1.6$ и $I_{ext} = 2.0$ соответственно. Видно, что данный класс систем демонстрирует явный резонансный эффект в диапазоне

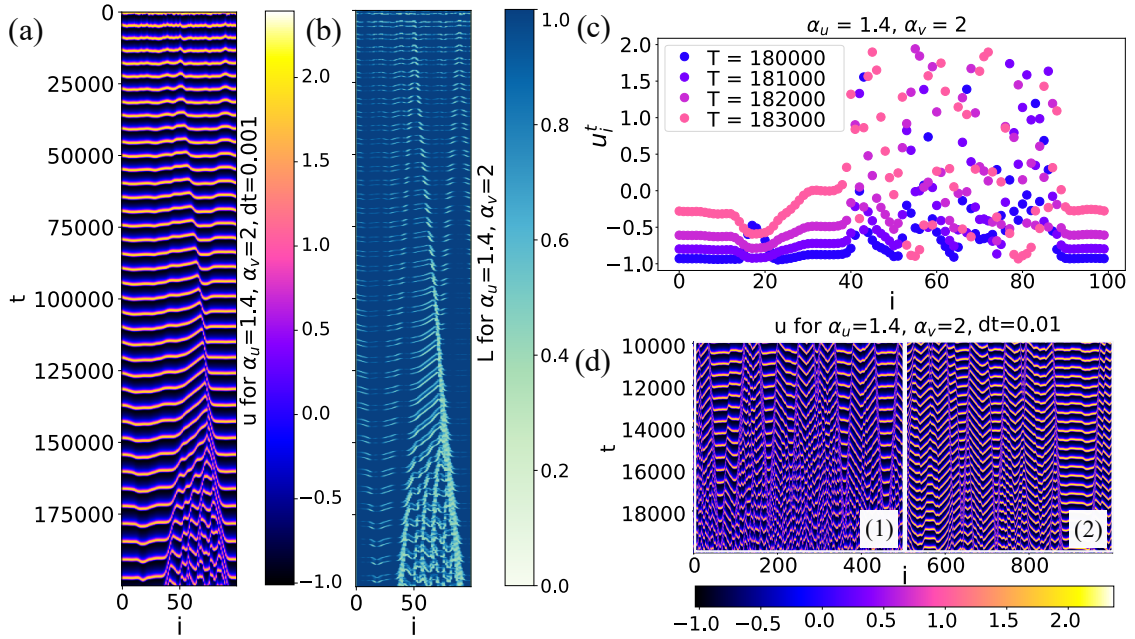


Рис. 3.5: (a) Формирование химерного состояния для [1D3C] системы с параметрами $I_{ext} = 2$ и $r = 0.001$ для случая нелокальной связи, заданной показателями $\alpha_u = 1.4$ и $\alpha_v = 2$ и начальными условиями [UDRIC] для u и v компонент. Для компоненты m использовались нулевые начальные условия. Расчеты проводились с параметром дискретизации $dt = 10^{-3}$. Параметр локального порядка (b), соответствующий реализации (a), отражает развитие некогерентности в системе. Фрагмент (c) показывает состояние системы с областями пространственно неоднородной активности, а также областями повышенной синхронизации для моментов времени $t = T$. Сравнение участков [1D3C] и [1D2C] систем, состоящих из $X_{max} = 10^3$ нейронов отображено на фрагменте (d).

$1.2 < \alpha_u < 1.6$. Зеленые области на графике отражают два возможных паттерна заполнения метрики $R(\alpha_u \leq 2, \alpha_v = 2.0)$ для 15 различных версий [UDRIC]. Это свидетельствует о важном свойстве [1D2C] системы — *селективности по отношению к внешнему стимулу и метастабильности*. В свою очередь, кардинально иной тип поведения демонстрирует [1D3C] система, проявляя более интенсивное развитие некогерентности при изменении параметра α_u , ответственного за нелокальность взаимодействия. Сравнительный анализ силы некогерентности $SI(\alpha_u \leq 2, \alpha_v = 2.0)$ для [1D2C] системы с $I_{ext} = 1.6$ и $I_{ext} = 2.0$, а также [1D3C] системы с $I_{ext} = 2.0$ представлен на фрагментах (c), (d) и (b) соответственно в зависимости от различных значений δ . Динамическая реализация [1D3C] системы относительно [UDRIC] представлена на Рис.3.5. Фрагмент (a) демонстрирует развитие химерной структуры при $(\alpha_u = 1.4, \alpha_v = 2.0)$, в свою очередь, соответствующее данному коллективному сценарию множество значений параметра локального порядка, ответственного за выделение пространственно когерентных и некогерентных участков, представлено на фрагменте (b). Состояние системы

для соответствующих временных тактов представлено на фрагменте (с). Сопоставление развития динамических режимов относительно единственного набора [UDRIC] для [1D3C] (1) и [1D2C] (2) систем, состоящих из $N = 10^3$ нейронов, с конфигурацией, организованной на базе ($\alpha_u = 1.4, \alpha_v = 2.0$), представлено на фрагменте (d). Таким образом, полученные данные свидетельствуют о значительно более интенсивном развитии некогерентности в [1D3C] системах по сравнению с [1D2C] системами.

3.1.4. Случай нулевых граничных условий

С формальной точки зрения, корректное определение дробного лапласиана в ограниченной области требует рассмотрения функции на отрезке с нулевыми граничными условиями. При этом, если нелинейная система имеет ненулевое устойчивое состояние, то границы будут являться источниками вторичного реакционного процесса и приведут к возмущению системы. В этом случае форма волнового фронта будет определяться как самим процессом реакции (на который влияют границы), так и взаимодействием с элементами центральной невозмущенной зоны, динамика которой определяется исключительно начальными условиями и нелинейными функциями [HR2], посредством супердиффузионного кинетического механизма. Основные результаты отражены на Рис. 3.6 для [1D2C] системы, с ($\alpha_u = 1.3, \alpha_v = 2.0$) и $I_{ext} = 1.6$ конфигурацией. На фрагменте (a) представлены состояния системы в указанные временные такты, отражающие сформированную пространственную некогерентность. Фрагмент (b) демонстрирует значения параметра локального порядка L_i^t для динамической реализации всей системы, подтверждая формирование некогерентного волнового фронта. В качестве начальных условий использовались стационарные значения системы (u^*, v^*), и поддерживались нулевые граничные условия, являющиеся источником вторичного реакционного возмущения.

3.2. Состояния частичной синхронизации, полученные на базе двумерных систем

Дальнейшее развитие подхода естественным образом осуществляется в терминах двумерной системы супердиффузионно-связанных нейронов. Следуя введенной системе обозначений, определим [2D2C] как двумерную двухкомпонентную

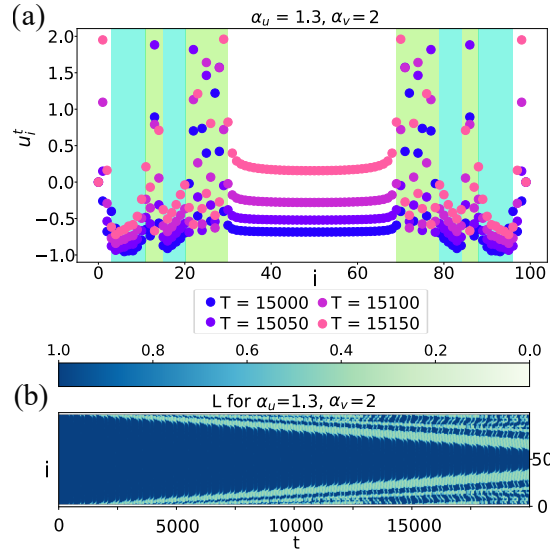


Рис. 3.6: Динамика [1D2C] системы с фиксированными границами, а также параметрами ($\alpha_u = 1.3, \alpha_v = 2$) и $I_{ext} = 1.6$. Состояния системы в определённые моменты времени представлены на фрагменте (a). Зелёным прямоугольником обозначена область некогерентного поведения. Синим прямоугольником обозначена область спонтанной синхронизации. Параметр локального порядка L (2.68), демонстрирующий распространение фронта некогерентности представлен на фрагменте (b).

систему с [HR2] нелинейностью, а [2D3C] — как двумерную трехкомпонентную систему с [HR3] нелинейностью.

Необходимо сразу сказать, что полное задание дробного оператора Лапласа в двумерном случае, должно обладать инвариантностью относительно вращения. Однако такой подход, с учетом развитой нелокальной специфики, привел бы к избыточно сложной конфигурации связей. Более того, хорошо известно, что структура кортикальной сети обладает развитой анизотропией, с выделением двух характерных направлений, формирующих слои и колонки между ними. Как следствие, мы используем анизотропный подход к формированию кинетической части, имеющий приложения в работах [71, 72, 194—198, 223, 224]:

$$(-\Delta_{x,y})^{\alpha_q/2} := (-\Delta_x)^{\alpha_q/2} + (-\Delta_y)^{\alpha_q/2}, \quad q = \{u, v\}. \quad (3.1)$$

Разностная схема в таком случае может быть модифицирована понятным образом

для [2D3C] системы:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 u_{i,n}^{t+1} = u_{i,n}^t + \\
 + \left[D_u r_u^{(x+)} \sum_{j=0}^{l^{(x+)}(i)} g_u^{(j)} u_{i-j+1,n}^t + D_u r_u^{(x-)} \sum_{j=0}^{l^{(x-)}(i)} g_u^{(j)} u_{i+j-1,n}^t \right] + \\
 + \left[D_u r_u^{(y+)} \sum_{j=0}^{l^{(y+)}(n)} g_u^{(j)} u_{i,n-j+1}^t + D_u r_u^{(y-)} \sum_{j=0}^{l^{(y-)}(n)} g_u^{(j)} u_{i,n+j-1}^t \right] + \\
 + dt f_u(u_{i,n}^t, v_{i,n}^t, m_{i,n}^t), \\
 v_{i,n}^{t+1} = v_{i,n}^t + \\
 + \left[D_v r_v^{(x+)} \sum_{j=0}^{l^{(x+)}(i)} g_v^{(j)} v_{i-j+1,n}^t + D_v r_v^{(x-)} \sum_{j=0}^{l^{(x-)}(i)} g_v^{(j)} v_{i+j-1,n}^t \right] + \\
 + \left[D_v r_v^{(y+)} \sum_{j=0}^{l^{(y+)}(n)} g_v^{(j)} v_{i,n-j+1}^t + D_v r_v^{(y-)} \sum_{j=0}^{l^{(y-)}(n)} g_v^{(j)} v_{i,n+j-1}^t \right] + \\
 + dt f_v(u_{i,n}^t, v_{i,n}^t), \\
 m_{i,n}^{t+1} = m_{i,n}^t + dt f_m(u_{i,n}^t, m_{i,n}^t).
 \end{array} \right. \quad (3.2)$$

Значения параметров, связанных с радиусом взаимодействия, $l^{(x+)} = l^{(y+)} = l^{(x-)} = l^{(y-)} = l - 1$ и $l = 10$. Пространственные индексы обозначены как i и n . Индекс, соответствующий дискретному временному такту, обозначен как t . Параметры, связанные с дискретизацией, имеют следующую форму:

$$r_q^{(x+)} = r_q^{(x-)} = -\frac{1}{2} \sec(\pi \alpha_q / 2) dt (dx)^{-\alpha_q}, \quad (3.3)$$

$$r_q^{(y+)} = r_q^{(y-)} = -\frac{1}{2} \sec(\pi \alpha_q / 2) dt (dy)^{-\alpha_q}. \quad (3.4)$$

Как видно, разностная схема (3.2), соответствующая определению (3.1), связана с анизотропной конфигурацией связи между нейронами. Весовые коэффициенты по двум избранным направлениям $g_q^{(j)}$, $q = \{u, v\}$ вводятся аналогично одномерному случаю:

$$g_q^{(j)} = (-1)^j \binom{\alpha_q}{j} = \frac{(-1)^j \Gamma(\alpha_q + 1)}{\Gamma(\alpha_q - j + 1) \Gamma(j + 1)}, \quad q = \{u, v\}. \quad (3.5)$$

Параметры дискретизации для [2D2C] и [2D3C] постановок: $dt = 0.005$, $dx = dy = 0.005$.

3.2.1. Двумерная двухкомпонентная система с супердиффузионным типом связи по одной компоненте

Основные результаты, отражающие состояния дискретной [2D2C] системы (3.2) для случая ($\alpha_u \leq 2, \alpha_v = 2.0$) представлены на Рис.3.7. В частности, рисунок де-

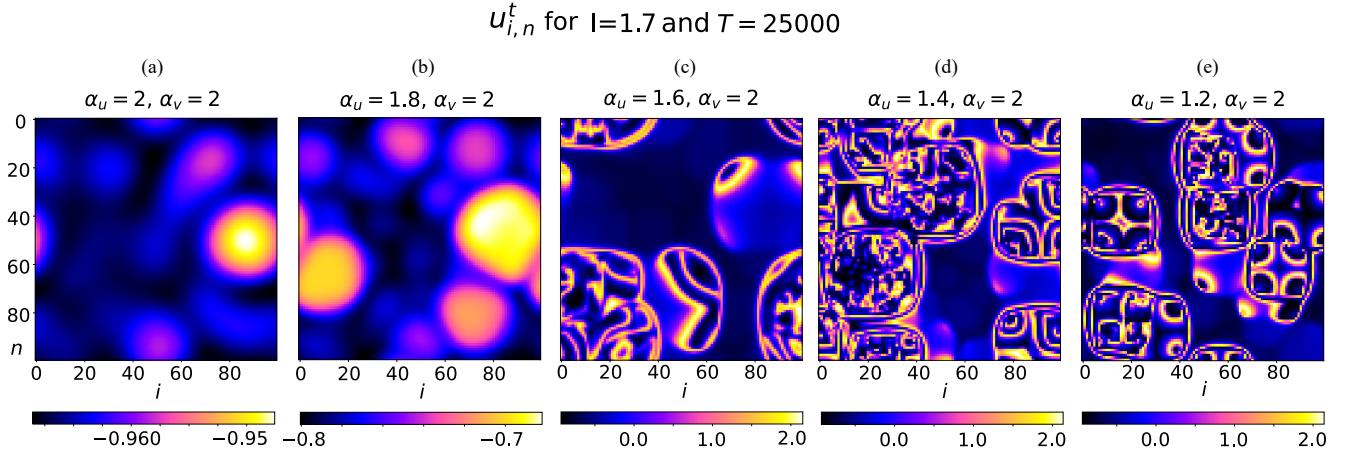


Рис. 3.7: Состояние [2D2C] системы в момент времени $T = 25000$ для различных показателей α_u дробного лапласиана с классическим диффузионным типом взаимодействия ($\alpha_v = 2$) для второй компоненты и $I_{ext} = 1.7$. Фрагменты (a) и (b) отображают развитие полной синхронизации в системе для $\alpha_u = 2.0$ и $\alpha_u = 1.8$ соответственно. Фрагмент (c) демонстрирует переходное состояние при $\alpha_u = 1.6$, характеризующееся изменением масштаба возникающих структур и ярко выраженным автоволновым поведением. Наконец, фрагменты (d) и (e) представляют собой химерные состояния, возникающие при $\alpha_u = 1.4$ и $\alpha_u = 1.2$. Результаты были получены с использованием единственного набора [UDRIC].

монстрирует независимое развитие нескольких систем с различными конфигурациями связи ($\alpha_u = 2.0, \alpha_v = 2.0$) (a), ($\alpha_u = 1.8, \alpha_v = 2.0$) (b), ($\alpha_u = 1.6, \alpha_v = 2.0$) (c), ($\alpha_u = 1.4, \alpha_v = 2.0$) (d), ($\alpha_u = 1.2, \alpha_v = 2.0$) (e) для единственного набора [UDRIC]. Видно, что по мере уменьшения показателя α_u система проявляет пространственно некогерентное поведение для определенных групп нейронов. Более подробное отражение динамических особенностей зарождения и развития состояний частичной синхронизации представлено на Рис.3.8 для случая ($\alpha_u = 1.2, \alpha_v = 2.0$) и $I_{ext} = 1.7$.

Детальный анализ конкретной конфигурации [2D2C] системы с супердиффузионной связью выявляет ряд особенностей. На фрагментах (a1–a3) показано согласование автоколебательной динамики с некогерентными режимами. Белой линией на фрагменте (a) выделена одномерная подсистема, динамика и состояния которой представлены на фрагментах (b) и (c), соответственно. Для наглядного разделения когерентных и некогерентных групп нейронов на фрагменте (d) пред-

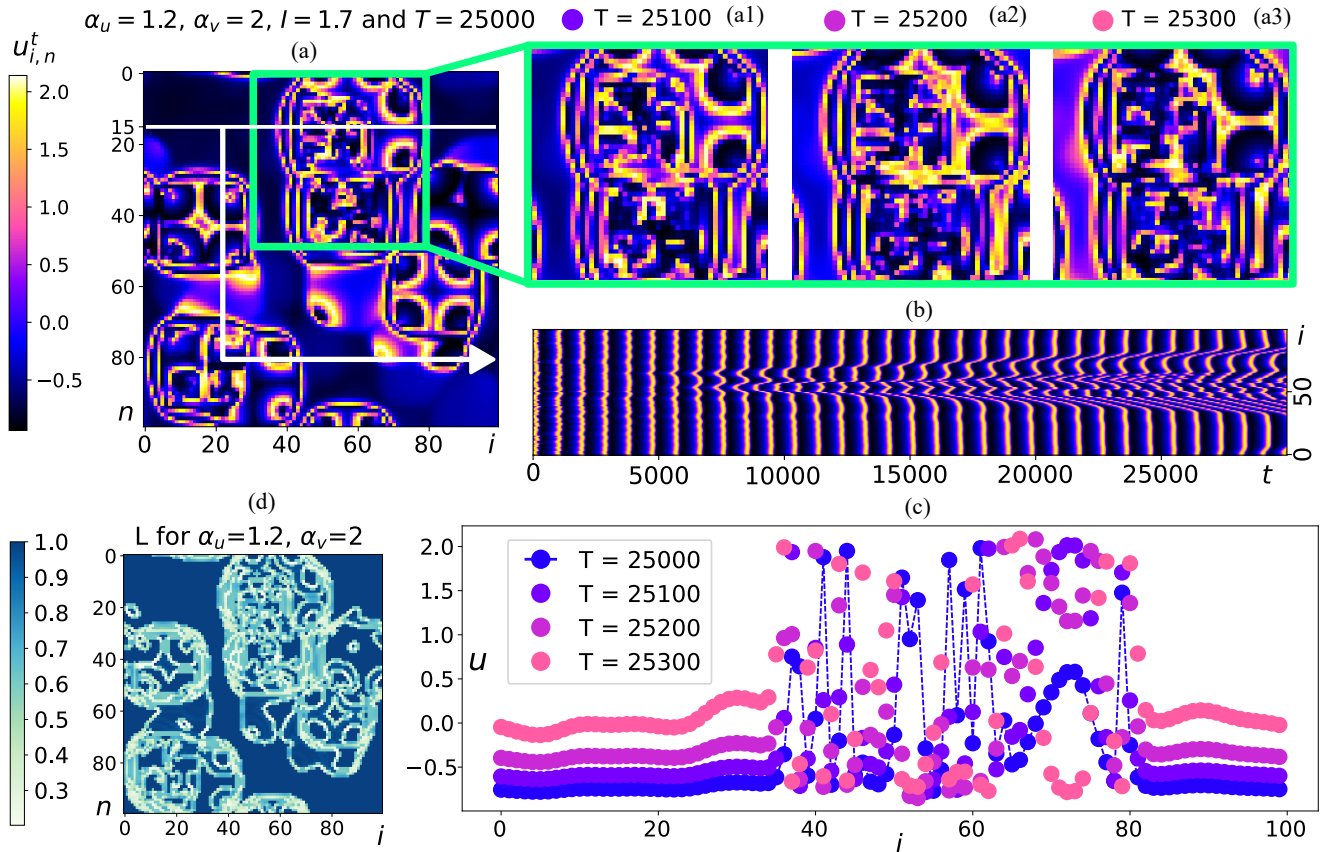


Рис. 3.8: Динамика структур, реализованная в [2D2C] системе с $\alpha_u = 1.2$ и $\alpha_v = 2.0$ для $I_{ext} = 1.7$. Фрагмент (a) демонстрирует динамические режимы, которые возникли в момент времени $T = 25000$ (аналогично фрагменту (e) на Рис.3.7). Развитие динамики в пределах указанной подобласти, отмеченной зеленым прямоугольником, продемонстрировано на фрагментах (a1), (a2) и (a3). Можно видеть, что система реализует изолированные области с независимой внутренней динамикой, характеризующиеся меньшими пространственными масштабами. Представление пространственно-временной динамики для одномерной подсистемы, отмеченной белой линией, продемонстрировано на фрагменте (b) и наглядно проявляет эволюцию химерного состояния в системе. Состояния одномерной подсистемы в указанные моменты времени продемонстрированы на фрагменте (c). Фрагмент (d) демонстрирует параметр локального порядка L (в соответствии с выражениями (3.6) и (3.7)) для $T = 25000$. Синий цвет соответствует зоне полной локальной синхронизации, белый — несинхронизированной зоне.

ставлен параметр локального порядка L , рассчитанный для двумерного случая ($d = 2$), приведенный на основе концептуального обоснования одномерного случая ($d = 1$):

$$L_{i,n}^t = \left| \frac{1}{2d+1} \sum_{i',n' \in \Omega_{i,n}} e^{\sqrt{-1}\phi_{i',n'}^t} \right|, \quad (3.6)$$

с соответствующей локальной переменной, агломерирующей в себе информацию об отношении компонент состояния:

$$\phi_{i,n}^t = \arctan\left(\frac{v_{i,n}^t}{u_{i,n}^t}\right). \quad (3.7)$$

Область $\Omega_{i,n}$ определяет четыре ближайших узла, включая данный (i, n) . Основным результатом текущего пункта состоит в том, что состояния частичной синхронизации могут возникать в распределенной двумерной супердиффузионной системе нейронов с [HR2] нелинейностью и внутренней анизотропией взаимодействия² для параметров, эквивалентных реализации состояний частичной синхронизации в одномерной системе.

