ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
НАУКИ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. П.Н. ЛЕБЕДЕВА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

Алкалаев Константин Борисович

БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫЕ СИММЕТРИИ И AdS/CFT СООТВЕТСТВИЕ В МОДЕЛЯХ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Специальность 01.04.02 – теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
доктора физико–математических наук

Москва - 2021

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Физическом институте им. П.Н. Лебедева Российской академии наук.

Официальные оппоненты:	**Арефьева Ирина Ярославна** доктор физико–математических наук, профессор, Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, ведущий научный сотрудник
	Горский Александр Сергеевич доктор физико–математических наук, Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича Российской академии наук, ведущий научный сотрудник
	Зиновьев Юрий Михайлович доктор физико–математических наук, Институт физики высоких энергий им. А.А. Логунова Национального исследовательского центра «Курчатовский институт», ведущий научный сотрудник
Ведущая организация:	Объединенный институт ядерных исследований (ОИЯИ), г. Дубна

Защита состоится 13 сентября 2021 г. в 12.00 на заседании диссертационного совета Д 002.023.02 при Физическом институте им. П.Н. Лебедева РАН по адресу: 119991, г. Москва, Ленинский проспект, д. 53.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФИАН, а также на сайте www.levedev.ru.

Автореферат разослан «_____» ________________ 2021 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета

Д 002.023.02, к.ф.-м.н. Вагин К. Ю.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Основной задачей физики фундаментальных взаимодействий является построение теории квантовой гравитации. Одним из самых концептуальных продвижений в этом направлении за все время существования проблемы, сформулированной еще Бронштейном[1], по праву считается понятие голографической дуальности, введенное т'Хоофтом и Сасскиндом, и утверждающее, что степени свободы квантовой гравитации в некотором объеме пространства кодируются динамикой на границе этой области.[2,3] Примером такой дуальности является гипотеза Малдасены AdS/CFT соответствия между теорией струн на пространстве постоянной отрицательной кривизны (AdS) и конформной теорией поля (CFT) на границе.[4] В более широком смысле, существенным особенностями феномена AdS/CFT соответствия является: (1) дуальность между квантовой теорией с гравитационным взаимодействием и квантовой теорией без гравитационного взаимодействия, (2) дуальность режимов слабой и сильной связи двух теорий.

Традиционный способ изучения AdS/CFT соответствия состоит в рассмотрении классической гравитации (плюс струнные поправки) в объеме для изучения конформной теории на границе. Начиная с голографического предписания Губсера-Клебанова-Полякова и Виттена (GKPW)[5,6] был создан словарь терминов, переводящий гравитационные объекты в конформные и обратно. При этом основной круг задаваемых в CFT вопросов сводится к вычислениям в объеме лишь в окрестности конформной границы. Отметим, что обратная постановка задачи, т.е. описание гравитации в объеме за пределами области вблизи границы с помощью объектов граничной конформной теории, до сих пор плохо сформулирована.

Особое внимание привлекают исследования в области голографической дуальности между двухмерной конформной теорией поля и трехмерной гравитацией. До некоторой степени, по сравнению с высокоразмерными дуальностями, AdS_3/CFT_2 соответствие может считаться менее сложным по причине присутствия в двухмерной конформной теории бесконечной симметрии Ви-

[1] Bronstein M. // Phys. Z. Sowjetunion. 1936. Vol. 9. P. 140.
[2] 't Hooft G. // Conf. Proc. C. 1993. Vol. 930308. P. 284.
[3] Susskind L. // J. Math. Phys. 1995. Vol. 36. P. 6377.
[4] Maldacena J. M.// Adv.Theor.Math.Phys. 1998. Vol. 2. P. 231.
[5] Gubser S. et al// Phys.Lett. 1998. Vol. B428. P. 105.
[6] Witten E. // Adv. Theor. Math. Phys. 1998. Vol. 2. P. 253.

расоро, а также отсутствием локальных гравитационных степеней свободы в объеме (топологичности гравитации). Тем не менее, даже в этом упрощенном варианте не удается вычислить полный функциональный интеграл теории. По сходным причинам также привлекает значительное внимание AdS_2/CFT_1 соответствие.

С другой стороны, вся имеющаяся совокупность базовых теоретических построений (суперсимметрия, великое объединение, бранные сценарии, голография и т.д.), а также наблюдательная проблема иерархий, свидетельствует о том, что поиск теории квантовой гравитации скорее всего является синонимом построения теории всех фундаментальных взаимодействий. Здесь следует отметить два наиболее перспективных подхода, один из которых это теория (супер)струн, в более широком контексте – M-теория, а другой – это теория гравитации высших спинов.[7] Считается, что они могут быть связаны в пределе нулевого струнного натяжения, когда струнные амплитуды оказываются подчинены бесконечному количеству тождеств Уорда,[8] что свидетельствует о возникновении предельной бесконечномерной калибровочной симметрии, которую можно пытаться связать с бесконечномерной симметрией высших спинов.

Несмотря на значительный прогресс в понимании голографической дуальности, следует признать, что ее структурные механизмы до сих пор остаются невыясненными. Более того, не известно ни одной пары голографически дуальных теорий, где каждый из партнеров точно решаем (т.е. известен производящий функционал/корреляционные функции), что позволило бы продемонстрировать дуальность хотя бы на частном примере. Ожидается, что присутствие бесконечномерной симметрии позволит не только получить новые точные результаты в конформной теории поля, но также построить точно решаемый пример AdS/CFT дуальности.

По этой причине значительный интерес вызывает изучение AdS/CFT соответствия в приложении к моделям с полями высших спинов, что является более простой вычислительной и концептуальной задачей, нежели исходное голографическое соответствие между теорией струн на $AdS_5 \times S^5$ и $\mathcal{N} = 4$ SYM_4. Согласно гипотезе Клебанова-Полякова-Сезгина-Сунделла[9][10] дуальной моделью AdS_4 теории высших спинов Васильева является $O(N)$ вектор-

[7] Vasiliev M. A. // Phys. Lett. 1990. Vol. B243. P. 378.
[8] Gross D. J. // Phys. Rev. Lett. 1988. Vol. 60. P. 1229.
[9] Gubser S., Klebanov I. R., Polyakov A. M. // Phys. Lett. B. 2002. Vol. 550. P. 213.
[10] Sezgin E., Sundell P. // Nucl. Phys. 2002. Vol. B644. P. 303.

ная $3d$ модель.

Возможно, что даже более простой набор интегрируемых теорий, демонстрирующий структуру голографического соответствия возникает в двух измерениях. Это AdS_2/SYK соответствие.[11] Здесь теория в двухмерном пространстве AdS_2 отождествляется с некоторым расширением гравитацией Джакива–Тейтельбойма, а теория на границе это одномерная модель SYK (Сачдев–Йи–Китаев) квантовых случайных взаимодействий.[12]

Настоящая диссертационная работа посвящена изучению моделей квантовой теории поля, обладающих бесконечномерной симметрией в контексте AdS/CFT соответствия. В ней исследуется ряд фундаментальных вопросов, связанных, в первую очередь, с поведением голографически дуальных теорий в двух и более размерностях с бесконечномерными симметриями на классическом и на квантовом уровнях. Среди теорий такого типа наиболее важными будут конформная теория поля, теория гравитации с космологическим членом, а также теория полей высших спинов. Все эти теории рассматриваются как строительные блоки единой теории фундаментальных взаимодействий, которая, в свою очередь, ожидаемо характеризуются такими базовыми свойствами как богатая симметрийная структура и наличие бесконечного спектра элементарных возбуждений.

Современное состояние исследований. Одной из ключевых концепций современной теоретической физики является то, что наблюдаемое четырехмерное пространство-время $\mathcal{M}^{3,1}$ возникает как частное решение многомерной теории. Механизмы выделения $\mathcal{M}^{3,1}$ могут разными (например, это редукция типа Калуцы-Клейна или бранные сценарии), однако исходная теория формулируется в пространствах старших размерностей $\mathcal{M}^{d-k,k}$ при $d \geq 4$, вообще говоря, необязательно лоренцевой сигнатуры ($k = 1$).

Элементарные квантовые поля в максимально-симметричном пространстве–времени $\mathcal{M}^{d-1,1}$ размерности $d \geq 4$ (Минковский $\mathbb{R}^{d-1,1}$ или (анти-)де Ситтер $(A)dS_d$) характеризуются более чем одним спиновым числом. Такие поля смешанного типа симметрии (несимметричные), как (частично–)безмассовые, так и массивные, естественным образом появляются в спектрах двух важных классов теорий, теории (супер)струн (в частности, суперструн на фоновой геометрии $AdS_5 \times S^5$) и теории высших спинов.

В отличие от хорошо изученного случая симметричных полей, рассмотре-

[11]Kitaev A.// KITP strings seminar and Entanglement 2015 program.

[12]Sachdev S., Ye J. // Phys. Rev. Lett. 1993. Vol. 70. P. 3339.

ние несимметричных полей высвечивает множество интересных и плохо понимаемых на данный момент вопросов. Например, это относится к развитию GKPW техники для безмассовых полей высших спинов в объеме и их дуального конформного описания на границе. Другим, причем достаточно традиционным, вопросом является описание свободных полей общего положения, т.е. с произвольными параметрами массы, непрерывных/дискретных спинов, глубины на пространстве $(A)dS_d$, в том числе в пределе нулевой космологической постоянной, т.е. на пространстве Минковского $\mathbb{R}^{d-1,1}$. В настоящее время доступны несколько способов описания несимметричных полей высших спинов на $(A)dS_d$ и $\mathbb{R}^{d-1,1}$, как лагранжевых, так и нелагранжевых. Естественным вопросом здесь является проблема унификации всех возможных способов описания в рамках единого, производящего подхода.

