На правах рукописи

Морозов Андрей Алексеевич

Точные вильсоновские средние в калибровочной теории Черна-Саймонса

Специальность 01.04.02 —
«Теоретическая физика»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Москва — 2021

Работа выполнена в Институте проблем передачи информации им. А.А. Харкевича Российской академии наук.

Официальные оппоненты:	**Волович Игорь Васильевич,** доктор физико-математических наук, чл.-корр. РАН, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Математический институт им. В.А.Стеклова РАН, г.Москва, заведующий отделом математической физики
	Исаев Алексей Петрович, доктор физико-математических наук, профессор, Объединенный институт ядерных исследований, г. Дубна, заместитель директора по научной работе Лаборатории теоретической физики им. Н.Н.Боголюбова
	Ландо Сергей Константинович, доктор физико-математических наук, профессор, Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, г. Москва, заведующий Международной лабораторией кластерной геометрии
Ведущая организация:	Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт ядерных исследований РАН, г. Москва

Защита состоится 11 октября 2021 г. в 12:00 часов на заседании диссертационного совета Д 002.023.02 при Физическом институте им. П.Н. Лебедева РАН по адресу: 119991 ГСП-1 Москва, Ленинский проспект, д.53.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФИАН и на сайте www.lebedev.ru.

Автореферат разослан «___» _________ 2021 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 002.023.02,
канд. физ.-мат. наук   Вагин Константин Юрьевич

Общая характеристика работы

Одна из задач теоретической физики состоит в изучении различных теорий и исследования того, как параметры теорий влияют на явления и наблюдаемые в этой теории. Один из важных параметров соответствующей системы – это набор ее симметрий. В рамках диссертационной работы изучаются топологические теории. Топологичность теории означает, что теория не зависит явным образом от метрики, от кривизны пространства-времени, а только от топологических особенностей пространства в целом. Теории такого типа находят применение в самых разных областях физики и математики: в некоторых моделях гравитации, математической топологии, в том числе, теории узлов, теории струн, квантовых теориях поля, квантовой хромодинамике, квантовом дробном эффекте Холла, квантовых вычислениях, конформных теориях поля и других.

Топологическая симметрия теории и наблюдаемых теории сильно ограничивает набор параметров, от которых могут зависеть наблюдаемые теории. Это позволяет досконально изучить зависимости наблюдаемых от других параметров теории, таких как калибровочные группы и представления. Таким образом, изучение наблюдаемых топологических теорий может помочь понять структуру аналогичных наблюдаемых и в нетопологических теориях.

В качестве примера такой задачи, можно упомянуть исследования в квантовой хромодинамике. Свойства такой теории можно описать с помощью вильсоновских средних. При этом такие средние можно изучать для средних разных типов. Примером эффектов нетривиальных представлений можно считать пентакварк. Зависимость вильсоновских средних от представлений можно изучать и в более простых теориях, например, в трехмерной теории Черна-Саймонса, которая является топологической. Данная работа посвящена именно изучению вильсоновских средних в трехмерной теории Черна-Саймонса.

На первый взгляд, эта теория является свободной и потому тривиальной и неинтересной для изучения. Но на самом деле в этой теории есть набор нетривиальных наблюдаемых – вильсоновских средних. Эти наблюдаемые все еще в полной мере не изучены. Вильсоновские средние теории Черна-Саймонса относятся к очень важному классу наблюдаемых – ответы для вильсоновских средних можно найти в их полном виде, непертурбативным образом. Это отличает такие наблюдаемые от большого числа величин в других квантовых теориях поля. Это позволяет найти точные, а не примерные ответы в такой теории. Вильсоновские средние теории Черна-Саймонса, однако, все еще зависят от большого числа параметров, таких как уровень теории Черна-Саймонса, калибровочная группа, представление этой группы, траектория по которой вычисляется вильсоновское среднее и топология рассматриваемого пространства. Методом вычисления точных вильсоновских средних в теории Черна-Саймонса в зависимости от этих параметров и посвящена данная работа.

Нельзя не упомянуть и о еще одном важном аспекте трехмерной теории Черна-Саймонса. Известно, что вильсоновских средние при конкретном выборе калибровочной группы совпадают с инвариантами узлов. Таким образом, раскрывается глубокая связь между теорией Черна-Саймонса и математической теорией узлов.

В диссертационной работе разработаны методы вычисления точных вильсоновских средних в теории Черна-Саймонса. Рассмотрено, как вычислять такие вильсоновские средние и равные им инварианты узлов с помощью квантовой $\mathcal{R}$-матрицы. Универсальная квантовая $\mathcal{R}$-матрица действует на произведениях двух представлений квантовых групп. Используя свойства такой универсальной квантовой $\mathcal{R}$-матрицы можно перейти к базису неприводимых представлений в произведении двух исходных представлений. Получившуюся матрицу также называют $\mathcal{R}$-матрицей в пространстве сплетающих операторов. Такая матрица действует одинаково на все элементы одного неприводимого представления. Такие матрицы можно использовать для построения эффективных методов вычисления вильсоновских средних и полиномов узлов.

Узлы, связанные с кривыми, вдоль которых вычисляются вильсоновские средние, можно представить в виде косы. Для таких кос можно легко записать диагональные $\mathcal{R}$-матрицы для любой группы sl_N, используя формализм базиса сплетающих операторов. Но также в косе есть и недиагональные $\mathcal{R}$-матрицы. Эти матрицы известны для косы любой ширины для фундаментального представления квантовой группы $U_q(sl_N)$ [23; 24]. Это дает принципиальную возможность вычислить любое вильсоновское среднее в фундаментальном представлении группы sl_N. На использование таких матриц опирается процедура каблирования [24], которая позволяет найти вильсоновские средние в старших представлениях калибровочной группы, сводя их к вильсоновским средним в фундаментальном представлении, но для более сложных узлов (контуров).

В диссертации рассмотрен другой способ вычисления вильсоновских средних и полиномов узлов для кос, который требует использования матриц поворота базиса в пространстве неприводимых представлений. Эти матрицы в их простейшей форме встречаются еще в квантовой механики и называются матрицами Рака или $6-j$ символами. В контексте вычисления вильсоновских средних интерес представляют матрицы Рака квантовых групп. В данной работе получены коэффициенты Рака, связанные с вычислениями для кос различной ширины и для широкого набора представлений. В том числе была высказана гипотеза о собственных значениях, которая связывает между собой матрицы Рака и собственные значения $\mathcal{R}$-матриц.

