На правах рукописи

Павлов Михаил Михайлович

Классические конформные блоки и AdS_3/CFT_2 соответствие

Специальность 01.04.02 —
«Теоретическая физика»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2022

Работа выполнена в Отделении теоретической физики им. И.Е. Тамма Федерального государственного бюджетного учреждения науки Физического института им. П.Н. Лебедева Российской академии наук.

Научный руководитель:	**Алкалаев Константин Борисович** доктор физико-математических наук, высококвалифицированный старший научный сотрудник Физического института имени П.Н. Лебедева РАН
Официальные оппоненты:	**Галажинский Антон Владимирович** доктор физико-математических наук, профессор РАН по отделению физических наук, профессор Национального исследовательского Томского политехнического университета
	Литвинов Алексей Викторович кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Института теоретической физики им. Л. Д. Ландау
Ведущая организация:	Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Защита состоится ________________________ на заседании диссертационного совета Д 002.023.02 на базе Физического института имени П.Н. Лебедева РАН по адресу: 119991, Москва, Ленинский проспект, д.53.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Физического института имени П.Н. Лебедева РАН или на сайте www.lebedev.ru.

Автореферат разослан ________________________.

Ученый секретарь диссертационного совета Д002.023.02 кандидат физ.-мат. наук	Вагин Константин Юрьевич

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Одной из основных задач физики является создание теории фундаментальных взаимодействий. Стандартная модель, объединяющая сильное, слабое и электромагнитное взаимодействия на квантовом уровне, не подходит на роль такой теории, так как по построению не включает гравитацию. На классическом уровне гравитационные взаимодействия описываются общей теорией относительности, однако, согласованная квантовая теория гравитации до сих пор не построена, так как квантово-полевые обобщения теории относительности оказываются неперенормируемыми теориями поля. Рассмотрение суперсиметричных обобщений общей теории относительности также не приводит к перенормируемым теориям гравитации [5].

Теория (супер)струн является претендентом на роль теории, объединяющей все фундаментальные взаимодействия. Помимо этого, она представляет концептуальный теоретический интерес благодаря наличию дуальностей, которые понимаются как преобразования, связывающее различные теории (например, теории суперструн [6]). Сасскиндом и т'Хоофтом было предложено понятие *голографической дуальности* [7; 8], в рамках которого постулировалось, что квантовая теория гравитации в объеме определяется динамикой некоторой теории без гравитационных степеней свободы на границе этого объема. В контексте теории струн важным примером такой дуальности является соответствие между струнами на фоне пространства анти-де Ситтера (AdS) и конформной теорией поля, заданной на границе (CFT) [9].

Технически AdS/CFT соответствие можно понимать в рамках прескрипции Губсера, Клебанова, Полякова и Виттена (GKPW), которая связывает гравитационные объекты с объектами конформной теории поля [10—12]. Согласно этой прескрипции, производящий функционал теории гравитации в пространстве AdS_{d+1} равен производящему функционалу конформной теории в пространстве Минковского размерности d, если граничные значения полей в объеме отождествить с операторами на границе. Таким образом, AdS/CFT соответствие порождает вычислительную концепцию, в рамках которой корреляционные функции в граничной теории используются для построения квантовой гравитации в объеме, а геометрические объекты в теории гравитации оказываются связанными с наблюдаемыми в граничной теории.

Несмотря на весь прогресс в этом направлении, AdS/CFT соответствие все еще имеет статус хорошо проверенной гипотезы. На данный момент не найдено ни одного точно доказанного примера такой дуальности, что связано с тем, что производящие функционалы в объеме/на границе по большей части неизвестны. Однако для теорий, обладающих высокими симметриями, производящие функционалы (или корреляционные функции) найдены точно, поэтому перспективным направлением для исследования представляется AdS_3/CFT_2 соответствие. В этом случае симметрией двумерной конформной теории на границе является бесконечномерная алгебра Вирасоро. Трехмерная гравитация, в свою очередь, не содержит распространяющихся степеней свободы, поэтому динамика определяется границей и топологическими дефектами в объеме [13; 14]. При изучении AdS_3/CFT_2 соответствия были получены такие результаты как соответствие между теориями Черна-Саймонса и Весса-Зумино-Виттена [15], предписание для вычисления энтропии запутывания [16] и доказательство свойства ее универсальности [17], формулировка p-адического AdS_3/CFT_2 соответствия [18].