Нелинейные теории со спектром, включающим гравитон наряду с частицами спина больше двух представляют собой отличную возможность изучать квантовую гравитацию одновременно на классическом и квантовом уровнях. Теория струн, например, описывает динамику бесконечного числа массивных полей с растущими массами и спинами, а также конечный набор безмассовых полей с низшими спинами. Важной особенностью моделей с высшими спинами являются бесконечные симметрии; считается, что они должны улучшить квантовые свойства эйнштейновской гравитации. Теории безмассовых полей высших спинов здесь играют выделенную роль, поскольку могут рассматриваться как ненарушенная фаза массивных теорий высших спинов, включающих и саму теорию струн.

Задача построения непротиворечивой теории взаимодействия безмассовых полей высших спинов и гравитации впервые была рассмотрена Арагоном и Дезером.[13] Согласно им, нельзя построить теорию с минимальным гравитационным взаимодействием безмассовых $\mathbb{R}^{d-1,1}$ полей со спином $s > 2$, а потому не существует непротиворечивого расширения супергравитации путем включения возбуждений с высшими спинами. Решение было предложено в работе Васильева и Фрадкина[14], где были сформулированы основные принципы построения непротиворечивой теории взаимодействия полей высших спинов. Пространство анти-де Ситтера AdS было отождествлено как естественный фон для гравитационных взаимодействий полей высших спинов; была построена алгебра калибровочных симметрий высших спинов. Ока-

[13] Aragone C., Deser S. // Phys. Lett. 1979. Vol. B86. P. 161.
[14] Fradkin E. S., Vasiliev M. A. // Phys. Lett. 1987. Vol. B189. P. 89.

зывается, что присутствие дополнительного пространственного параметра – космологической постоянной Λ пространства AdS – позволяет строить в действии члены с производными высших порядков, с коэффициентами обратно пропорциональными Λ, что аналогично струнной теории с вершинами массивных полей высших спинов. С другой стороны, именно пространство AdS, благодаря своей причинной структуре, играет решающую роль в AdS/CFT соответствии. Упомянем также, что большой класс вершин для кубического взаимодействия полей высших спинов известен в пространстве Минковского, но в него не входят минимальные взаимодействия с гравитацией.[15]

Впоследствии, исходный $d = 4$ подход Васильева-Фрадкина (FV) был распространен на $d = 5$ для $\mathcal{N} = 0, 1$ суперсимметричных кубических взаимодействий симметричных полей.[16][17] Можно видеть, что $d = 5$ теория наследует все основные характеристики $d = 4$ теории и управляется супералгеброй симметрий высших спинов, построенной Линецким и Фрадкиным контексте $d = 4$ конформной теории высших спинов. Новой особенностью, по сравнению с исходной $d = 4$ FV теорией, является бесконечное вырождение спектра возбуждений: поле каждого спина входит бесконечное число раз. В связи с этим, спектр $d = 5$ теории FV типа напоминает спектр теории струн, в которой кратность массивных возбуждений заданного спина растет с уровнем (до бесконечности).

Как было сказано выше, при переходе к старшим пространственным измерениям возникает новый феномен: при $d > 4$ имеется более одного спинового числа, в силу чего в спектре теории высших спинов могут возникать несимметричные поля, чья индексная структура описывается диаграммами Юнга общего положения. Несимметричные поля должны взаимодействовать друг с другом и с симметричными полями, включая гравитационное, так что изучение их взаимодействий представляет собой необходимую задачу, в контексте описания теорий с максимально полным спектром элементарных возбуждений. В частности, теория FV типа для полей общего смешанного типа симметрии до сих пор неизвестна. В данной диссертации мы частично заполняем этот пробел и в явном виде строим теории AdS_5 полей высших спинов в кубическом приближении, которые содержат гравитационные вершины несимметричных полей частного типа симметрии.

[15] Berends F. A., Burgers G. J. H., Van Dam H. // Z. Phys. 1984. Vol. C24. P. 247.
[16] Vasiliev M. A. // Nucl. Phys. 2001. Vol. B616. P. 106.
[17] Alkalaev K. B., Vasiliev M. A. // Nucl. Phys. 2003. Vol. B655. P. 57.

Если отвлечься от вопроса построения гравитационных вершин AdS_d полей высших спинов и вернуться, например, в теориям в пространстве $\mathbb{R}^{d-1,1}$, то изучение общей теории представлений группы Пуанкаре позволяет ввести новый тип частиц. Помимо стандартных представлений дискретного (т.е. (полу)целого) спина, существует тип представлений непрерывного спина, определяемый дополнительным квантовым числом.[18] Соответствующие поля непрерывного спина обладают несколькими интересными свойствами, такие как присутствие размерного параметра μ и бесконечное число физических степеней свободы. С точки зрения традиционной теории высших спинов, наиболее поразительным и интригующим свойством является то, что динамика полей высших спинов может быть определена на пространстве полей, являющихся суммой полей фронсдаловского типа ранга $s = 0, ..., \infty$. Соответствующее калибровочно–инвариантное действие на пространстве Минковского $\mathbb{R}^{d-1,1}$ оказывается бесконечной суммой действий Фронсдала ранга s с недиагональными вкладами, пропорциональными параметру непрерывного спина μ.[19] Калибровочными преобразованиями такой теории являются стандартные фронсдаловские преобразования, деформированные членами штукельбергова типа, которые также пропорциональны μ. Более того, поля непрерывного спина могут непротиворечивым образом взаимодействовать между собой и массивными полями высших спинов.[20][21]

С теоретико-групповой точки зрения, частица непрерывного спина соответствует бесконечномерному, безмассовому, унитарному и неприводимому представлению группы Пуанкаре $ISO(d-1,1)$, индуцированному с бесконечномерного, унитарного и неприводимого представления подалгебры $ISO(d-2)$.[22] Соответствующими квантовыми числами являются стандартная масса $m = 0$, параметр непрерывного спина $\mu \neq 0$, и (полу)целые спиновые числа $(s_1, ..., s_p)$, где $p = [\frac{d-3}{2}]$. Упомянутая выше лагранжева формулировка была получена в случае скалярного представления, т.е. все спиновые числа равны нулю. В общем случае, динамика несимметричных полей непрерывного спина на $\mathbb{R}^{d-1,1}$ обсуждалась на уровне уравнений движения как частная контракция уравнений Фронсдала для безмассовых полей в пространстве $\mathbb{R}^{d,1}$.[23] В частности, в пространстве AdS_d частицы «непрерывного спина» с общи-

[18] Bargmann V., Wigner E. P. // Proc. Nat. Acad. Sci. 1948. Vol. 34. P. 211.
[19] Schuster P., Toro N. // Phys. Rev. 2015. Vol. D91. P. 025023.
[20] Metsaev R. R. // JHEP. 2017. Vol. 11. P. 197.
[21] Bekaert X., Mourad J., Najafizadeh M. // JHEP. 2017. Vol. 11. P. 113.
[22] Brink L., Khan A. M., Ramond P., and Xiong X.-Z. // J. Math. Phys. 2002. Vol. 43. P. 6279.
[23] Bekaert X., Mourad J. // JHEP. 2006. Vol. 01. P. 115.

ми характеристиками пока не описаны, даже на теоретико-групповом уровне. Полное описание полей непрерывного спина на уровне функционала действия и изучение AdS/CFT соответствия для таких теорий на момент написания этой диссертации остается нерешенной задачей.

Среди всех безмассовых полей общего типа симметрии есть выделенный набор несимметричных полей с индексной симметрией типа «крюк», описываемой диаграммами Юнга с одной строкой длины s и одним столбцом высоты $p \leq \frac{d}{2}$. Например, именно такие поля возникают в d-мерном расширении исходной теоремы Флато-Фронсдала[24]: тензорное произведение двух спинорных синглетонов раскладывается в бесконечную прямую сумму бозонных, безмассовых представлений симметрии типа «крюк» и конечный набор массивных, антисимметричных представлений, включающий массивное скалярное представление.[25] По аналогии с симметричными представлениями, возникающими в тензорном произведении двух скалярных синглетонов, теорема Флато-Фронсдала для двух спинорных синглетонов также даёт теоретико-групповое обоснование AdS_{d+1}/CFT_d соответствия в случае представлений симметрии типа «крюк». В частности, можно развить общий формализм сохраняющихся токов типа «крюк» в $\mathbb{R}^{d-1,1}$ и установить точное соответствие между несимметричными калибровочными полями в объеме и частным классом сохраняющихся токов, построенных из двух спиноров на границе. С другой стороны, GKPW процедура для несимметричных полей отсутствует даже в простейших случаях. Часть диссертационной работы посвящена первичному развитию этого направления.

Следует отметить, что, как правило, значительное внимание уделяется теориям высших спинов в трех, четырех, и старших размерностях, в то время как сравнительно небольшое внимание уделено двухмерным теориям высших спинов. Одна из причин этого в том, что высшеспиновая гравитация в двух измерениях не обязательно имеет типичные свойства теорий в старших измерениях, такие как $(A)dS$ фоновая геометрия, или бесконечное число безмассовых степеней свободы. Так, например, уравнения Фронсдала полей высших спинов $s \geq 1$ в двух измерениях не имеют локальных степеней свободы (что видно уже на примере $s = 2$, когда кинетический оператор (линеаризованные уравнения Эйнштейна) тождественно равен нулю). По этой причине, двухмерный случай до некоторой степени аналогичен трехмерному, где теория

[24]Flato M., Fronsdal C. // Lett. Math. Phys. 1978. Vol. 2. P. 421.

[25]Vasiliev M. A. // JHEP. 2004. Vol. 12. P. 046.