Еще один метод вычисления вильсоновских средних основан на связи между теорией Черна-Саймонса и конформной теорией поля. Благодаря такой связи, можно вычислить вильсоновские средние и полиномы узлов для 2-мостовых диаграмм узлов. Такой подход также требует знания $\mathcal{R}$-матриц и матриц Рака, но связанных с сопряженными представлениями квантовой группы $U_q(sl_N)$. Матрицы Рака, возникающие в этом случае называются эксклюзивными матрицами Рака. Используя известные матрицы Рака было показано, как можно вычислять вильсоновские средние не только для 2-мостовых диаграмм, но и для древоподобных узлов, которые получаются соединением нескольких 2-мостовых диаграмм.

Изучение структуры $\mathcal{R}$-матричного подхода позволило также построить метод эволюции для вычисления вильсоновских средних. Этот метод основан на рассмотрении некоторых серий узлов и зацеплений, которые получаются многократным повторением некоторого фрагмента. Если для этого фрагмента известны собственные значения, например, если это одна $\mathcal{R}$-матрица, то тогда выражение для вильсоновских средних всей серии можно записать как степени этих собственных значений с некоторыми коэффициентами. Если известны вильсоновские средние для нескольких контуров из этой серии, то можно получить и вильсоновские средние для всей серии.

Разработанные мной методы позволили построить вильсоновские средние для большого числа неизвестных ранее случаев. Также это позволило изучить свойства таких вильсоновских средних. Среди описанных свойств можно перечислить описание и объяснение дифференциального разложения для вильсоновских средних. Такое разложение описывает свойства таких средних, обусловленные связью с представлениями квантовых групп.

Все перечисленные выше методы относятся к вильсоновским средним и полиномам узлов в пространстве S^3. Интересно, однако, и как могут быть устроены вильсоновские средние в пространствах более сложной топологии. Один из предложенных вариантов такого обобщения это виртуальные узлы. Виртуальные узлы – это узлы в толстых двумерных пространствах – особом классе трехмерных пространств. Для таких узлов не работают $\mathcal{R}$-матричные подходы. По этой причине для таких узлов требуются альтернативные методы. В данной работе рассмотрен подход гиперкуба, позволяющий построить полиномы узлов для таких узлов. Этот метод основан на построении разрешенных диаграмм узлов – диаграмм, не имеющих пересечений, и вычислении соответствующих им квантовых размерностей. Полиномы узлов при этом получаются комбинацией таких размерностей.

В данной работе также рассматривается связь между вильсоновскими средними и квантовыми вычислениями. В данном контексте особый интерес представляет тополгический квантовый компьютер. Состояния такого квантового компьютера должны быть топологическими, и потому вероятность ошибок в таком компьютере меньше, чем в других подходах. Одна из естественных моделей такого квантового компьютера основывается на представлении программ компьютера с помощью вильсоновских средних трехмерной теории Черна-Саймонса. Операции в таком квантовом компьютере описываются $\mathcal{R}$-матрицами и матрицами Рака. В данной работе показано, как моделировать различные операции в однобитном квантовом компьютере с помощью таких величин.

Актуальность темы исследования

Диссертационная работа посвящена трехмерной топологической теории Черна-Саймонса.

Идея изучения топологических теорий поля состоит в описании такой теории, которая не зависит от конкретной конфигурации пространства, а только от топологии этого пространства. Самый простой способ достичь такого результата – рассмотреть теорию, в действие которой метрика не входит. Тогда наблюдаемые такой теории также могут не зависеть от конкретного устройства метрики и, таким образом, могут быть топологически инвариантными. Одна из простейших теорий такого типа это теория Черна-Саймонса, предложенная в [25; 26]. Действие этой теории в трехмерном пространстве устроено как

$$S = \int\limits_{\mathcal{M}} \frac{k}{4\pi} \mathrm{Tr} \left(\mathcal{A} \wedge d\mathcal{A} + \frac{2}{3} \mathrm{Tr} \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} \right). \tag{1}$$

Одна из целей изучения топологических теорий состоит в построении теории квантовой гравитации. В такой теории эффекты не должны зависеть от метрики, так как метрика должна соответствовать некоторому квантовому полю. Действительно, трехмерную теорию Черна-Саймонса используют для построения трехмерных гравитационных теорий [27].

Теория Черна-Саймонса в абелевом случае, а также при различных выборах калибровки, превращается в свободную теорию – слагаемое взаимодействия обращается в ноль. Это означает, что вычисление древесных корреляционных функций, обычное для других квантовых теорий поля не имеет большого смысла. Но в такой теории есть наблюдаемые, обладающие интересной структурой и зависимостями. Такие наблюдаемые – это средние значения петель Вильсона:

$$\langle W_{\mathcal{K}} \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}} \int\limits_{\mathcal{M}} [D\mathcal{A}] \mathrm{Tr}_Y \ \mathrm{Pexp} \left(\oint\limits_{\mathcal{K}} \mathcal{A} \right) e^{\frac{i}{\hbar} S[\mathcal{A}]}, \tag{2}$$

где $\mathcal{Z}$ — статистическая сумма теории:

$$\mathcal{Z} = \int\limits_{\mathcal{M}} [D\mathcal{A}] e^{\frac{i}{\hbar} S[\mathcal{A}]}. \tag{3}$$

Средние такого типа встречаются и в других теориях. Так, они используются для описания эффекта Ааронова-Бома [28] и конфайнмента в квантовой хромодинамике [29].

Вильсоновские средние трехмерной калибровочной теории Черна-Саймонса зависят от нескольких параметров. Во-первых, они зависят от параметров теории – от уровня теории Черна-Саймонса k и калибровочной группы. Во-вторых, они зависят от представления калибровочной группы Y. В-третьих, они зависят от контура $\mathcal{K}$ в трехмерном пространстве. В трехмерном пространстве, в отличие, от пространств больших размерностей контура могут быть нетривиальны при отсутствии особенностей или источников в пространстве. Такие нетривиальные контуры в трехмерном пространстве образуют узлы. Таким образом, вильсоновские средние зависят от узла в трехмерном пространстве.

Согласно работе Э. Виттена [30] вильсоновские средние трехмерной теории Черна-Саймонса равны полиномам узлов. Связь между теорией Черна-Саймонса и теорией узлов проявляется в различных формах. Так, если зафиксировать голоморфную калибровку $\bar{\mathcal{A}} = \mathcal{A}_1 + i\mathcal{A}_2 = 0$, то вильсоновские средние равны интегралу Концевича [31]. Этот интеграл можно считать, используя теорию возмущений. Отдельные вклады в такой интеграл равны инвариантам Васильева [32].