3.2.2. Двумерная двухкомпонентная система с супердиффузионной связью по обоим компонентам

Для расширения общего понимания нелинейно-динамических процессов в системах с [2D2C] конфигурацией мы внедрили супердиффузию по обоим компонентам. С целью формирования общего представления о динамических реализациях, включающих состояния частичной синхронизации, было исследовано множество супердиффузионных конфигураций сетей в диапазоне параметров ($1.1 \leq \alpha_u \leq 2.0, 1.1 \leq \alpha_v \leq 2.0$). Для каждой конфигурации (α_u, α_v) рассчитывалась соответствующая метрика, отражающая уровень развития некогерентности в системе: фактор синхронизации $R(\alpha_u, \alpha_v)$, сила некогерентности $SI(\alpha_u, \alpha_v)$ (при $\delta_{SI} = 0.35$) и усредненный по пространственно-временной области параметр локального порядка $\langle L(\alpha_u, \alpha_v) \rangle_{r,t}$. В качестве аналитического расширения определения фактора синхронизации R на двумерный случай использовались следующие выражения:

$$R = \frac{\langle [F^t]^2 \rangle_t - \langle F^t \rangle_t^2}{1/N^2 \sum_{i,n} (\langle [u_{i,n}^t]^2 \rangle_t - \langle u_{i,n}^t \rangle_t^2)}, \quad (3.8)$$

²В данном случае анизотропный характер прямо связан в выделением двух характерных направлений в нелокальном итерационном отображении.

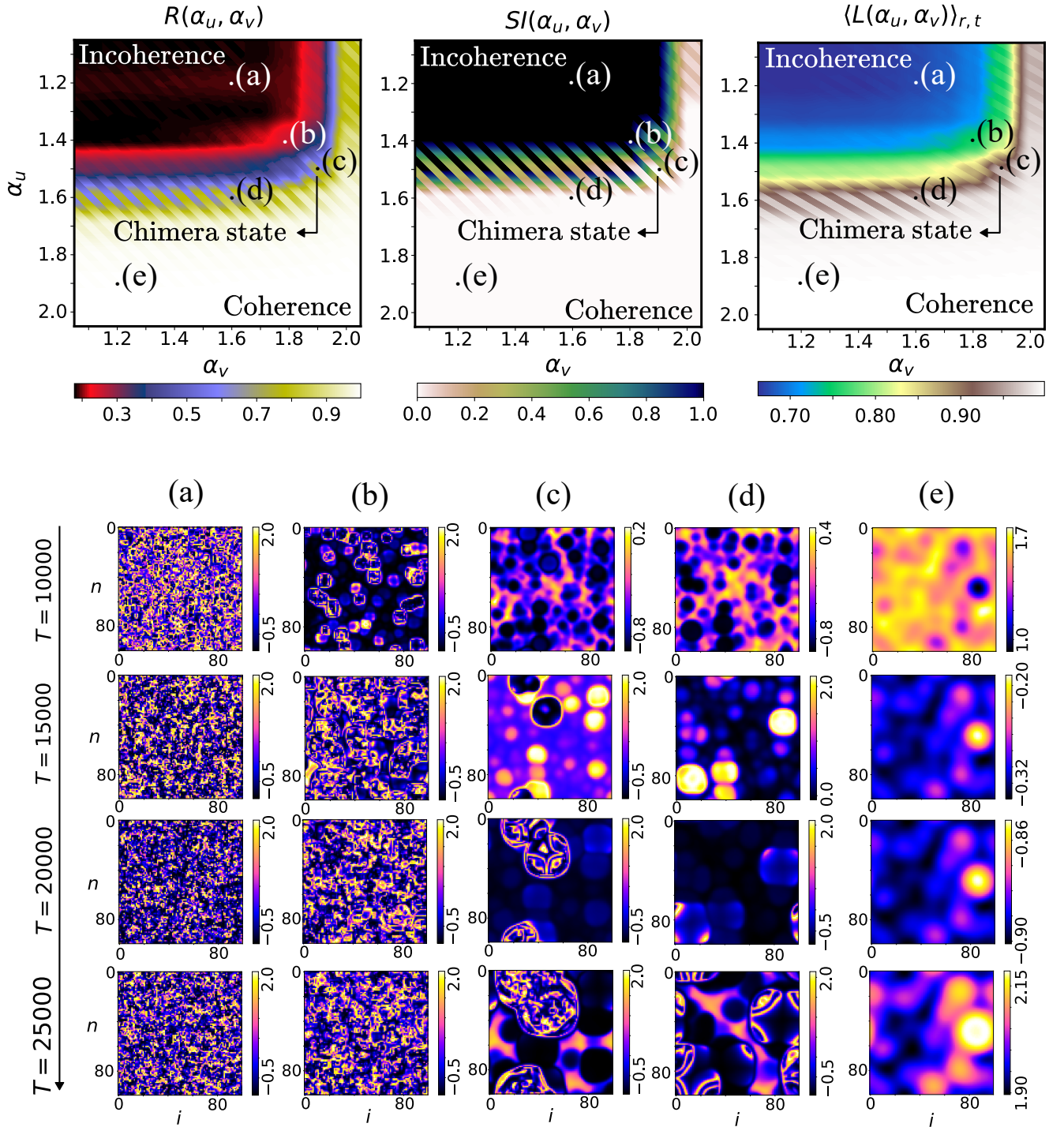


Рис. 3.9: Верхняя часть: зависимости $R(\alpha_u, \alpha_v)$, $SI(\alpha_u, \alpha_v)$ и $\langle L(\alpha_u, \alpha_v) \rangle_{r,t}$ для дробных показателей оператора Лапласа (α_u, α_v) , ответственных за тип конфигурации сетевой структуры, организованной на базе [2D2C] системы. Представлены интерполированные данные соответствующих метрик для двух наборов [UDRIC], при $I_{ext} = 1.9$. Заштрихованная область демонстрирует разницу в динамике в зависимости от начальных условий. Нижняя часть: примеры пространственно-временной динамики, организованной на базе начальных условий первого образца, относящиеся к определенным точкам в параметрическом пространстве конфигураций (α_u, α_v) .

$$F^t = \frac{1}{N^2} \sum_{i,n} u_{i,n}^t. \quad (3.9)$$

В свою очередь, двумерный аналог силы некогерентности SI был определен на основе следующих выражений:

$$SI = 1 - \frac{1}{M^2} \sum_{p,q=1}^M s(p, q), \quad (3.10)$$

$$\sigma(p, q) = \left\langle \sqrt{\frac{1}{m^2} \sum_{i=\Omega(m,p)}^{\Gamma(m,p)} \sum_{n=\Omega(m,q)}^{\Gamma(m,q)} [W_{i,n}^t - \langle W \rangle_r^t]^2} \right\rangle_t, \quad (3.11)$$

$$W_{i,n}^t = \sqrt{(u_{i,n}^t - u_{i+1,n}^t)^2 + (u_{i,n}^t - u_{i,n+1}^t)^2}. \quad (3.12)$$

и

$$s(p, q) = H\left(\delta_{SI} - \sigma(p, q)\right). \quad (3.13)$$

Как и для одномерной реализации, в данных формулах содержится функция Хевисайда $H(x)$, а также параметр, определяющий порог некогерентности δ_{SI} . Использование независимых подобластей, связано с соответствующим идейным расширением одномерной метрики (2.65). Значения параметра локального порядка для конкретных нейронов и временных фрагментов рассчитывались на основе (3.6).

Основные результаты зависимости соответствующих метрик от сетевых конфигураций отражены в верхней части Рис. 3.9 для двух различных конфигураций [UDRIC]. Заштрихованная область иллюстрирует различия в соответствующих реализациях. В нижней части рисунка представлены примеры динамических реализаций, соответствующих указанным конфигурациям. В частности, продемонстрирован переход от развития некогерентных режимов (а, б) к состояниям частичной синхронизации (с), дальнейшему развитию автоволновых процессов (д) и, наконец, развитию синхронизации при соответствующем изменении параметров (α_u, α_v) [2D2C] системы.

3.2.3. Двумерная трехкомпонентная система

Наконец, важно рассмотреть полный случай задания [2D3C] системы с [HR3] нелинейностью. В заданной полной формулировке на реализуемую динамику влияет параметр скорости изменения третьей компоненты r , существенно модифицируя автоколебательный режим точечной подсистемы по мере своего изменения. Состояние двумерной подсистемы (а), а также состояния (б) и динамика

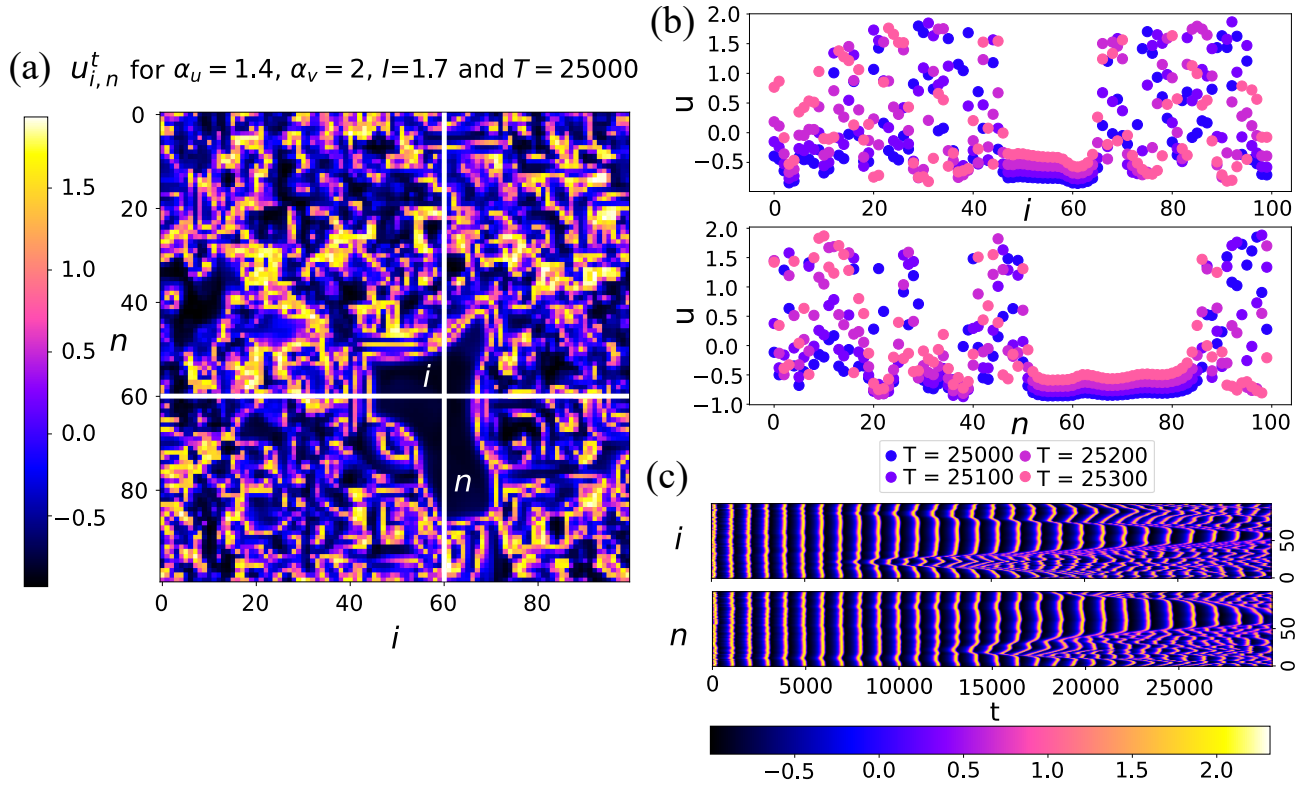


Рис. 3.10: Демонстрация основных динамических особенностей на примере состояний [2D3C] системы с параметрами $\alpha_u = 1.4$, $\alpha_v = 2.0$, $I_{ext} = 1.7$, $r = 0.001$ в момент $T = 25000$. Конфигурации, организованные на базе [2D3C] систем, демонстрируют более интенсивный переход к полной некогерентности при соответствующих значениях параметров. Фрагмент (а) представляет собой состояние системы в момент времени $T=25000$ с синхронизированной центральной частью и неоднородной внешней зоной. Фрагмент (b) — состояния одномерных подсистем, заданных вдоль соответствующих направлений и отмеченных белыми линиями на фрагменте (а). Фрагмент (с) — динамика одномерных подсистем за весь период моделирования.

(с) одномерных подсистем, заданных вдоль основных направлений, представлены на Рис.3.10 для значения $r = 10^{-3}$ и $I_{ext} = 1.7$. Видно, что внедрение слабого влияния третьей компоненты приводит к иному процессу, характеризующемуся более ярко выраженным сценарием развития некогерентной области.

Принципиально иная картина наблюдается при увеличении темпа эволюции третьей компоненты $r = 10^{-2}$. Стоит отметить, что трехкомпонентная природа системы (при заданных параметрах) сопряжена с переходом от регулярных автоколебаний к режиму пачечной активности. Следствием этого является закономерный переход каждого элемента системы в предпороговое (релаксационное) состояние со временем. При этом коллективная динамика в рамках заданного процесса может демонстрировать состояния частичной синхронизации. Основные результаты, соответствующие данному случаю, представлены на Рис.3.11. В частности,

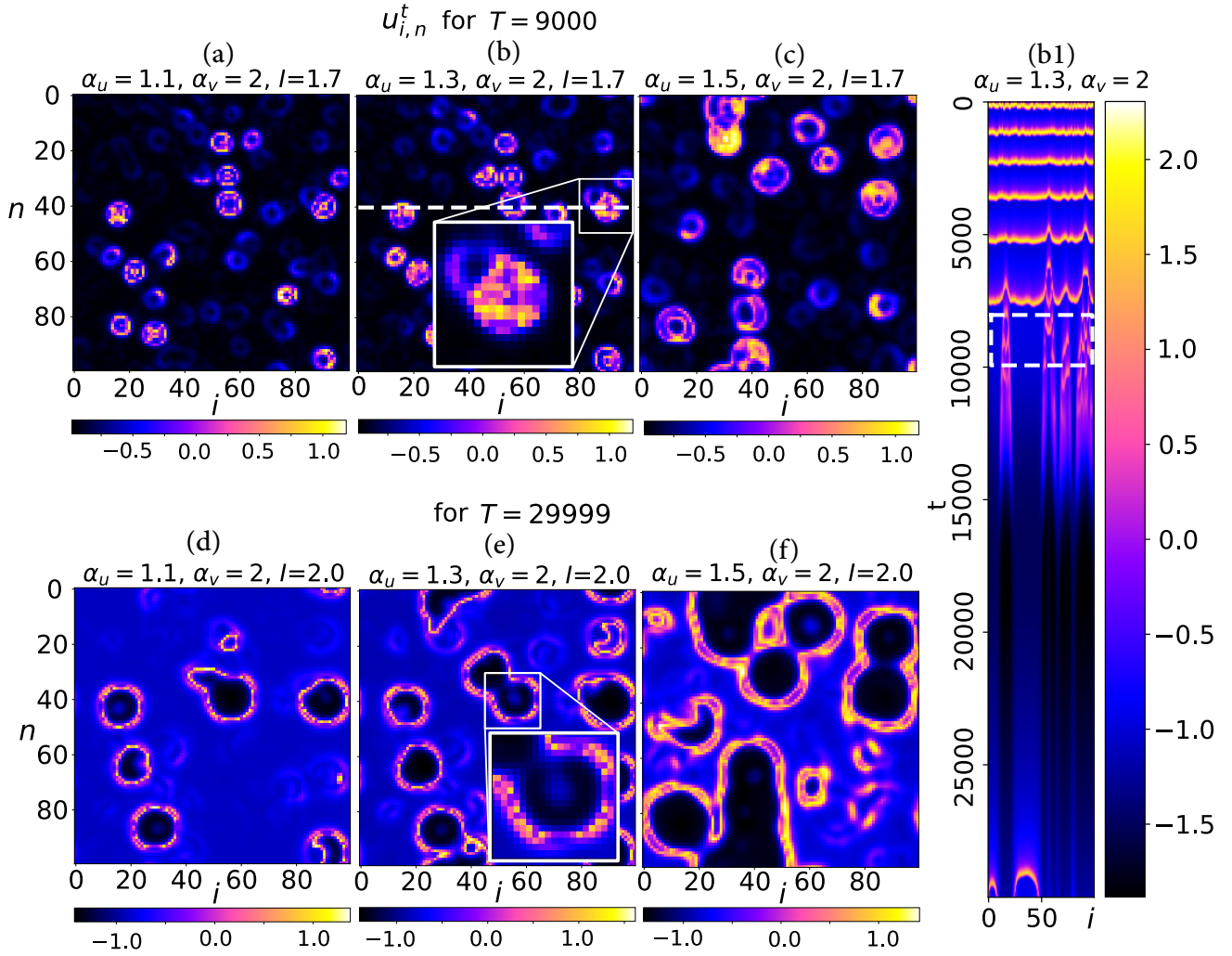


Рис. 3.11: Состояния [2D3C] системы с дробными показателями Лапласа ($\alpha_u < 2, \alpha_v = 2$) для параметра скорости изменения третьей компоненты $r = 0.01$. Фрагменты (a) ($\alpha_u = 1.1$), (b) ($\alpha_u = 1.3$) и (c) ($\alpha_u = 1.5$) представляют собой состояния системы в момент времени $T = 9000$ с параметром внешнего ионного тока $I_{ext} = 1.7$. Фрагмент (b1) соответствует одномерной подсистеме, обозначенной горизонтальной линией на рисунке (b), и демонстрирует динамику формирования состояния частичной синхронизации и последующего перехода к состоянию полной синхронизации, связанного с локальным затуханием. Прямоугольник на фрагменте (b1) представляет приблизительное время, в течение которого химеры были отчетливо различимы. Фрагменты (d) ($\alpha_u = 1.1$), (e) ($\alpha_u = 1.3$) и (f) ($\alpha_u = 1.5$) показывают состояния системы в финальный момент времени $T = 29999$ для параметра $I_{ext} = 2.0$. В отличие от (b1), система вышла из режима глобальной синхронизации с образованием структур, похожих на кольцевые химеры. Квадратные вставки на фрагментах (b) и (e) сделаны для удобства демонстрации наиболее характерных областей.

фрагменты (a), (b) и (c) отражают возникновение некогерентных участков при переходе системы к предпороговому состоянию для момента $T = 9000$ и значения $I_{ext} = 1.7$. В свою очередь, при проявлении пачечной активности в системе реализуются кольцевые химеры после выхода системы из предпорогового состояния

на поздних временах $T = 29999$ для $I_{ext} = 2.0$. Всё вышеизложенное свидетельствует о возможном богатстве пространственно-динамических реализаций, поддерживающих различные виды состояний частичной синхронизации на базе двумерных систем.

3.3. Выводы главы

В рамках данной главы были рассмотрены ансамбли нелокально связанных нейронов, сформированные на базе $[nDmC]$, $n = 1, 2$; $m = 2, 3$ систем с супердиффузионной связью. Нелокальный тип взаимодействия в такой постановке для каждой компоненты u и v характеризуется показателями α_u и α_v дробного оператора Лапласа $-(-\Delta)^{\alpha_q/2}$, $q = \{u, v\}$. В двух- и трехкомпонентных одно- и двумерных системах был обнаружен широкий спектр химерных состояний, зависящих как от характерных параметров нелинейных функций модели Hindmarsh-Rose, так и от показателей дробного лапласиана α_u и α_v . В рамках данного параметрического пространства удалось обнаружить существование синхронизации, волновых процессов разного масштаба, химерных и химероподобных структур.

Было установлено, что изолированные некогерентные области могут оказывать влияние на крупномасштабные пульсации. Данный процесс предполагает возможную взаимную связь между химерами и крупномасштабными кортикальными волнами, которые имеют важное значение для задач нейробиологии (см., например [225]).

Для $[nDmC]$, $n = 1, 2$; $m = 2, 3$ систем были вычислены: фактор синхронизации $R(\alpha_u, \alpha_v)$, параметр локального порядка $L(\alpha_u, \alpha_v)$ (для одномерного случая) и $\langle L(\alpha_u, \alpha_v) \rangle_{r,t}$ (для двумерного случая) и проведена оценка силы некогерентности $SI(\alpha_u, \alpha_v)$. Все три метрики дают единое представление о параметрических областях, для которых характерно развитие полной некогерентности, химерных состояний и синхронизации. Наконец, результаты, представленные для $[2D2C]$ и $[2D3C]$ систем, хорошо согласуются с результатами для $[1D2C]$ и $[1D3C]$ систем. Как следствие, можно утверждать, что состояния частной синхронизации без потери общности могут быть исследованы на базе структурно более простых одномерных систем с супердиффузионной связью.

Глава 4

Однородные и неоднородные синхронизационные переходы, воспроизведенные на базе ансамблей нейронов с супердиффузионной конфигурацией

Результаты предыдущей главы помогли сформировать четкое представление о возможности возникновения состояний частичной синхронизации, включая химерные и уединенные состояния, на базе сетей с супердиффузионной топологией связи. Данный подход базировался на использовании разностной схемы для дробного оператора Лапласа $-(-\Delta)^{\alpha_q/2}$, $q = \{u, v\}$, а также на одномерных [1D2C], [1D3C] и двухмерных [2D2C], [2D3C] многокомпонентных конфигурациях. При этом имеется особая необходимость в формировании более комплексного представления о нелинейно-динамических особенностях реализации состояний частичной синхронизации, связанной с бифуркационными процессами в супердиффузионных сетях. Данная задача имеет принципиальное значение для последующего развития модели и возможности формировать на ее основе сети с модульной топологией, более приближенные к актуальным задачам теоретической нейронауки, а также глобально к теории сложных систем.

4.1. Подробный анализ параметрического пространства супердиффузионных конфигураций

В предыдущей главе была продемонстрирована связь между реализацией состояний частичной синхронизации, воспроизведенных на базе [1D2C] и [2D2C] систем для схожего диапазона динамических параметров, а также параметров, ответственных за кинетическую часть. Следствием данного факта является возможность исследования ключевых особенностей формирования состояний частичной синхронизации на базе одномерных систем, что приносит явные преимущества как в рамках аналитического, так и практического контекста.