безмассовых полей, описываемая теорией Черна–Саймонса также не имеет локальных степеней свободы.[26] Отсюда следует, что в двух измерениях понятие полей высших спинов следует формулировать аккуратно и, по всей видимости, сам заимствованный из старших измерений понятийный аппарат может оказаться крайне вырожденным в плане интерпретации.

С другой стороны, недавний всплеск интереса к AdS_2/CFT_1 соответствию с участием SYK модели на одномерной границе мотивирует тотальное исследование маломерной голографической дуальности.[27] Несмотря на важные различия, существующая аналогия между SYK моделью и $O(N)$ векторными моделями в старших измерениях позволяет думать, что (нарушенные) симметрии высших спинов должны играть здесь важную роль, по меньшей мере в некоторых вырожденных пределах $O(N)$-синглетного сектора (например, в квадратичном случае $q = 2$ или в окрестности ультрафиолетовой гауссовой фиксированной точки). Более того, существует высшеспиновое расширение исходной гравитации Джакива-Тейтельбойма в виде топологической BF теории с калибровочной алгеброй высших спинов.[28][29] Однако, как известно, искомая в этом контексте дуальная гравитационная теория в объеме также должна содержать башню массивных степеней свободы, дуальных примарным операторам граничной SYK модели (билинейным $O(N)$-синглетам).

Прежде чем исследовать динамические аспекты двумерной теории высших спинов требуется систематическое исследование маломерных аналогов (на данный момент, стандартных) кинематических объектов, присутствующих в теориях высших спинов в старших измерениях. Однако, аналоги ключевых теоретико-групповых структур, лежащих в основе высшеспиновых гравитаций (таких как осцилляторные реализации алгебр высших спинов, присоединенное и твистованное представления и т.д.) остаются невыясненными. В этом состоит одна из целей настоящей диссертационной работы.

Интересно, что в размерности $d = 2$ сосуществуют два класса теорий, конформная теория поля CFT_2 и теория высших спинов, которые обе обладают бесконечномерной симметрией, соотвественно алгеброй Вирасоро и алгеброй высших спинов. В старших размерностях $d > 2$ конформная симметрия становится конечномерной. С другой стороны, первая нетривиальная

[26] Blencowe M. P. // Class. Quant. Grav. 1989. Vol. 6. P. 443.

[27] Maldacena J., Stanford D. // Phys. Rev. 2016. Vol. D94, no. 10. P. 106002.

[28] Alkalaev K. B. // J. Phys. 2014. Vol. A47. P. 365401.

[29] Grumiller D., Leston M., Vassilevich D. // Phys. Rev. 2014. Vol. D89, no. 4. P. 044001.

теория высших спинов в $d = 3$ измерениях[30] оказывается голографически дуальной частной CFT_2 с W симметрией,[31][32][33] что опять возвращает нас к двумерным конформным теориям.

В последнее время было осознано, что AdS/CFT соответствие может быть понято на более глубоком структурном уровне, нежели сравнение корреляционных функций (производящих функционалов) дуальных теорий согласно GKPW процедуре. Действительно, корреляционные функции любой конформно–инвариантной теории раскладываются на модельно–независимые составляющие, известные как конформные блоки.[34] Конформные блоки задают базис в пространстве корреляционных функций и фиксируются исключительно имеющейся конформной симметрией ($o(d, 2)$, Вирасоро или W расширения), что определяет их ключевую роль в реализации программы конформного бутстрапа. Поэтому, возникает естественный вопрос — чем являются дуальные аналоги функций конформных блоков? Относительно недавно такие дуальные объекты были описаны в случае очень больших конформных параметров (центральный заряд и размерности), что соответствует квазиклассическому приближению в теории гравитации в объеме. Было показано, что предельные конформные блоки (их называют (квази)классическими) равны длинам специальных геодезических графов, растянутых в асимптотически AdS_3 пространстве.[35][36][37][38] Существенным ингредиентом здесь является приближение тяжёлых/легких (HL) операторов, когда два оператора корреляционной функции сильно тяжелее остальных. Тогда в зависимости от своих конформных размерностей, тяжёлые операторы генерируют в дуальном объеме либо коническую сингулярность, либо BTZ черную дыру, а легкие операторы соответствуют пробным частицам на их фоне.

Помимо этого, существует интригующая связь между пространством квантовых состояний трёхмерной теории Черна–Саймонса в присутствии вильсоновских линий и пространством конформных блоков двумерной конформной

[30] Prokushkin S. F., Vasiliev M. A. // Nucl. Phys. 1999. Vol. B545. P. 385.
[31] Campoleoni A., Fredenhagen S., Pfenninger S., Theisen S. // JHEP. 2010. Vol. 11. P. 007.
[32] Henneaux M., Rey S.-J. // JHEP. 2010. Vol. 12. P. 007.
[33] Gaberdiel M. R., Gopakumar R. // J. Phys. A. 2013. Vol. 46. P. 214002.
[34] Belavin A., Polyakov A. M., Zamolodchikov A. // Nucl.Phys. 1984. Vol. B241. P. 333.
[35] Fitzpatrick A. L., Kaplan J., Walters M. T. // JHEP. 2014. Vol. 1408. P. 145.
[36] Asplund C. T., et al. // JHEP. 2015. Vol. 1502. P. 171.
[37] Hijano E., Kraus P., Snively R. // JHEP. 2015. Vol. 07. P. 131.
[38] Alkalaev K. B., Belavin V. A. // JHEP. 2015. Vol. 08. P. 049.

теории поля, которая была замечено еще в конце 80-х.[39][40] Т.к. $o(2,2)$ теория Черна–Саймонса описывает $3d$ гравитацию с космологической постоянной, то такая связь приобретает новое значение в контексте AdS_3/CFT_2 дуальности. Более того, рассмотрение теории Черна–Саймонса с калибровочной алгеброй высших спинов приводит к квазиклассической дуальности $3d$ гравитаций высших спинов некоторым специальным W-инвариантными CFT_2 (см. выше) и изучению режима большого заряда и соответствующих предельных W конформных блоков в таких теориях.

Отметим, что описанная выше реализация квазиклассического AdS_3/CFT_2 соответствия в виде равенства «блок=длина» специфично именно для двух тяжёлых операторов и сферической топологии конформной границы. Помимо этого, в основном рассматривался случай 4-точечных классических блоков, потому что для них известны явные выражения. Вопрос распространения соответствия на случай n-точечных блоков на другие граничные топологии и на случай нескольких тяжелых операторов рассматривается в данной диссертации. Интересно отметить, что само соответствие позволят находить новые решения трехмерной гравитации, исходя из знания конформного блока. Также отметим, что возникающие фоновые геометрии в объеме стационарны, в то время как интерес представляет общий нестационарный случай, когда метрика явно зависит от времени, и устройство описанного выше соответствия в этом случае также неизвестно.

Особая роль конформных блоков проявляется при вычислении энтропии запутывания для области на границе со сферической топологией, составленной из нескольких интервалов. В этом случае, согласно формуле Риу-Такаянаги[41], энтропия запутывания равна длине кривой минимальной длины (геодезической) в объеме, граничные точки которой совпадают с концами интервалов. В работе Хартмана[42] было предложено, что функция энтропии запутывания в этом случае демонстрирует универсальность и равна классическому конформному блоку с вакуумными внутренними каналами. Приложение этого наблюдения к другим граничным топологиям, а также возможность и смысл выхода за пределы приближения вакуумными блоками остаются неясными. Здесь мы вплотную подходим к упоминавшемуся выше вопросу о выходе за рамки вычислений в пределах асимптотической области около границы.

[39]Witten E. // Commun. Math. Phys. 1989. Vol. 121. P. 351.
[40]Verlinde H. L. // Nucl. Phys. 1990. Vol. B337. P. 652.
[41]Ryu S., Takayanagi T. // Phys. Rev. Lett. 2006. Vol. 96. P. 181602.
[42]Hartman T. // 2013. hep-th/1303.6955.

С технической стороны, используя имеющиеся методы вычисления исходных блоков (например, это рекурсия Замолодчикова[43] или комбинаторное представление AGT[44]), попытка сначала вычислить исходный блок, а потом взять предел большого центрального заряда оказывается неэффективной – как правило, вычисление удается провести лишь в первых порядках разложения функций блока. Более правильным оказывается постановка задачи исходно в режиме большого центрального заряда. Это в свою очередь, приводит к необходимости разработки новых методов вычисления предельных конформных блоков, что составляет одну из задач, решаемых в настоящей диссертации.

Цели диссертационной работы.

Настоящая диссертационная работа преследует следующие цели:

1. Описание несимметричных полей общего положения на пространствах постоянной кривизны и изучение их гравитационных взаимодействий в кубическом приближении.
2. Формулировка и развитие методов AdS_{d+1}/CFT_d соответствия для свободных несимметричных полей.
3. Построение двумерной теории высших спинов.
4. Развитие методов вычислений конформных блоков CFT_2 в режиме большого центрального заряда.
5. Квазиклассическое AdS_3/CFT_2 соответствие на уровне конформных блоков на простейших топологиях (сфера, тор).

Основные задачи.

Для достижения поставленных целей необходимо было решить следующие

Задачи:

1. Развить метод построения кубических вершин взаимодействия AdS_5 полей высших спинов FV типа с участием несимметричных полей.

[43] Zamolodchikov A. // Teor.Mat.Fiz. 1987. Vol. 73. P. 103.

[44] Alday L. F., Gaiotto D., Tachikawa Y. // Lett. Math. Phys. 2010. Vol. 91. P. 167.

2. Сформулировать производящую формулировку описания полей с произвольными параметрами (масса, (непрерывный) спин, глубина) на пространствах $\mathbb{R}^{d-1,1}$ и $(A)dS_d$.