Недавно было показано, что AdS/CFT соответствие можно понимать на более глубоком, чем равенство производящих функционалов/корреляционных функций, уровне. Более точно, имеет место соответствие между базисными элементами (*конформными блоками*) в пространстве корреляторов граничной теории и геодезическими диаграммами Виттена в объеме [19]. В настоящей диссертационной работе исследуется AdS_3/CFT_2 соответствие между конформными блоками и геодезическими сетями, которые представляют частный случай геодезических диаграмм Виттена. Актуальной задачей диссертации является проверка AdS_3/CFT_2 в различных пределах путем получения и сравнения явных выражений как в граничной теории, так и в теории гравитации в объеме.

Степень разработанности темы. Двумерные конформные теории поля (CFT_2) активно изучались вне контекста AdS_3/CFT_2 соответствия, в частности, в теории струн. В рамках бутстрапного подхода [20], конформная теория задается спектром примарных операторов, которые характеризуются конформными размерностями и структурными константами, определяемыми трёхточечными корреляционными функциями. Корреляционные функции примарных операторов в CFT_2 могут быть разложены в конформные блоки, которые задаются только алгеброй симметрий и параметрически зависят от конформных размерностей Δ и центрального заряда алгебры Вирасоро c.

В классическом пределе $c \to \infty$, одновременно полагая конформные размерности линейно растущими по c, конформный блок упрощается и может быть представлен в виде экспоненты от произведения центрального заряда на т.н. *классический конформный блок* [21], который не зависит от центрального заряда. Однако явный вид функций классических конформных блоков неизвестен, поэтому в вычислениях прибегают к дополнительному приближению *легких и тяжелых операторов* (HL). В рамках этого приближения конформные размерности части операторов считаются много меньшими, чем конформные размерности оставшихся операторов. Наиболее простым и разработанным является приближение двух тяжелых операторов [22—24], в рамках которого в первом порядке HL приближения были явно найдены 4-точечные блоки с двумя тяжелыми операторами. Для n-точечного классического блока с двумя тяжелыми операторами получена система уравнений, определяющая данный блок [25]. Однако функция n-точечного классического блока с двумя тяжелыми операторами пока неизвестна в замкнутом виде и получение данной функции является одной из целей настоящей диссертации.

Естественным развитием приближения двух тяжелых операторов для n-точечных классических блоков является рассмотрение блоков с произвольным числом тяжелых операторов. Данное обобщение позволит описать любые классические блоки в HL приближении, что может стать существенным шагом для понимания свойств двумерной конформной теории в классическом пределе и анализа $\mathrm{AdS}_3/\mathrm{CFT}_2$ соответствия. Помимо этого, явные функции классических блоков с тремя и более тяжелыми операторами представляют интерес в контексте вычислений в следующих порядках HL приближения, так как данный вопрос остается открытым даже для 4-точечного блока. Для рассмотрения классических блоков с произвольным числом тяжелых операторов необходимо обобщить методы вычисления n-точечных блоков с двумя тяжелыми операторами, что является одной из целей данной диссертационной работы.

В контексте получения явных результатов для классических конформных блоков рассматриваются специальные *единичные* блоки, соответствующие обнулению одной или нескольких конформных размерностей. Такие блоки возникают в приложениях, в частности, они связаны с энтропией запутывания. Одними из целей данной диссертации являются вычисление единичных блоков и построение теории возмущения над этими блоками - в частности, для прямой проверки AdS_3/CFT_2 соответствия. Подобная теория возмущений может быть развита в рамках приближения сверхлегких операторов (SL) [26], конформные размерности которых полагаются много меньшими конформных размерностей легких операторов.

В контексте голографической дуальности классический предел в граничной теории отвечает малой гравитационной константе связи G_N согласно соотношению $c = 3R/2G_N$, где R - радиус AdS_3 [27]. Примарным операторам граничной теории в этом пределе соответствуют частицы с массами Δ/c в теории гравитации. Дуальная реализация HL приближения, в свою очередь, разделяет эти частицы на тяжелые и легкие, причем тяжелые продуцируют топологические дефекты геометрии, а легкие рассматриваются как пробные частицы, распространяющиеся на фоне геометрии, порожденной тяжелыми. Такие дуальные геометрии были изучены для случая двух тяжелых операторов и задаются метрикой конической сингулярности или БТЗ черной дыры [28].

Дуальная трехмерная геометрия может быть описана метрикой Баньядоса [29], которая задает решение уравнений Эйнштейна с конформной симметрией на границе. Данная метрика параметризуется (анти)голоморфной функцией, которая в дуальной реализации HL приближения полагается равной вкладу тяжелых операторов в тензор энергии-импульса граничной теории. Описание дуальных геометрий для случая более чем двух тяжелых операторов в контексте AdS_3/CFT_2 соответствия для классических конформных блоков с произвольным количеством тяжелых операторов неизвестно. Простейшим случаем является конфигурация трёх тяжелых операторов, которая исследуется в данной диссертационной работе. Помимо этого, актуальной задачей, рассматриваемой в диссертации, является анализ дуальной геометрии для четырёх и более тяжелых операторов.