Если зафиксировать временную калибровку $\mathcal{A}_0 = 0$, то вильсоновские средние равны полиномиальным инвариантам узлов. В зависимости от калибровочной группы получаются различные полиномы узлов, например, для группы $SU(2)$ вильсоновские средние равны полиномам Джонса [30], для группы $SU(N)$ – полиномам Хосте-Окнеану-Милле-Фрейда-Ликориша-Йеттера-Пржтицкого-Трачука (ХОМФЛИ-ПТ), [33—35], а для группы $SO(N)$ – полиномам Кауффмана [35]. Эти инварианты являются лорановыми полиномами от переменных A и q, связанных с параметрами теории Черна-Саймонса – уровнем теории Черна-Саймонса и калибровочной группой. Для группы $SU(N)$ и полиномов ХОМФЛИ-ПТ эта связь устроена как

$$q = exp\left(\tfrac{k+N}{4\pi}\right) \qquad A = q^N. \tag{4}$$

Полиномы ХОМФЛИ-ПТ в фундаментальном представлении, то есть связанные с вильсоновскими средними для фундаментального представления калибровочной группы, определяются с помощью скейн-соотношений [33; 34]. Однако, определить полиномы, связанные со старшими представлениями калибровочной группы, сложнее, их нельзя определить с помощью скейн-соотношений. Для определения таких полиномов, которые называются цветными, окрашенными старшими представлениям калибровочной группы, существуют другие подходы. Один из наиболее эффективных подходов – это метод, разработанный Н. Решетихиным и В. Тураевым [36].

Этот метод связан с появлением в теории узлов уравнения Янга-Бакстера

$$\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2. \tag{5}$$

Это свойство обеспечивает топологическую инвариантность полиномов узлов и равных им вильсоновских средних. Такое уравнение хорошо известно в теории интегрируемых систем и его решения называются $\mathcal{R}$-матрицами. В контексте вычисления вильсоновских средних для теории с калибровочной группой $SU(N)$, следует применять универсальные квантовые $\mathcal{R}$-матрицы, связанные с квантовыми группами [36; 37]:

$$\mathcal{R} = \mathcal{P} \otimes q^{\sum_{i,j} a_{i,j}^{-1} h_i \otimes h_j} \prod_{\beta \in \Phi^+}^{\rightarrow} exp_q \left((q - q^{-1}) E_\beta \otimes F_\beta \right), \tag{6}$$

где $\mathcal{P}$ – оператор перестановки

$$\mathcal{P}(x \otimes y) = y \otimes x, \tag{7}$$

h_i, E_β и F_β - генераторы квантовой группы, $a_{i,j}$ - матрица Картана, Φ^+ это множество всех положительных корней исходной алгебры, а квантовая экспонента определена как

$$\exp_q X = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{X^m}{[m]_q!} q^{m(m-1)/2}. \tag{8}$$

Такие матрицы можно построить для любого представления любой группы. Но как сама матрица, так и ее размер зависит от группы, в том числе от параметра N группы $SU(N)$ (в контексте квантовых групп правильнее говорить о квантовой группе $U_q(sl_N)$, но с точки зрения вычисления вильсоновских средних ответы будут совпадать). По этой причине найти вильсоновские средние в форме полиномов ХОМФЛИ-ПТ, то еть в таком виде, что зависимость от ранга группы $SU(N)$ или sl_N содержится в параметре $A = q^N$, с помощью такого метода довольно сложно. Для этого надо построить вильсоновские средние для различных значений N и потом построить из этих конкретных ответов общее выражение для любого N.

В диссертации рассмотрены методы, базирующиеся на исходном подходе Н. Решетихина и В. Тураева, но не обладающие таким недостатком. Это означает, что описанные в диссертации методы позволяют сразу построить полиномы ХОМФЛИ-ПТ как функции от переменной N для различных представлений квантовой группы $U_q(sl_N)$. Эти методы основаны на представлении $\mathcal{R}$-матрицы в пространстве сплетающих операторов. Такие матрицы действуют на пространстве неприводимых представлений квантовой группы, в другой формулировке – такие $\mathcal{R}$-матрицы действуют на пространстве старших векторов неприводимых представлений. В диссертационной работе рассмотрено несколько разных методов, основанных на $\mathcal{R}$-матрицах в таком представлении.

Во-первых, в диссертации рассмотрен подход для вычисления узлов в представлении косы. Для таких кос, согласно [A1], полиномы ХОМФЛИ представляются в форме разложения по характерам квантовой группы $U_q(sl_N)$:

$$H_T^{\mathcal{K}} = \sum_Q S_Q^*(A,q) h_T^{Q^{\mathcal{K}}}(q). \tag{9}$$

где $S_Q^*(A,q)$ — это характеры, а $h_T^{Q^{\mathcal{K}}}(q)$ — коэффициенты, определяемые для каждого узла с помощью произведения $\mathcal{R}$-матриц. Характеры $S_Q^*(A,q)$ связаны с полиномами Шура, известными в теории интегрируемых систем [38]. В теории интегрируемых систем полиномы Шура являются функциями от временны́х переменных t_k (следов степеней группового элемента в фундаментальном представлении). Но для построения инвариантов узлов, полиномы Шура нужно вычислять в особых точках, которые называются топологическим локусом. Интересное свойство такого разложения состоит в том, что характеры не зависят от узла, а только от ширины косы, тогда как коэффициенты $h_T^{Q^{\mathcal{K}}}(q)$ не зависят от A, то есть от ранга группы $U_q(sl_N)$.

В таком подходе часть $\mathcal{R}$-матриц можно диагонализовать. Собственные значения квантовой $\mathcal{R}$-матрицы довольно простые и это позволяет легко записать такие $\mathcal{R}$-матрицы. Другие $\mathcal{R}$-матрицы можно получить из диагональных с помощью матриц Рака или 6-j символов квантовых групп. Такие матрицы описывают повороты базиса в пространстве неприводимых представлений. Для вычисления вильсоновских средних и полиномов ХОМФЛИ-ПТ необходимы матрицы Рака, связанные со старшими представлениями квантовой группы $U_q(sl_N)$. В диссертации изложены некоторые подходы для вычисления таких коэффициентов Рака, в том числе метод старших весов и гипотеза о собственных значениях.

Второй метод, рассмотренный в диссертации – это метод эволюции. Идея такого метода состоит в построении серии узлов с повторяющимся фрагментом. Тогда полиномы для такой серии узлов можно получить рассматривая степени собственных значений повторяющегося фрагмента. При условии того, что известен ответ для некоторых узлов из серии, можно получить ответы для всей серии.