3. Развить голографическую GKPW процедуру для полей смешанного типа симметрии.

4. Описать основные структуры AdS_2 теории высших спинов, такие как синглетон, алгебра высших спинов, присоединенное и твистованное представления, а также выяснить возможность лагранжева описания.

5. Разработать методы вычисления n-точечных конформных блоков в (суперсимметричной) CFT_2 на торе и плоскости в режиме большого центрального заряда.

6. Реализовать программу установления квазиклассической AdS_3/CFT_2 дуальности на уровне n-точечных конформных блоков на плоскости и торе.

7. Сформулировать общие механизмы вычисления матричных элементов голографических вильсоновских сетей в AdS_3 гравитации Черна–Саймонса.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Производящая БРСТ формулировка несимметричных полей. Описание кубических вершин FV типа для несимметричных AdS_5 полей типа «крюк».

2. Голографическая GKPW процедура для несимметричных AdS_d полей типа «крюк». Явная реализация несимметричных сохраняющихся токов.

3. Топологическая и динамическая AdS_2 гравитация высших спинов.

4. Голографическое описание многоточечных квазиклассических конформных блоков в CFT_2 на плоскости и торе.

5. Явная конструкция торических конформных блоков в режиме большого центрального заряда.

Научная новизна, достоверность и личный вклад автора. Все результаты, изложенные в данной диссертации, являются оригинальными. Новизна рассматриваемых проблем, а также достоверность результатов привело к существенному продвижению в понимании структуры голографической дуальности теорий с бесконечномерными симметриями, такими как теории высших спинов и конформные теории поля. Полученные автором результаты регулярно используются и далее развиваются российскими и зарубежными научными группами. Приведенные в диссертации результаты получены автором непосредственно и легли в основу научных статей, сделанных самостоятельно, либо в соавторстве с российскими или иностранными коллегами.

Практическая значимость. Полученные в диссертационной работе результаты могут быть использованы для исследования и описания широкого круга явлений в конформной теории поля и теории полей высших спинов (например, вычисление корреляционных функций, энтропий запутывания), а также в анализе AdS/CFT соответствия (в частности, AdS_3/CFT_2 и AdS_2/SYK) в различных моделях и контекстах.

В диссертационной работе впервые построены вершины взаимодействий несимметричных полей между собой, симметричными полями и гравитацией [1]. Данный результат получен в рамках $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной теории высших спинов в AdS_5 пространстве, в кубическом приближении. В зависимости от выбранной суперлгебры высших спинов спектр теории имеет либо однократное, либо бесконечнократное вырождение, что во втором случае делает ее похожей на теорию суперструн. Очевидно, что увеличение числа суперсимметрий $\mathcal{N} > 2$ лишь усилит данное сходство, потому что в спектре будут появляться (бозонные и фермионные) несимметричные поля, второй спин которых растет, $s_2 > 1$. Следует отметить, что способ построения вершин взаимодействия FV типа вовлекает алгебраические инструменты анализа спектра, такие как дуальность Хау, что непосредственно связано с осцилляторной реализацией симметрии высших спинов.

Предложена производящая формулировка свободных бозонных полей произвольного типа симметрии дискретного спина на пространствах $\mathbb{R}^{d-1,1}$ и AdS_d [2, 3, 4], а также для свободных бозонных полей непрерывного спина произвольного типа симметрии на пространстве $\mathbb{R}^{d-1,1}$ [5]. Другие известные формы описания динамики полей высших спинов (подход Фронсдала, Лабастиды, Шустера-Торо, развернутый формализм, конусное описание, триплетная формулировка) возникают из нее посредством различных гомологических редукций, что оправдывает термин производящая. Теория представлена в БРСТ терминах, аналогично БРСТ описанию струнной динамики. Потенциально, это делает предлагаемую формулировку полезной при изучении (предела нулевого натяжения) теории бозонных струн на пространствах постоянной кривизны. В частности, об этом свидетельствует присутствие в теории, в качестве одной из ее эквивалентных форм, триплетного формализма описания полей высших спинов, исходно построенного как $\alpha' \to \infty$ предел вирасоровских связей бозонной струны.[45][46]

Для определенного класса несимметричных представлений конформной алгебры $o(d, 2)$ типа «крюк» построены ранее неизвестные в явном виде конформные операторы критической размерности, реализованные как сохраняющиеся токи на пространстве $\mathbb{R}^{d-1,1}$ [6]. Также приведены явные выражения соответствующих 2-точечных корреляционных функций. Данный анализ дополняет обобщённую теорему Флато-Фронсдала, что гарантирует справедливость AdS_{d+1}/CFT_d соответствия для «крюковых» несимметричных полей на кинематическом уровне. Однако, динамическая реализация соответствия критическим образом зависит от частной теоретико-полевой реализации, используемой для описания таких полей в объеме [7]. Данные результаты выступают в поддержку гипотезы, что того, что полная нелинейная теория таких полей в пространстве AdS_{d+1} голографически дуальна модели Гросса-Неве в d измерениях, по аналогии с гипотезой Клебанова-Полякова-Сезгина-Сунделла в $d = 3$ измерениях. Конечно, устройство дуальности существенно зависит от четности и (не)нарушения симметрии высших спинов, а также от выбора граничных условий для массивных антисимметричных полей в объеме (включая скаляр), присутствие которых диктуется обобщённой теоремой Флато-Фронсдала.

В диссертации сформулирована двухмерная теория гравитации высших спинов, содержащая как топологический [8, 9], так и динамический секторы [10, 11]. В первом случае, построенная теория обобщает топологическую гравитацию Джакива-Тейтельбойма включением топологических полей старших рангов, которые можно интерпретировать как «частично-безмассовые» поля максимальной глубины. Во втором случае, в спектре возникают AdS_2 массивные скалярные моды эквидистантно растущих масс M_n $(n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$, организованных в высшеспиновый мультиплет. Согласно AdS_2/CFT_1 слова-

[45]Bengtsson A. K. H. A // Phys. Lett. B. 1986. Vol. 182. P. 321.
[46]Sagnotti A., Tsulaia M. // Nucl. Phys. 2004. Vol. B682. P. 83.

рю, мы приходим к выводу, что граничная дуальная теория содержит бесконечный набор примарных операторов $\mathcal{O}_n$ с эквидистантным спектром конформных размерностей Δ_n. Он совпадает со спектром $O(N)$-синглетных операторов, билинейных по большому числу N одномерных граничных полей в векторном представлении $O(N)$, что соотвествуют безаномальному спектру SYK модели, или, эквивалентно, гауссовой фиксированной точке. В взаимодействующей фиксированной точке эти операторы приобретают аномальные размерности порядка единицы, что свидетельствует о сильном нарушении симметрии высших спинов.

В контексте изучения AdS_3/CFT_2 соответствия в режиме большого центрального заряда, в диссертационной работе проведены комплексные исследования поведения n-точечных квазиклассических конформных блоков CFT_2 на плоскости и торе.

Доказана теорема о том, что n-точечные классические конформные блоки в HL приближении равны (по модулю конформного отображения) длинам дуальных геодезических графов при любом числе вставок n [16]. Данное утверждение существенно опирается на разработку монодромного метода вычислений классических блоков[47] в случае произвольного числа операторных вставок для специальной теории возмущений с двумя фоновыми примарными операторами [13, 16]. Со стороны теории в объеме сформулирован геометрический подход к нахождению длин нетривиальных геодезических конфигураций на двухмерных гиперболических геометриях, возникающих как сечения фоновых трехмерных геометрий, который может применяться для вычислений на пространствах любых топологий, включая разобранный в диссертации случай диска Пуанкаре и гиперболического кольца [12, 14, 15, 17, 18].

Развитые в диссертации методы вычислений квазиклассических конформных блоков [12, 14, 17, 18, 19] позволяют анализировать предельные блочные функции в разных режимах поведения конформных параметров, т.е. центрального заряда и размерностей, посредством изучения контракций Инону-Вигнера алгебры Вирасоро. Более того, само эмпирическое определение классического блока как предельное логарифмирование исходного конформного блока алгебры Вирасоро может быть заменено на строгое определение в рамках теории представлений контрактированных алгебр (супер)Вирасоро и W расширений и их деформаций.

Для специального класса квазиклассических конформных блоков – гло-

[47] Zamolodchikov A. // Zh. Eksp. Teor. Fiz. 1986. Vol. 90. P. 1808.

бальных блоков на плоскости и торе, сформулированы и изучены различные схемы вычислений, основанные на (тороидальных) вильсоновских сетях голографически дуальной $3d$ гравитационной теории Черна–Саймонса на (термальном) пространстве AdS_3 [20]. Возникающие в данном контексте вильсоновские сети являются спиновыми сетями Пенрозуа. По всей видимости, данное представление глобальных блоков может быть с одной стороны перенесено на случай CFT_d, где конформная симметрия конечномерна и все блоки являются глобальными, а с другой стороны, использование спиновых сетей должно позволить сформулировать альтернативный способ вычисления глобальных CFT_2 блоков на произвольных римановых поверхностях, а также эффективно учитывать $1/c$ поправки.

Публикации и апробация работы. Основные результаты по теме диссертации получены в 2009–2020 годах и изложены в 20 публикациях в рекомендованных ВАК периодических изданиях для диссертаций («Journal of High Energy Physics» – 14 статей, «Nuclear Physics B» – 4 статьи, «Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical» – 2 статьи).