Для задач текущей главы мы рассмотрели $[nDmC]$, $n = 1, 2$; $m = 2, 3$ системы с $[HRm]$ нелинейностью и супердиффузионной топологией связи, состоящую из $N = 50$ нейронов, формируя ярко выраженную дискретную основу с [UDRIC] начальными условиями. Данные суждения позволили существенно увеличить точность разбиения параметрического пространства и сформировать детальную карту бифуркационных процессов в параметрическом пространстве показателей дробного оператора Лапласа (α_u, α_v) . В рамках данной главы использовались значения дискретизации: $dt = dx = 0.005$. Результаты для полного диапазона параметров, соответствующих супердиффузионной конфигурации, представлены на Рис.4.1, а также изучены в статье [226]. В частности, для формирования исчерпывающего представления на рисунке продемонстрировано сопоставление трех различных метрик: *Фактора синхронизации* $R(\alpha_u, \alpha_v)$ (2.63), *Силы некогерентности* $SI(\alpha_u, \alpha_v)$ (2.65) (для случая $\delta_{SI} = 0.4$ и $M = 10$), а также классической *Меры пространственной корреляции* $g_0(\alpha_u, \alpha_v)$ (2.71). Рисунок дополнен соответствующими обозначениями реализованных динамических режимов для сетей с заданной конфигурацией (α_u, α_v) : Inc — некогерентность, Ch — химерное состояние, SS — уединенное состояние, PW — организация в виде фазовых волн, Sync — синхронизация, Ch+PW — согласованное существование химер и фазовых волн. Результаты, полученные в рамках данного исследования, имеют топографическое сходство с предыдущими реализациями параметрического пространства для [1D2C] (Рис. 3.3) и [2D2C] (Рис. 3.9) систем, однако демонстрируют новое свойство, наиболее выраженное в диапазоне конфигураций $(1.4 < \alpha_u < 1.6, 1.8 < \alpha_v \leq 2)$, заключающееся в резком разбиении параметрического пространства. Сопоставление данной резконеоднородной области с

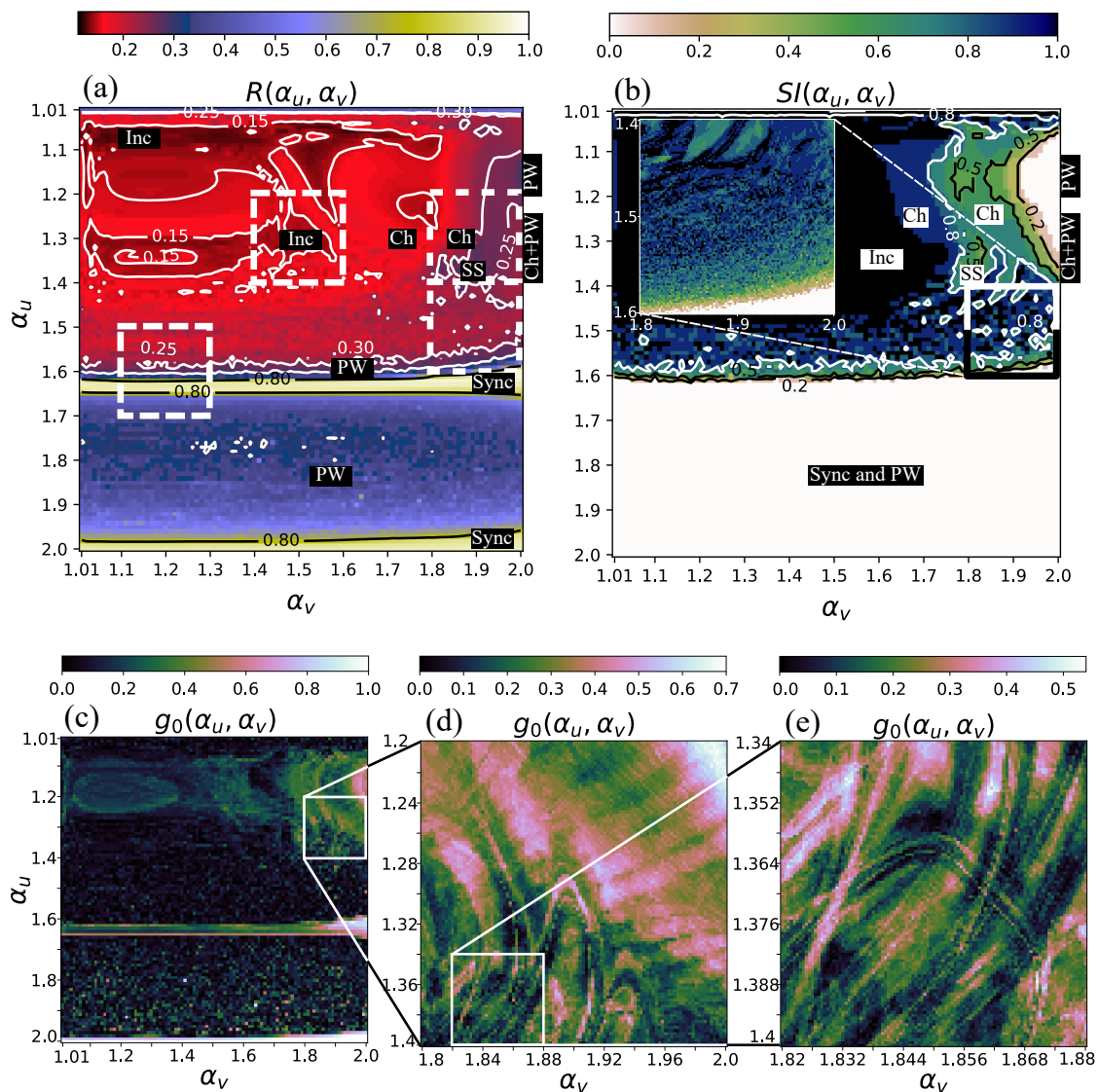


Рис. 4.1: Динамические режимы, возникающие в параметрическом пространстве дробных показателей оператора Лапласа (α_u, α_v) , ответственных за особенности конфигурации сети для $N = 50$ нейронов. В качестве индикаторов развития состояний с различной степенью синхронизации, используются три метрики: *Фактор синхронизации* $R(\alpha_u, \alpha_v)$ (а), *Сила некогерентности* $SI(\alpha_u, \alpha_v)$ (б) и *Мера пространственной корреляции* $g_0(\alpha_u, \alpha_v)$ (с–е). Пунктирные прямоугольники на фрагменте (а) обозначают области, которые будут исследованы более подробно на Рис.4.2. Обозначения связывают конкретные конфигурации сетей (α_u, α_v) с формированием динамических режимов синхронизации (Sync), фазовых волн (PW), химер и фазовых волн (Ch+PW), уединенных состояний (SS) и химер (Ch). Вставка на фрагменте (б) демонстрирует область неоднородного синхронизационного перехода для указанного диапазона параметров ($1.4 \leq \alpha_u \leq 1.6$, $1.8 \leq \alpha_v \leq 2.0$). Фрагменты (с)–(е) демонстрируют значения $g_0(\alpha_u, \alpha_v)$ для финального момента времени $T = 29999$ эволюции системы. Фрагменты (д) и (е) проявляют нитевидные структуры в параметрическом пространстве, характерные для диапазона параметров между областью однородного и неоднородного синхронизационного перехода, и связанные с развитием уровня некогерентности для конкретных конфигураций (α_u, α_v) в финальный момент времени.

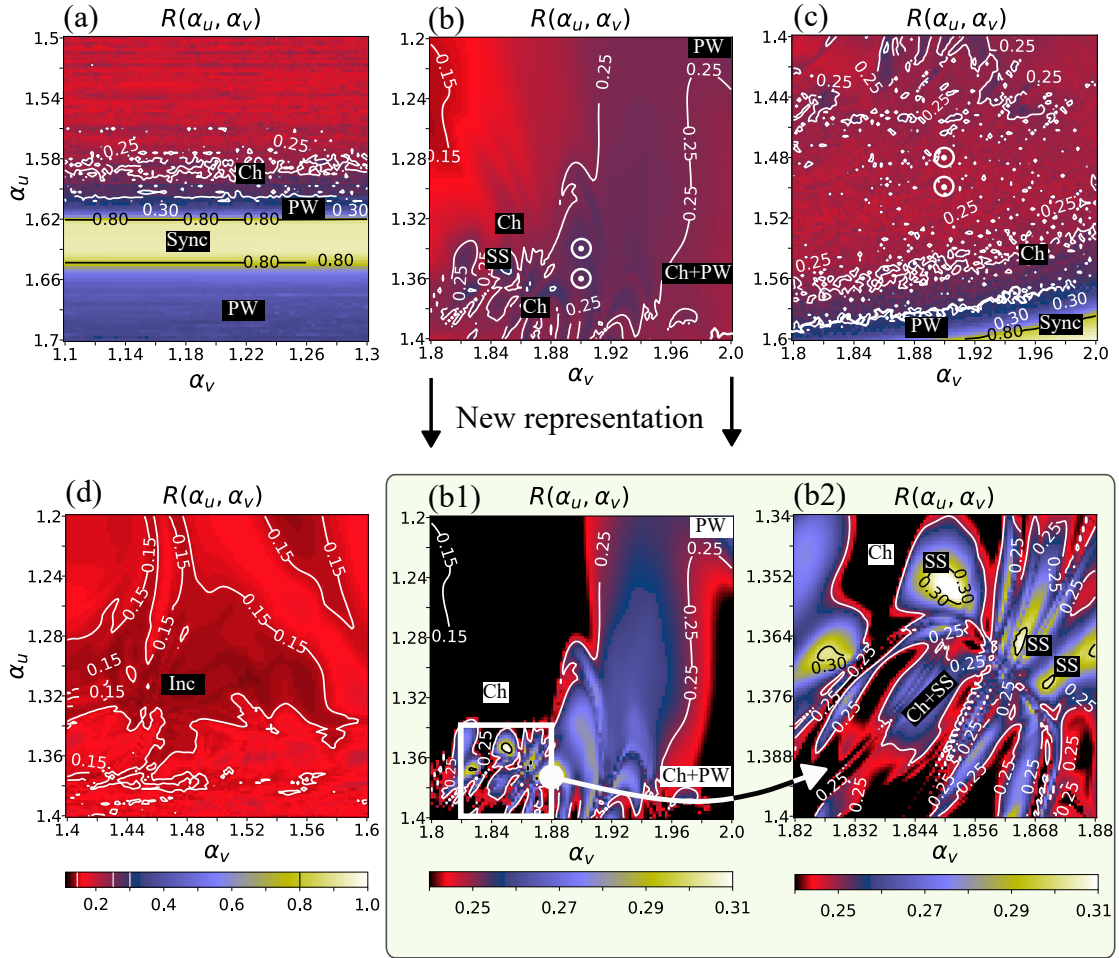


Рис. 4.2: Бифуркационные диаграммы конкретных областей, продемонстрированных на Рис. 4.1 (а), на основе фактора синхронизации $R(\alpha_u, \alpha_v)$. На фрагменте (а) [снизу вверх] продемонстрирован переход от фазовых волн (PW) к развитию пространственного когерентного режима (Sync) с дальнейшим развитием химерных состояний (Ch) и некогерентных режимов (Inc). Фрагмент (b) иллюстрирует область, включающую области химер (Ch) и фазовых волн (PW), а также режимы, сочетающие химеры и крупномасштабные фазовые волны (Ch+PW). Фрагмент (b1) — это дополнительное представление, демонстрирующее небольшие вариации в метрике $R(\alpha_u, \alpha_v)$. Фрагмент (b2) отображает отмеченную область из (b1) и выявляет неоднородную структуру параметрического пространства при малых изменениях конфигураций супердиффузионных сетей. Фрагмент (c) соответствует области, которая аналогична вставке на Рис.4.1 (b), с неоднородным синхронизационным переходом. Фрагмент (d) иллюстрирует область, соответствующую различным скоростям развития некогерентного режима. Обозначения: (Sync) — синхронизация, (PW) — фазовые волны, (Ch) — химерное состояние, (SS) — одиночные состояния, (Ch+PW) — сосуществование химер и фазовых волн, (Inc) — развитие некогерентного состояния, (Ch+SS) — неидеальное химерное состояние (сосуществование химер и уединенных состояний).

однородными областями характеризует реализации динамической системы с различным уровнем развитой некогерентности и с формальной точки зрения может быть сопряжено с различными бифуркационными процессами. В частности, в случае *однородного синхронизационного перехода* мы обнаруживаем суперкри-

тическую бифуркацию, в свою очередь, *резконеоднородный синхронизационный переход* может быть отождествлен с каскадом субкритических бифуркаций ¹.

Для более детального сопоставления сетевых конфигураций, принадлежащих параметрической области однородного и неоднородного синхронизационного перехода, на Рис.4.1 также указаны параметрические области (белые прямоугольники), отраженные на Рис.4.2 для $R(\alpha_u, \alpha_v)$. На фрагменте (а) продемонстрирован синхронизационный переход от конфигураций, поддерживающих образование фазовых волн и синхронных режимов, к химерным состояниям. Особое внимание следует уделить фрагментам (b) и (c). На них явно представлены области с динамическими режимами, характерными для однородного и неоднородного синхронизационных переходов. Белые круги указывают на конкретные конфигурации, которые представлены на Рис.4.3. В частности, фрагменты (b1) и (b2) демонстрируют карту развитых динамических режимов в другой цветовой шкале для более удобного разделения развитых динамических режимов. Наконец, фрагмент (d) иллюстрирует однородность в параметрической области, соответствующей развитию некогерентности.

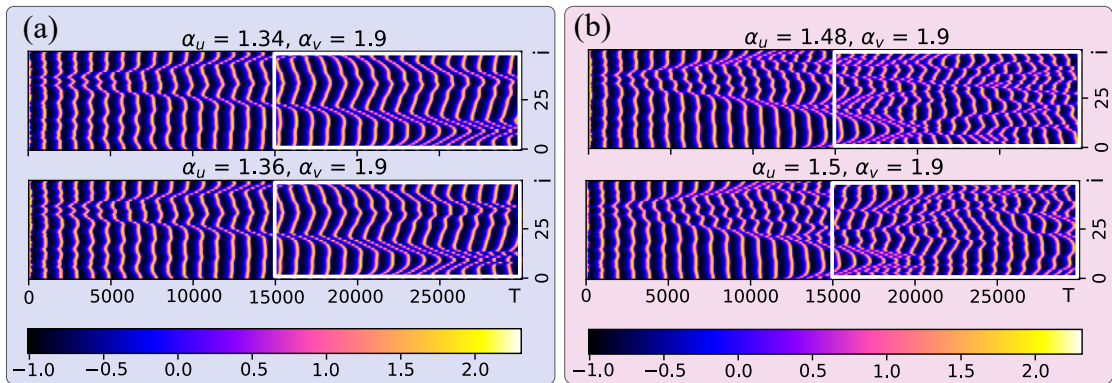


Рис. 4.3: Динамика развития химерных состояний для двух разных областей параметрического пространства (α_u, α_v) . Шаг по параметру между соответствующими значениями показателя $\delta\alpha_u = 0.02$ дробного оператора Лапласа (для каждой области) одинаков. Как видно из участков, обозначенных белыми прямоугольниками, конфигурации сети, организованные на основе $(\alpha_u = 1.34, \alpha_v = 1.9)$ и $(\alpha_u = 1.36, \alpha_v = 1.9)$ (а), показывают схожую динамику. В то же время конфигурации с $(\alpha_u = 1.48, \alpha_v = 1.9)$ и $(\alpha_u = 1.5, \alpha_v = 1.9)$ (b) демонстрируют развитие различных режимов. Точки в пространстве параметров дробных показателей оператора Лапласа (α_u, α_v) , соответствующие данным конфигурациям, дополнительно помечены на Рис.4.2 (b, c).

¹Заметим при этом, что последнее сопоставление является в некотором смысле «приближенным», ибо явление гистерезиса, в общепринятом ключе связанное с субкритическим типом бифуркаций, дополнительно исследовано не было.

4.2. Модификация метрики и выявление дополнительных особенностей параметрического пространства

Нелокальная форма взаимодействия между нейронами, организованная на базе супердиффузионной схемы взаимодействия, может быть идейно-независимым образом использована для модификации классической меры пространственной корреляции $g_0(\alpha_u, \alpha_v)$ (2.71). При этом принципиальная значимость данной постановки не ограничивается использованием модифицированной метрики лишь для систем с супердиффузионной конфигурацией, а может быть применена для более широкого спектра задач, связанных с выявлением и анализом состояний частичной синхронизации в сложных системах с различной конфигурацией внутренних связей. Основные результаты данного пункта изложены в работе [227].

4.2.1. Формирование спектра дробных мер пространственной корреляции

Первоначальный подход к обобщению может быть определен через дробный оператор Лапласа $\hat{\mathbb{F}}\{(-\Delta)^{\alpha/2} f(\vec{r})\}(\vec{k}) = |\vec{k}|^\alpha \hat{\mathbb{F}}\{f(\vec{r})\}(\vec{k})$, где $\hat{\mathbb{F}}(\cdot)(\vec{k})$ — оператор преобразования Фурье [191]. Как уже было продемонстрировано в предыдущих главах, в одномерном случае при рассмотрении величин внутри конечной области можно прийти к определению, выраженному через левостороннюю и правостороннюю производные Римана–Лиувилля (см. [110, 228, 229]):

$$-(-\Delta)^{\alpha/2} f = -\frac{1}{2\cos(\pi\alpha/2)} \left[{}_a D_x^\alpha f + {}_x D_b^\alpha f \right], \quad (4.1)$$

и, как следствие, в дискретном случае, на основе представления, связанного с численной аппроксимацией дробных производных Грюнвальда–Летникова со здвиговой конфигурацией [230, 231]:

$$-(dx)^\alpha (-\Delta)^{\alpha/2} f \rightarrow -\frac{1}{2\cos(\pi\alpha/2)} \left(\sum_{j=0}^{i+1} J_\alpha^{(j)} f_{i+1-j}^t + \sum_{j=0}^{N-i+1} J_\alpha^{(j)} f_{i-1+j}^t \right), \quad \alpha \in (1, 2]. \quad (4.2)$$

Следует дополнительно отметить, что данный переход от континуального представления к дискретному осуществляется при соблюдении определенных условий, указанных в [228]. С точки зрения задач текущей работы, мы опираемся ис-

ключительно на дискретный подход как на самостоятельную и независимую единицу. Континуальное представление было введено в качестве наводящей идеи перехода от классического определения к дробному. В частности, из последнего соотношения можно определить конечную разность:

$$\hat{D}_\alpha f = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=0}^{R_1(i)} J_\alpha^{(j)} f_{i+1-j}^t + \sum_{j=0}^{R_2(i)} J_\alpha^{(j)} f_{i-1+j}^t \right), \quad (4.3)$$

с $R_1(i) = i + 1$, $R_2(i) = N - i + 1$ и весовыми коэффициентами, определенными в следующей форме:

$$J_\alpha^{(j)} = (-1)^j \binom{\alpha}{j} = \frac{(-1)^j \Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha - j + 1) \Gamma(j + 1)}. \quad (4.4a)$$

Последняя формулировка может быть сведена к итерационному соотношению:

$$J_\alpha^{(0)} = 1 \text{ и } J_\alpha^{(j)} = -\frac{\alpha - j + 1}{j} J_\alpha^{(j-1)} \text{ for } j = 1, 2, \dots \quad (4.4b)$$

Нетрудно заметить, что при дробном показателе $\alpha = 2$ выражения (2.70), (4.2) и (4.3) становятся эквивалентными друг другу:

$$\begin{aligned} \hat{D}f &\equiv \hat{D}_2 f = \frac{1}{2} \left[\hat{d}_h^2 \left\{ f(x+h) \right\} + \hat{d}_{-h}^2 \left\{ f(x-h) \right\} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_{j=0}^2 (-1)^j \binom{2}{j} f(x - [j-1]h) + \sum_{j=0}^2 (-1)^j \binom{2}{j} f(x + [j-1]h) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[f(x+h) - 2f(x) + f(x-h) + f(x-h) - 2f(x) + f(x+h) \right] = \\ &= f(x+h) - 2f(x) + f(x-h) \rightarrow f_{i+1}^t - 2f_i^t + f_{i-1}^t. \quad (4.5) \end{aligned}$$

Поскольку большинство дискретных динамических реализаций $f_{(\cdot)}$ связанных осцилляторов организовано с периодическими граничными условиями, имеет особый смысл ввести эту особенность в соответствующую разностную схему. При такой постановке задачи удобно выбрать значения $R_1(i) = R_2(i) = R$, сопоставимыми с линейными размерами N рассматриваемых систем. В рамках представленных ниже реализаций использовались значения $R = N - 1$.

С учетом вышеизложенного, становится возможным перейти от сравнения локальной кривизны $|\hat{D}f|$ близлежащих элементов к определению некоторой обобщённой метрики $|\hat{D}_\alpha f|$, в пределе сводящейся к классической ($|\hat{D}_2 f| \equiv |\hat{D}f|$).

На базе новых реализаций $|\hat{D}_\alpha f|$ аналогичным образом могут быть построены нормированные плотности: $g(|\hat{D}_\alpha f|)$ для различных показателей α . Основные различия между классическим и дробным подходами отображены на Рис. 4.4.

Двойственность определений (4.2) и (4.3) обусловлена двойственным подходом к обобщению дробных разностей, которые, в свою очередь, основаны на определении дробного оператора Лапласа и на прямом подходе соответственно. В силу аддитивной природы соответствующего множителя в (4.2), а также сравнительной простоты построения $g(|\hat{D}_\alpha f|)$ при $\alpha \rightarrow 1$, в качестве базового определения разумно выбрать (4.3).

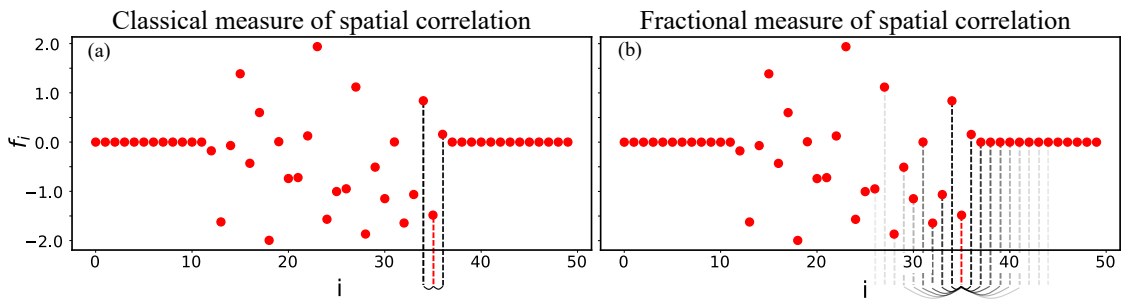


Рис. 4.4: Пример, иллюстрирующий основные различия между классической (a) и дробной (b) мерами пространственной корреляции. Сравнение проводится относительно заранее выбранного элемента f_i^t (обозначен пунктирной красной линией) предварительно сгенерированной выборки $f_{(\cdot)}^t$. Как показано в части (a), сравнение в классическом смысле основывается на значениях ближайших элементов ($f_{i-1}^t, f_i^t, f_{i+1}^t$). В свою очередь, введение дробной центральной разности задает нелокальное сопоставление ($\dots, f_{i+1-j}^t, \dots, f_i^t, \dots, f_{i-1+j}^t, \dots$) с $j = 0, 1, 2, \dots$ и соответствующими весами, зависящими от параметра α (b). Ослабление цветов пунктирных линий соответствует уменьшению весов для удаленных элементов при конкретной реализации $\alpha < 2$. В пределе $\alpha \rightarrow 2$ часть (b) преобразуется в часть (a).