Третий рассмотренный в диссертации метод связан с дуальностью между теорией Черна-Саймонса и двумерной конформной теорией поля [30]. Такой метод подходит для вычисления так называемых 2-мостовых узлов. Для вычисления таким методом также необходимы матрицы Рака, но другого типа, по сравнению с теми, которые встречаются при рассмотрении кос. В диссертационной работе рассмотрено, как такой способ можно обобщить на более широкий набор узлов – древоподобные узлы.

Четвертый метод, описанный в диссертации, позволяет вычислить полиномы ХОМФЛИ-ПТ в фундаментальном представлении, не используя квантовой $\mathcal{R}$-матрицы. Этот метод состоит в построении гиперкуба разрешений узла. Разрешением узла называется набор непересекающихся окружностей, получающихся удалением пересечений из исходного узла. Полиномы ХОМФЛИ-ПТ получаются комбинацией размерностей, соответствующих таким разрешениям. Этот метод позволяет получить полиномы ХОМФЛИ-ПТ в тех случаях, когда не применимы $\mathcal{R}$-матричные подходы.

В частности, этот метод позволяет определить и вычислить полиномы ХОМФЛИ-ПТ для виртуальных узлов. Все узлы и вильсоновские средние, которые обсуждались выше, вычисляются в пространстве тривиальной топологии – S^3. Но так как топология пространства это один из параметров, влияющих на свойства топологической теории, интерес представляют также и вычисления в пространствах другой топологии. Один из способов такого обобщения был предложен Л. Кауффманом [39]. Он предложил рассмотреть узлы в особом классе трехмерных пространств – толстых двумерных поверхностях. Получающиеся узлы называются виртуальными узлами. К таким узлам неприменимы стандартные $\mathcal{R}$-матричные подходы. Но их инварианты можно описать с помощью метода гиперкуба.

Развитие методов вычисления вильсоновских средних в старших представлениях калибровочной группы и связанных с ними цветных полиномов узлов позволяет исследовать различные свойства таких полиномов. К числу интересных свойств относятся как зависимости от представлений так и различные связи с другими областями физики и математики. К числу таких связей, для которых требуются вычисления полиномов узлов в старших представлениях, можно отнести связи с интегрируемыми системами [40] и матричные модели [41; 42; A2]. Как те, так и другие связи в основном известны для семейства торических узлов. Это связано с тем, что только в этом случае известен общий ответ для вильсоновских средних в любом представлении калибровочной группы $SU(N)$ [43; 44]. Описанные в диссертации методы позволяют получить ответы не только для торических узлов, что продвигает нас на пути к описанию таких связей для других узлов. В частности, подход гиперкуба для вычисления полиномов ХОМФЛИ-ПТ, позволяет описать некоторые матричные модели, соответствующие вычисляемым узлам.

Кроме того, описанные подходы позволяют найти и объяснить некоторые свойства полиномов узлов. Например, в диссертации рассмотрено дифференциальное разложение для полиномов узлов и зацеплений – обобщения узлов, состоящего из нескольких зацепленных контуров в трехмерном пространстве. Это разложение описывает структуру полиномов ХОМФЛИ-ПТ, связанную со свойствами представлений квантовых групп.

Большой интерес представляет также связь между теорией топологических струн и теорией Черна-Саймонса. На данный момент эта связь выражается двумя способами. Первый способ состоит в переразложении статистической суммы для некоторого узла, то есть суммы вида

$$Z^{\mathcal{K}} = \sum_{Q} S_Q(\{t\}) H_Q^{\mathcal{K}}(A,q), \tag{10}$$

в плетистическую экспоненту

$$Z^{\mathcal{K}} = \exp\left(\sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{d} \hat{\mathrm{Ad}}_d \left(\sum_{Q,g,n} N_{Q,g,n}^{\mathcal{K}} A^n (q-q^{-1})^{2g-2} S_Q(\{\bar{t}\})\right)\right), \tag{11}$$

где $\hat{\mathrm{Ad}}_d$ – это операция Адамса, перенумеровывающая временные переменные. Тогда, согласно [45; 46], $N_{Q,g,n}^{\mathcal{K}}$ считают БПС-состояния в теории топологических струн. Второй способ связать теорию Черна-Саймонса с теорией топологических струн состоит в том, что произведение двух топологических вершин равно полиному для простейшего зацепления Хопфа [47]. Для рассмотрения такой дуальности требуются вильсоновские средние в старших представлениях калибровочной группы. Такие средние можно найти с помощью описанных в диссертации методов.

Также в диссертации рассмотрена связь теории Черна-Саймонса с квантовыми вычислениями. Состояния в топологической теории Черна-Саймонса топологически инвариантны. Это означает, что вероятность изменения таких состояний мала, по сравнению с другими теориями. На этом основана идея топологического квантового компьютера. В диссертации рассмотрено, как можно узлы применять в качестве элементов такого квантового компьютера. Так, показано, как можно использовать $\mathcal{R}$-матрицы в пространстве сплетающих операторов и матрицы Рака в качестве основных операций в топологическом квантовой компьютере.

Целью работы является построение методов для вычисления и изучение свойств вильсоновских средних в трехмерной топологической калибровочной теории Черна-Саймонса.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Разработать универсальные методы вычисления вильсоновских средних, использующие квантовые $\mathcal{R}$-матрицы.
2. Построить методы вычисления матриц Рака квантовых групп.
3. Исследовать свойства полученных вильсоновских средних и матриц Рака.
4. Исследовать гипотезу о собственных значениях для матриц Рака.
5. Определить и построить метод вычисления полиномов ХОМФЛИ-ПТ для виртуальных узлов.

Научная новизна:. Полученные в диссертационной работе результаты связаны с изучением вильсоновских средних в трехмерной теории

Черна-Саймонса. В работе описаны методы, которые позволяют эффективным образом вычислять такие вильсоновские средние. Эти методы в настоящий момент являются одними из наиболее эффективных для вычисления таких вильсоновских средних и цветных полиномов узлов. Предложенный в работе метод гиперкуба является на данный момент единственным способом определить полиномы ХОМФЛИ-ПТ для виртуальных узлов.

С помощью построенных методов были получены выражения для многих неизвестных ранее вильсоновских средних. Также эти методы позволяют изучать различные их свойства, для которых требуются ответы для старших представлений калибровочной группы. К таким свойствам относятся обобщения известных связей с матричными моделями и интегрируемыми системами. Эти связи известны для торических узлов, но для обобщения их за пределы торических узлов нужно большое число примеров. Эти примеры можно вычислить с помощью описанных в диссертации методов.