Результаты работ, которые легли в основу данной диссертации, докладывались на семинарах и конференциях, проводимых в различных ведущих научных центрах: международные конференции «Higher spin theory and Holography» (Россия, 2014-2018); Гинзбурговская конференция по физике (Россия, 2012); международные конференции «Quarks» (Россия, 2012, 2014); международные конференции «Supersymmetries and Quantum Symmetries» (Россия, 2009, 2011, 2013, Армения, 2019); международная конференция «Quantum Field Theory and Gravity» (Россия, 2012); международная конференция «Topological Field Theories, String theory and Matrix Models» (Россия, 2017, 2018); международный семинар «Higher spin gravity» (Австрия, 2012); международный семинар «Higher Spins, Strings and Dualities» (Италия, 2012); международная конференция «Integrable Systems and Quantum Symmetries» (Чехия, 2015, 2018); международный семинар «Higher spin theory and Duality» (Германия, 2016); международная конференция «New Developments in AdS3/CFT2 Holography» (Италия, 2017); международная конференция «Higher spin gravity and holography» (Южная Корея, 2017); международный семинар «Higher Spin Gravity: Chaotic, Conformal and Algebraic Aspects» (Южная Корея, 2019).

Результаты работ, представленных в диссертации, также многократно докладывались на регулярных групповых семинарах в Физического института РАН, Томского педагогического государственного университета, Объединенного института ядерных исследований, университете Тура (Франция), университете Гумбольдта (Германия), института Альберта Эйнштейна (Германия), университета Людвига-Максимиллиана (Германия).

Представленные в диссертационной работе результаты были получены при финансовой поддержке программ Российского фонда фундаментальных исследований, грантов Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ, программ Российской академии наук, международного научного фонда Александра фон Гумбольдта, Российского научного фонда, фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС».

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, шести глав и заключения. Для удобства, вспомогательные справочные материалы, а также некоторые технические детали вычислений сосредоточены в приложении, включающем шесть тематических разделов. Полный объём диссертации с приложениями составляет 392 страницы с 21 рисунком. Список литературы содержит 378 наименований.

Содержание работы

Введение посвящено обоснованию актуальности исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, обзору научной литературы по изучаемым проблемам, формулировкам целей, задач, а также научной новизны и практической значимости представляемой работы.

Первая глава содержит исследование взаимодействий полей смешанного типа симметрии в пространстве AdS_5 в рамках $\mathcal{N}=2$ теории высших спинов FV типа. Алгеброй высших спинов, контролирующей взаимодействия в рассматриваемой модели является $\mathcal{N}=2$ супералгебра Линецкого-Фрадкина $cu(2,2|\,8)$. В свою очередь, она содержит $\mathcal{N}=2$ расширенную $su(2,2|2)$ супералгебру как максимальную конечномерную подалгебру, так что поля теории группируются в $su(2,2|2)$ супермультиплеты. Обозначая спины $cu(2,2|\,8)$ полей парой (полу)целых чисел (s_1,s_2) находим содержимое $\mathcal{N}=2$ супермультиплета

$$\{s\}=(s)_{[1]}\oplus(s-\tfrac{1}{2})_{[2]}\oplus(s-1)_{[4]}\oplus(s-1,1)_{[1]}\oplus(s-\frac{3}{2})_{[2]}\oplus(s-2)_{[1]}\ ,$$

где s – наибольший целый спин, а числа в квадратных скобках обозначают размерности представлений алгебры R-симметрии $u(2)$. Как видно, в спектр входят несимметричные безмассовые бозонные поля спина $(s,1)$. Теория высших спинов с калибровочной супералгеброй $cu(2,2|\,8)$ описывает бесконечный набор супермультиплетов с наибольшим спином s, растущим до бесконечности

$$\sum_{k=0}^{L}\sum_{s=2}^{\infty}\ \{s\}^{(k)}\ ,$$

где k параметризует k-ю копию спин-s супермультиплета. Модели, рассматриваемые в этой главе, отвечают $L=\infty$ (нередуцированная модель) или $L=0$ (редуцированная модель). Для построения теории используется развернутая формулировка динамики полей высших спинов, где безмассовые калибровочные поля описываются как дифференциальные 1-формы, принимающие значения в конечномерных, неприводимых представлениях $o(4,2)$ алгебры.

Взаимодействия полей высших спинов между собой и полями гравитации могут быть описаны функционалом действия FV типа

$$S[\Omega]=\frac{1}{2}\mathcal{A}\big[R(\Omega),R(\Omega)\big]\,,$$

где $R(\Omega)$ – 2-формы кривизны, ассоциированные с калибровочными полями Ω супералгебры высших спинов $cu(2,2|\,8)$. Здесь $\mathcal{A}[F,G]=\mathcal{A}[G,F]$ является билинейным симметричным скалярным произведением, определённым для любых $cu(2,2|\,8)$-значных 2-форм F и G. Соответственно, функционал действия определен на диагонали скалярного произведения. Помимо этого, накладываются следующие условия. *R-симметрия:* действие инвариантно относительно глобальной R-симметрии. *Условие факторизации:* копии полей с одинаковым спином не смешиваются в квадратичном действии. *Условие C-инвариантности:* действие циклично $\mathcal{A}[N\star F,G]=\mathcal{A}[F,G\star N]$ по отношению к центральному элементу N супералгебры $cu(2,2|\,8)$. Полное действие теории естественным образом распадается на сумму бозонной и фермионной частей

$$\mathcal{A}[R_e(\Omega_e),R_o(\Omega_o)]=\mathcal{S}_e[\Omega_e]+\mathcal{S}_o[\Omega_o]\ ,$$

где индексы e и o обозначают бозонные и фермионные составляющие. Количество и тип слагаемых в полном действии полностью определяется структурой $\mathcal{N}=2$ супермультиплета. Фермионная часть является суммой действий двух симметричных фермионов со значениями в $su(2)$ алгебре. Бозонная часть является суммой действия пяти бозонных полей со значениями в $u(2)$ алгебре.

Каждое элементарное действие имеет схематический вид

$$\mathcal{S}[\Omega] = \frac{1}{2} \int \hat{H} \wedge R(\Omega) \wedge R(\Omega) \ .$$

Конкретный вид каждого составляющего действия определяется операторными 1-формами $\hat{H} = \hat{H}(E)$, зависящими от динамического гравитационного поля, которое описывается гравитационным репером E. Важно отметить, что описание калибровочных полей как дифференциальных форм и использование компенсаторного механизма, делающего $o(4,2)$ изометрию явной, гарантируют явную ковариантность действия и инвариантность относительно диффеоморфизмов. Также, по построению, вышеприведённые действия инвариантны относительно преобразований R-симметрии $u(2)$.

Данная конструкция функционала FV типа является калибровочно–инвариантной и описывает правильное число степеней свободы лишь в кубическом приближении. Для анализа взаимодействий по теории возмущений динамические поля Ω_1 рассматриваются как флуктуации над AdS_5 фоном, т.е. $\Omega = \Omega_0 + \Omega_1$, где вакуумные калибровочные поля Ω_0 удовлетворяют условию нулевой кривизны $R(\Omega_0) = 0$. Более того, подсчет числа степеней свободы приводит к тому, что вышеприведённое действие необходимо дополнить связями на линеаризованные кривизны $R_1 = R_1(\Omega_0, \Omega_1)$ вида

$$\hat{\Upsilon}(R_1) = 0 \ ,$$

которые выражают все дополнительные поля теории через производные физических полей. Явным вычислением показывается, что выполнение всех условий и наложенных связей фиксирует операторы $\hat{H}(E)$ составляющих действий с точностью до одной общей нормировочной константы.

Весь механизм обеспечения калибровочной инвариантности теории основан на двух инструментах, контролирующих спектр теории на/вне массовой поверхности. Первый, это осцилляторная реализация алгебры высших спинов, эффективным образом позволяющая анализировать спектр калибровочных полей и работать с многоиндексными объектами в терминах вспомогательных (нефизических) алгебр. Такая возможность реализуется в рамках дуальности Хау. Второй, это развернутая формулировка полей смешанного типа симметрии в рамках спинорного $o(4,2) \approx su(2,2)$ описания, которая позволяет прямо контролировать физические степени свободы. Это достигается определением обобщённых тензоров Вейля старших спинов и использованием особенностей феномена Бринка–Васильева–Мецаева для AdS_5 полей.

Приведенная конструкция действия применима также в редуцированной модели с факторизованной калибровочной супералгеброй $hu_0(2,2|\,8)$. Для построения редуцированной модели используется подход, разработанный ранее для $\mathcal{N}=0,1$ суперсимметричных моделей, состоящий в подстановке проектора Π в действие $cu(2,2|8)$ модели в виде

$$\mathcal{A}[F,G] \to \mathcal{A}_0[F,G] = \mathcal{A}[F,\Pi \star G]\,,$$

где $\mathcal{A}[F,G]$ – действие исходной (нередуцированной) модели. Тогда $\mathcal{A}_0[F,G]$ определяет действие редуцированной модели.

Во **второй главе** описывается динамика свободных релятивистских полей общего типа симметрии (непрерывный/дискретный спин, масса/энергия, глубина) на пространствах Минковского $\mathbb{R}^{d-1,1}$ и анти-де Ситтера AdS_d старших размерностей d и формулируется производящая формулировка таких полей в БРСТ терминах.

В разделе **2.1** для решения задачи построения производящей, унифицирующей формулировки динамики полей высших спинов на пространстве $\mathbb{R}^{d-1,1}$ используется подход, в рамках которого класс безмассовых представлений алгебры Пуанкаре описывается в терминах Хау–дуальных алгебр Ли: алгебры Лоренца $o(1,d-1)$ и симплектической алгебры $sp(2n+2)$, реализованных на пространствах полиномов от вспомогательных переменных (здесь параметр n это число строк в диаграмме Юнга, описывающей индексную структуру соответствующего тензорного поля). Основным пространством является пространство функций от вспомогательных переменных осцилляторного типа a^I_a с лоренцевыми и симплектическими индексами. Это – бимодуль Хау–дуальных алгебр $so(d-1,1)$ с генераторами M_{ab} и $sp(2n+2)$ с генераторами T_{IJ}, ${T_I}^J$, T_{IJ}, реализованных через квадратичные комбинации осцилляторов. Отождествление $a^0_a \equiv y_a$ позволяет использовать данный набор осцилляторов для реализации алгебры Пуанкаре с трансляциями, заданными $P_a = \partial/\partial y^a$.