Выражение для дробной меры пространственной корреляции может быть представлено в общем виде:

$$g_0(\alpha, t) = \int_0^{\delta_\alpha} g(t; |\hat{D}_\alpha f|) d|\hat{D}_\alpha f|. \quad (4.6)$$

Учитывая дискретную природу изучаемых реализаций динамических систем, а также конечное число разностных значений, возникающих при повышении точности разбиения, и принимая во внимание форму обозначений, использованную в [222], мы можем записать следующее выражение:

$$g_0(\alpha, t) = \sum_{|\hat{D}_\alpha f|=0}^{\delta_\alpha} g(t; |\hat{D}_\alpha f|). \quad (4.7)$$

4.2.2. Применение дробной меры пространственной корреляции

Дробная мера пространственной корреляции $g_0(\alpha)$ использует дополнительный параметр α , который определяет организацию нелокальной специфики соответствующих дробных разностей $|\hat{D}_\alpha f|$ в соответствии с (4.3).² В данном контексте особый интерес представляет исследование отклика этой метрики $g_0(\alpha)$ как функции параметра α для различных типичных выборок $f(\cdot)$, содержащих режимы частичной синхронизации.

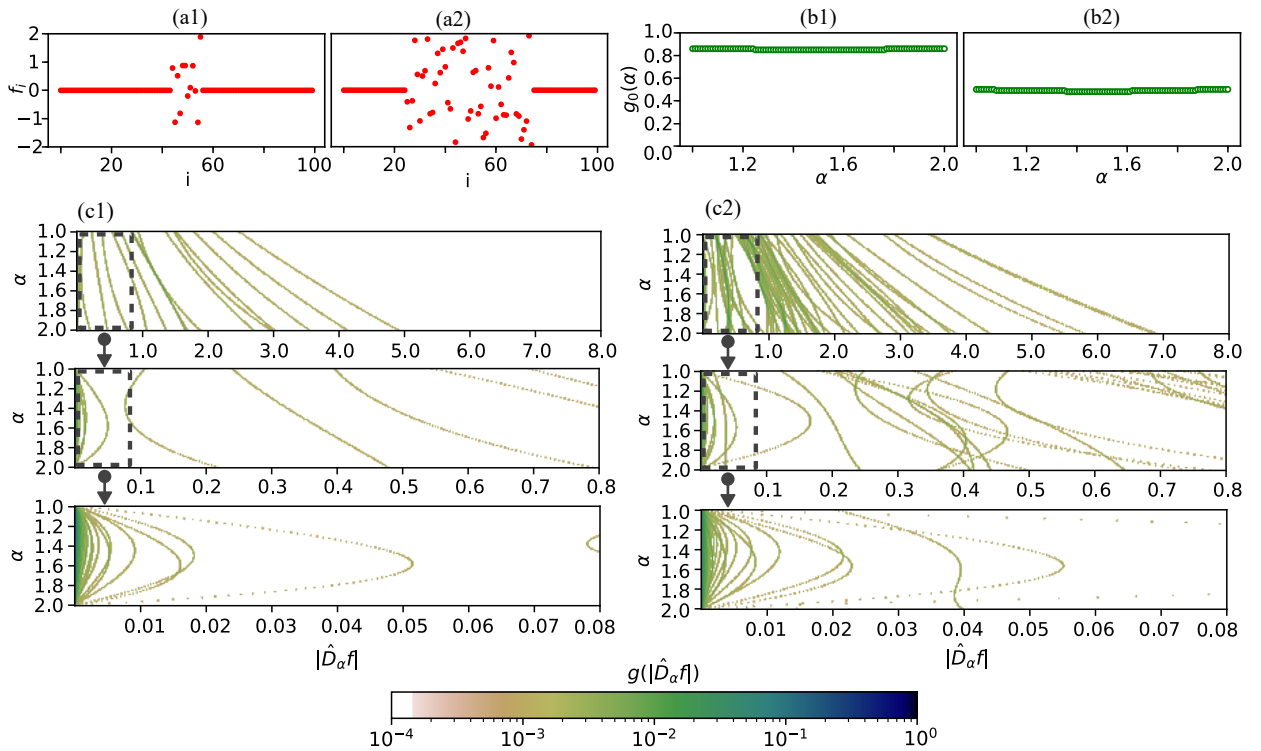


Рис. 4.5: Связь режимов частичной синхронизации со значением дробной меры пространственной корреляции $g_0(\alpha)$. Фрагменты (a1) и (a2) показывают предварительно сгенерированные выборки, объединяющие области синхронизации с различным количеством некогерентных элементов. Фрагменты (b1) и (b2) представляют спектр дробных мер пространственной корреляции $g_0(\alpha)$ для различных параметров α , включая классическую меру пространственной корреляции (при $\alpha = 2$). Фрагменты (c1) и (c2) демонстрируют спектр $g(|\hat{D}_\alpha f|)$, который определяет реализацию конкретных дробных разностей $|\hat{D}_\alpha f|$ в выборке $f(\cdot)$ [(a1) и (a2), соответственно] как функцию параметра α .

Результаты для состояний с различным уровнем пространственно ограниченной некогерентности представлены на Рис. 4.5 (a1) и (a2). Как показано на фраг-

²Параметр α не следует путать с показателями дробного оператора Лапласа (α_u, α_v), которые предопределяют конфигурации супердиффузионных сетей. Использование такого же символа, без каких-либо индексов компонент, отсылает первичной общей постановке, основанной на разностной схеме аппроксимации дробного оператора Лапласа.

ментах (b1) и (b2), эти состояния с сильной когерентностью порождают практически постоянный отклик $g_0(\alpha)$ для всего диапазона параметров α . Это справедливо для выборок с областями полной когерентности, имеющими ненулевые постоянные значения. На фрагментах (c1) и (c2) показаны значения $g(|\hat{D}_\alpha f|)$ для детектирования α -дробной разности $|\hat{D}_\alpha f|$, соответствующей определённым значениям α в выборке $f_{(\cdot)}$ [(a1) и (a2) соответственно]. Значения $g(|\hat{D}_\alpha f|)$ отображены цветом. Белые области означают, что в данной реализации $f_{(\cdot)}$ не наблюдалось соответствующих α -дробных разностей $|\hat{D}_\alpha f|$.

Здесь и далее для построения более детальных графиков (c1, c2) использовался более точный алгоритм оценки принадлежности дробной разности $|\hat{D}_\alpha f|$ заданному диапазону для генерации $g_\alpha(|\hat{D}_\alpha f|)$. Представленные значения спектра дробных мер пространственной корреляции $g_0(\alpha)$ (b1, b2) были вычислены для $\Delta|\hat{D}_\alpha f| = 10^{-4}$.

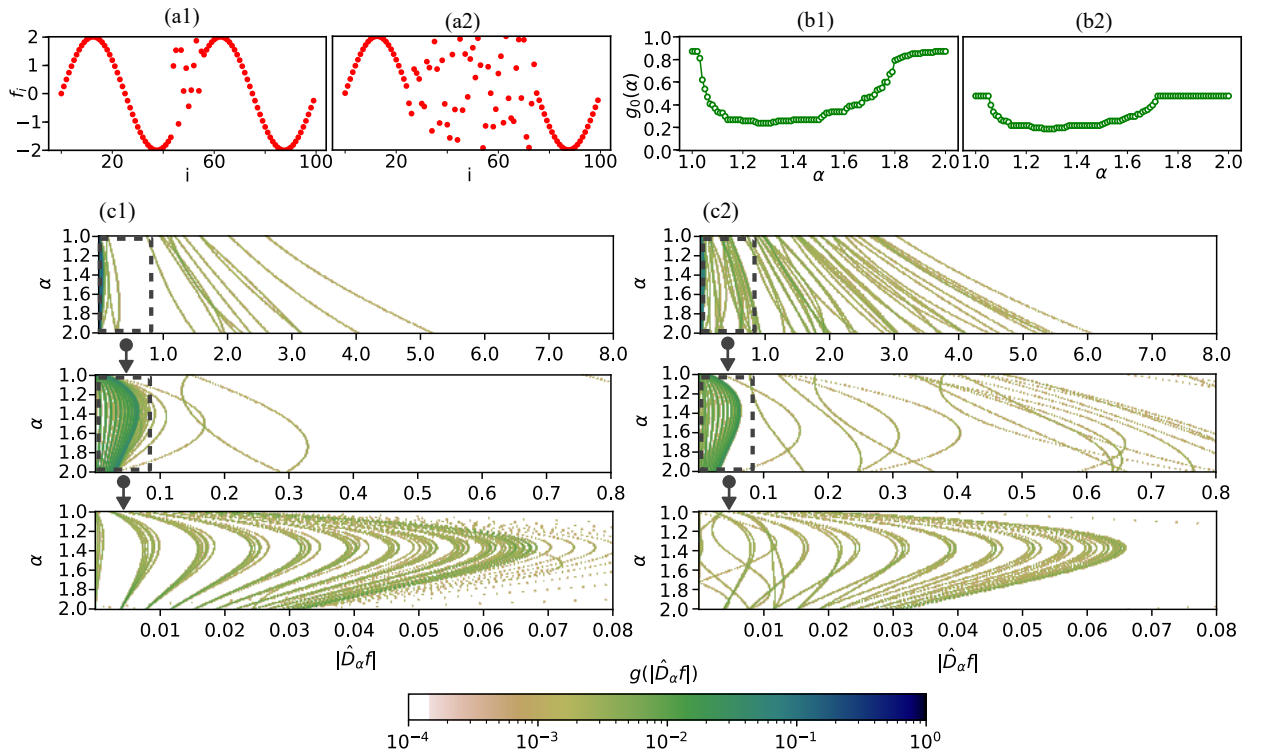


Рис. 4.6: Спектр дробных мер пространственной корреляции $g_0(\alpha)$ для состояний с совместным существованием фазовых волн и некогерентности. Фрагменты (a1) и (a2) демонстрируют примеры состояний с различными уровнями предварительно сгенерированной некогерентности. Фрагменты (b1) и (b2) показывают значения меры $g_0(\alpha)$ для различных значений α . Фрагменты (c1) и (c2) отображают спектр $g(|\hat{D}_\alpha f|)$, которые определяют реализацию конкретных разностей $|\hat{D}_\alpha f|$ в выборке $f_{(\cdot)}$ [(a1) и (a2), соответственно] как функцию параметра α .

Дробная мера пространственной корреляции начинает вести себя иначе, когда фазовые волны и режимы частичной некогерентности сосуществуют. Результа-

ты обобщены на Рис. 4.6. Фрагменты (a1) и (a2) демонстрируют примеры дискретных выборок $f(\cdot)$, содержащих различное количество некогерентных элементов и элементов с фазово-волновой организацией. Области рисунка (b1) и (b2) демонстрируют дробные меры пространственной корреляции $g_0(\alpha)$ для различных параметров α , характеризующих нелокальную специфику дробных разностей $|\hat{D}_\alpha f|$. Эти фрагменты явно проявляют разрыв в значениях $g_0(\alpha)$ в диапазоне $1.05 < \alpha < 1.8$. Данное обстоятельство связано с тем, что при уменьшении параметра α влияние локальных элементов на значения разности ослабевает, в то время как влияние далекодействующих элементов, напротив, усиливается. Следовательно, дробные разности, связанные с удалёнными элементами, образованными фазово-волновой организацией, не равны нулю и модифицируют значения дробной меры. Дальнейший рост $g_0(\alpha)$ при $\alpha \rightarrow 1$ связан с переходом к локальному типу взаимодействия в соответствии с (4.3), (4.4a) и (4.4b). Иными словами, дробная мера пространственной корреляции реагирует на крупномасштабные проявления в динамической системе. Фрагменты (c1) и (c2) представляют $g(|\hat{D}_\alpha f|)$ для конкретных α -дробных разностей $|\hat{D}_\alpha f|$ в выборках $f(\cdot)$ как функцию параметра α . Представление данных $g(|\hat{D}_\alpha f|)$, организованное таким образом, выявляет ряд закономерностей организации. В частности, для состояния с низкой степенью некогерентности и доминированием фазово-волновой структуры (a1) наблюдаются упорядоченные значения малых разностей ($|\hat{D}_\alpha f| < 0.1$) (c1). В то же время для состояний с развитой некогерентностью (a2) наблюдается неоднородный режим малых разностей ($|\hat{D}_\alpha f| < 0.02$) (c2), связанный с их неоднородностью в области некогерентности. Сравнивая (c1) и (c2), можно найти примеры схожего заполнения $g(|\hat{D}_\alpha f|)$ в другом диапазоне дробных разностей ($|\hat{D}_\alpha f| > 0.2$).

Как следствие, можно утверждать, что классическая мера пространственной корреляции $g_0(\alpha = 2)$ на Рис. 4.5 и 4.6 корректно описывает уровень некогерентности в системе. В то же время её совместное рассмотрение с дробной мерой пространственной корреляции $g_0(\alpha < 2)$ способно обеспечить более полную информацию о развитых динамических режимах, связанных с возникновением фазовых волн и некогерентностей различной природы.

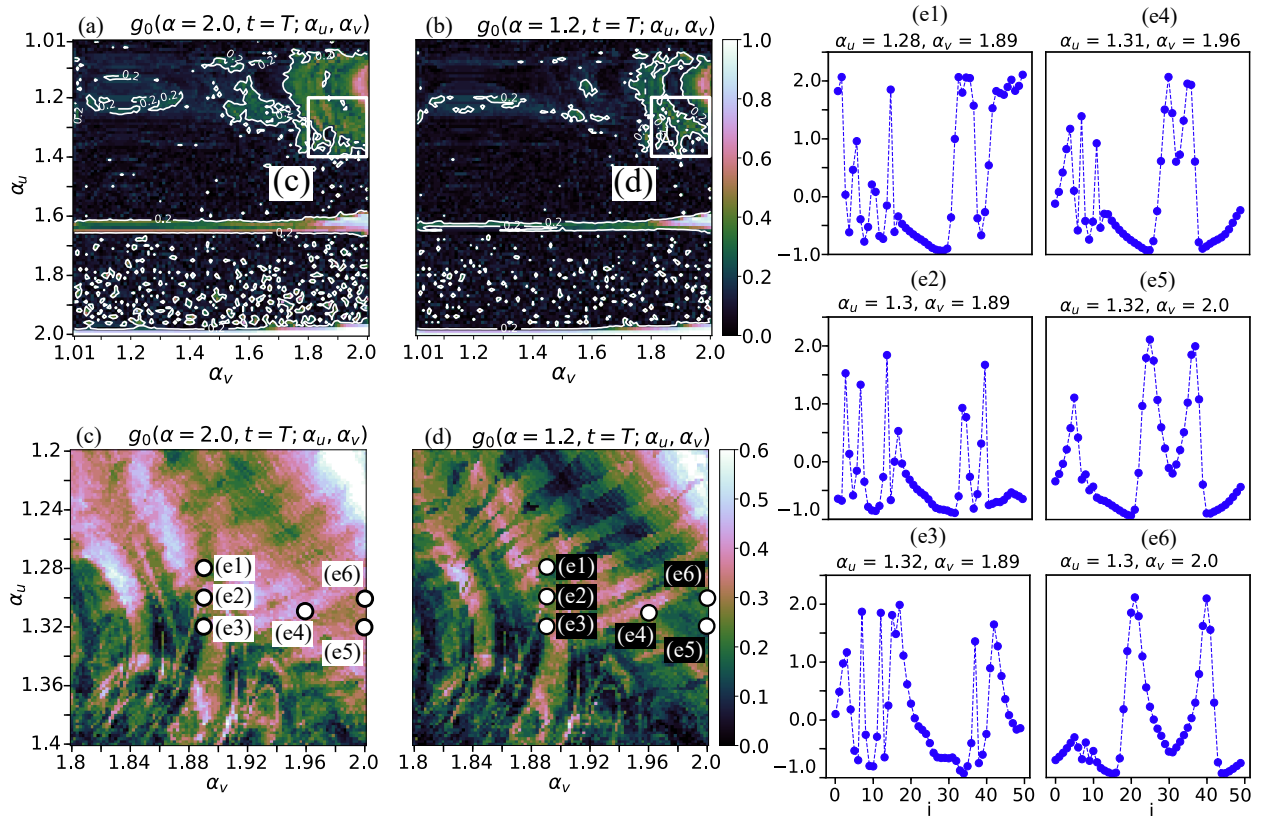


Рис. 4.7: Пример параметрического пространства (α_u, α_v) с демонстрацией состояний частичной синхронизации, организованных на основе классической [$\alpha = 2$] (а,с) и дробной [согласно (4.3) $\alpha = 1.2$] (b,d) мер пространственной корреляции. Данные основаны на дискретном временном такте $T = 29000$. Фрагменты (c) и (d) соответствуют выделенным областям на фрагментах (a) и (b). На рисунке показаны различия для определенных областей параметрического пространства. Фрагменты (e1) – (e6) представляют состояния системы в заданный момент времени для конфигураций, отмеченных на (c) и (d).

4.2.3. Выявление дополнительной информации о супердиффузионных конфигурациях нейронов при применении дробной меры пространственной корреляции

Применяя модифицированную метрику $g_0(\alpha, t)$ к исследованию системы с супердиффузионной [1D2C] конфигурацией, [HR2] нелинейностью и [UDRIC] начальными условиями позволяет выделить скрытые свойства параметрического пространства (α_u, α_v) . Основные результаты представлены на Рис. 4.7. В частности, различие между классической мерой пространственной корреляции (а,с) и дробной (b,d) заключается в более контрастном выделении (в дробном случае) динамических режимов, отображенных на примере определенного фрагмента времени $T = 29000$.

Демонстрация конкретных паттернов, которые способна распознать новая мет-

рика, представлена в правой части рис. 4.7. Видно, что обе метрики дают эквивалентные результаты для химер с выраженными областями синхронизации (e1), (e2), а также для некоррелированных пространственных структур (e3). С другой стороны, на фрагментах (e4) – (e6) показано уменьшение некогерентных участков химер в системе и формирование фазово-волновой организации. В то же время в соответствующей параметрической области рисунка (d) по сравнению с (c) наблюдается значительный отклик новой метрики $g_0(\alpha = 1.2, t = T)$ на формирование фазовых волн в системе, связанный с нелокальной спецификой $|\hat{D}_\alpha f|$.

Глобально, данная дополнительная аналитика свидетельствует о высокой степени ”организации” параметрических зон (α_u, α_v) развития динамических режимов, включающих как состояния полной синхронизации, в частности, их вариацию с формированием крупномасштабных фазовых волн, так и состояния частичной синхронизации, а также развитой некогерентности.

Как уже обсуждалось, крупномасштабные фазовые волны являются одним из наиболее распространенных проявлений коллективного поведения систем нейронов (см., например [42, 116, 120, 124, 225]). Их взаимодействие с некогерентными зонами может быть крайне значимым и представляет потенциальный интерес для задач нейронаук. Поскольку исследователи имеют дело с большими наборами данных, которые необходимо оптимально обрабатывать, сравнение классических и дробных мер, а также рассмотренных выше метрик, могло бы помочь выявить возникновение этих комбинированных режимов в параметрическом пространстве различных распределенных динамических систем, с последующим применением иных методов анализа (например, [119]).

4.3. Выводы главы

В данной главе представлено подробное исследование взаимосвязи между различными супердиффузионными конфигурациями (α_u, α_v) сетей взаимодействующих нейронов и динамическими режимами, организованными на их основе. Структуры сетей были воспроизведены на базе [1D2C] систем с супердиффузионной конфигурацией, организованной с помощью дробного оператора Лапласа $-(-\Delta)^{\alpha_q/2}$, $q = \{u, v\}$, и [HR2] нелинейной обратной связью для [UDRIC] начальных условий.

Были подробно исследованы динамические режимы в параметрическом про-

пространстве показателей дробного оператора Лапласа (α_u, α_v) . Установлено сосуществование как однородного, так и неоднородного процесса перехода от режима синхронизации к развитию некогерентности в данном параметрическом пространстве. В рассматриваемой системе были обнаружены одиночные состояния, химерные состояния, фазово-волновые режимы, а также их различные комбинации, наблюдаемые в рамках одной динамической реализации. Замечено, что химерные состояния могут развиваться как в областях однородных, так и неоднородных синхронизационных переходов.

Предполагается, что режимы неоднородного синхронного перехода связаны с формированием мелкомасштабных фазовых волн. Их появление в системе и взаимодействие с химерными состояниями приводят к сложной динамике, которая может характеризоваться как подавлением, так и ростом некогерентности. Показано, что непредсказуемое развитие характерно исключительно для определенных сетевых конфигураций. Их слабая реструктуризация приводит к развитию иного динамического режима. Аналогичным образом мы определяем типы сетевых конфигураций, изменение которых не приводит к существенному изменению динамики.

Вышеизложенное может быть критичными для сетей с адаптивной формой соединений [60, 61, 232, 233], где топология взаимодействия изменяется в зависимости от динамики точечных элементов. Неокортекс является частным примером такой сети. Полученная взаимосвязь между динамическими режимами и конфигурациями сети делает результаты данной главы актуальными для задач моделирования сложных систем. Особый интерес представляют исследования синхронного перехода в пространстве дробных показателей Лапласа для других нелинейных моделей.

Было продемонстрировано, что в параметрической области, находящейся между однородным и неоднородным синхронизационным переходом, структура параметрического пространства образует нитевидную конфигурацию. Этот процесс крайне организованным образом дифференцирует динамические режимы по уровню развитой синхронизации в системе и наиболее отчетливо проявляется на поздних временах.

С одной стороны, в связи с важностью сетевых конфигураций, поддерживающих мультистабильный и метастабильный режимы [32, 234], обнаружение однородных и неоднородных синхронизационных переходов в системах с супердиф-

фузионной конфигурацией является крайне значимым. С другой стороны, согласованное существование динамических режимов, подразумевающих частичную синхронизацию с фазовыми волнами, важно для задач нейронаук. В частности, связь между процессами синхронизации и формирования крупномасштабных волн, а также процессы десинхронизации при обработке информации различными кортикальными структурами являются весьма актуальными направлениями исследований [32, 117, 140, 225]. С точки зрения вышеизложенных результатов, пространство параметров дробных показателей оператора Лапласа является важным звеном, связывающим обобщенные конфигурации сети с допустимыми динамическими проявлениями. Эти результаты позволяют идентифицировать те конфигурации супердиффузионных сетей, даже слабое изменение которых влечет к существенным изменениям внутренней динамики системы.