Разработанные автором методы и полученные результаты регулярно используются отечественными и зарубежными научными группами.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Построены универсальные методы вычисления вильсоновских средних в произвольном представлении группы SU(N).
2. Построен метод вычисления фундаментальных полиномов ХОМФЛИ-ПТ виртуальных узлов – обобщения теории Черна-Саймонса на пространства другой топологии.
3. Построены матрицы Рака, пригодные для вычисления полиномов ХОМФЛИ-ПТ в фундаментальном представлении для кос с 3-7 нитями.
4. Построены матрицы Рака, пригодные для вычисления полиномов ХОМФЛИ-ПТ во всех симметрических и антисимметрических представлениях для кос с 3 нитями.
5. Предложена гипотеза собственных значений о выражении коэффициентов Рака 3-х и 4-нитевой косы через собственные значения $\mathcal{R}$-матрицы.
6. Предложен метод эволюции для вычисления полиномов серий узлов.
7. Построены ответы для симметрических полиномов ХОМФЛИ-ПТ скрученных узлов и узлов, связанных с двойной косой.
8. Построены выражения в произвольных симметрических представлениях для зацеплений Хопфа, Уайтхеда и колец Борромея.
9. Построен метод вычисления цветных полиномов для древовидных узлов.
10. Построены полиномы узлов-мутантов Киношиты-Терасаки в представлении [2,1].

11. Построен метод для вычисления фундаментальных полиномов виртуальных узлов.
12. Построены выражения для фундаментальных полиномов ХОМФЛИ-ПТ двухнитевых и твистованных виртуальных узлов.
13. Построена матричная модель для классических размерностей в вершинах гиперкуба для виртуальных узлов.
14. Построен метод вычисления квантовых размерностей в вершинах гиперкуба для виртуальных узлов.
15. Предложена система независимых размерностей, входящих в выражения для полиномов виртуальных узлов.
16. Описано, как применять квантовые R-матрицы и матрицы Рака в качестве универсальных вентилей в однокубитном квантовом компьютере.
17. Описано дифференциальное разложение для полиномов узлов и зацеплений, которое отражает групповые свойства полиномов ХОМФЛИ-ПТ.

Апробация работы. Основные результаты, полученные в диссертации, были доложены на научных семинарах в ИТЭФ, МГУ, МФТИ, МИАН, ФИАН, ОИЯИ, ИЯИ РАН и ИППИ РАН, международных конференциях “50th International School for Subnuclear Physics” (Erice, Italy, 2013), “2nd Workshop on Aspects of Non-Associative and Non-Commutative Geometries in String Theory” (Istanbul, Turkey, 2013), “Квантовая топология” (Банное, Магнитогорск, 2014), “Квантовая и классическая топология трехмерных многообразий” (Челябинск, 2015), “Knot homologies, BPS states and SUSY gauge theories” (Stony Brook, USA, 2015), “Quantum Topology” (Санкт-Петербург, 2015), “Duality, Integrability and Matrix Model” (Izu, Japan, 2016), “Classical and quantum integrable systems and supersymmetry” (Tianjin, China, 2016), “Quantum integrable systems” (Natal, Brazil, 2016), “Современная математическая физика. Владимиров-95” (Москва, 2018), “Quarks-2018” (Валдай, Россия, 2018), “3rd French Russian Conference on Random Geometry and Physics: Sachdev–Ye–Kitaev Model and Related Topics” (Москва, 2019), “Topological Field Theories, String Theory and Matrix Models” (Москва, 2019).

Личный вклад. Все результаты, включенные в диссертацию, получены лично соискателем или при непосредственном его участии. Соискатель принимал непосредственное участие в выполнении всех работ и написании текстов всех публикаций. Имена соавторов указаны в соответствующих публикациях.

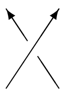
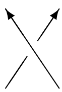
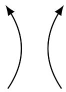
Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 22 печатных изданиях, индексируемых Web of Science и Scopus. Список публикаций приведен на стр. 19-20.

Структура и объем диссертационной работы. Диссертация состоит из введения, 11 глав и заключения. Полный объем диссертации составляет 153 страницы, включая 30 рисунков и 6 таблиц. Список литературы содержит 159 наименований.

Содержание работы

Во **введении** кратко рассмотрены основные свойства и определения трехмерной теории Черна-Саймонса. Также описаны связи между этой теорией, теорией узлов и другими теориями. Так, в работах Э. Виттена было показано, что вильсоновские средние теории Черна-Саймонса с калибровочной группой $SU(2)$ равны полиномам Джонса. Это утверждение было позже обобщено на другие полиномы – ХОМФЛИ-ПТ для калибровочной группы $SU(N)$ и полиномы Кауффмана для калибровочной группы $SO(N)$.

В **главе 2** рассмотрены основные свойства и понятия математической теории узлов. Эта теория занимается изучением узлов – вложений окружностей в трехмерное пространство. В контексте данной работы в первую очередь интересны полиномиальные инварианты узлов, равные вильсоновским средним теории Черна-Саймонса. В диссертации преимущественно рассматриваются свойства и методы вычисления полиномов ХОМФЛИ-ПТ. Фундаментальные полиномы ХОМФЛИ-ПТ определены посредством скейн-соотношений, связывающих между собой полиномы трех узлов, в которых одно пересечение заменено тремя способами:

$\mathcal{K} \longleftrightarrow$  , $\mathcal{K}' \longleftrightarrow$  , $\mathcal{K}'' \longleftrightarrow$  . (12)

В **разделе 2.1** определены виртуальные узлы. Виртуальные узлы, предложенные Л. Кауффманом, – это один из возможных способов обобщения теории узлов на пространства топологии отличной от S^3. Эти узлы описывают вложение окружностей в особый класс трехмерных пространств – толстые двумерные поверхности. Диаграммы таких узлов обладают дополнительным типом пересечений – виртуальными пересечениями, со своими свойствами. Для таких узлов неприменимо большинство стандартных методов вычисления полиномов узлов.

В **главе 3** рассмотрены основные понятия и свойства квантовых групп. Квантовые группы – это квантовая деформация универсальной обертывающей алгебры. Квантовые группы обладают деформированными коммутационными соотношениями и, что в особенности важно в контексте диссертационной работы, деформированным копроизведением. Такое копроизведение для генераторов квантовой группы зависит от параметра деформации q и устроено как

$$\begin{aligned}\Delta(E_i) &= E_i \otimes q^{h_i} + 1 \otimes E_i,\\ \Delta(F_i) &= F_i \otimes 1 + q^{-h_i} \otimes F_i,\\ \Delta(h_i) &= h_i \otimes 1 + 1 \otimes h_i.\end{aligned} \tag{13}$$

Несмотря на такую деформацию, представления квантовых групп схожи с их классическими аналогами при $q = 1$.