Легкие операторы граничной теории с точки зрения AdS_3/CFT_2 соответствия дуальны пробным частицам в объеме. Согласно голографической прескрипции, действие таких частиц как функция граничных условий равно классическому конформному блоку (с точностью до конформного преобразования специального вида). В работе [25] была доказана теорема о равенстве n-точечных классических конформных блоков с двумя тяжелыми операторами длинам специальных геодезических сетей, растянутых на гиперболической плоскости. Рассматриваемые геодезические сети состоят из $2n-5$ сегментов мировых линий частиц, которые пересекаются в трехвалентных вершинах, координаты которых определяются условиями, следующими из минимальности длины сети. Однако, пока не найдены способы получения явных выражений ни длин дуальных геодезических сетей, ни классических конформных блоков. Интересным направлением исследований является чисто геометрическая формулировка проблемы вычисления длины геодезической сети, которая оказывается связана с известной оптимизационной задачей о деревьях Штейнера. Такая постановка вопроса позволяет использовать известные геометрические и тригонометрические подходы к вычислениям геодезических сетей. Помимо этого, длина геодезической сети, дуальной n-точечному классическому блоку, может быть найдена в определенных приближениях. Для полученных классических конформных блоков/длин геодезических сетей представляется возможным явно проверить $\mathrm{AdS}_3/\mathrm{CFT}_2$ соответствие.

Таким образом, **целями** данной диссертационной работы являются:

1. Развитие методов вычисления и получение явных функций классических конформных блоков, ассоциированных с алгеброй Вирасоро.
2. Построение дуальных трехмерных геометрий, голографически описывающих тяжелые операторы в классическом конформном блоке.
3. Анализ деревьев Штейнера на двумерных геометриях, вычисление их длин. Явная проверка дуальности между классическими конформными блоками и длинами данных деревьев.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Разработать методы вычисления многоточечных классических конформных блоков с тремя и более тяжелыми операторами.
2. Получить явный вид функций единичных многоточечных классических блоков с двумя тяжелыми операторами.
3. Разработать процедуру вычисления поправок к n-точечным единичным классическим блокам в сверхлегком приближении.

4. Описать трёхмерную дуальную геометрию, продуцируемую произвольным числом тяжелых операторов в граничной теории.
5. Сформулировать дуальное описание легких операторов в граничной теории.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Формулировка монодромного метода вычисления n-точечных классических конформных блоков с произвольным числом тяжелых операторов.
2. Явные выражения для функций n-точечных единичных классических блоков с двумя тяжелыми операторами, процедура факторизации n-точечных единичных классических блоков.
3. Поправки к многоточечным единичным классическим блокам в сверхлегком приближении.
4. Конструкция трёхмерной геометрии, порождаемой тремя и более тяжелыми операторами на границе.
5. Описание легких операторов классического блока в терминах деревьев Штейнера, явные выражения для длин данных деревьев.

Научная новизна, достоверность и личный вклад автора. Новизна рассматриваемых вопросов, а также достоверность полученных результатов привели к продвижению в понимании $\mathrm{AdS}_3/\mathrm{CFT}_2$ соответствия в классическом пределе. Все представленные в диссертации результаты являются оригинальными и получены автором лично или при его непосредственном участии. Приведенные в диссертации результаты являются актуальными, используются и развиваются как российскими, так и зарубежными научными группами.

Научная и практическая значимость. Изучаемые в диссертации проблемы представляют научный интерес в области теоретической и математической физики. Полученные в работе выражения для классических конформных блоков могут быть использованы для вычисления энтропии запутывания, корреляторов OTOC, анализа феномена скрамблинга, а также для вычислений в теории Лиувилля. Конструкции, связанные с монодромным методом, могут быть перенесены на случаи конформных блоков, которые ассоциированы с W_N и BMS_3 алгебрами. Методы построения трехмерных геометрий, продуцируемых тяжелыми операторами, могут быть использованы для анализа дуальной реализации HL приближения в следующих порядках. Разработанные методы вычисления длин геодезических сетей могут быть использованы для дальнейшей проверки AdS_3/CFT_2 соответствия в различных приближениях.