Глава 5

Развитие аналитических представлений о супердиффузионных сетях, основываясь на реакционно-супердиффузионном подходе

В предыдущих главах было продемонстрировано развитие различных состояний как полной, так и частичной синхронизации в сетях с супердиффузионной конфигурацией, организованной на основе как одномерной реакционно-диффузионной модели ([1D2C] и [1D3C]), так и двухмерной ([2D2C] и [2D3C]) с различной организацией нелинейных функций ([HR2] и [HR3] соответственно). При этом для всестороннего понимания того, как зарождаются и развиваются пространственный порядок и беспорядок в системах с различными супердиффузионными конфигурациями становится особенно важным аналитическое понимание природы самой модели. В рамках данной постановки реакционно-диффузионный подход может быть весьма перспективным, а сама задача имеет тенденцию свестись к анализу устойчивости пространственных мод в реакционно-супердиффузионном приближении.

При этом стоит явно отметить обстоятельство, которое существенно отличает классическую диффузионную парадигму от супердиффузионной в контексте рассматриваемого приближения. Дело в том, что классический реакционно-диффузионный подход использует систему диффузионных уравнений с заданными и, что более важно, однотипными кинетическими операторами. Другими словами, в контексте разностного представления классический реакционно-диффузионный подход обладает определенной конструктивной симметрией, в которой изменению поддаются исключительно коэффициенты диффузии (D_u, D_v). С другой стороны, в рамках супердиффузионной парадигмы мы апеллируем к систе-

мам с различной кинетикой по соответствующим компонентам, организованной не только за счет различных коэффициентов диффузии, но и различных показателей дробного оператора Лапласа $(\alpha_u, \alpha_v; D_u, D_v)$. Именно данное обстоятельство приводит к фундаментальным различиям и вынуждает использовать специальный термин для аналитического подхода к описанию супердиффузионной системы — *расширенный линейный анализ устойчивости*. Говоря иначе, в рамках данного расширенного подхода учитываются устойчивости не только пространственных мод, но еще и рассматривается конфигурационный контекст, на базе которого данный тип устойчивости проявляет себя. Как будет показано далее, исследование системы в таком ключе позволяет получить важные результаты, связанные с развитием динамической устойчивости (неустойчивости) в линейном приближении для строго определённых конфигураций супердиффузионных сетей. Основные результаты данной главы отражены в работе [235].

5.1. Анализ расширенной линейной устойчивости

Для полной формализации данного приближения, а также его отождествления с предыдущими результатами, мы воспользуемся подходом, основанным на одномерной ([1D2C] и [HR2]) реакционно-супердиффузионной модели. Для этого необходимо ввести в рассмотрение реакционно-супердиффузионную систему уравнений:

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) = -D_u(-\Delta_x)^{\alpha_u/2} u(x, t) + f_u(u, v), \\ \partial_t v(x, t) = -D_v(-\Delta_x)^{\alpha_v/2} v(x, t) + f_v(u, v), \end{cases} \quad (5.1)$$

$$\begin{cases} f_u(u, v) = v - au^3 + bu^2 + I_{ext}, \\ f_v(u, v) = c - du^2 - v. \end{cases} \quad (5.2)$$

Стандартным образом определяя устойчивое стационарное состояние точечной системы:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} u^* = f_u(u^*, v^*) = 0, \\ \frac{d}{dt} v^* = f_v(u^*, v^*) = 0, \end{cases} \quad (5.3)$$

возможно проанализировать устойчивость слабого возмущения относительно заданного стационарного состояния (u^*, v^*) :

$$\begin{cases} u(x, t) = u^* + \eta_u(x, t), \\ v(x, t) = v^* + \eta_v(x, t), \end{cases} \quad (5.4)$$

и в линейном приближении сформировать следующие выражения на предельно малую компоненту возмущения:

$$\begin{cases} \partial_t \eta_u = -D_u (-\Delta)^{\alpha_u/2} \eta_u + a_{uu} \eta_u + a_{uv} \eta_v, \\ \partial_t \eta_v = -D_v (-\Delta)^{\alpha_v/2} \eta_v + a_{vu} \eta_u + a_{vv} \eta_v, \end{cases} \quad (5.5)$$

$$a_{ij} = \left. \partial_j f_i(u, v) \right|_{u=u^*, v=v^*}, \quad \text{где } i, j = \{u, v\}. \quad (5.6)$$

Применяя интегральное преобразование Фурье по пространственной компоненте $\hat{\mathbb{F}}\{f(x)\}(k)$ и Лапласа по временной $\hat{\mathbb{L}}\{f(t)\}(p)$, возможно прийти к следующему матричному выражению на двойную трансформанту функции возмущения:

$$\begin{pmatrix} a_{uu} & a_{uv} \\ a_{vu} & a_{vv} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\eta}_u \\ \tilde{\eta}_v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -D_u |k|^{\alpha_u} & 0 \\ 0 & -D_v |k|^{\alpha_v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\eta}_u \\ \tilde{\eta}_v \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\eta}_u \\ \tilde{\eta}_v \end{pmatrix} = 0. \quad (5.7)$$

Подразумевая в рамках данного подхода малые, но ненулевые значения (η_u, η_v) , ненулевое значение двойной трансформанты достигается путем выполнения условия:

$$\det \begin{vmatrix} a_{uu} - p - D_u |k|^{\alpha_u} & a_{uv} \\ a_{vu} & a_{vv} - p - D_v |k|^{\alpha_v} \end{vmatrix} = 0, \quad (5.8)$$

приводящего к характеристическому уравнению, записанному в форме:

$$p^2 + \sigma(\alpha_u, \alpha_v; k)p + d(\alpha_u, \alpha_v; k) = 0. \quad (5.9)$$

Двухкомпонентная структура модели, и как следствие, квадратичная форма характеристической функции позволяет стандартными методами определить решения:

$$p_{1,2} = \frac{1}{2} \left(-\sigma(\alpha_u, \alpha_v; k) \pm \sqrt{\sigma^2(\alpha_u, \alpha_v; k) - 4d(\alpha_u, \alpha_v; k)} \right), \quad (5.10)$$

в которых заранее выделяются зависимости не только от волновых чисел k (соответствующих конкретным пространственным модам), но еще и от показателей дробного оператора Лапласа (α_u, α_v) , относящихся к конфигурационным особенностям организации супердиффузионных сетей:

$$\sigma(\alpha_u, \alpha_v; k) = D_u |k|^{\alpha_u} + D_v |k|^{\alpha_v} - a_{uu} - a_{vv}, \quad (5.11)$$

$$d(\alpha_u, \alpha_v; k) = D_u D_v |k|^{\alpha_u + \alpha_v} - a_{vv} D_u |k|^{\alpha_u} - a_{uu} D_v |k|^{\alpha_v} + a_{uu} a_{vv} - a_{uv} a_{vu}. \quad (5.12)$$

5.2. Формальное разделение конфигураций

Сопоставляя парадигму, отсылающую к формированию нелокальных итерационных отображений, определяющих динамику соответствующих компонент, и подход к их построению, организованный на основе явной разностной схемы аппроксимации дробного оператора Лапласа, в пределе формирующий систему реакционно-супердиффузионных уравнений, возможно выдвинуть несколько суждений. Прежде всего, в линейном приближении непрерывной системы (5.1) будет существовать широкий набор пространственных мод k , диапазон и устойчивость которых существенно зависят от показателей дробного оператора Лапласа (α_u, α_v) . В этом случае реализация устойчивых мод $k \geq k_{cr}$ должна приводить к процессам синхронизации в дискретной системе. Это происходит потому, что все малые неустойчивые моды $k < k_{cr}$, которые могут быть полноценно реализованы в дискретной системе, приведут к образованию крупномасштабных фазовых волн. Аналогично, если как высокие моды, так и некоторая критическая мода $k \geq k_{cr}$ неустойчивы, это приведет к ярко выраженной некогерентной картине. В то же время критические значения k_{cr} , с точки зрения построения конечно-разностной схемы, могут в общем случае быть оценены по порядку параметра пространственной дискретизации $k_{cr} \propto 1/dx$. Расчеты нелокального итерационного отображения в рамках данной главы были произведены для параметров: $dt = dx = 0.005$.

Дальнейшее развитие идеи заключается в подборе зависимостей параметров (α_u, α_v) , ответственных за конфигурации супердиффузионных сетей, для которых наблюдаются конкретные режимы устойчивостей (неустойчивостей) пространственных мод k .

5.2.1. Конфигурации, соответствующие фокусному типу неустойчивости

В линейном приближении наиболее ярко выраженным примером неустойчивости может служить неустойчивость фокусного типа (Focus type Instability, FI). Ожидается, что именно данная природа неустойчивости должна быть сопряжена с развитием некогерентности, наряду с неустойчивостью нулевой моды для точечной системы. Необходимое условие для возникновения (FI) неустойчивости в пространстве супердиффузионных конфигураций задаётся выражением:

$$\sigma(\alpha_u, \alpha_v; k) = 0, \quad (5.13)$$

и, следовательно

$$D_u |k|^{\alpha_u} + D_v |k|^{\alpha_v} - a_{uu} - a_{vv} = 0. \quad (5.14)$$

Выделяя пространственные моды, соответствующие конкретным конфигурациям:

$$|k|^{\alpha_u} = \frac{a_{uu} + a_{vv} - D_v |k|^{\alpha_v}}{D_u}, \quad (5.15)$$

возможно проявить связь между соответствующими показателями дробного оператора Лапласа:

$$\alpha_u \log(|k|) = \log \left(\frac{a_{uu} + a_{vv} - D_v |k|^{\alpha_v}}{D_u} \right). \quad (5.16)$$

Вводя обозначение для критического значения параметра первой компоненты $\alpha_u \rightarrow \alpha_u^{(\text{FI})}(\alpha_v; k)$ в мелкомасштабном приближении (для $k \gg 1$), при удовлетворении условия вещественности показателей, можно получить уравнение:

$$\alpha_u^{(\text{FI})}(\alpha_v; k) = \log(|k|)^{-1} \log \left(\frac{a_{uu} + a_{vv} - D_v |k|^{\alpha_v}}{D_u} \right). \quad (5.17)$$

Полученное равенство в явном смысле определяет границу в пространстве супердиффузионных конфигураций (α_u, α_v) для заданных пространственных мод k , разделяющую режимы фокусной неустойчивости (FI) с режимами фокусной устойчивости (FS). Как будет показано далее, именно режимы фокусной неустойчивости для широкого диапазона пространственных мод сопряжены с возникновением развитой некогерентности в системе.

5.2.2. Конфигурации, соответствующие режиму несогласованной дробной Тьюринговской неустойчивости

Производя формализацию, эквивалентную реализованной в предыдущем пункте, возможно выделить специфический тип неустойчивости, в полном смысле существующий лишь в непрерывной системе, при этом оказывающий влияние на дискретную систему посредством нелинейного взаимодействия между соответствующими k .

$$d(\alpha_u, \alpha_v; k) \leq 0. \quad (5.18)$$

Данное условие является необходимым для формирования так называемой *несогласованной дробной Тьюринговской неустойчивости* (Inconsistent Fractional Turing Instability, IFTI), в частности, определяющей тип конфигураций, для которых наблюдается седловой тип неустойчивости соответствующих пространственных мод.

Отдельное внимание стоит уделить самому термину. Процессы *классической Тьюринговской неустойчивости* были представлены в [81] и традиционно исследовались на базе систем с единым типом кинетики по соответствующим компонентам. Дальнейшие исследования выявили более сложные процессы формообразования на базе коллективных проявлений, сочетающих автоволновые процессы с формированием структур. Данный тип неустойчивости получил название: *псевдо-Тьюринговская неустойчивость* [236]. Поскольку потенциальное развитие структур исследуется в перспективе континуальной модели, вообще говоря, с различным типом кинетики, то новое понятие должно отражать свойство *несогласованности*. Ввиду общего подхода к организации кинетической части, основанного на дробно-дифференциальном подходе $[-(-\Delta)^{\alpha_q/2}, q = \{u, v\}]$, новый термин должен еще и конкретизировать конкретный тип несогласованности и отождествить его с *дробным механизмом*. Поскольку в рамках данной системы речь идет о неустойчивости пространственных мод, определенных в седловом смысле, то мы говорим еще и о *Тьюринговской неустойчивости*. В результате получаем термин: *несогласованная дробная Тьюринговская неустойчивость*.

Расписывая свободное слагаемое:

$$D_u D_v |k|^{\alpha_u + \alpha_v} - a_{vv} D_u |k|^{\alpha_u} - a_{uu} D_v |k|^{\alpha_v} + a_{uu} a_{vv} - a_{uv} a_{vu} \leq 0, \quad (5.19)$$

и выделяя связь показателя дробного оператора Лапласа первой компоненты с k , при условии сохранения вещественности показателя получаем:

$$|k|^{\alpha_u} \leq \frac{a_{uu} D_v |k|^{\alpha_v} - [a_{uu} a_{vv} - a_{uv} a_{vu}]}{[D_u D_v |k|^{\alpha_v} - a_{vv} D_u]}. \quad (5.20)$$

Внедряя специальное обозначение для показателей, определяющих границу формирования несогласованной дробной Тьюринговой неустойчивости $\alpha_u \rightarrow \alpha_u^{(\text{IFTI})}$, возможно определить следующее неравенство:

$$\alpha_u^{(\text{IFTI})}(\alpha_v; k) \leq \log(|k|)^{-1} \log \left(\frac{a_{uu} a_{vv} - a_{uv} a_{vu} - a_{uu} D_v |k|^{\alpha_v}}{D_u [a_{vv} - D_v |k|^{\alpha_v}]} \right). \quad (5.21)$$

5.3. Сопоставление развитых динамических режимов с аналитическими представлениями об устойчивости пространственных мод

Представленные функциональные зависимости $\alpha_u^{(FI)}(\alpha_v; k)$ и $\alpha_u^{(IFTI)}(\alpha_v; k)$, определяющие параметры, задающие конкретные конфигурации супердиффузионных сетей, разделяют параметрическое пространство на области с характерной динамикой.

В данном пункте, как предельный случай дискретной модели супердиффузионных нейронных сетей исследуется непрерывная система с различными конфигурациями (α_u, α_v) , основанная на супердиффузионном кинетическом механизме. Континуальная модель предопределяет ряд особенностей развития состояний частичной синхронизации в супердиффузионных сетях. Далее мы выделим конкретные закономерности, которые были получены в результате расширенного линейного анализа этой системы.

5.3.1. Точечная система

Ввиду автоколебательной динамики локальной (нераспределенной) подсистемы, определяемой параметрами нелинейной [HR2] модели, случай $k = 0$ является неустойчивым в фокусном смысле (FI).

5.3.2. Взаимосвязь между некогерентностью и неустойчивостью в фокусном смысле

При наличии супердиффузионной связи, заданной комбинациями параметров (α_u, α_v) , для некоторых пространственных мод $k > 0$ сохраняется неустойчивость фокусного типа (FI), которую также можно назвать колебательной неустойчивостью [$Re(p_1) = Re(p_2) > 0$ и $Im(p_{1,2}) \neq 0$]. Данная область дополнительно обозначена как *Prebifurcation value* на Рис.5.1, а также продемонстрировано ее заполнение параметрического пространства при изменении значений k . Как следствие, диапазон неустойчивых [в (FI) смысле] мод k существенно зависит от конфигураций дробных показателей оператора Лапласа (α_u, α_v) .

Части параметрического пространства, в которых развивается некогерентность, преимущественно связаны с нелинейными эффектами. Самые широкие диапазоны

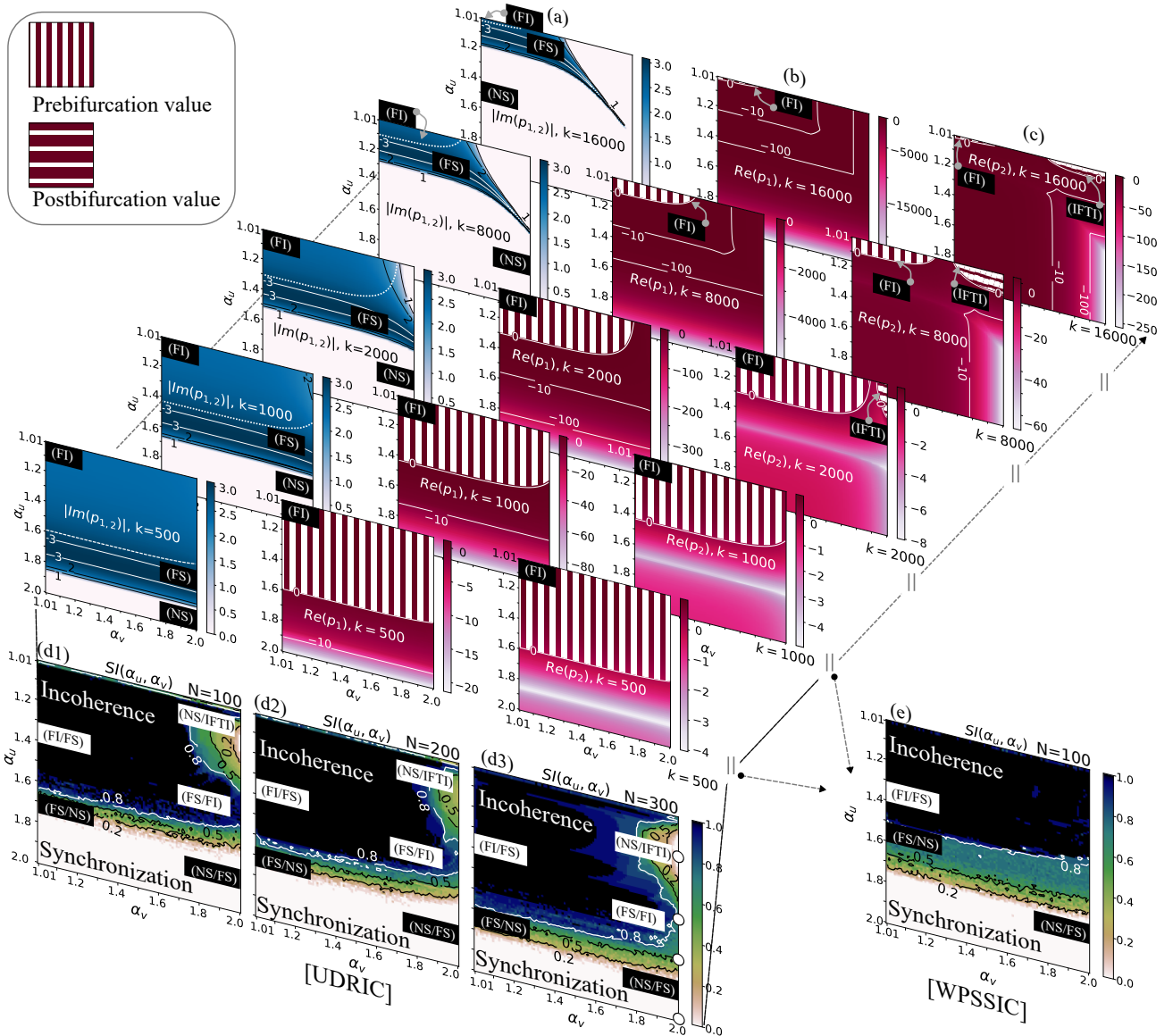


Рис. 5.1: Решения характеристического уравнения (5.9) $p(\alpha_u, \alpha_v; k)$, а также представление динамических проявлений структуры сети, основанных на силе некогерентности $SI(\alpha_u, \alpha_v)$ (2.65). В столбцах (a), (b) и (c) показаны значения $|Im(p_{1,2})|$, $Re(p_1)$ и $Re(p_2)$ для всех допустимых конфигураций (α_u, α_v) . На рисунках дополнительно показаны типы устойчивости / неустойчивости для конкретных пространственных мод k , реализованных в рамках различных супердиффузионных конфигураций (α_u, α_v) . В частности, (FI) - неустойчивость фокусного типа, (IFTI) - несогласованная дробная Тьюринговская неустойчивость, (FS) - устойчивость фокусного типа, (NS) - узловый тип устойчивости. Фрагменты (d1), (d2) и (d3) иллюстрируют силу некогерентности $SI(\alpha_u, \alpha_v)$ для систем, состоящих из $N = 100$, $N = 200$ и $N = 300$ нейронов соответственно. Был использован единый набор начальных условий [UDRIC]. Белыми точками на (d3) обозначены конфигурации сети, состояния которых будут показаны на Рис.5.2. Сила некогерентности $SI(\alpha_u, \alpha_v)$ для различных конфигураций сети (α_u, α_v) с начальными условиями, соответствующими слабому возмущению относительно стационарного состояния [WPSSIC], представлена на фрагменте (e). На диаграммах SI также указан вклад различных типов устойчивости / неустойчивости (в порядке их формальной значимости) в формирование режимов синхронизации, некогерентности и частичной синхронизации.

ны неустойчивых мод k в (FI) смысле расположены в области с развитым нелокальным типом связи для обоих компонент ($\alpha_u < 1.7, \alpha_v < 1.7$)¹. Именно в этой области неустойчивых [в смысле (FI)] значений $k > 0$ в системе развивается некогерентность. Утверждение справедливо как по отношению к единому предгенерированному набору однородно распределенных на интервале $(-1, 1)$ [UDRIC] (d1), (d2), (d3), так и слабо возмущенных относительно стационарного состояния (u^*, v^*) [Weak Perturbation Stationary State Initial Conditions, WPSSIC] (e) начальных условий, указанных на Рис.5.1.

5.3.3. Взаимосвязь между полной, а также частичной синхронизацией и устойчивостью узлового типа

В то же время существуют конфигурации системы ($\alpha_u > 1.7, \alpha_v \leq 2$), для которых большинство пространственных мод k приобретают устойчивость в узловом смысле (Node type Stability, NS) в линейном приближении [$Re(p_1) < 0, Re(p_2) < 0$ и $Im(p_{1,2}) = 0$; белая зона на фрагментах Рис.5.1 (а)]. Данный тип устойчивости для широкого диапазона $0 < k \leq k_{cr}$ подразумевает, что конфигурации (α_u, α_v) на базе которых реализуется динамика, характеризуются режимами развития синхронизации, связанными с формированием фазовых волн [см. Рис. 5.2 (a1) и (a2)]. Эта тенденция подтверждается расчетами для $SI(\alpha_u, \alpha_v)$ (для $\delta_{SI} = 0.3$ и $M = 20$) в соответствующих параметрических областях (белые области) как для [UDRIC] (d1-d3), так и для [WPSSIC] (e).