Введение духов b_i, $i=1,...,n$ позволяет рассмотреть БРСТ оператор

$$Q = S^\dagger_i \frac{\partial}{\partial b_i}\,, \qquad \text{где} \qquad S^\dagger_i = {T_i}^0\,,$$

действующий на функциях $\phi=\phi(y,a|b)$ и дополненный БРСТ–расширенным условиям неприводимости (спиновые условия, юнговские симметризаторы, условия бесследовости). БРСТ оператор и условия неприводимости образуют алгебру, являющейся верхнетреугольной подалгеброй $sp(2n+2)$ плюс подалгебра Картана. Этот факт определяет совместность конструкции и гарантирует правильный набор локальных степеней свободы, соответствующих безмассовым $\mathbb{R}^{d-1,1}$ полям произвольного спина. В общем случае, Q-когомология в произвольных духовых числах непуста. Показывается, что соответствующие элементы отождествляются с полями развернутой формулировки.

Построение локальной калибровочной теории происходит следующим образом. Базисные 1-формы dx^a заменяются грассмановыми нечётными переменными θ^a, исходный БРСТ оператор Q расширяется как

$$\hat{\Omega} = \nabla + Q\,, \qquad \nabla = \theta^a\left(\frac{\partial}{\partial x^a} - \frac{\partial}{\partial y^a}\right).$$

Пространство представления есть пространство функций $\Psi(x)$ со значениями в градуированном пространстве $\hat{\mathcal{H}}$ с базисом e_A, т.е. $\Psi(x) = \psi^A(x)e_A$, где $\mathrm{gh}\,\psi^A = -\mathrm{gh}\,e_A$ и ψ^A – это поля теории поля (включая духовые, антиполя и т.д.). Разложение ψ^A согласно духовому числу $\Psi = \sum_k \Psi^{(k)}$ дает уравнения движения и калибровочные преобразования всех поколений вида

$$\hat{\Omega}\Psi^{(0)} = 0\,, \quad \delta\Psi^{(0)} = \hat{\Omega}\Psi^{(1)}\,, \quad \delta\Psi^{(1)} = \hat{\Omega}\Psi^{(2)}\,, \quad \ldots\,.$$

Полученная формулировка является производящей в том смысле, что посредством гомологической редукции данной БРСТ теории можно получить такие известные способы описания динамики полей высших спинов как формулировка Фронсдала–Лабастиды, развернутая формулировка, триплетная формулировка, конусная формулировка.

В разделе **2.2** данный подход применяется для описания $\mathbb{R}^{d-1,1}$ полей непрерывного спина. Здесь связи и БРСТ оператор деформируются с помощью вкладов, пропорциональных непрерывному спину μ, однако по-прежнему определяют подалгебру $sp(2n{+}2)$. С этой целью также вводятся духи b^i, после чего вспомогательные и духовые переменные разделяются выделением одного осциллятора: $a^b_i = (a^b, a^b_\alpha)$ и $b^i = (b, b^\alpha)$, где $\alpha = 1, \ldots, n-1$. Поля и калибровочные параметры определяются функцией $\psi(y, a|b)$, подчиненной БРСТ–расширенным условиям неприводимости. Деформированный БРСТ оператор имеет вид

$$\mathcal{Q} = \left(S^\dagger + \mu\right)\frac{\partial}{\partial b} + S^\dagger_\alpha\frac{\partial}{\partial b_\alpha}\,.$$

Данная формулировка содержит вещественный параметр μ и $(n{-}1)$ спиновых весов $s_2, \ldots, s_n$. В d измерениях $n = [\frac{d-3}{2}]$, что позволяет описать все возможные конечномерные представления малой алгебры $o(d-3) \subset iso(d-1,1)$, т.е. поля непрерывного спина общего положения. Основанная на БРСТ операторе $\mathcal{Q}$ локальная калибровочная теория строится способом, аналогичным примененному при описании $\mathbb{R}^{d-1,1}$ полей с дискретными спинами. Различными гомологическими редукциями могут быть получены эквивалентные формы описания полей непрерывного спина. В частности, показано, что таким образом возникает формулировка Шустера-Торо.

В разделе **2.3** рассматривается аналогичная конструкция для AdS_d полей дискретного спина, которые можно разделить на три класса, согласно значению энергии E_0: массивные, безмассовые, частично–безмассовые поля. Производящая формулировка строится аналогично рассмотрению в предыдущих разделах. Существенное отличие состоит в использовании амбиент–подхода для описания геометрии AdS_d и соответствующих тензорных полей. Вместо лоренцевых $o(d-1,1)$-ковариантных тензорных полей можно рассматривать $(d-1,2)$-ковариантные поля при условии, что алгебра изометрий реализована линейно; само пространство AdS_d отождествляется как гиперболоид, вложенный в плоское амбиент–пространство $\mathbb{R}^{d-1,2}$.

Определяя вспомогательные осцилляторные переменные A_I^A, $I = 1, ..., n$, можно видеть, что пространство функций от A_I^A является бимодулем $o(d-1,2)$–$sp(2n+2)$. По аналогии с конструкцией алгебры Пуанкаре из предыдущего раздела выделяется направление A_0^A, которое отождествляется как декартова координата на амбиенте $A_0^A = Y^A + V^A$, где V^A – некоторый постоянный $o(d-1,2)$ вектор нормированный как $V^A V_A = -1$ (компенсатор). Введение духов b_α, $\alpha = 1, ..., p$, позволяет определить БРСТ оператор

$$Q_p = S_\alpha^\dagger \frac{\partial}{\partial b_\alpha}\,, \qquad \text{где} \qquad S_\alpha^\dagger = A_\alpha^A \frac{\partial}{\partial Y^A}\,,$$

действующий на функциях $\Psi(Y, A|\, b)$, образующих подпространство, выделяемое специальным набором (БРСТ-расширенных) связей.

Соответствующая локальная калибровочная теория строится на основе БРСТ оператора Q_p и определяется несколькими параметрами: спины $s_1 \geq s_2 \geq ... \geq s_n$, вещественный параметр w, возникающий как собственное число элемента Картана алгебры $sp(2n+2)$, целочисленный параметр p, входящий через БРСТ оператор. Также, при специальных значениях веса $w = s_p - p - t$ с параметром $t = 1, 2, ..., t_{\max}$, где $t_{\max} = s_p - s_{p+1}$ возникает дополнительный целочисленный параметр t – глубина калибровочных преобразований. Когомологии БРСТ оператора Q_p задают спектр полей развернутой формулировки. В частности, по аналогии с $\mathbb{R}^{d-1,1}$ системами когомология в нулевом духовом числе определяет бесконечномерный вейлевский модуль, описывающий локальные степени свободы системы. Изучение структуры этого модуля позволяет сформулировать и доказать явление Бринка–Васильева–Мецаева для безмассовых и частично–безмассовых полей общего типа симметрии. Единственная непустая когомология в ненулевых духовых числах лежит в числе p и соответствует калибровочным полям p-форм со значениями в неприводимых конечномерных представлениях алгебры $o(d-1,2)$. В массивном случае эта когомология также пуста.

Третья глава содержит обсуждение AdS_{d+1}/CFT_d соответствия для несимметричных тензорных полей в пространствах AdS_{d+1} и $\mathbb{R}^{d-1,1}$ в простейшем случае, когда индексная структура описывается диаграммами Юнга с одной строкой и одним столбцом (диаграммы типа «крюк»). В основном рассматриваются два вопроса: (обобщённая) теорема Флато-Фронсдала и GKPW процедура для несимметричных полей.

В разделах **3.1** и **3.2** явно строятся сохраняющиеся несимметричные токи, лежащие в основе теоретико-полевой реализации обобщённой теоремы Флато-Фронсдала. Соответствующие токи (Флато-Фронсдала) построены из двух безмассовых спиноров на пространстве Минковского $\mathbb{R}^{d-1,1}$ и конечного числа $(s-1) \geq 0$ пространственно-временных производных, умноженных на элементы алгебры Клиффорда ранга $p \leq [d/2]$. Их конформные размерности $\Delta_{crit} = s + d - 2$ удовлетворяют унитарному пределу $o(d,2)$ бесконечномерных, несимметричных представлений старшего веса типа «крюк». Данные токи являются $o(d,2)$ примарными операторами смешанного типа симметрии и соответствующие условия сохранения конформно–инвариантны.

Рассматриваются примарные поля $\mathcal{O}^A(x)$, где $x \in \mathbb{R}^{d-1,1}$ и индекс A обозначает компоненты неприводимого представления алгебры Лоренца $o(d-1,1)$. В случае полей типа «крюк» имеем $\mathcal{O}_{m_1\ldots m_s, n_1\ldots n_{p-1}}(x)$, где индексная симметрия описывается диаграммой Юнга типа $\{s,p\}$, а также наложено условие бесследовости. Анализ конформного преобразования потомков приводит к следующим весам и конформно–инвариантным условиям

$$\Delta = s+d-2 \ : \qquad \partial^k \mathcal{O}_{ka_2\ldots a_{s-1}a_s,\, m_1 m_2\ldots m_{p-1}}(x) - \partial^k \mathcal{O}_{k(a_2\ldots a_{s-1}[m_1,a_s)\, m_2\ldots m_{p-1}]}(x) = 0 \ ,$$

$$\Delta = d-p \ : \qquad \partial^k \mathcal{O}_{m_1\ldots m_s, n_1\ldots n_{p-2}k}(x) = 0 \ ,$$

которые соответствуют диаграммам Юнга типа $\{s-1,p\}$ и $\{s,p-1\}$.