Апробация работы. Основные результаты работы опубликованы в 4 статьях [1—4] в журналах, рекомендованных ВАК. Помимо этого, основные результаты диссертации докладывались на семинарах ОТФ ФИАН, а также на следующих конференциях:

1. Молодежная конференция по теоретической и экспериментальной физике (Институт теоретической и экспериментальной физики имени А.И. Алиханова (ИТЭФ), 25 - 28 ноября 2019, Москва, Россия)
2. Международная конференция «Hamilton School on Mathematical Physics» (Trinity College Dublin, 24 - 28 августа 2020, Дублин, Ирландия)
3. Международная конференция «Strings and Fields 2020» (Институт теоретической физики им. Х. Юкавы (YITP), 16 - 20 ноября 2020, Киото, Япония)

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и 4 приложений. Полный объем диссертации **106** страниц текста с **21** рисунком и **1** таблицей. Список литературы содержит **110** наименований.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность темы исследования и приводится обзор научной литературы по изучаемым проблемам. Также формулируются цели, задачи и защищаемые положения диссертации.

Первая глава основана на работах [1—4] и посвящена анализу n-точечных классических конформных блоков в HL приближении.

Конформный блок, соответствующий n-точечной корреляционной функции примарных операторов с конформными размерностями Δ_i, $i = 1,...,n$, представляет собой вклад в корреляционную функцию набора $n-3$ примарных операторов из спектра теории с промежуточными размерностями $\tilde{\Delta}_p$, $p = 1,...,n-3$. В классическом пределе $c \to \infty$ конформный блок определяется экспонентой от классического блока $f(x|\epsilon,\tilde{\epsilon})$:

$$\mathcal{F}(x|\Delta,\tilde{\Delta},c)\Big|_{c\to\infty} \;\to\; \exp\Big[\frac{c}{6}f(x|\epsilon,\tilde{\epsilon})\Big] \;, \quad \epsilon_i = \frac{6\Delta_i}{c} \;, \quad \tilde{\epsilon}_p = \frac{6\tilde{\Delta}_p}{c} \;,$$

где также полагается, что внешние и промежуточные *классические размерности* $\epsilon, \tilde{\epsilon}$ конечны в этом пределе и $x = \{z_1, z_2,...,z_n\}$. Монодромный метод вычисления классических блоков основывается на рассмотрении вспомогательного $(n+1)$-точечного блока со вставкой вырожденного оператора $V_{(2,1)}$. Данный вспомогательный блок удовлетворяет уравнению Белавина-Полякова-Замолодчикова, которое определяет его монодромные свойства при обходе по контурам специального вида. Анализируя монодромии вспомогательного блока, можно получить систему алгебраических уравнений на аксессорные параметры n-точечного классического блока $c_m = \frac{\partial f(x|\epsilon,\tilde{\epsilon})}{\partial z_m}$, которые называются монодромными уравнениями. Эта система рассматривается в HL приближении, в рамках которого предполагается, что все операторы разделены на два сектора, легкий и тяжелый, причем

$$\epsilon_i \ll \epsilon_j \;, \qquad i = 1,..,k \;, \qquad j = k+1,..,n \;.$$

В Разделе 1.2. описан монодомный метод вычисления n-точечных классических конформных блоков с k легкими и $(n-k)$ тяжелыми операторами, которые далее обозначаются $L^k H^{n-k}$. Оказывается, что монодромные уравнения упрощаются, если ввести голографические переменные w_i , $i = 1,...,k$, рассмотренные в Разделе 1.3. Эти переменные строятся как значения голографической функции $w(y)$ в точках вставки легких операторов, а сама голографическая функция определяется тяжелым сектором классического конформного блока. Голографические функции были явно найдены для случаев двух и трёх тяжелых операторов. В терминах голографических переменных система монодромных уравнений, определяющая $L^k H^{n-k}$ блок, имеет вид

$$I^{(p)}_{++} I^{(p)}_{++} + I^{(p)}_{+-} I^{(p)}_{-+} = -4\pi^2 \tilde{\epsilon}^2_p \,, \qquad p = 1,...,k-1 \,,$$

$$I^{(p)}_{++} = I^{(k-1)}_{++} = 0 \,, \qquad p = k,...,n-3 \,,$$

где

$$\frac{I^{(p)}_{++}}{2\pi i} = \sum_{i=1}^{min\{p+1,k\}} (X_i w_i + \epsilon_i) \,, \quad \frac{I^{(p)}_{+-}}{2\pi i} = \sum_{i=1}^{min\{p+1,k\}} \left(X_i w_i^2 + 2\epsilon_i w_i \right) \,,$$

$$\frac{I^{(p)}_{-+}}{2\pi i} = - \sum_{i=1}^{min\{p+1,k\}} X_i \,, \quad X_i = \frac{1}{w'_i} \left(c^{(1)}_i - \epsilon_i \frac{w''_i}{w'_i} \right) \,, \quad i = 1,...,k,$$

и $c^{(1)}_i$ обозначают аксессорные параметры, построенные по легкому сектору классического блока в первом порядке HL приближения, а w'_i и w''_i - первую и вторую производные голографической функции в точках z_i. Исходя из свойств этой системы было доказано свойство униформизации классических конформных блоков, согласно которому форма легкого сектора определяется только конфигурацией легких операторов (в терминах голографических переменных).