5.3.4. Взаимосвязь между устойчивостью фокусного типа и развитием некогерентности

Особое внимание следует уделить областям в которых наблюдается широкий диапазон устойчивых в фокусном смысле (Focus type Stability, FS) k мод в линейном приближении [$Re(p_1) = Re(p_2) < 0$ и $Im(p_{1,2}) \neq 0$].

На Рис. 5.1 показано, что возникновение некогерентной зоны (область черного цвета) для единого набора [UDRIC], представленного на фрагментах (d1), (d2) и (d3), четко коррелирует с областью $|Im(p_{1,2})| \neq 0$ (синяя зона) (а) для различных значений k . Это обстоятельство позволяет сделать вывод о том, что не

¹Усиление нелокального взаимодействия сопровождается ослаблением локального в соответствии с кинетическим механизмом супердиффузии и весовой организацией в дискретном случае (2.61) и (4.4b). Такие конфигурации делают систему более «разреженной», и ее поведение определяется в первую очередь точечными нелинейными особенностями (FI) при $k = 0$.

только неустойчивые, но и устойчивые в (FS) смысле (в рамках линейной аппроксимации) k моды оказывают существенное влияние на процессы возникновения некогерентности из-за нелинейных эффектов обменного взаимодействия. Ввиду существенной нелинейности системы, вполне возможно взаимодействие данных (FS) мод также с нулевой модой, (FI) модами и критической модой k_{cr} .

Данная параметрическая область приобретает особое значение в контексте определенного выше явления неоднородного синхронизационного перехода в супердиффузионных сетях. Как следствие, выводы можно сделать на основе взаимосвязи резкого изменения динамической репрезентации системы при слабом изменении конфигураций (α_u, α_v) . Это приводит к предположению, что параметрическая граница областей (FI/FS) и (FS/NS) связана с возможным воспроизведением квази-критичности [134] и максимизацией метастабильных режимов [141].

5.3.5. Несогласованная дробная Тьюринговская устойчивость как возможное динамическое явление, воспроизводимое на базе супердиффузионных конфигураций

Фрагмент (с) на Рис.5.1 демонстрирует постбифуркационные решения (горизонтальные белые линии) для единственного корня $Re(p_2)$, соответствующего режимам с высоким значением $k > k_{cr}$ и *асимметричным* конфигурациям сети (α_u, α_v) . Следуя формальному подходу:

$$\overbrace{D_u D_v |k|^{\alpha_u + \alpha_v}}^{>0} - a_{vv} D_u |k|^{\alpha_u} - a_{uu} D_v |k|^{\alpha_v} + \underbrace{a_{uu} a_{vv} - a_{uv} a_{vu}}_{>0} < 0 \quad (5.22)$$

можно получить еще одно необходимое условие:

$$a_{vv} D_u |k|^{\alpha_u} + a_{uu} D_v |k|^{\alpha_v} > 0. \quad (5.23)$$

Поскольку мы имеем дело с разными показателями (α_u, α_v) и при наличии компоненты - активатора u с $(a_{uu} > 0)$, условие (5.23) также может выполняться при $\alpha_u < \alpha_v$ для больших k , даже если $D_u > D_v$. Последнее обстоятельство подробно описано в [237].

С нашей точки зрения, вышеизложенное принципиально отличается от классической задачи устойчивости по Тьюрингу, сформулированной для симметричных конфигураций (идентичные пространственные дифференциальные операторы для всех компонент распределенной системы, а также устойчивость локальной

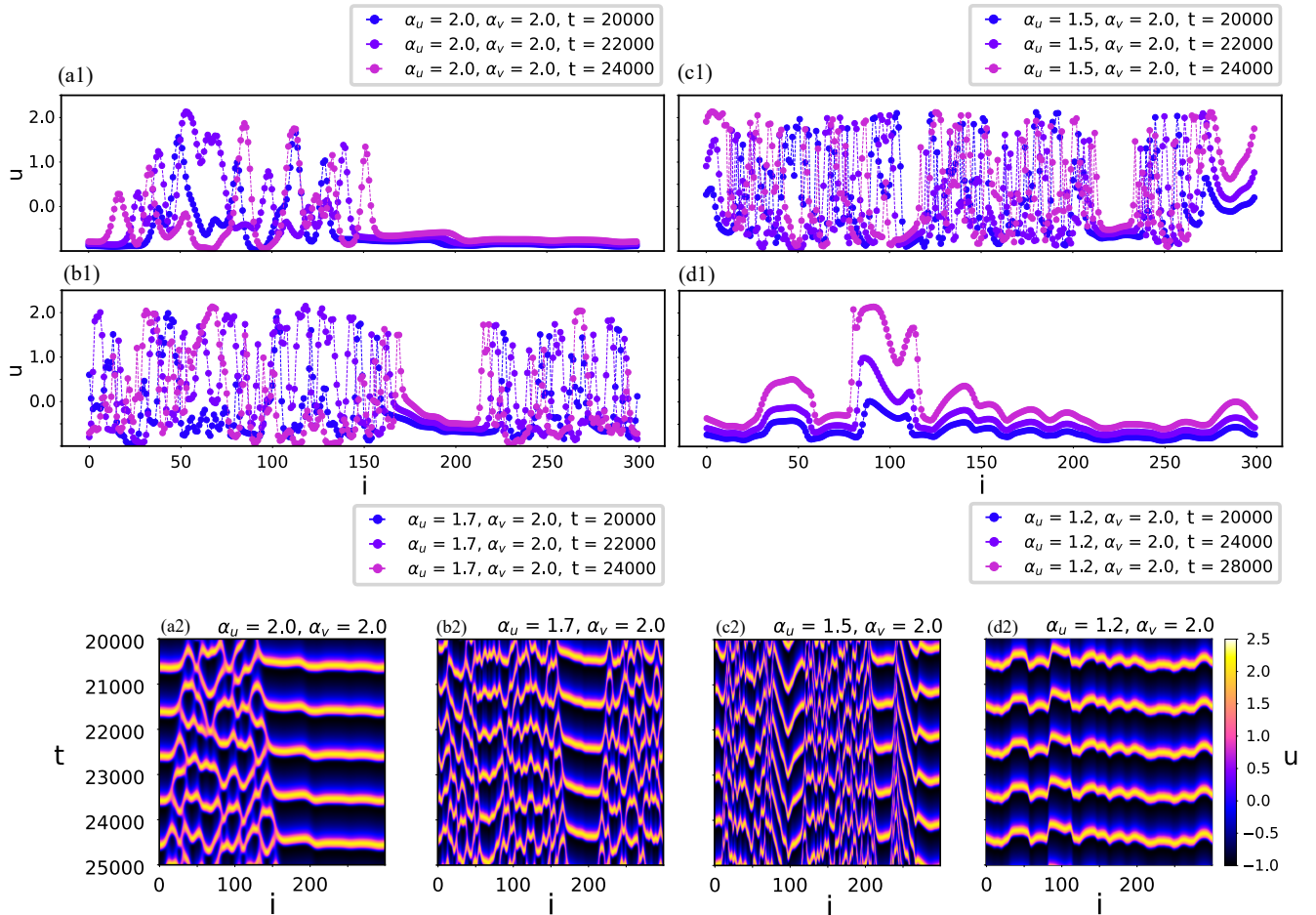


Рис. 5.2: Состояния дискретной системы в различные моменты времени t для различных конфигураций сетевой структуры (α_u, α_v) . На фрагментах (a1, a2) - продемонстрировано формирование крупномасштабных фазовых волн, связанных с процессами синхронизации для системы с локальной связью $(\alpha_u = 2.0, \alpha_v = 2.0)$. На фрагментах (b1, b2) - представлено развитие химерного состояния в дискретной системе, связанного с уменьшением характерных масштабов фазовых волн, вызванных нелокальной природой супердиффузионного взаимодействия. На фрагментах (c1, c2) - проиллюстрировано химерное состояние с высоким уровнем некогерентности. Наконец, на фрагментах (d1, d2) - изображено развитие синхронизации, связанной с процессами (NS) и (IFTI).

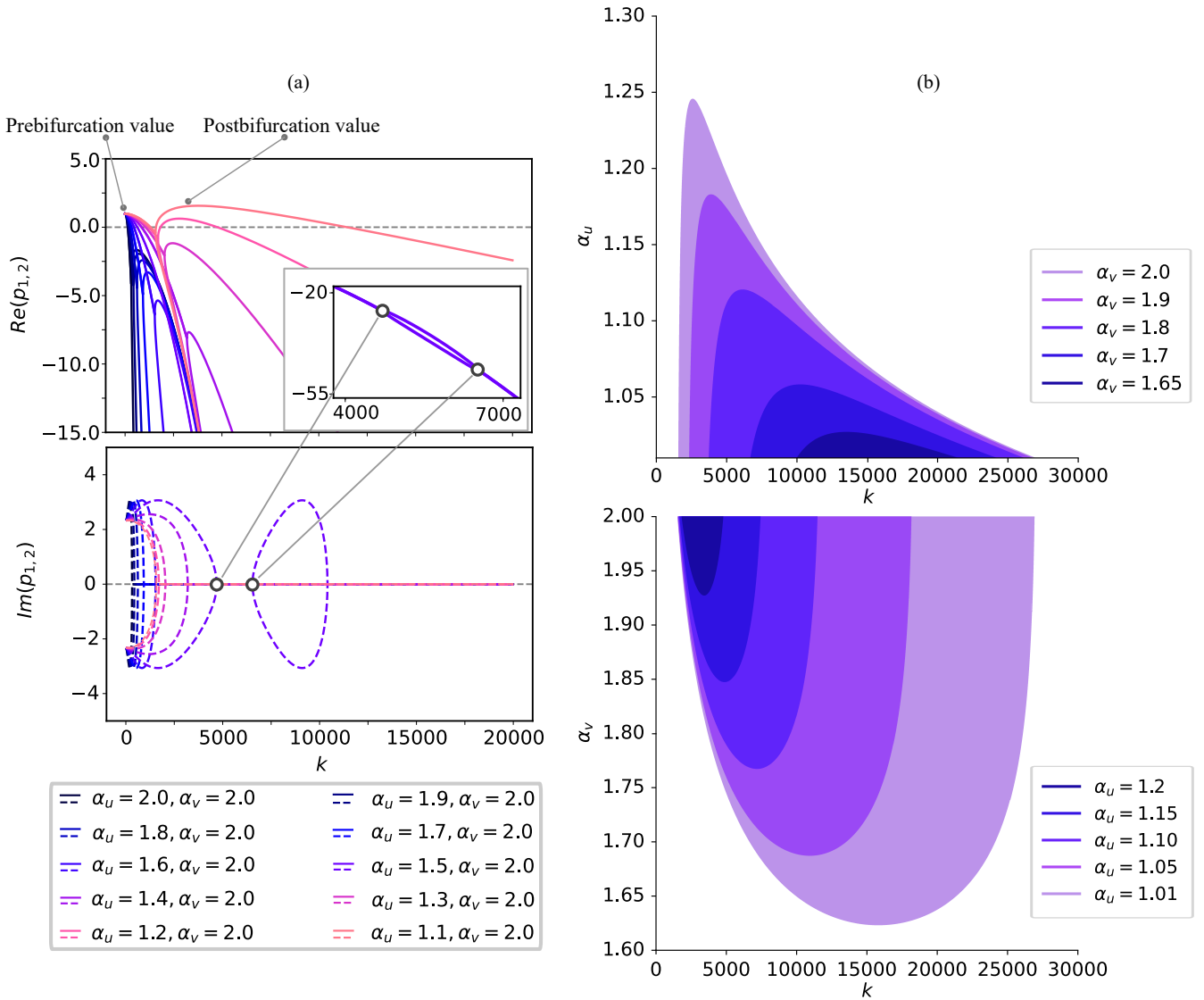


Рис. 5.3: На фрагменте (а) представлены действительные $Re(p_1), Re(p_2)$ и мнимые $|Im(p_{1,2})|$ части решения (5.10), демонстрирующие условия для возникновения (IFTI). В частности, указаны добифуркационные и послебифуркационные области, показанные на Рис. 5.1. Вставка отражает специфическую особенность (NS) в пределах указанного диапазона k для $(\alpha_u = 1.5, \alpha_v = 2.0)$. Фрагмент (b) иллюстрирует моды, неустойчивые в (IFTI) смысле $k^{(IFTI)}(\alpha_u, \alpha_v)$ (расположены внутри цветовой области, соответствующей указанным значениям α_u и α_v).

подсистемы). По аналогии с работой [236], в которой впервые было введено понятие *псевдо-Тьюринговской неустойчивости* для описания волновых режимов с образованием структур на фронте, мы используем термин *несогласованная дробная Тьюринговская неустойчивость* (IFTI) для описания развития структур в системах с асимметричной конфигурацией (многокомпонентные системы, организованные на основе дробно-дифференциальных операторов с разными порядками).

Примеры неустойчивости типа (IFTI) [$Re(p_1) < 0$, $Re(p_2) > 0$ и $Im(p_{1,2}) = 0$] для различных конфигураций связи ($\alpha_u < 2.0$, $\alpha_v = 2.0$) представлены на Рис.5.3 (а) (и наблюдаются для некоторых конфигураций (α_u, α_v) в постбифуркационной области на Рис.5.1) для $k > k_{cr}$. Диапазоны неустойчивых в смысле (IFTI) значений k (цветные области) для некоторых допустимых значений α_u и α_v отображены на Рис.5.3 (b).

Мы хотим дополнительно отметить, что из-за высоких значений (IFTI) $k > k_{cr}$ мод, в данной формулировке они могут наблюдаться только в непрерывной системе (5.1). В то же время нет противоречия в том, что в системах с другими нелинейностями этот тип неустойчивости может наблюдаться в областях малых значений волновых чисел k и приводить к появлению различных комбинированных структур. Пример такого явления, численно проанализирован в работе [238].

Важная взаимосвязь с широким набором динамических реализаций также прослеживается в исследованиях [97, 98], посвященных формированию различных пространственно-временных режимов в трехкомпонентной системе с классической диффузией и некоторыми иммобильными компонентами. Есть основания предполагать, что такое сходство связано с ослаблением локального и усилением нелокального взаимодействия между элементами при переходе от классической диффузии к супердиффузии.

5.3.6. Синхронизация, вызванная нелинейными эффектами. Влияние устойчивости узлового типа и несогласованной дробной Тьюринговской неустойчивости

Важной задачей является идентификация синхронизации, вызванной нелинейными эффектами, с информацией, полученной в рамках линейного приближения. Динамика, воспроизведенная на основе нелокального итерационного отображе-

ния, соответствующего [1D2C] постановке убедительно демонстрирует корреляцию развития явления синхронизации [а также области однородного синхронизационного перехода в диапазоне $(\alpha_u < 1.4, \alpha_v > 1.6)$] [226] с (NS) и (IFTI) областями [см. Рис. 5.1 (с) и постбифуркационную область и Рис.5.2 (d1), (d2)]. Видно, что ширина диапазона неустойчивых режимов [в (IFTI) смысле] имеет некоторую связь с развитием некогерентности в системе. Анализ полученных данных показывает, что широкая область (IFTI) для k может быть связана с развитием синхронизации из-за повышенного количества надкритических (NS) мод $(\alpha_u \rightarrow 1.2, \alpha_v = 2.0)$, в то время как некогерентность сопряжена с широкими областями значений (IFTI) k [см. Рис. 5.1 (с) $(\alpha_u \rightarrow 1.01, \alpha_v = 2.0)$]. При этом, для начальных условий, соответствующих слабому возмущению вблизи стационарного состояния [WPSSIC] [Рис. 5.1 (е)] в зоне $(\alpha_u \rightarrow 1.2, \alpha_v = 2.0)$ данные процессы синхронизации не наблюдаются.

Стоит отметить, что данный эффект требует дальнейшего изучения. На данном этапе можно лишь предположить, что отсутствие области однородного синхронизационного перехода в случае [WPSSIC] связано со слабым обменным взаимодействием между $k > k_{cr}$ модами, устойчивыми в (NS) смысле, и теми, которые дискретная система может поддерживать $k \leq k_{cr}$ для соответствующих показателей (α_u, α_v) .

Есть основания полагать, что по мере увеличения отклонения начальных условий от стационарного состояния (u^*, v^*) проявляются более выраженные процессы синхронизации $(\alpha_u \rightarrow 1.2, \alpha_v = 2.0)$, обусловленные нелинейным взаимодействием между модами. С точки зрения функциональных особенностей нейронных сетей, этот эффект может быть чрезвычайно важным. Его можно интерпретировать как *динамическую избирательность различных конфигураций супердиффузионных нейронных сетей по отношению к внешнему поступающему стимулу*. Данное обстоятельство требует дальнейшего изучения.

5.4. Выводы главы

Конфигурации связанных систем нервных клеток характеризуются чрезвычайно сложной и многогранной структурой. С формальной точки зрения, многие исследования демонстрируют актуальность нелокального подхода к определению взаимодействия между нейронами. Многочисленные эмпирические исследова-

ния нейронных систем, в свою очередь, выявляют важные фундаментальные свойства, связанные с их структурной и функциональной организацией, а также свойствами, основанными на распределениях с тяжелыми хвостами и степенных закономерностях. С этой точки зрения особенно важно представить математическую модель, отражающую эти важные особенности, предполагающую в то же время возможность аналитического осмысления в дополнение к численному анализу.

Основной результат исследования заключается в возможности аналитического описания развития состояний частичной синхронизации в супердиффузионных сетях. Данный подход основан на связи между системой реакционно-супердиффузионных уравнений и разностными схемами их аппроксимации, реализующимися при определенных условиях. Супердиффузионные нейронные сети построены на основе этих конечно-разностных схем и могут найти широкий спектр применений в задачах нейронауки.

В частности, показано, что на развитие синхронизации в супердиффузионных сетях влияют устойчивые режимы $k > 0$. Диапазон этих устойчивых режимов существенно зависит от особенностей конфигурации сети и, следовательно, от показателей дробного оператора Лапласа (α_u, α_v) . В то же время оказывается, что процессы развития синхронизации и некогерентности для различных конфигураций (α_u, α_v) имеют, вообще говоря, различную природу. В частности, синхронизация может возникать из-за наличия устойчивых в узловом смысле (NS) $k > 0$ мод. В свою очередь, параметрические области (α_u, α_v) , для которых развивается некогерентность, связаны с наличием неустойчивости фокусного типа (FI) в широком диапазоне значений k . Эта особенность связана с (FI) природой локальной системы ($k = 0$) и указывает на «разреженную в динамическом смысле» природу элементов распределенной дискретной системы, более восприимчивых к внутренним нелинейным эффектам активации. Наконец, установлено, что процессы устойчивости фокусного типа (FS) способствуют развитию состояний частичной синхронизации и некогерентности. Это явление может быть вызвано нелинейными эффектами взаимодействия (FS) мод (в линейном приближении) с неустойчивыми модами, а также (FS) модами между собой.

Заключение

Данная диссертация посвящена построению модели супердиффузионно-связанной системы нейронов, всестороннему исследованию состояний полной и частичной синхронизации, а также развитой некогерентности, которые могут быть воспроизведены на базе данной конфигурации. Полученные результаты, идейные методы и методологические подходы лежат в области задач нелинейной динамики, теоретической биофизики, задач нейронаук, а также теории открытых диссипативных распределенных сложных систем, далеких от термодинамического равновесия. К важным аспектам научной новизны, с одной стороны, можно отнести как формулировку и аналитическое исследование самой модели системы взаимодействующих нейронов, основанной на разностной схеме аппроксимации дробного оператора Лапласа, с другой стороны — получение фундаментальных результатов, связанных с возникновением широкого класса состояний частичной синхронизации, включающих химерные и уединенные состояния, на базе данной схемы взаимодействия.

В результате проведенных исследований, были получены и разобраны в тексте диссертации следующие новые результаты:

1. Впервые определена супердиффузионная схема взаимодействия между осцилляторами, точечная динамика которых задана на основе как двухкомпонентной [HR2], так и трехкомпонентной [HR3] нелинейной модели Hindmarsh-Rose. Данная схема взаимодействия организована на основе разностной схемы аппроксимации дробного оператора Лапласа и предопределяет удобный и универсальный способ задания нелокального типа взаимодействия, основанного на регулярной топологии специального вида. В частности, были введены схемы взаимодействия, основанные на одномерном двухкомпонентном [1D2C], двумерном двухкомпонентном [2D2C], одномерном трехкомпонентном [1D3C] и двумерном трехкомпонентном [2D3C] представлении. Проведены идейные параллели супердиффузионной схемы взаимодействия, а так-

же лежащих в ее основе степенных функций, с различными биологическими аспектами организации нервной ткани. Организовано позиционирование данной модели в рамках общего контекста актуальных как теоретических, так и прикладных моделей сложных систем взаимодействующих осцилляторов различной природы, в том числе ансамблей связанных нейронов.

2. Установлена возможность возникновения и развития различных состояний как полной и частичной синхронизации, а также развитой некогерентности на базе супердиффузионных конфигураций. В частности, определены процессы развития химерных и уединенных состояний, а также состояний, подразумевающих совместное существование химер и фазовых волн для широкого спектра однородно распределенных случайных начальных условий [UDRIC] и конфигураций супердиффузионных сетей $[nDmC]$, $n = 1, 2$; $m = 2, 3$. Предопределен универсальный метод изучения нелинейно-динамических свойств многокомпонентной распределенной системы с супердиффузионной конфигурацией в широком смысле, основанный на исследовании параметрического пространства показателей дробного оператора Лапласа (α_u, α_v) .
3. Выявлены области параметрического пространства (α_u, α_v) , определяющие конфигурацию взаимодействия супердиффузионного типа, в рамках которых возможно формирование конкретных реализаций состояний частичной синхронизации. В частности, определены такие конфигурации $[nDmC]$, $n = 1, 2$; $m = 2, 3$ систем с супердиффузионной связью, которые допускают возможность развития химерных и уединенных состояний, фазовых волн различных масштабов, а также их совместных реализаций для широкого множества однородно распределенных случайных начальных условий [UDRIC]. Установлено сходство организации параметрического пространства для классов $[1DmC]$ и $[2DmC]$, $m = 2$ систем с супердиффузионной конфигурацией.
4. Определены параметрические области однородного и неоднородного синхронизационных переходов, отражающих сложное влияние изменения супердиффузионных конфигураций по отношению к процессам формирования и развития различных состояний полной и частичной синхронизации, а также некогерентности. Модифицирована широко используемая классическая мера пространственной корреляции $g(t)$ на случай спектра дробных мер пространственной корреляции $g(\alpha; t)$. В результате применения модифициро-

ванного подхода были определены более сложно различимые динамические процессы в параметрическом пространстве. В частности, появилась дополнительная возможность определять химерные состояния с когерентной частью, организованной в виде крупномасштабной фазовой волны с различными характерными масштабами. Данная модифицированная метрика не ограничена исключительно применением к супердиффузионным конфигурациям и может быть использована для анализа широкого спектра состояний частичной синхронизации, возникающих на базе распределенных динамических систем с произвольной топологией взаимодействия между элементами.