Рассматриваемые операторы составлены из безмассовых спинорных полей $\psi_\alpha(x)$, $\alpha = 1, ..., 2^{[d/2]}$ и их производных, т.е. являются сохраняющимися токами. Вводя вспомогательные коммутирующие переменные u^m и антикоммутирующие переменные θ^m можно определить производящую функцию

$$\mathcal{J}(x,u|\theta)=\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{d}J_{a_1\ldots a_s|m_1\ldots m_p}(x)\,u^{a_1}\ldots u^{a_s}\theta^{m_1}\cdots\theta^{m_k}\ ,$$

с коэффициентами разложения вида

$$J_{a_1\ldots a_s|m_1\ldots m_p}(x)=\sum_{t=0}^{s}(-)^{p+t}\partial_{(a_1}\ldots\partial_{a_t}\bar{\psi}(x)\Gamma_{m_1\ldots m_p}\partial_{a_{t+1}}\ldots\partial_{a_s)}\psi(x)\ ,$$

где $\Gamma_{m_1\ldots m_p}$ – базисные элементы алгебры Клиффорда. Производящая функция $\mathcal{J}(x,u|\theta)$ дает два семейства несимметричных токов с разными размерностями $\Delta_1=\Delta_{crit}$ и $\Delta_2>\Delta_{crit}$. Вводя операторы де Рама $S=\theta^m\partial/\partial u^m$ и $S^*=u^m\partial/\partial\theta^m$ токи двух семейств можно представить в виде

$$\mathcal{J}^{FF}(x,u|\theta)=S^*\mathcal{J}(x,u|\theta)\ ,\qquad \mathcal{J}^{imp}(x,u|\theta)=S^*S\mathcal{J}(x,u|\theta)\ .$$

Раздел **3.2** посвящен доказательству двух теорем, которые играют центральную роль при изучении токов Флато-Фронсдала, реализующих спектр теоремы Флато-Фронсдала в терминах граничной CFT_d.

Теорема 3.1. *Токи* $\mathcal{J}^{imp}(x,u|\theta)$ *тривиальны.*

Теорема 3.2. *Токи* $\mathcal{J}^{FF}(x,u|\theta)$ *являются токами Флато-Фронсдала.*

Второй решаемый в этой главе вопрос (раздел **3.3**) состоит в рассмотрении GKPW процедуры для безмассового AdS_{d+1} поля типа «крюк». Калибровочно–инвариантное действие поля $\varphi_{\mu\nu,\rho}(x)$ спина $(2,1)$ имеет вид

$$S=S_0+\int d^{d+1}x\sqrt{g}\,\mathcal{O}\ ,\qquad \mathcal{O}=\nabla_\lambda U^\lambda\ ,$$

где присутствует объемный вклад в действие S_0, вектор U^ν задает поверхностный вклад. Такая калибровочная система описывает безмассовую частицу со спином $s=(2,1)$ и энергией $E=d$.

Для применения GKPW процедуры найдено решения полевых уравнений при наложении определённых граничных условия на поля в объеме и выборе калибровки. Анализ полевых уравнений и связей основан на разделении полей и уравнений согласно разбиению индексов $\mu,\nu,\ldots$ на 0 и $i,j,\ldots$ для Фурье-преобразованных полей $\Phi=\Phi(z,\mathbf{k})$. Относительно импульсов $\mathbf{k}$ все уравнения алгебраические. Решение для компоненты типа «крюк» имеет вид

$$\varphi_{ij,k}(z,\mathbf{k})=\Big(\frac{\epsilon}{z}\Big)^3\frac{\mathcal{K}_\nu(zk)}{\mathcal{K}_\nu(\epsilon k)}\bar{\varphi}_{ij,k}(\mathbf{k})+\cdots\ ,$$

где $\bar{\varphi}_{ij,k}(\mathbf{k})$ – TT часть граничного «крюкового» тензора $\pi_{ij,k}(\mathbf{k})$, многоточие обозначает члены, определяющие неаналитический вклад. Тензор $\varphi_{ij,\,k}(\epsilon,\mathbf{k}) \equiv \pi_{ij,\,k}(\mathbf{k})$ задает граничное поведение, все остальные компоненты равны нулю.

Вычисление эффективного действия приводит к выражению вида

$$S_{\text{eff}} = C\int d^dx d^dy \left[\pi^{ij,\,k}(\mathbf{x})\langle\mathcal{O}_{ij,\,k}(\mathbf{x})\mathcal{O}_{mn,\,l}(\mathbf{y})\rangle\pi^{mn,\,l}(\mathbf{y})\right] ,$$

где C – это константа перенормировки, и 2-точечная функция

$$\langle\mathcal{O}_{ij,\,k}(\mathbf{x})\mathcal{O}_{mn,\,l}(0)\rangle = \frac{\Pi_{ij,\,k|mn,\,l}(\mathbf{x})}{|x|^{2\Delta}} , \qquad \Delta = d ,$$

полностью фиксируется алгеброй конформных симметрий $o(d+1,1)$, реализуемой масштабными изометриями евклидовой метрики в пространстве $\mathbb{R}^d$. Можно показать, что эффективное действие плохо определено в чётных размерностях d. Процедура регуляризации позволяет отождествить его сингулярную часть с калибровочно–инвариантным действием для конформных «крюковых» полей $\pi_{mn,\,k}(\mathbf{x})$. Таким образом, воспроизводится известный в литературе лагранжиан

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{conf}} = \pi_{ij,k}\,\Box^{\frac{d}{2}}\,\pi^{ij,k} + 2\partial^m\pi_{mi,j}\Box^{\frac{d}{2}-1}\partial_n\pi^{ni,j} \\ +\frac{d+1}{d-2}\,\partial^m\pi_{ij,m}\,\Box^{\frac{d}{2}-1}\,\partial_n\pi^{ij,n} + \frac{3}{2}\,\partial^i\partial^j\pi_{ij,k}\,\Box^{\frac{d}{2}-2}\,\partial_m\partial_n\pi^{mn,k} \ .\end{aligned}$$

В **четвертой главе** рассматриваются теории высших спинов в двух измерениях. Построено расширение топологической гравитации Джакива-Тейтельбойма, а также рассмотрено включение динамических степеней свободы через бесконечный набор полей материи, организованный в мультиплет алгебры высших спинов.

В разделе **4.1** обсуждается понятие $d=1$ синглетона. Конформной алгеброй здесь является $o(1,2)$ и все унитарные неприводимые $o(1,2)$-модули $\mathcal{V}_\Delta$ младшего веса $\Delta = \frac{1+\lambda}{2}$ определяются как синглетон. Теорема Флато-Фронсдала приобретает вид разложения Клебша–Гордона

$$\mathcal{V}_{\frac{1+\lambda}{2}} \otimes \mathcal{V}_{\frac{1+\lambda}{2}} = \bigoplus_{n=0}^{\infty}\mathcal{V}_{\lambda+n+1} \, .$$

Спектр конформных весов в правой части задается $\Delta_n = \lambda+n+1$, где $n = 0,1,2,...$, соответствующий спектр масс $(m_n)^2 = \Delta_n(\Delta_n-1) = (n+\lambda+1)(n+\lambda)$ описывается твистованным представлением (см. далее).

В разделе **4.2** обсуждается алгебра высших спинов, реализуемая как фактор универсальной обертывающей,

$$\mathfrak{gl}[\lambda] = \frac{\mathcal{U}\big(o(1,2)\big)}{\Big(\mathcal{C}_2\big(o(1,2)\big) - \frac{1}{4}(\lambda^2-1)\Big)\mathcal{U}\big(o(1,2)\big)}\ ,$$

где $\mathcal{C}_2\big(o(1,2)\big)$ – оператор Казимира алгебры $o(1,2)$. Алгебра высших спинов $\mathfrak{hs}[\lambda]$ определяется вычитанием одномерного абелева идеала, $\mathfrak{gl}[\lambda] = u(1) \oplus \mathfrak{hs}[\lambda]$. Оказывается удобным реализовать универсальную обертывающую алгебру как $\mathcal{U}\big(o(1,2)\big) \approx \mathcal{S}_3$, где $\mathcal{S}_3$ является пространством формальных рядов $F(Z)$ по $o(1,2)$-векторной переменной Z^A, наделенное $*$-произведением.

В разделах **4.2** и **4.3** рассматривается вопрос описания спектров моделей с калибровочной алгеброй $\mathfrak{hs}[\lambda]$, который сводится к изучению двух типов представлений алгебры $o(2,1)$, присоединенного и твистованного, естественным образом реализуемых на универсальной обертывающей $U\big(o(2,1)\big)$. По построению, такие модули бесконечномерны и приводимы. В зависимости от типа представления вводятся подходящие условия неприводимости, в силу чего (твистованное) присоединенное представление раскладывается в бесконечный набор неприводимых (бес)конечномерных подмодулей. Для описания фактор–алгебры высших спинов используются два выделенных базиса — канонический и твистованный:

$$\mathcal{H} \ = \ \bigoplus_{n=0}^{\infty}\mathcal{D}_n \ \approx \ \bigoplus_{n=0}^{\infty}\mathcal{W}_n\ .$$

где $\mathcal{H}$ обозначает линейное пространство алгебры высших спинов, $\mathcal{D}_n$ – конечномерное $o(2,1)$-представление спина n (калибровочный модуль), $\mathcal{W}_n$ – бесконечномерное $o(2,1)$-представление веса $n-\lambda+1$ (твистованный модуль).