Для случая двух тяжелых операторов система мнодромных уравнений, написанная выше, рассматривалась в Разделе 1.4. Были воспроизведены выражения для 4-точечных и получены явные функции единичных $5, 6$-точечных блоков, соответствующих равенству одной из промежуточных размерностей 0. Также были найдены многоточечные блоки с несколькими нулевыми промежуточными размерностями. Вычисление этих блоков опирается на факторизационное соотношение для единичных многоточечных блоков, доказанное в Разделе 1.6. и Приложении Б. В Разделе 1.5. рассматривались $4, 5$-точечные блоки с тремя тяжелыми операторами, для которых было явно продемонстрировано свойство униформизации классических конформных блоков, сформулированное выше. Кроме этого, в Приложении А было проверено, что функция 4-точечного блока с тремя тяжелыми операторами в первых порядках по координате легкого оператора воспроизводит ответ, полученный разложением в ряд и последовательным рассмотрением классического и HL приближений для произвольного 4-точечного блока.

Дальнейшим развитием методов вычисления многоточечных блоков является рассмотрение дополнительного сверхлегкого приближения в Разделе 1.7. В этом приближении вычислен ряд классических блоков общего положения. Теория возмущений строится над найденными в Разделах 1.4. и 1.6. единичными блоками и получены соответствующие $5,6$-точечные и $(2M+2)$-точечные блоки с сверхлегкими операторами, где $M = 3, 4, ...$

Вторая глава основана на результатах работы [2] и посвящена анализу дуальной трёхмерной геометрии, продуцируемой тяжелым сектором классических конформных блоков.

Дуальная геометрия описывается метрикой Баньядоса

$$ds^2 = R^2 \left(-H(z)dz^2 - \bar{H}(\bar{z})d\bar{z}^2 + \frac{u^2}{4} H(z)\bar{H}(\bar{z})\, dzd\bar{z} + \frac{du^2 + dzd\bar{z}}{u^2} \right) ,$$

где $u \in [0,\infty)$ и $z, \bar{z} \in \mathbb{C}$, радиус AdS_3 обозначен R. Эта метрика параметризуется (анти)голоморфной функциями $H(z)$ и $\bar{H}(\bar{z})$, которые отвечают граничным степеням свободы. В контексте $\mathrm{AdS}_3/\mathrm{CFT}_2$ соответствия $H(z)$ отождествляется с классическим тензором энергии-импульса граничной двумерной теории, зависящим от размерностей тяжелых операторов

$$T(z|\Delta) = \frac{c}{6} H(z|\Delta) ,$$

где $c = 3R/2G_N$.

Для случаев двух и трех тяжелых операторов в Разделе 2.2. был предложен способ построения таких геометрий. В этом подходе естественным образом возникают голографические переменные, введенные в Главе 1. Дуальные геометрии, генерируемые двумя и тремя тяжелым операторам в граничной теории, были описаны как пространства AdS_3 с коническими дефектами.

Для случая двух тяжелых операторов, после перехода к глобальным координатам, было показано, что полученная метрика воспроизводит метрику конической сингулярности. Для метрики, продуцируемой двумя тяжелыми операторами с размерностями ϵ_H, изучались свойства сечения постоянного времени. Было показано, что соответствующая метрика сводится к модели диска Пуанкаре с угловым дефектом $\alpha = \sqrt{1-4\epsilon_H}$. Данное наблюдение является важным для обсуждения в Главе 3, где широко используются свойства диска Пуанкаре.

Для случая трёх тяжелых операторов были найдены положения и величины конических дефектов, которые параметризуются классическими размерностями тяжелых операторов. Также предложен метод построения дуальной метрики для более чем трех тяжелых операторов. Для метрики, генерируемой $(n-k)$ тяжелыми операторами, было найдено описание в терминах конических дефектов. Также вычислены длины простейших геодезических на данной геометрии и показано их соответствие $(n-k+1)$-точечным классическим конформным блокам LH^{n-k}.

Третья глава, основанная на результатах работ [1; 4], посвящена дуальному описанию легкого сектора классических конформных блоков в терминах голографических деревьев Штейнера.