В **главе 4** рассмотрен классический формализм Решетихина-Тураева для вычисления вильсоновских средних и полиномов узлов, предложенный в [36]. Этот формализм использует понятие универсальной квантовой $\mathcal{R}$-матрицы (6). Такая $\mathcal{R}$-матрица – это деформация оператора перестановки, которая коммутирует с копроизведением квантовых групп. Для вычисления полиномов узлов каждому пересечению на диаграмме узла – проекции узла на двумерную плоскость соответствует $\mathcal{R}$-матрица.

Также в данном разделе описана весовая матрица $\mathcal{M}$, которая соответствует изменению направления нити и необходима для топологической инвариантности ответа. Полиномы узлов можно вычислить с помощью свертки всех $\mathcal{R}$-матриц и весовых матриц, связанных с элементами диаграммы узла.

В **главе 5** описан метод вычисления полиномов узлов для представления узла в виде косы. Для этого применяется $\mathcal{R}$-матрица в пространстве сплетающих операторов. При этом рассматривается разложение полиномов ХОМФЛИ-ПТ по характерам. Это разложение позволяет разделить зависимости от группы $SU(N)$ и от узла. Таким образом, полиномы, которые получаются с помощью таких методов вычисления зависят от переменной $A = q^N$, то есть описывают выражения для вильсоновских средних сразу для любой группы $SU(N)$.

В **разделе 5.1** рассмотрены свойства диагональных $\mathcal{R}$-матриц. Описаны собственные значения таких матриц. В том числе обсуждается зависимость этих собственных значений от обрамления узла.

В **разделе 5.2** описана связь между $\mathcal{R}$-матрицами и матрицами Рака квантовых групп. Матрицы Рака позволяют изменять базис в пространстве неприводимых представлений в произведении представлений, связанных с нитями косы. $\mathcal{R}$-матрицы, соответствующие пересечению различных нитей в косе связаны друг с другом матрицами Рака. Описано, какие матрицы Рака соответствуют таким связям для различных $\mathcal{R}$-матриц.

В **разделе 5.3** описан общий вид $\mathcal{R}$-матриц связанных с косой любой ширины в фундаментальном представлении. Такие $\mathcal{R}$-матрицы блочно-диагональны и содержат только блоки 2×2 и 1×1. Описано, как и почему такая матрица устроена, где в ней находятся такие блоки и какая форма у этих блоков. Эти матрицы позволяют вычислить полиномы ХОМФЛИ-ПТ в фундаментальном представлении для любого узла.

В **главе 6** описаны определения и свойства 3-j и 6-j символов. Эти функции описывают разложение тензорных произведений представлений в суммы неприводимых представлений. В частности, 6-j символы или коэффициенты Рака описывают переходы между различными базисами в пространствах неприводимых представлений.

В **разделе 6.1** приведено известное выражение для матриц Рака квантовой группы $U_q(sl_2)$.

В **разделе 6.2** изложен метод вычисления коэффициентов Рака квантовых групп. Основной метод прямого вычисления состоит в построении старших векторов представлений, входящих в 6-j символы. Это позволяет получить их значения в явном виде. Для этого используется явный вид генераторов квантовой группы и копроизведение квантовой группы.

В **Главе 7** высказана гипотеза о собственных значениях. Согласно этой гипотезе, матрицы Рака зависят только от набора нормированных собственных значений соответствующей $\mathcal{R}$-матрицы. Эта гипотеза базируется на рассмотрении уравнения Янга-Бакстера (5), как уравнения на матрицу Рака. Также приведены решения этого уравнения для матриц размера до 5×5.

В **разделе 7.1** рассмотрено как гипотезу о собственных значениях можно применить к вычислению матриц Рака, связанных с симметрическими представлениями. С помощью гипотезы о собственных значениях такие матрицы Рака можно свести к известным матрицам Рака квантовой группы $U_q(sl_2)$.

В **разделе 7.2** рассмотрено как гипотеза о собственных значениях работает для матриц Рака квантовой группы $U_q(sl_2)$.

В **разделе 7.3** рассмотрена модификация гипотезы о собственных значениях для 4-нитевых кос. При этом матрица Рака определяется уже не решением уравнения Янга-Бакстера, а решением уравнения коммутации несоседних $\mathcal{R}$-матриц.

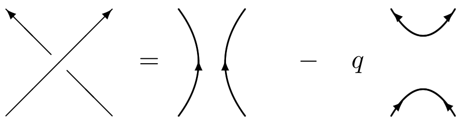
Глава 8 посвящена рассмотрению 2-мостовых и древоподобных узлов. 2-мостовые узлы получаются специальным замыканием четырехнитевой косы. Такое замыкание косы соответствует тому, что полином ХОМФЛИ-ПТ равен матричному элементу произведения $\mathcal{R}$-матриц в косе. Этот матричный элемент соответствует проекции на тривиальное представление в левом и правом концах косы. По этой причине из произведения представлений, связанных со всеми четырьмя нитями в косе нужно рассматривать только тривиальное представление. Это соответствует особому выбору матриц Рака и $\mathcal{R}$-матриц. Эти матрицы также описаны в данном разделе.

В **разделе 8.1** описано, как подход для вычисления 2-мостовых узлов можно применить к более сложным узлам. Если 2-мостовую косу обрезать с одной или двух сторон, то такие объекты можно соединить друг с другом и получить так называемые древоподобные узлы. Полиномы для таких узлов можно получить используя те же $\mathcal{R}$-матрицы и матрицы Рака, которые используются для вычисления полиномов двухмостовых узлов.

В **разделе 8.2** обсуждаются узлы-мутанты. Узлы-мутанты – это узлы, которые связаны операцией мутации, и полиномы таких узлов в симметрических представлениях совпадают. Используя подход древоподобных узлов оказывается возможным вычислить полиномы для некоторых пар узлов-мутантов в представлении [2,1] и найти разницы между ними. Также в этом разделе приведены полиномы для самой известной пары мутантов – узлов Киношиты-Терасаки и Конвея.

В **главе 9** изложен метод гиперкуба для вычисления фундаментальных полиномов ХОМФЛИ-ПТ. Этот метод не использует понятия $\mathcal{R}$-матрицы, вместо этого он основан на построении разрешений узла – замене пересечений на отсутствие пересечений.