5. Произведен расширенный линейный анализ рассматриваемой системы с супердиффузионной конфигурацией связи. Определено соответствие между типами устойчивости пространственных k -мод в линейном приближении и развитием различных динамических режимов, воспроизведенных на базе допустимых (α_u, α_v) конфигураций супердиффузионных сетей. Установлена взаимная связь между неустойчивостями пространственных k -мод в линейном приближении, а также участками параметрического пространства показателей дробного оператора Лапласа, ограничивающими области однородного и неоднородного синхронизационных переходов. Введено понятие нового динамического явления — несогласованной дробной Тьюринговской неустойчивости (IFTI), которое потенциально может наблюдаться в распределенных динамических системах с дробно-несогласованным типом взаимодействия элементов соответствующих компонент.

Полученные результаты, используемые модели и методы для их анализа, а также концептуальные параллели с задачами нейронаук четко определяют связь данной диссертации с направлением 1.3.3 — «Теоретическая физика». В частности, постановка задачи с [HR2] и [HR3] нелинейностями, связанными с процессами активации точечного нейрона, определенная на базе (α_u, α_v) конфигураций $[nDmC]$ (с $n = 1, 2$; $m = 2, 3$) систем схема их связи, а также идейная идентификация с изменением топологий взаимодействия и откликом на первичное возмущение - определяют, что работа выполнена в рамках исследований по созданию физических моделей когнитивных процессов (п.12). При этом, реализуемые динамические явления и аналитические подходы к классификации состояний частичной синхронизации, в частности химерных состояний, характеризующихся

гиперхаотической динамикой, отсылают к задачам теории неравновесных систем и теории хаоса (п.10). Наконец, для решения поставленных задач проведено моделирование физических процессов на решетке (п.8) с использованием явной разностной схемы для уравнений с нелокальной супердиффузией.

Список литературы

1. Kuramoto, Y. & Battogtokh, D. Coexistence of coherence and incoherence in nonlocally coupled phase oscillators. *arXiv preprint cond-mat/0210694* (2002).
2. Shima, S.-i. & Kuramoto, Y. Rotating spiral waves with phase-randomized core in nonlocally coupled oscillators. *Physical Review E* **69**, 036213 (2004).
3. Abrams, D. M. & Strogatz, S. H. Chimera states for coupled oscillators. *Physical Review Letters* **93**, 174102 (2004).
4. Ashwin, P. & Burylko, O. Weak chimeras in minimal networks of coupled phase oscillators. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* **25**, 013106 (2015).
5. Maistrenko, Y. L., Vasylenko, A., Sudakov, O., Levchenko, R. & Maistrenko, V. L. Cascades of multiheaded chimera states for coupled phase oscillators. *International Journal of Bifurcation and Chaos* **24**, 1440014 (2014).
6. Suda, Y. & Okuda, K. Persistent chimera states in nonlocally coupled phase oscillators. *Physical Review E* **92**, 060901 (2015).
7. Martens, E. A., Thutupalli, S., Fourriere, A. & Hallatschek, O. Chimera states in mechanical oscillator networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences* **110**, 10563—10567 (2013).
8. Kapitaniak, T., Kuzma, P., Wojewoda, J., Czolczynski, K. & Maistrenko, Y. Imperfect chimera states for coupled pendula. *Scientific Reports* **4**, 6379 (2014).
9. Wojewoda, J., Czolczynski, K., Maistrenko, Y. & Kapitaniak, T. The smallest chimera state for coupled pendula. *Scientific Reports* **6**, 34329 (2016).
10. Wickramasinghe, M. & Kiss, I. Z. Spatially organized dynamical states in chemical oscillator networks: Synchronization, dynamical differentiation, and chimera patterns. *PLoS ONE* **8**, e80586 (2013).
11. Tinsley, M. R., Nkomo, S. & Showalter, K. Chimera and phase-cluster states in populations of coupled chemical oscillators. *Nature Physics* **8**, 662—665 (2012).
12. Nkomo, S., Tinsley, M. R. & Showalter, K. Chimera states in populations of nonlocally coupled chemical oscillators. *Physical Review Letters* **110**, 244102 (2013).
13. Hagerstrom, A. M. *in situ*. Experimental observation of chimeras in coupled-map lattices. *Nature Physics* **8**, 658—661 (2012).
14. Viktorov, E. A., Habruseva, T., Hegarty, S. P., Huyet, G. & Kelleher, B. Coherence and incoherence in an optical comb. *Physical Review Letters* **112**, 224101 (2014).

15. Bera, B. K., Ghosh, D. & Lakshmanan, M. Chimera states in bursting neurons. *Physical Review E* **93**, 012205 (2016).
16. Wei, Z. *u dp*. Nonstationary chimeras in a neuronal network. *Europhysics Letters* **123**, 48003 (2018).
17. Wang, Z., Xu, Y., Li, Y., Kapitaniak, T. & Kurths, J. Chimera states in coupled Hindmarsh-Rose neurons with α -stable noise. *Chaos, Solitons & Fractals* **148**, 110976 (2021).
18. Hizanidis, J., Kanas, V. G., Bezerianos, A. & Bountis, T. Chimera states in networks of nonlocally coupled Hindmarsh–Rose neuron models. *International Journal of Bifurcation and Chaos* **24**, 1450030 (2014).
19. Omelchenko, I., Provata, A., Hizanidis, J., Schöll, E. & Hövel, P. Robustness of chimera states for coupled FitzHugh–Nagumo oscillators. *Physical Review E* **91**, 022917 (2015).
20. Shepelev, I. A., Vadivasova, T. E., Bukh, A., Strelkova, G. & Anishchenko, V. New type of chimera structures in a ring of bistable FitzHugh–Nagumo oscillators with nonlocal interaction. *Physics Letters A* **381**, 1398—1404 (2017).
21. Guo, S. *u dp*. Spiral wave chimera in two-dimensional nonlocally coupled FitzHugh–Nagumo systems. *Chaos, Solitons & Fractals* **114**, 394—399 (2018).
22. Rybalova, E., Anishchenko, V., Strelkova, G. & Zakharova, A. Solitary states and solitary state chimera in neural networks. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* **29** (2019).
23. Chouzouris, T. *u dp*. Chimera states in brain networks: Empirical neural vs. modular fractal connectivity. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* **28** (2018).
24. Andreev, A., Frolov, N., Pisarchik, A. & Hramov, A. Chimera state in complex networks of bistable Hodgkin-Huxley neurons. *Physical Review E* **100**, 022224 (2019).
25. Glaze, T. A., Lewis, S. & Bahar, S. Chimera states in a Hodgkin-Huxley model of thermally sensitive neurons. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* **26**, 083119 (2016).
26. Majhi, S., Bera, B. K., Ghosh, D. & Perc, M. Chimera states in neuronal networks: A review. *Physics of Life Reviews* **28**, 100—121 (2019).
27. Parastesh, F. *u dp*. Chimeras. *Physics Reports* **898**, 1—114 (2021).
28. Laing, C. R. Chimera states in heterogeneous networks. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* **19**, 013113 (2009).
29. Franović, I., Omel’chenko, E. & Wolfrum, M. Bumps, chimera states, and Turing patterns in systems of coupled active rotators. *Physical Review E* **104**, L052201 (2021).
30. Laing, C. R. Fronts and bumps in spatially extended Kuramoto networks. *Physica D: Nonlinear Phenomena* **240**, 1960—1971 (2011).
31. Bansal, K. *u dp*. Cognitive chimera states in human brain networks. *Science Advances* **5**, eaau8535 (2019).
32. Tognoli, E. & Kelso, J. S. The metastable brain. *Neuron* **81**, 35—48 (2014).

33. Curic, D., Singh, S., Nazari, M., Mohajerani, M. H. & Davidsen, J. Spatial-temporal analysis of neural desynchronization in sleeplike states reveals critical dynamics. *Physical Review Letters* **132**, 218403 (2024).
34. Huo, S. *u dp*. Spatial multi-scaled chimera states of cerebral cortex network and its inherent structure-dynamics relationship in human brain. *National Science Review* **8**, nwaa125 (2021).
35. Kang, L., Tian, C., Huo, S. & Liu, Z. A two-layered brain network model and its chimera state. *Scientific Reports* **9**, 14389 (2019).
36. Hizanidis, J., Kouvaris, N. E., Zamora-López, G., Díaz-Guilera, A. & Antonopoulos, C. G. Chimera-like states in modular neural networks. *Scientific Reports* **6**, 19845 (2016).
37. Mitchell, H. M., Dodds, P. S., Mahoney, J. M. & Danforth, C. M. Chimera states and seizures in a mouse neuronal model. *International Journal of Bifurcation and Chaos* **30**, 2050256 (2020).
38. Santos, M. *u dp*. Chimera-like states in a neuronal network model of the cat brain. *Chaos, Solitons & Fractals* **101**, 86—91 (2017).
39. Zakharova, A. *Chimera patterns in networks* (Springer, 2020).
40. Murray, J. D. *Mathematical Biology II* (Springer New York, NY, 2006).
41. Amari, S.-i. Dynamics of pattern formation in lateral-inhibition type neural fields. *Biological cybernetics* **27**, 77—87 (1977).
42. Huang, X. *u dp*. Spiral waves in disinhibited mammalian neocortex. *Journal of Neuroscience* **24**, 9897—9902 (2004).
43. Remi, T. & Subha, P. Emergence of chimera states in neural networks with distance-dependent mean field coupling. *International Journal of Modern Physics C* **35**, 2450107 (2024).
44. Remi, T., Subha, P. & Usha, K. Collective dynamics of neural network with distance dependent field coupling. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* **110**, 106390 (2022).
45. Budzinski, R., Rossi, K., Boaretto, B., Prado, T. & Lopes, S. Synchronization malleability in neural networks under a distance-dependent coupling. *Physical Review Research* **2**, 043309 (2020).
46. Remi, T. & Subha, P. Memristive Hindmarsh-Rose network in 2D lattice with distance-dependent chemical synapses. *Nonlinear Dynamics*, 1—12 (2023).
47. Xu, F., Zhang, J., Jin, M., Huang, S. & Fang, T. Chimera states and synchronization behavior in multilayer memristive neural networks. *Nonlinear dynamics* **94**, 775—783 (2018).
48. Majhi, S., Perc, M. & Ghosh, D. Chimera states in a multilayer network of coupled and uncoupled neurons. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* **27** (2017).
49. Omelchenko, I., Hülser, T., Zakharova, A. & Schöll, E. Control of chimera states in multilayer networks. *Frontiers in Applied Mathematics and Statistics* **4**, 67 (2019).
50. Feng, P. & Ye, L. Synaptic plasticity: from chimera states to synchronicity oscillations in multilayer neural networks. *Cognitive Neurodynamics*, 1—12 (2024).

51. Semenova, N., Zakharova, A., Anishchenko, V. & Schöll, E. Coherence-resonance chimeras in a network of excitable elements. *Physical Review Letters* **117**, 014102 (2016).
52. Omelchenko, I., Omel'chenko, E., Hövel, P. & Schöll, E. When nonlocal coupling between oscillators becomes stronger: patched synchrony or multichimera states. *Physical Review Letters* **110**, 224101 (2013).
53. Zakharova, A., Semenova, N., Anishchenko, V. & Schöll, E. Time-delayed feedback control of coherence resonance chimeras. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* **27** (2017).
54. Schmidt, A., Kasimatis, T., Hizanidis, J., Provata, A. & Hövel, P. Chimera patterns in two-dimensional networks of coupled neurons. *Physical Review E* **95**, 032224 (2017).
55. Kundu, S. & Ghosh, D. Higher-order interactions promote chimera states. *Physical Review E* **105**, L042202 (2022).
56. Tsigkri-DeSmedt, N., Hizanidis, J., Hövel, P. & Provata, A. Multi-chimera states and transitions in the leaky integrate-and-fire model with nonlocal and hierarchical connectivity. *The European Physical Journal Special Topics* **225**, 1149—1164 (2016).
57. Sawicki, J., Omelchenko, I., Zakharova, A. & Schöll, E. Delay-induced chimeras in neural networks with fractal topology. *The European Physical Journal B* **92**, 1—8 (2019).
58. Kumarasamy, S., Joseph, D., Mekawy, I. & Rajagopal, K. Self-induced switching and chimera states in spatially weighted neuronal networks. *Discrete and Continuous Dynamical Systems-S*, 1—15 (2024).
59. Buscarino, A., Frasca, M., Gambuzza, L. V. & Hövel, P. Chimera states in time-varying complex networks. *Physical Review E* **91**, 022817 (2015).
60. Huo, S., Tian, C., Kang, L. & Liu, Z. Chimera states of neuron networks with adaptive coupling. *Nonlinear Dynamics* **96**, 75—86 (2019).
61. Wang, Z. *u dp*. Chimeras in an adaptive neuronal network with burst-timing-dependent plasticity. *Neurocomputing* **406**, 117—126 (2020).
62. Kasatkin, D. & Nekorkin, V. Synchronization of chimera states in a multiplex system of phase oscillators with adaptive couplings. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* **28** (2018).
63. Kasatkin, D., Yanchuk, S., Schöll, E. & Nekorkin, V. Self-organized emergence of multilayer structure and chimera states in dynamical networks with adaptive couplings. *Physical Review E* **96**, 062211 (2017).
64. Calim, A., Torres, J. J., Ozer, M. & Uzuntarla, M. Chimera states in hybrid coupled neuron populations. *Neural Networks* **126**, 108—117 (2020).
65. Rybalova, E., Zakharova, A. & Strelkova, G. Interplay between solitary states and chimeras in multiplex neural networks. *Chaos, Solitons & Fractals* **148**, 111011 (2021).
66. Ayyad, M. & Coulibaly, S. The cellular automata inside optical chimera states. *Chaos, Solitons & Fractals* **153**, 111524 (2021).

67. Deschle, N., Daffertshofer, A., Battaglia, D. & Martens, E. A. Directed flow of information in chimera states. *Frontiers in Applied Mathematics and Statistics* **5**, 28 (2019).
68. Márquez-Rodríguez, V., Tucci, K. & Cosenza, M. Chimera states and information transfer in interacting populations of map-based neurons. *Neural Computing and Applications*, 1—9 (2024).
69. Liu, F., Turner, I., Anh, V., Yang, Q. & Burrage, K. A numerical method for the fractional Fitzhugh–Nagumo monodomain model. *Anziam Journal* **54**, 608—629 (2012).
70. Lee, H. G. A second-order operator splitting Fourier spectral method for fractional-in-space reaction–diffusion equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics* **333**, 395—403 (2018).
71. Liu, F., Zhuang, P., Turner, I., Anh, V. & Burrage, K. A semi-alternating direction method for a 2-D fractional FitzHugh–Nagumo monodomain model on an approximate irregular domain. *Journal of Computational Physics* **293**, 252—263 (2015).
72. Liu, F., Chen, S., Turner, I., Burrage, K. & Anh, V. Numerical simulation for two-dimensional Riesz space fractional diffusion equations with a nonlinear reaction term. *Open Physics* **11**, 1221—1232 (2013).
73. Agarwal, R., Jain, S. & Agarwal, R. P. Mathematical modeling and analysis of dynamics of cytosolic calcium ion in astrocytes using fractional calculus. *Journal of Fractional Calculus and Applications* **9**, 1—12 (2018).
74. Joshi, H. & Jha, B. K. Fractional-order mathematical model for calcium distribution in nerve cells. *Computational and Applied Mathematics* **39**, 56 (2020).
75. Santamaria, F., Wils, S., De Schutter, E. & Augustine, G. J. Anomalous diffusion in Purkinje cell dendrites caused by spines. *Neuron* **52**, 635—648 (2006).
76. Santamaria, F., Wils, S., De Schutter, E. & Augustine, G. J. The diffusional properties of dendrites depend on the density of dendritic spines. *European Journal of Neuroscience* **34**, 561—568 (2011).
77. Buzsáki, G. & Mizuseki, K. The log-dynamic brain: how skewed distributions affect network operations. *Nature Reviews Neuroscience* **15**, 264—278 (2014).
78. Lynn, C. W., Holmes, C. M. & Palmer, S. E. Heavy-tailed neuronal connectivity arises from Hebbian self-organization. *Nature Physics* **20**, 484—491 (2024).
79. Liu, Y., Long, X., Martin, P. R., Solomon, S. G. & Gong, P. Lévy walk dynamics explain gamma burst patterns in primate cerebral cortex. *Communications Biology* **4**, 739 (2021).
80. Beggs, J. M. & Plenz, D. Neuronal Avalanches in Neocortical Circuits. *The Journal of Neuroscience* **23**, 11167—11177 (2003).
81. Turing, A. M. The chemical basis of morphogenesis. *Bulletin of Mathematical Biology* **52**, 153—197 (1990).
82. Haken, H. Synergetics. *Physics Bulletin* **28**, 412 (1977).
83. Prigogine, I. & Nicolis, G. Self-organisation in nonequilibrium systems: towards a dynamics of complexity. *Bifurcation analysis*, 3—12 (1985).
84. Murray, J. D. *Mathematical biology: I. An introduction* (Springer Science & Business Media, 2007).

85. Volpert, V. & Petrovskii, S. Reaction–diffusion waves in biology. *Physics of Life Reviews* **6**, 267—310 (2009).
86. Izhikevich, E. M. *Dynamical systems in neuroscience* (MIT press, 2007).
87. FitzHugh, R. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane. *Biophysical journal* **1**, 445—466 (1961).
88. Kuznetsov, M., Kolobov, A. & Polezhaev, A. Pattern formation in a reaction-diffusion system of Fitzhugh-Nagumo type before the onset of subcritical Turing bifurcation. *Physical Review E* **95**, 052208 (2017).
89. Zemskov, E. P., Tsyganov, M. A. & Horsthemke, W. Wavy fronts in a hyperbolic FitzHugh-Nagumo system and the effects of cross diffusion. *Physical Review E* **91**, 062917 (2015).
90. Hindmarsh, J. L. & Rose, R. A model of the nerve impulse using two first-order differential equations. *Nature* **296**, 162—164 (1982).
91. Hindmarsh, J. L. & Rose, R. A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations. *Proceedings of the Royal society of London. Series B. Biological sciences* **221**, 87—102 (1984).
92. Moukam Kakmeni, F., Inack, E. M. & Yamakou, E. Localized nonlinear excitations in diffusive Hindmarsh-Rose neural networks. *Physical Review E* **89**, 052919 (2014).
93. Jun, M., He-Ping, Y., Yong, L. & Shi-Rong, L. Development and transition of spiral wave in the coupled Hindmarsh–Rose neurons in two-dimensional space. *Chinese Physics B* **18**, 98 (2009).
94. Mittal, R. & Jiwari, R. Numerical solution of two-dimensional reaction–diffusion Brusselator system. *Applied Mathematics and Computation* **217**, 5404—5415 (2011).
95. Ji, Y. & Shen, J. Turing Instability of Brusselator in the Reaction-Diffusion Network. *Complexity* **2020**, 1572743 (2020).
96. Kondo, S. & Miura, T. Reaction-diffusion model as a framework for understanding biological pattern formation. *science* **329**, 1616—1620 (2010).
97. Kuznetsov, M. & Polezhaev, A. Widening the criteria for emergence of Turing patterns. *Chaos* **30**, 1—9 (2020).
98. Kuznetsov, M. Robust controlled formation of Turing patterns in three-component systems. *Phys. Rev. E* **105**, 1—10 (2022).
99. Madzvamuse, A., Ndakwo, H. S. & Barreira, R. Cross-diffusion-driven instability for reaction-diffusion systems: analysis and simulations. *Journal of mathematical biology* **70**, 709—743 (2015).
100. Vanag, V. K. & Epstein, I. R. Cross-diffusion and pattern formation in reaction–diffusion systems. *Physical Chemistry Chemical Physics* **11**, 897—912 (2009).
101. Yang, R. Turing–Hopf bifurcation co-induced by cross-diffusion and delay in Schnakenberg system. *Chaos, Solitons & Fractals* **164**, 112659 (2022).
102. Pinar, Z. The reaction–cross-diffusion models for tissue growth. *Mathematical Methods in the Applied Sciences* **44**, 13805—13811 (2021).

103. Zhang, J. & Yan, G. Lattice Boltzmann simulation of pattern formation under cross-diffusion. *Computers & Mathematics with Applications* **69**, 157—169 (2015).
104. Gambino, G., Lombardo, M., Sammartino, M. & Sciacca, V. Turing pattern formation in the Brusselator system with nonlinear diffusion. *Physical Review E* **88**, 042925 (2013).
105. Polyanin, A., Sorokin, V. & Vyazmin, A. Reaction-diffusion models with delay: some properties, equations, problems, and solutions. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering* **52**, 334—348 (2018).
106. Su, Y., Wei, J. & Shi, J. Hopf bifurcations in a reaction–diffusion population model with delay effect. *Journal of Differential Equations* **247**, 1156—1184 (2009).
107. Cai, Y., Yan, S., Wang, H., Lian, X. & Wang, W. Spatiotemporal dynamics in a reaction–diffusion epidemic model with a time-delay in transmission. *International Journal of Bifurcation and Chaos* **25**, 1550099 (2015).
108. Li, K. & Li, X. Traveling waves in a nonlocal delayed epidemic model with diffusion. *Mathematical Methods in the Applied Sciences* **44**, 10823—10836 (2021).
109. Kuramoto, Y. & Shima, S.-i. Rotating spirals without phase singularity in reaction-diffusion systems. *Progress of Theoretical Physics Supplement* **150**, 115—125 (2003).
110. Uchaikin, V. V. *Fractional derivatives for physicists and engineers* (Springer, 2013).
111. Klages, R., Radons, G. & Sokolov, I. M. *Anomalous Transport. Foundations and Applications* 584 (WILEY-VCH Verlag GmbH ‘and’ Co. KGaA, 2008).
112. Grigorenko, I. & Grigorenko, E. Chaotic dynamics of the fractional Lorenz system. *Physical Review Letters* **91**, 034101 (2003).
113. Sun, K., Wang, X. & Sprott, J. C. Bifurcations and chaos in fractional-order simplified Lorenz system. *International Journal of Bifurcation and Chaos* **20**, 1209—1219 (2010).
114. Torabi, R. & Rezaei, Z. Instability in reaction-superdiffusion systems. *Physical Review E* **94**, 052202 (2016).
115. Liu, B., Wu, R., Iqbal, N. & Chen, L. Turing patterns in the Lengyel–Epstein system with superdiffusion. *International Journal of Bifurcation and Chaos* **27**, 1730026 (2017).
116. Muller, L., Chavane, F., Reynolds, J. & Sejnowski, T. J. Cortical travelling waves: mechanisms and computational principles. *Nature Reviews Neuroscience* **19**, 255—268 (2018).
117. Keane, A. & Gong, P. Propagating Waves Can Explain Irregular Neural Dynamics. *The Journal of Neuroscience* **35**, 1591—1605 (2015).
118. Liang, Y. *u òp*. Complexity of cortical wave patterns of the awake mouse cortex. *Nature Communications* **14**, 1434 (2023).
119. Townsend, R. G. & Gong, P. Detection and analysis of spatiotemporal patterns in brain activity. *PLoS computational biology* **14**, e1006643 (2018).
120. Muller, L., Reynaud, A., Chavane, F. & Destexhe, A. The stimulus-evoked population response in visual cortex of awake monkey is a propagating wave. *Nature Communications* **5**, 3675 (2014).