Ранее была доказана теорема равенства классических конформных блоков в HL приближении и длин геодезических сетей на гиперболической плоскости [25]. Однако, явные выражения для многоточечных блоков/длин сетей оставались неизвестными, что требовало развития методов вычисления таких блоков/геодезических сетей. В Главе 3 изучаются геодезические сети, дуальные классическим конформным блокам с двумя тяжелыми операторами. В силу свойства униформизации, анализ может быть легко обобщен на произвольное число тяжелых операторов.

В Разделе 3.1. задача о поиске длины геодезической сети была переформулирована как задача Штейнера на диске Пуанкаре. Задача Штейнера состоит в том, чтобы (при заданных внешних вершинах и весах ребер) найти координаты внутренних вершин так, чтобы длина связного дерева, соединяющего эти вершины, была минимальна. Оказывается, что специальные *голографические деревья Штейнера*, растянутые на диске Пуанкаре $\mathbb{D}_\alpha$ с дефектом угла α дуальны классическим конформным блокам. Более точно, взвешенная длина такого дерева $L^{(n-1)}_{\mathbb{D}_\alpha}(w|\epsilon, \tilde{\epsilon})$ считает вклад легкого сектора в классический конформный блок, что может быть выражено *голографическим соотношением*

$$f_n(z(w)|\alpha,\epsilon,\tilde{\epsilon}) = -L^{(n-1)}_{\mathbb{D}_\alpha}(w|\epsilon,\tilde{\epsilon}) + i\sum_{k=1}^{n-2}\epsilon_k w_k\,, \qquad w(z) = i\ln(1-z).$$

Голографическое дерево Штейнера, дуальное n-точечному блоку, включает в себя $n-2$ внешних ребра, прикрепленных к границе/центру диска Пуанкаре и $n-3$ внутренних ребра, которые соединяются в трехвалентных вершинах, причем веса ребер задаются классическими размерностями внешних/промежуточных операторов. Для вычисления длин деревьев Штейнера с вершинами на границе диска Пуанкаре была разработана процедура регуляризации, изложенная в Приложении B. В Разделе 3.2. методами гиперболической тригонометрии были найдены длины деревьев, дуальных классическим конформным блокам из Раздела 1.4. и была явно продемонстрирована голографическая дуальность между такими блоками и голографическими деревьями Штейнера.

Помимо этого, факторизационное соотношение, доказанное в Разделе 1.6., допускает простую интерпретацию в терминах разрезов голографических деревьев Штейнера, что обсуждается в Разделе 3.1.3. Было показано, что голографические деревья Штейнера с разрезами считают единичные n-точечные блоки. Несмотря на то, что данные деревья Штейнера являются частными случаями геодезических сетей, для получения длин деревьев более общего вида можно развивать дополнительную теорию возмущений (по весам ребер) над деревьями Штейнера с разрезами. В Разделе 3.3. строится теория возмущений по сверхлегким весам, которая с точки зрения граничной теории отвечает SL приближению. Полученные в рамках данной теории возмущения результаты позволяют явно проверить голографическое соотношение между деревьями Штейнера из Раздела 3.3 и классическими конформными блоками из Раздела 1.7. Например, было доказано соответствие между $(2M+2)$-точечным блоком и дуальным ему голографическим деревом Штейнера с $(2M+1)$ внешними вершинами. Взвешенная длина данного дерева зависит от координат внешних вершин на границе диска Пуанкаре

w_k, $k = 1,...,2M$ и имеет вид

$$L_{\mathbb{D}}^{(2M+1)}(w_i|\epsilon,\tilde{\epsilon}) = 2\sum_{i=1}^{M}\epsilon_i \log\sin w_{2i-1,2i} + 2\sum_{i=1}^{M-1}\tilde{\epsilon}_i \log\left(\sqrt{U_{2i+1}+1}+\sqrt{U_{2i+1}}\right)$$

$$+\epsilon_r \log\cot\frac{w_{2M-1,2M}}{2}\ ,$$

$$U_{2i-1} = \frac{\sin w_{2i+1,2i}\ \sin w_{2i+2,2i-1}}{\sin w_{2i,2i-1}\ \sin w_{2i+2,2i+1}}\ , \qquad w_{ij} = \frac{w_i - w_j}{2}\ ,$$

где ϵ_i обозначают веса внешних ребер, ϵ_r - вес ребра, соединенного с центром диска, $\tilde{\epsilon}_i$ - веса внутренних ребер, причем в рамках SL приближения полагается $\epsilon_r, \tilde{\epsilon}_i \ll \epsilon_i$. Длина дерева с $(2M+1)$ внешними вершинами представляет максимально общий пример из обсуждаемых в литературе (в смысле количества независимых весов дерева), когда и блок, и соответствующая ему взвешенная длина могут быть полностью вычислены. Это важно в контексте получения явных выражений длин голографических деревьев Штейнера и многоточечных классических конформных блоков.