Раздел 9.1 посвящен методу вычисления полиномов Джонса обычных и виртуальных узлов, предложенному Л. Кауффманом. Этот метод основан на разрешении пересечений вместо их замены на противоположные, как в скейн-соотношениях (12):



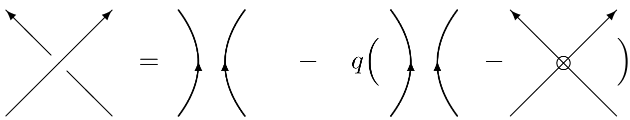
(14)

В результате узел превращается в набор окружностей, которые не пересекаются друг с другом в случае обычных узлов и имеют только виртуальные пересечения для виртуальных узлов. Эти окружности называются циклами Сейферта. Каждому циклу Сейферта соответствует квантовая размерность фундаментального представления квантовой группы $SU(2)$ равная

$$S^*_{[1]}(A=q^2,q) = \frac{q^2-q^{-2}}{q-q^{-1}} \equiv [2]_q. \tag{15}$$

Это позволяет построить полиномы Джонса в фундаментальном представлении как для обычных, так и для виртуальных узлов.

В **разделе 9.2** предложено обобщение этого подхода на полиномы ХОМФЛИ-ПТ. Для этого вместо (14) предлагается использовать



(16)

При этом получается гиперкуб разрешений узла. Каждой вершине этого гиперкуба соответствует некоторая квантовая размерность.

Разделы 9.3-9.6 посвящены вычислению квантовых размерностей в вершинах гиперкуба. Для таких вычислений можно применять соотношения связанные с движениями Редемейстера. Каждому движению

Редемейстера соответствует условия на размерности. Это позволяет найти все такие квантовые размерности и построить соответствующие полиномы ХОМФЛИ-ПТ для обычных и виртуальных узлов.

Разделы 9.7 посвящен доказательству топологической инвариантности метода гиперкуба.

Глава 10 посвящена описанию метода эволюции. Этот метод основан на подходе Решетихина-Тураева. Каждому пересечению отвечают $\mathcal{R}$-матрицы, а комбинации пересечений их произведения. Если описать некоторую серию узлов, которая получается повторением определенного фрагмента, то полиномы для такой серии связаны с собственными значениями фрагмента

$$H^k = \sum_i \lambda_i^k C_i. \tag{17}$$

Если известны "начальные условия" эволюции – несколько полиномов из серии, то можно вычислить коэффициенты в выражении (17). Таким образом можно получить полиномы для всей серии, зная полиномы для нескольких узлов из серии.

В **разделе 10.1** рассмотрены различные примеры применения метода эволюции. **Раздел 10.3** посвящен применению метода эволюции к скобке Кауффмана.

Глава 11 посвящена рассмотрению еще одного свойства цветных полиномов ХОМФЛИ-ПТ, отражающего их связь с представлениями квантовых групп. Это свойство называется дифференциальным разложением. Полином ХОМФЛИ-ПТ в фундаментальном представлении должен быть равен единице при $A = q$, так как это соответствует вычислению в абелевой теории Черна-Саймонса, поэтому для него можно написать дифференциальное разложение. С учетом аналогичного свойства при $A = q^{-1}$ это разложение устроено как:

$$H_{[1]}^{\mathcal{K}}(A,q) = 1 + (Aq - A^{-1}q^{-1})(Aq^{-1} - A^{-1}q)F_1^{\mathcal{K}}(A,q). \tag{18}$$

Условия такого вида можно записать и для других представлений, обобщая дифференциальное разложение на старшие представлении. В **разделах 11.1 и 11.2** рассмотрены дифференциальные разложение для зацеплений.

Глава 12 посвящена описанию связи теории Черна-Саймонса и топологического квантового компьютера и описано, как $\mathcal{R}$-матрицы и матрицы Рака двухмостовых узлов в фундаментальном представлении можно применять в качестве универсальных однобитных операций в квантовом компьютере.

В **заключении** приведены основные результаты диссертации.

Публикации автора по теме диссертации

A1. *Mironov, A.* Character expansion for HOMFLY polynomials. II. Fundamental representation. Up to five strands in braid / A. Mironov, A. Morozov, A. Morozov // Journal of High Energy Physics. — 2012. — Т. 2012, № 3. — С. 34.

A2. Towards matrix model representation of HOMFLY polynomials / A. Alexandrov [и др.] // Письма в ЖЭТФ. — 2014. — Т. 100, № 4. — С. 297—304.

A3. *Kolganov, N.* Quantum R-Matrices as Universal Qubit Gates / N. Kolganov, A. Morozov // JETP Letters. — 2020. — Т. 111, № 9. — С. 519—524.

A4. From topological to quantum entanglement / D. Melnikov [и др.] // Journal of High Energy Physics. — 2019. — Т. 2019, № 5. — С. 116.

A5. Quantum Racah matrices up to level 3 and multicolored link invariants / C. Bai [и др.] // Journal of Geometry and Physics. — 2018. — Т. 132. — С. 155—180.

A6. *Mironov, A.* Tangle blocks in the theory of link invariants / A. Mironov, A. Morozov, A. Morozov // Journal of High Energy Physics. — 2018. — Т. 2018, № 9. — С. 128.

A7. Nontorus link from topological vertex / H. Awata [и др.] // Physical Review D. — 2018. — Т. 98, № 4. — С. 046018.

A8. Eigenvalue hypothesis for multistrand braids / S. Dhara [и др.] // Physical Review D. — 2018. — Т. 97, № 12. — С. 126015.

A9. Differential expansion for link polynomials / C. Bai [и др.] // Physics Letters B. — 2018. — Т. 778. — С. 197—206.

A10. Towards topological quantum computer / D. Melnikov [и др.] // Nuclear Physics B. — 2018. — Т. 926. — С. 491—508.

A11. *Морозов, А. Ю.* Матричные модели и размерности в вершинах гиперкубов / А. Ю. Морозов, А. А. Морозов, А. В. Пополитов // Теоретическая и математическая физика. — 2017. — Т. 192, № 1. — С. 115—163.

A12. Tabulating knot polynomials for arborescent knots / A. Mironov [и др.] // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. — 2017. — Т. 50, № 8. — С. 085201.

A13. *Morozov, A.* On ambiguity in knot polynomials for virtual knots / A. Morozov, A. Morozov, A. Popolitov // Physics Letters B. — 2016. — Т. 757. — С. 289—302.

A14. *Morozov, A.* On matrix-model approach to simplified Khovanov-Rozansky calculus / A. Morozov, A. Morozov, A. Popolitov // Physics Letters B. — 2015. — Т. 749. — С. 309—325.