121. Koller, D. P., Schirner, M. & Ritter, P. Human connectome topology directs cortical traveling waves and shapes frequency gradients. *Nature Communications* **15**, 3570 (2024).
122. Sato, T. K., Nauhaus, I. & Carandini, M. Traveling waves in visual cortex. *Neuron* **75**, 218—229 (2012).
123. Xu, W., Huang, X., Takagaki, K. & Wu, J.-y. Compression and reflection of visually evoked cortical waves. *Neuron* **55**, 119—129 (2007).
124. Davis, Z. W., Muller, L., Martinez-Trujillo, J., Sejnowski, T. & Reynolds, J. H. Spontaneous travelling cortical waves gate perception in behaving primates. *Nature* **587**, 432—436 (2020).
125. Bhattacharya, S., Brincat, S. L., Lundqvist, M. & Miller, E. K. Traveling waves in the prefrontal cortex during working memory. *PLoS computational biology* **18**, e1009827 (2022).
126. Han, F., Caporale, N. & Dan, Y. Reverberation of recent visual experience in spontaneous cortical waves. *Neuron* **60**, 321—327 (2008).
127. Wang, X. *in* *dp*. Chemical sectioning fluorescence tomography: high-throughput, high-contrast, multicolor, whole-brain imaging at subcellular resolution. *Cell Reports* **34**, 108709 (2021).
128. Parga, N. Towards a self-consistent description of irregular and asynchronous cortical activity. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment* **2013**, P03010 (2013).
129. Pasquale, V., Massobrio, P., Bologna, L., Chiappalone, M. & Martinoia, S. Self-organization and neuronal avalanches in networks of dissociated cortical neurons. *Neuroscience* **153**, 1354—1369 (2008).
130. Clauset, A., Shalizi, C. R. & Newman, M. E. Power-law distributions in empirical data. *SIAM review* **51**, 661—703 (2009).
131. Bedard, C., Kroeger, H. & Destexhe, A. Does the 1/f frequency scaling of brain signals reflect self-organized critical states? *Physical Review Letters* **97**, 118102 (2006).
132. Touboul, J. & Destexhe, A. Can power-law scaling and neuronal avalanches arise from stochastic dynamics? *PloS ONE* **5**, e8982 (2010).
133. Plenz, D. & Thiagarajan, T. C. The organizing principles of neuronal avalanches: cell assemblies in the cortex? *Trends in neurosciences* **30**, 101—110 (2007).
134. Cocchi, L., Gollo, L. L., Zalesky, A. & Breakspear, M. Criticality in the brain: A synthesis of neurobiology, models and cognition. *Progress in neurobiology* **158**, 132—152 (2017).
135. Zimmern, V. Why brain criticality is clinically relevant: a scoping review. *Frontiers in neural circuits* **14**, 54 (2020).
136. Plenz, D. *in* *dp*. Self-organized criticality in the brain. *Frontiers in Physics* **9**, 639389 (2021).
137. Li, X., Chen, Q. & Xue, F. Biological modelling of a computational spiking neural network with neuronal avalanches. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* **375**, 20160286 (2017).
138. Rubinov, M., Sporns, O., Thivierge, J.-P. & Breakspear, M. Neurobiologically realistic determinants of self-organized criticality in networks of spiking neurons. *PLoS computational biology* **7**, e1002038 (2011).

139. Pazzini, R., Kinouchi, O. & Costa, A. A. Neuronal avalanches in Watts-Strogatz networks of stochastic spiking neurons. *Physical Review E* **104**, 014137 (2021).
140. Masoliver, M., Davidsen, J. & Nicola, W. The hippocampal theta oscillation may be generated by chimera dynamics. *bioRxiv*, 2023—07 (2023).
141. Haldeman, C. & Beggs, J. M. Critical Branching Captures Activity in Living Neural Networks and Maximizes the Number of Metastable States. *Physical Review Letters* **94**, 058101 (2005).
142. Lynn, C. W. & Bassett, D. S. The physics of brain network structure, function and control. *Nature Reviews Physics* **1**, 318—332 (2019).
143. Hilgetag, C. C. & Goulas, A. Is the brain really a small-world network? *Brain Structure and Function* **221**, 2361—2366 (2016).
144. Cirunay, M., Ódor, G., Papp, I. & Deco, G. Scale-free behavior of weight distributions of connectomes. *Physical Review Research* **7**, 013134 (2025).
145. Barabási, A.-L. & Albert, R. Emergence of scaling in random networks. *Science* **286**, 509—512 (1999).
146. Pinto, C. M., Lopes, A. M. & Machado, J. T. A review of power laws in real life phenomena. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* **17**, 3558—3578 (2012).
147. Mizuseki, K. & Buzsáki, G. Preconfigured, skewed distribution of firing rates in the hippocampus and entorhinal cortex. *Cell reports* **4**, 1010—1021 (2013).
148. Loewenstein, Y., Kuras, A. & Rumpel, S. Multiplicative dynamics underlie the emergence of the log-normal distribution of spine sizes in the neocortex in vivo. *Journal of Neuroscience* **31**, 9481—9488 (2011).
149. Yasumatsu, N., Matsuzaki, M., Miyazaki, T., Noguchi, J. & Kasai, H. Principles of long-term dynamics of dendritic spines. *Journal of Neuroscience* **28**, 13592—13608 (2008).
150. Wang, S. S.-H. *u òp*. Functional trade-offs in white matter axonal scaling. *Journal of neuroscience* **28**, 4047—4056 (2008).
151. Ikegaya, Y. *u òp*. Interpyramid spike transmission stabilizes the sparseness of recurrent network activity. *Cerebral Cortex* **23**, 293—304 (2013).
152. Koulakov, A. A., Hromádka, T. & Zador, A. M. Correlated connectivity and the distribution of firing rates in the neocortex. *Journal of Neuroscience* **29**, 3685—3694 (2009).
153. Lefort, S., Tómm, C., Sarria, J.-C. F. & Petersen, C. C. The excitatory neuronal network of the C2 barrel column in mouse primary somatosensory cortex. *Neuron* **61**, 301—316 (2009).
154. Markov, N. T. *u òp*. A weighted and directed interareal connectivity matrix for macaque cerebral cortex. *Cerebral cortex* **24**, 17—36 (2014).
155. Wang, Q., Sporns, O. & Burkhalter, A. Network analysis of corticocortical connections reveals ventral and dorsal processing streams in mouse visual cortex. *Journal of Neuroscience* **32**, 4386—4399 (2012).
156. Oh, S. W. *u òp*. A mesoscale connectome of the mouse brain. *Nature* **508**, 207—214 (2014).

157. Wolfrum, M., Omel'chenko, O. E., Yanchuk, S. & Maistrenko, Y. L. Spectral properties of chimera states. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* **21**, 013112 (2011).
158. Rosin, D. P., Rontani, D., Haynes, N. D., Schöll, E. & Gauthier, D. J. Transient scaling and resurgence of chimera states in networks of Boolean phase oscillators. *Physical Review E* **90**, 030902 (2014).
159. Sieber, J., Omel'chenko, O. E. & Wolfrum, M. Controlling unstable chaos: stabilizing chimera states by feedback. *Physical Review Letters* **112**, 054102 (2014).
160. Hopfield, J. J. Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons. *Proceedings of the National Academy of Sciences* **81**, 3088—3092 (1984).
161. Watts, D. J. & Strogatz, S. H. Collective dynamics of 'small-world' networks. *Nature* **393**, 440—442 (1998).
162. Bassett, D. S. & Bullmore, E. Small-world brain networks. *The neuroscientist* **12**, 512—523 (2006).
163. Eguiluz, V. M., Chialvo, D. R., Cecchi, G. A., Baliki, M. & Apkarian, A. V. Scale-free brain functional networks. *Physical Review Letters* **94**, 018102 (2005).
164. Newman, M. E. The structure of scientific collaboration networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences* **98**, 404—409 (2001).
165. Faloutsos, M., Faloutsos, P. & Faloutsos, C. On power-law relationships of the internet topology. *ACM SIGCOMM Computer Communication Review* **29**, 251—262 (1999).
166. Erdős, P. & Rényi, A. On random graphs I. *Publ. math. debrecen* **6**, 18 (1959).
167. Agnati, L. F., Marcoli, M., Maura, G., Woods, A. & Guidolin, D. The brain as a “hyper-network”: the key role of neural networks as main producers of the integrated brain actions especially via the “broadcasted” neuroconnectomics. *Journal of Neural Transmission* **125**, 883—897 (2018).
168. Bera, B. K., Rakshit, S., Ghosh, D. & Kurths, J. Spike chimera states and firing regularities in neuronal hypernetworks. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* **29**, 053115 (2019).
169. Feigenbaum, M. J. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. *Journal of statistical physics* **19**, 25—52 (1978).
170. Mandelbrot, B. *The Fractal Geometry of Nature* 468 (W. H. Freeman и Co., 1982).
171. Malchow, A.-K., Omelchenko, I., Schöll, E. & Hövel, P. Robustness of chimera states in nonlocally coupled networks of nonidentical logistic maps. *Physical Review E* **98**, 012217 (2018).
172. Bogomolov, S. A., Slepnev, A. V., Strelkova, G. I., Schöll, E. & Anishchenko, V. S. Mechanisms of appearance of amplitude and phase chimera states in ensembles of nonlocally coupled chaotic systems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* **43**, 25—36 (2017).
173. Rybalova, E., Nechaev, V., Schöll, E. & Strelkova, G. Chimera resonance in networks of chaotic maps. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* **33** (2023).

174. Shepelev, I. A., Bukh, A., Vadivasova, T. E., Anishchenko, V. S. & Zakharova, A. Double-well chimeras in 2D lattice of chaotic bistable elements. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* **54**, 50—61 (2018).
175. Gambuzza, L. V. *u dp*. Stability of synchronization in simplicial complexes. *Nature communications* **12**, 1255 (2021).
176. Lucas, M., Cencetti, G. & Battiston, F. Multiorder Laplacian for synchronization in higher-order networks. *Physical Review Research* **2**, 033410 (2020).
177. Deivasundari, P., Natiq, H., He, S., Peng, Y. & Hussain, I. Synchronization in a higher-order neuronal network with blinking interactions. *The European Physical Journal Special Topics* **233**, 745—755 (2024).
178. Ramlow, L. *u dp*. Partial synchronization in empirical brain networks as a model for unihemispheric sleep. *Europhysics Letters* **126**, 50007 (2019).
179. Lu, J. *u dp*. Synchronous firing transition between different regions of brain neural networks enhanced by Hamiltonian energy. *Nonlinear Dynamics* **113**, 12143—12150 (2025).
180. Hizanidis, J. *u dp*. Chimera states in population dynamics: networks with fragmented and hierarchical connectivities. *Physical Review E* **92**, 012915 (2015).
181. Sawicki, J., Omelchenko, I., Zakharova, A. & Schöll, E. Chimera states in complex networks: interplay of fractal topology and delay. *The European Physical Journal Special Topics* **226**, 1883—1892 (2017).
182. Santos, M. S. *u dp*. Spiral wave chimera states in regular and fractal neuronal networks. *Journal of Physics: Complexity* **2**, 015006 (2020).
183. Ma, J., Jia, Y., Wang, C.-N. & Jin, W.-Y. Transition of spiral wave in a model of two-dimensional arrays of Hindmarsh-Rose neurons. *International Journal of Modern Physics B* **25**, 1653—1670 (2011).
184. Li, B.-W. & Dierckx, H. Spiral wave chimeras in locally coupled oscillator systems. *Physical Review E* **93**, 020202 (2016).
185. Li, B.-W., Xiao, J., Li, T.-C., Panfilov, A. V. & Dierckx, H. Self-Organized Target Wave Chimeras in Reaction-Diffusion Media. *Physical Review Letters* **133**, 207203 (2024).
186. Li, B.-W., He, Y., Li, L.-D., Yang, L. & Wang, X. Spiral wave chimeras in reaction-diffusion systems: Phenomenon, mechanism and transitions. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* **99**, 105830 (2021).
187. Laing, C. R. Chimeras in networks with purely local coupling. *Physical Review E* **92**, 050904 (2015).
188. Mondal, A. *u dp*. Diffusion dynamics of a conductance-based neuronal populations. *Phys. Rev. E* **99**, 1—14 (2019).
189. Xu, Y., Jia, Y., Ma, J., Alsaedi, A. & Ahmad, B. Synchronization between neurons coupled by memristor. *Chaos, Solitons & Fractals* **104**, 435—442 (2017).

190. Guo, S. *u dp.* Collective response, synapse coupling and field coupling in neuronal network. *Chaos, Solitons & Fractals* **105**, 120—127 (2017).
191. Samko, S. G., Kilbas, A. A., Marichev, O. I. *u dp.* *Fractional integrals and derivatives* (Gordon и breach science publishers, Yverdon Yverdon-les-Bains, Switzerland, 1993).
192. Wang, T. & Wang, X. Generalized synchronization of fractional order hyperchaotic lorenz system. *Modern Physics Letters B* **23**, 2167—2178 (2009).
193. Giresse, T. A., Crepin, K. T. & Martin, T. Generalized synchronization of the extended Hindmarsh–Rose neuronal model with fractional order derivative. *Chaos, Solitons & Fractals* **118**, 311—319 (2019).
194. Owolabi, K. M., Karaagac, B. & Baleanu, D. Pattern formation in superdiffusion predator–prey-like problems with integer-and noninteger-order derivatives. *Mathematical Methods in the Applied Sciences* **44**, 4018—4036 (2021).
195. Iqbal, N., Wu, R. & Mohammed, W. W. Pattern formation induced by fractional cross-diffusion in a 3-species food chain model with harvesting. *Mathematics and Computers in Simulation* **188**, 102—119 (2021).
196. Zeng, F. *u dp.* A Crank–Nicolson ADI spectral method for a two-dimensional Riesz space fractional nonlinear reaction-diffusion equation. *SIAM Journal on Numerical Analysis* **52**, 2599—2622 (2014).
197. Mvogo, A., Macías-Díaz, J. E. & Kofané, T. C. Diffusive instabilities in a hyperbolic activator-inhibitor system with superdiffusion. *Physical Review E* **97**, 032129 (2018).
198. Iqbal, N., Wu, R. & Liu, B. Pattern formation by super-diffusion in FitzHugh–Nagumo model. *Applied Mathematics and Computation* **313**, 245—258 (2017).
199. Fateev, I. & Polezhaev, A. Dynamics of a Chain of Interacting Neurons with Nonlocal Coupling, Given by Laplace Operator of Fractional and Variable Orders with Nonlinear Hindmarsh–Rose Model Functions. *Bulletin of the Lebedev Physics Institute* **50**, 243—252 (2023).
200. Fateev, I. & Polezhaev, A. Chimera states in a chain of superdiffusively coupled neurons. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* **33**, 103110 (2023).
201. Fateev, I. & Polezhaev, A. Chimera states in a lattice of superdiffusively coupled neurons. *Chaos, Solitons & Fractals* **181**, 114722 (2024).
202. Squire, L. *u dp.* *Fundamental neuroscience* (Academic Press, 2008).
203. Grosu, G. F. *u dp.* The fractal brain: scale-invariance in structure and dynamics. *Cerebral Cortex* **33**, 4574—4605 (2023).
204. Huang, X. *u dp.* Spiral wave dynamics in neocortex. *Neuron* **68**, 978—990 (2010).
205. Rybalova, E., Bukh, A., Strelkova, G. & Anishchenko, V. Spiral and target wave chimeras in a 2D lattice of map-based neuron models. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* **29**, 101104 (2019).
206. Дмитричев, А. *u dp.* Нелинейные динамические модели нейронов: Обзор. *Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика* **26**, 5—58 (2018).

207. Hodgkin, A. L. & Huxley, A. F. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. *The Journal of physiology* **117**, 500 (1952).
208. Morris, C. & Lecar, H. Voltage oscillations in the barnacle giant muscle fiber. *Biophysical journal* **35**, 193—213 (1981).
209. Chialvo, D. R. Generic excitable dynamics on a two-dimensional map. *Chaos, Solitons & Fractals* **5**, 461—479 (1995).
210. Rulkov, N. F. Modeling of spiking-bursting neural behavior using two-dimensional map. *Physical Review E* **65**, 041922 (2002).
211. Courbage, M., Nekorkin, V. I. & Vdovin, L. V. Chaotic oscillations in a map-based model of neural activity. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* **17** (2007).
212. Izhikevich, E. M. & Hoppensteadt, F. Classification of bursting mappings. *International Journal of Bifurcation and Chaos* **14**, 3847—3854 (2004).
213. Storace, M., Lino, D. & de Lange, E. The Hindmarsh–Rose neuron model: bifurcation analysis and piecewise-linear approximations. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* **18**, 033128 (2008).
214. Durand, D. M., Park, E.-H. & Jensen, A. L. Potassium diffusive coupling in neural networks. *Phil. Trans. R. Soc. B* **365**, 2347—2362 (2010).
215. Garcia-Ojalvo, J., Elowitz, M. B. & Strogatz, S. H. Modeling a synthetic multicellular clock: Repressilators coupled by quorum sensing. *PNAS* **101**, 10955—10960 (2004).
216. Gonze, D., Bernard, S., Waltermann, C., Kramer, A. & Herzog, H. Spontaneous Synchronization of Coupled Circadian Oscillators. *Biophysical Journal* **89**, 120—129 (2005).
217. Gopal, R., Chandrasekar, V., Venkatesan, A. & Lakshmanan, M. Observation and characterization of chimera states in coupled dynamical systems with nonlocal coupling. *Physical Review E* **89**, 052914 (2014).
218. Kundu, S., Majhi, S., Muruganandam, P. & Ghosh, D. Diffusion induced spiral wave chimeras in ecological system. *The European Physical Journal Special Topics* **227**, 983—993 (2018).
219. Bera, B. K., Ghosh, D. & Banerjee, T. Imperfect traveling chimera states induced by local synaptic gradient coupling. *Physical Review E* **94**, 012215 (2016).
220. Kemeth, F. P., Haugland, S. W., Schmidt, L., Kevrekidis, I. G. & Krischer, K. A classification scheme for chimera states. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* **26**, 094815 (2016).
221. Huo, S. & Liu, Z. Condensation of eigenmodes in functional brain network and its correlation to chimera state. *Communications Physics* **6**, 285 (2023).
222. Banerjee, T., Biswas, D., Ghosh, D., Schöll, E. & Zakharova, A. Networks of coupled oscillators: from phase to amplitude chimeras. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* **28** (2018).

223. Owolabi, K. M. & Atangana, A. Numerical simulations of chaotic and complex spatiotemporal patterns in fractional reaction–diffusion systems. *Computational and Applied Mathematics* **37**, 2166—2189 (2018).
224. Owolabi, K. M. Numerical simulation of fractional-order reaction–diffusion equations with the Riesz and Caputo derivatives. *Neural Computing and Applications* **32**, 4093—4104 (2020).
225. Wu, J.-Y., Huang, X. & Zhang, C. Propagating waves of activity in the neocortex: what they are, what they do. *The Neuroscientist* **14**, 487—502 (2008).
226. Fateev, I. & Polezhaev, A. Synchronization transitions in a system of superdiffusively coupled neurons: Interplay of chimeras, solitary states, and phase waves. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* **34** (2024).
227. Fateev, I. & Polezhaev, A. Fractional Correlation Measure for Spatial Coherence. *International Journal of Bifurcation and Chaos* **7**, 2650078 (2026).
228. Yang, Q., Liu, F. & Turner, I. Numerical methods for fractional partial differential equations with Riesz space fractional derivatives. *Applied Mathematical Modelling* **34**, 200—218 (2010).
229. Zhuang, P., Liu, F., Anh, V. & Turner, I. Numerical methods for the variable-order fractional advection-diffusion equation with a nonlinear source term. *SIAM Journal on Numerical Analysis* **47**, 1760—1781 (2009).
230. Meerschaert, M. M. & Tadjeran, C. Finite difference approximations for fractional advection–dispersion flow equations. *Journal of computational and applied mathematics* **172**, 65—77 (2004).
231. Meerschaert, M. M. & Tadjeran, C. Finite difference approximations for two-sided space-fractional partial differential equations. *Applied numerical mathematics* **56**, 80—90 (2006).
232. Wang, K., Teng, Z. & Jiang, H. Adaptive synchronization in an array of linearly coupled neural networks with reaction–diffusion terms and time delays. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* **17**, 3866—3875 (2012).
233. Berner, R., Vock, S., Schöll, E. & Yanchuk, S. Desynchronization transitions in adaptive networks. *Physical Review Letters* **126**, 028301 (2021).
234. Roberts, J. A. *u dp*. Metastable brain waves. *Nature Communications* **10**, 1056 (2019).
235. Fateev, I. & Polezhaev, A. Analytical study of neural networks with superdiffusive coupling supporting chimera states. *Physical Review E* **112**, 014214 (2025).
236. Vanag, V. K. & Epstein, I. R. Dash waves in a reaction-diffusion system. *Physical Review Letters* **90**, 098301 (2003).
237. Golovin, A. A., Matkowsky, B. J. & Volpert, V. A. Turing pattern formation in the Brusselator model with superdiffusion. *SIAM Journal on Applied Mathematics* **69**, 251—272 (2008).
238. Zhang, L. & Tian, C. Turing pattern dynamics in an activator-inhibitor system with superdiffusion. *Physical Review E* **90**, 062915 (2014).