В **заключении** приведены основные результаты работы:

1. Развит монодромный метод вычисления n-точечных классических конформных блоков с произвольным числом тяжелых операторов. Введены голографические переменные, существенно упрощающие монодромные уравнения, определяющие n-точечный классический конформный блок. Установлено и доказано свойство униформизации легкого сектора классических конформных блоков с использованием голографических переменных.

2. Найдены $5,6$-точечные единичные блоки с двумя тяжелыми операторами и $4,5$-точечные блоки с тремя тяжелыми операторами. Доказана теорема о факторизации и явно найдены единичные n-точечные блоки с двумя тяжелыми операторами.

3. Построены классические конформные блоки с сверхлегкими промежуточными операторами в рамках теории возмущения над единичными блоками. В сверхлегком приближении вычислены поправки к n-точечным единичным блокам.

4. Описана дуальная геометрия, соответствующая тяжелому сектору классических конформных блоков. Явно построены дуальные геометрии, генерируемые тремя тяжелыми операторами и предложено обобщение данной конструкции на произвольное число тяжелых операторов.

5. Построены голографические деревья Штейнера на диске Пуанкаре, дуальные классическим конформным блокам. Найдены длины деревьев с $n \leq 5$ внешними вершинами. Вычислены длины деревьев с $(2M+1)$ внешними вершинами в дополнительном приближении сверхлегких весов. Явно показано равенство длин деревьев соответствующим классическим конформным блокам.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Alkalaev K.*, *Pavlov M.* Perturbative classical conformal blocks as Steiner trees on the hyperbolic disk // JHEP. — 2019. — т. 02. — с. 023. — DOI: 10.1007/JHEP02(2019)023. — arXiv: 1810.07741 [hep-th].
2. *Alkalaev K. B.*, *Pavlov M.* Four-point conformal blocks with three heavy background operators // JHEP. — 2019. — т. 08. — с. 038. — DOI: 10.1007/JHEP08(2019)038. — arXiv: 1905.03195 [hep-th].
3. *Alkalaev K.*, *Pavlov M.* Holographic variables for CFT_2 conformal blocks with heavy operators // Nucl. Phys. B. — 2020. — т. 956. — с. 115018. — DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2020.115018. — arXiv: 2001.02604 [hep-th].
4. *Pavlov M.* Large- c conformal $(n \leq 6)$-point blocks with superlight weights and holographic Steiner trees // Phys. Lett. B. — 2021. — т. 816. — с. 136273. — DOI: 10.1016/j.physletb.2021.136273. — arXiv: 2101.04513 [hep-th].

Список литературы

5. *Freedman D. Z., Nieuwenhuizen P. van, Ferrara S.* Progress Toward a Theory of Supergravity // Phys. Rev. D. — 1976. — т. 13. — с. 3214—3218. — DOI: 10.1103/PhysRevD.13.3214.
6. *Witten E.* String theory dynamics in various dimensions // Nucl. Phys. B. — 1995. — т. 443. — с. 85—126. — DOI: 10.1016/0550-3213(95)00158-O. — arXiv: hep-th/9503124.
7. *Susskind L.* The World as a hologram // J. Math. Phys. — 1995. — т. 36. — с. 6377—6396. — DOI: 10.1063/1.531249. — arXiv: hep-th/9409089.
8. *'t Hooft G.* Dimensional reduction in quantum gravity // Conf. Proc. C. — 1993. — т. 930308. — с. 284—296. — arXiv: gr-qc/9310026.
9. *Maldacena J. M.* The Large N limit of superconformal field theories and supergravity // Adv.Theor.Math.Phys. — 1998. — т. 2. — с. 231—252. — DOI: 10.1023/A:1026654312961,10.1023/A:1026654312961. — arXiv: hep-th/9711200 [hep-th].
10. *Gubser S. S., Klebanov I. R., Polyakov A. M.* Gauge theory correlators from noncritical string theory // Phys. Lett. B. — 1998. — т. 428. — с. 105—114. — DOI: 10.1016/S0370-2693(98)00377-3. — arXiv: hep-th/9802109.
11. *Witten E.* Anti-de Sitter space and holography // Adv. Theor. Math. Phys. — 1998. — т. 2. — с. 253—291. — DOI: 10.4310/ATMP.1998.v2.n2.a2. — arXiv: hep-th/9802150.
12. *Klebanov I. R., Witten E.* AdS / CFT correspondence and symmetry breaking // Nucl. Phys. B. — 1999. — т. 556. — с. 89—114. — DOI: 10.1016/S0550-3213(99)00387-9. — arXiv: hep-th/9905104.
13. *Deser S., Jackiw R.* Three-Dimensional Cosmological Gravity: Dynamics of Constant Curvature // Annals Phys. — 1984. — т. 153. — с. 405—416. — DOI: 10.1016/0003-4916(84)90025-3.
14. *Witten E.* (2+1)-Dimensional Gravity as an Exactly Soluble System // Nucl. Phys. B. — 1988. — т. 311. — с. 46. — DOI: 10.1016/0550-3213(88)90143-5.