A15. Colored HOMFLY polynomials of knots presented as double fat diagrams / A. Mironov [и др.] // Journal of High Energy Physics. — 2015. — Т. 2015, № 7. — С. 109.

A16. Evolution method and HOMFLY polynomials for virtual knots / L. Bishler [и др.] // International Journal of Modern Physics A. — 2015. — Т. 30, № 14. — С. 1550074.

A17. *Morozov, A.* On possible existence of HOMFLY polynomials for virtual knots / A. Morozov, A. Morozov, A. Morozov // Physics Letters B. — 2014. — Т. 737. — С. 48—56.

A18. *Mironov, A.* On colored HOMFLY polynomials for twist knots / A. Mironov, A. Morozov, A. Morozov // Modern Physics Letters A. — 2014. — Т. 29, № 34. — С. 1450183.

A19. Link polynomial calculus and the AENV conjecture / S. Arthamonov [и др.] // Journal of High Energy Physics. — 2014. — Т. 2014, № 4. — С. 156.

A20. Eigenvalue hypothesis for racah matrices and homfly polynomials for 3-strand knots in any symmetric and antisymmetric representations / H. Itoyama [и др.] // International Journal of Modern Physics A. — 2013. — Т. 28, № 3/4. — С. 1340009.

A21. Character expansion for HOMFLY polynomials III: Historical review / H. Itoyama [и др.] // International Journal of Modern Physics A. — 2012. — Т. 27, № 19. — С. 1250099.

A22. *Mironov, A.* Evolution method and "differential hierarchy"of colored knot polynomials / A. Mironov, A. Morozov, A. Morozov // AIP Conference Proceedings. Т. 1562. — 2013. — С. 123—155.

Список литературы

23. Colored HOMFLY polynomials as multiple sums over paths or standard young tableaux / A. Anokhina [и др.] // Advances in High Energy Physics. — 2013. — Т. 2013. — С. 931830.

24. *Анохина, А.* Процедура каблирования для раскрашенных полиномов ХОМФЛИ / А. Анохина, А. Морозов // Теоретическая и математическая физика. — 2014. — Т. 178, вып. 1. — С. 3—68.

25. *Chern, S.-S.* Characteristic forms and geometric invariants / S.-S. Chern, J. Simons // Annals of Mathematics. — 1974. — Т. 99. — С. 48—69.

26. *Schwarz, A.* The partition function of a degenerate functional / A. Schwarz // Communications in Mathematical Physics. — 1979. — Т. 67, № 1. — С. 1—16.

27. *Witten, E.* 2 + 1 dimensional gravity as an exactly soluble system / E. Witten // Nuclear Physics B. — 1988. — Т. 311, № 1. — С. 46—78.

28. *Aharonov, Y.* Significance of electromagnetic potentials in quantum theory / Y. Aharonov, D. Bohm // Physical Review. — 1959. — Vol. 115. — P. 485—491.

29. *М., П. А.* Калибровочные поля и струны / П. А. М. — Ижевск : Удмуртский университет, 1999. — 312 с.

30. *Witten, E.* Quantum field theory and the Jones polynomial / E. Witten // Communications in Mathematical Physics. — 1989. — Т. 121, № 3. — С. 351—399.

31. *Kontsevich, M.* Vassiliev's knot invariants / M. Kontsevich // Advances in Soviet Mathematics. — 1993. — Т. 16, № 2. — С. 137—150.

32. *Labastida, J.* Kontsevich integral for Vassiliev invariants from Chern-Simons perturbation theory in the light-cone gauge / J. Labastida, E. Pérez // Journal of Mathematical Physics. — 1998. — Т. 39, № 10. — С. 5183—5198.

33. A new polynomial invariant of knots and links / P. Freyd [и др.] // Bulletin of the American Mathematical Society. — 1985. — Т. 12, № 2. — С. 239—246.

34. *Przytycki, J.* Conway algebras and skein equivalence of links / J. Przytycki, P. Traczyk // Proceedings of the American Mathematical Society. — 1987. — Т. 100, № 4. — С. 744—748.

35. *Kauffman, L. H.* The interface of knots and physics / L. H. Kauffman. — Singapore : World Scientific, 2001. — 788 с.

36. *Reshetikhin, N.* Ribbon graphs and their invariants derived from quantum groups / N. Reshetikhin, V. Turaev // Communications in Mathematical Physics. — 1990. — Т. 127, № 1. — С. 1—26.

37. *Klimyk, A.* Quantum groups and their representations / A. Klimyk, K. Schmudgen. — Berlin Heidelberg : Springer, 2012. — 552 с.

38. *Macdonald, I. G.* Schur Functions: Theme And Variations / I. G. Macdonald // Actes 28e S'eminaire Lotharingien, 498/S-27, Publ. I.R.M.A. Strasbourg. — 1992. — С. 5—39.

39. *Kauffman, L.* Virtual knot theory / L. Kauffman // European Journal of Combinatorics. — 1999. — Т. 20, № 7. — С. 663—691.

40. *Mironov, A.* Character expansion for HOMFLY polynomials I. Integrability and difference equations / A. Mironov, A. Morozov, A. Morozov. — 2012. — С. 101—118.

41. *Aref'eva*, *I.* Knots and matrix models / I. Aref'eva, I. Volovich // Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics. — 1998. — Т. 1, № 1. — С. 167—173.

42. *Grothaus*, *M.* Knots, feynman diagrams and matrix models / M. Grothaus, L. Streit, I. Volovich // Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics. — 1999. — Т. 2, № 3. — С. 359—380.

43. *Rosso*, *M.* On the invariants of torus knots derived from quantum groups / M. Rosso, V. Jones // Journal of Knot Theory and Its Ramifications. — 1993. — Т. 02, № 01. — С. 97—112.

44. *Xiao-Song*, *L.* On the hecke algebras and the polynomial / L. Xiao-Song, H. Zheng // Transactions of the American Mathematical Society. — 2010. — Т. 362, № 1. — С. 1—18.

45. *Gopakumar*, *R.* On the Gauge Theory/Geometry Correspondence / R. Gopakumar, C. Vafa // Advances in Theoretical and Mathematical Physics. — 1999. — Т. 3. — С. 1415—1443.

46. *Ooguri*, *H.* Knot invariants and topological strings / H. Ooguri, C. Vafa // Nuclear Physics B. — 2000. — Т. 577, № 3. — С. 419—438.

47. The Topological Vertex / M. Aganagic [и др.] // Commun. Math. Phys. — 2005. — Т. 254, вып. 425.