15. *Witten E.* Quantum Field Theory and the Jones Polynomial // Commun. Math. Phys. / под ред. A. N. Mitra. — 1989. — т. 121. — с. 351—399. — DOI: 10.1007/BF01217730.

16. *Ryu S.*, *Takayanagi T.* Holographic derivation of entanglement entropy from AdS/CFT // Phys. Rev. Lett. — 2006. — т. 96. — с. 181602. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.96.181602. — arXiv: hep-th/0603001.

17. *Hartman T.* Entanglement Entropy at Large Central Charge. — 2013. — arXiv: 1303.6955 [hep-th].

18. *Gubser S. S.* A p-adic version of AdS/CFT // Adv. Theor. Math. Phys. — 2017. — т. 21. — с. 1655—1678. — DOI: 10.4310/ATMP.2017.v21.n7.a3. — arXiv: 1705.00373 [hep-th].

19. Witten Diagrams Revisited: The AdS Geometry of Conformal Blocks / E. Hijano [и др.] // JHEP. — 2016. — т. 01. — с. 146. — DOI: 10.1007/JHEP01(2016)146. — arXiv: 1508.00501 [hep-th].

20. *Polyakov A. M.* Nonhamiltonian approach to conformal quantum field theory // Zh. Eksp. Teor. Fiz. — 1974. — т. 66. — с. 23—42.

21. *Belavin A.*, *Polyakov A. M.*, *Zamolodchikov A.* Infinite Conformal Symmetry in Two-Dimensional Quantum Field Theory // Nucl.Phys. — 1984. — т. B241. — с. 333—380. — DOI: 10.1016/0550-3213(84)90052-X.

22. *Fitzpatrick A. L.*, *Kaplan J.*, *Walters M. T.* Universality of Long-Distance AdS Physics from the CFT Bootstrap // JHEP. — 2014. — т. 1408. — с. 145. — DOI: 10.1007/JHEP08(2014)145. — arXiv: 1403.6829 [hep-th].

23. *Hijano E.*, *Kraus P.*, *Snively R.* Worldline approach to semi-classical conformal blocks // JHEP. — 2015. — т. 07. — с. 131. — DOI: 10.1007/JHEP07(2015)131. — arXiv: 1501.02260 [hep-th].

24. *Alkalaev K. B.*, *Belavin V. A.* Classical conformal blocks via AdS/CFT correspondence // JHEP. — 2015. — т. 08. — с. 049. — DOI: 10.1007/JHEP08(2015)049. — arXiv: 1504.05943 [hep-th].

25. *Alkalaev K. B.* Many-point classical conformal blocks and geodesic networks on the hyperbolic plane // JHEP. — 2016. — т. 12. — с. 070. — DOI: 10.1007/JHEP12(2016)070. — arXiv: 1610.06717 [hep-th].

26. *Alkalaev K. B.*, *Belavin V. A.* Monodromic vs geodesic computation of Virasoro classical conformal blocks // Nucl. Phys. — 2016. — т. B904. — с. 367—385. — DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2016.01.019. — arXiv: 1510.06685 [hep-th].

27. *Brown J. D.*, *Henneaux M.* Central Charges in the Canonical Realization of Asymptotic Symmetries: An Example from Three-Dimensional Gravity // Commun.Math.Phys. — 1986. — т. 104. — с. 207—226. — DOI: 10.1007/BF01211590.

28. *Banados M.*, *Teitelboim C.*, *Zanelli J.* The Black hole in three-dimensional space-time // Phys. Rev. Lett. — 1992. — т. 69. — с. 1849—1851. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.69.1849. — arXiv: hep-th/9204099.

29. *Banados M.* Three-dimensional quantum geometry and black holes. — 1998. — DOI: 10.1063/1.59661. — arXiv: hep-th/9901148 [hep-th]. — [AIP Conf. Proc.484,147(1999)].