Полевые уравнения калибровочного модуля записываются посредством присоединенной производной как условие ковариантного постоянства

$$\nabla\Omega_{[1]} \equiv (d + W^A_{[1]}\mathcal{T}_A)\,\Omega_{[1]} = 0\ ,$$

где 1-форма связности $W^A_{[1]}$ описывает AdS_2 пространство, $\Omega_{[1]}$ и $\mathcal{T}^A$ – это поля 1-форм и базисные элементы $o(2,1)$ в присоединенном представлении. Локальные степени свободы отсутствуют, т.к. уравнения являются условиями ковариантного постоянства в конечномерных представлениях. Полевые уравнения твистованного модуля записываются посредством твистованных производных как условие ковариантного постоянства

$$\tilde{\nabla}_\lambda C_{[0]} \equiv \left(d + W_{[1]A}\mathbb{T}^A_\lambda\right) C_{[0]} = 0 \ ,$$

где $C_{[0]}$ и $\mathbb{T}^A_\lambda$ – это поля 0-форм и базисные элементы $o(2,1)$ в твистованном представлении. Известно, что данная система уравнений эквивалентна бесконечной башне скалярных AdS_2 полей Φ_n, т.е.

$$\left(\nabla^2 + M_n^2\right)\Phi_n = 0 \ , \qquad \text{с массами} \qquad M_n^2 = (n-\lambda)(n-\lambda+1) \ ,$$

где ∇^2 – даламбертиан на AdS_2 пространстве, $n = 0, 1, 2, ...$. Данный спектр воспроизводит правую часть теоремы Флато-Фронсдала.

В разделе **4.4** сформулирована теория высшеспиновой AdS_2 гравитации с (бес)конечным набором полей как BF теория бесконечномерной калибровочной алгебры высших спинов $\mathfrak{gl}[\lambda]$. Высшеспиновое расширение гравитации Джакива-Тейтельбойма описывается BF функционалом действия

$$S_{\text{HS JT}}[A,B] = \int_{\mathcal{M}_2} \mathrm{Tr}[\, B_{[0]} * F_{[2]}\,] \ ,$$

где $B_{[0]}$ и $A_{[1]}$ – 0-форма и 1-форма со значениями в $\mathfrak{gl}[\lambda]$; $F_{[2]} = dA_{[1]} + A_{[1]} \wedge * A_{[1]}$. Уравнения движения имеют вид условия плоскостности и ковариантного постоянства и при линеаризации над AdS_2 фоновой геометрией они сводятся к уравнениям приведенным выше. Дифференциальные 1-формы и 0-формы отождествляются с калибровочными полями и дилатонами спина $n = 1, 2, ...$. Дилатонная гравитация Джакива-Тейтельбойма вложена как частный случай. Калибровочные поля 1-форм следует рассматривать как топологические «частично-безмассовые» поля максимальной глубины, т.е. данная система не имеет локальных степеней свободы. Таким образом, высшеспиновая гравитация с действием $S_{\text{HS JT}}[A,B]$ может быть интерпретирована как дилатонная гравитация топологических «частично-безмассовых» полей высших спинов.

Пусть $\mathbb{Z}_2 = \{\mathbf{1}, \boldsymbol{\tau}\}$ – это группа автоморфизмов, порожденных твистом τ. Тогда расширенная алгебра высших спинов $\mathfrak{gl}[\lambda] \rtimes \mathbb{Z}_2$ является векторным пространством элементов вида $a\,\mathbf{1} + b\,\boldsymbol{\tau}$, где $a, b \in \mathfrak{gl}[\lambda]$, наделенным ассоциированным коммутатором, определенным через $\star$-произведение

$$(a_1\,\mathbf{1} + b_1\,\boldsymbol{\tau}) \star (a_2\,\mathbf{1} + b_2\,\boldsymbol{\tau}) = \Big(a_1 * a_2 + b_1 * \tau(b_2)\Big)\,\mathbf{1} + \Big(a_1 * b_2 + b_1 * \tau(a_2)\Big)\,\boldsymbol{\tau} \,,$$

по отношению к исходному $*$-произведение. Расширение исходного BF действия посредством $\star$-произведения задается функционалом BF типа

$$S_{\text{EHS JT}}[\mathcal{A},\mathcal{B}] = \int_{\mathcal{M}_2} \mathbb{T}r[\,\mathcal{B}_{[0]} \star \mathcal{F}_{[2]}\,]\,,$$

где теперь $\mathcal{B}_{[0]}$ и $\mathcal{A}_{[1]}$ – 0-форма и 1-форма со значениями в расширенной алгебре $\mathfrak{gl}[\lambda] \rtimes \mathbb{Z}_2$. Уравнения движения, следующие из действия BF типа $S_{\text{EHS JT}}[\mathcal{A},\mathcal{B}]$, накладывают условия плоскостности и ковариантного постоянства, являющиеся естественными расширениями уравнений теории с BF действием $S_{\text{HS JT}}[A,B]$. Физический спектр теории (на массовой поверхности):

Топологический сектор: бесконечная башня дилатонных полей, вся совокупность которых лежит в присоединенном представлении алгебры $\mathfrak{gl}[\lambda]$. Относительно $o(2,1)$ раскладывается в бесконечный набор тензоров Киллинга максимальной глубины $\chi^{(s)}$ для калибровочных полей всех спинов $s = 1, 2, ...$. Каждое дилатонное поле лежит в конечномерном $o(2,1)$ представлении.

Динамический сектор: бесконечная башня динамических скалярных полей, вся совокупность которых лежит в твистованном представлении алгебры $\mathfrak{gl}[\lambda]$. Относительно $o(2,1)$ раскладывается в бесконечный набор массивных скаляров Φ_n, подчиненных уравнениям Клейна-Гордона, $n = 0, 1, 2, ...$. Каждое скалярное поле лежит в бесконечномерном $o(2,1)$ представлении.

В **<u>пятой главе</u>** рассматривается квазиклассическое AdS_3/CFT_2 соответствие классических n-точечных конформных блоков с двум тяжелыми и $n-2$ легкими операторами в CFT_2 на плоскости и длин дуальных геодезических графов в AdS_3 с конической сингулярностью. Изучается соответствие между вильсоновскими сетями в $3d$ теории гравитации Черна–Саймонса с тороидальными граничными условиями и глобальными конформными блоками граничной CFT_2 на плоскости и торе.

В первой половине главы (разделы **5.1** – **5.3**) приводится доказательство AdS_3/CFT_2 соответствия между n-точечными классическими конформными блоками и дуальными геодезическими графами в HL приближении (рис. 1). Показано, что многоточечные блоки и дуальные длины совпадают с точностью до логарифмических вкладов, связанных с конформными отображениями комплексной плоскости на цилиндр. Важно отметить, что для доказательства явный вид этих функций не важен. Вместо этого, с помощью монодромного метода на границе и формализма мировых линий в объеме, показано, что два описания дуальных n-точечных конфигураций являются (слабо) эквивалентными.

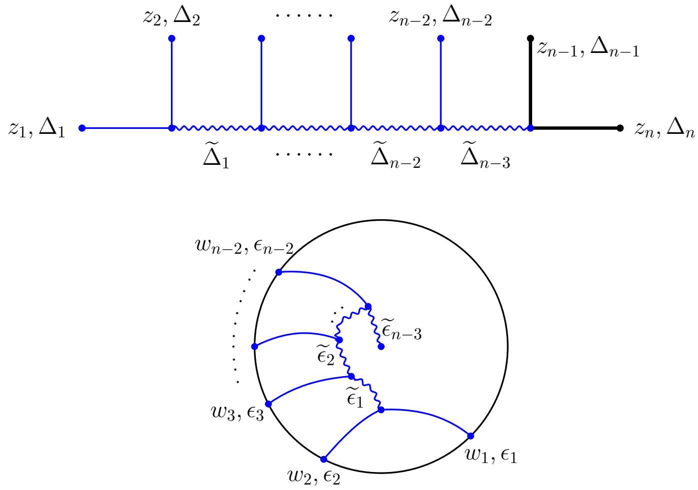

Рис. 1: Классический конформный блок и дуальный геодезический граф.

Классические конформные блоки возникают в пределе, когда центральный заряд и конформные размерности одновременно стремятся к бесконечности. Внешние и внутренние размерности Δ_m и $\tilde{\Delta}_n$ растут линейно с центральным зарядом c таким образом, что классические размерности $\epsilon_m = 6\Delta_m/c$ и $\tilde{\epsilon}_n = 6\tilde{\Delta}_n/c$ остаются фиксированными при $c \to \infty$. Конформный блок Вирасоро представлен как экспонента классического конформного блока. С помощью метода монодромий n-точечный классический блок $f(z, \epsilon, \tilde{\epsilon})$ определяется через акцессорные параметры $c_i(z) = \partial f(z)/\partial z_i$, подчиненные алгебраическим уравнениям, решение которых в общем случае неизвестно. Для упрощения нахождения решений можно использовать теорию возмущений: 2 тяжелых оператора как фоновые для оставшихся $n-2$ тяжелых операторов. В итоге возникает алгебраическая система вида

$$\left(I_{++}^{(k)}\right)^2 + I_{-+}^{(k)}\, I_{+-}^{(k)} = -4\pi^2 \tilde{\epsilon}_k^2 \,, \qquad k = 1, \ldots, n-3 \,,$$

где величины $I_{\pm\pm}^{(k)}$ являются известными линейными функциями акцессорных параметров и зависят от параметра $\alpha = \sqrt{1 - 4\epsilon_h^2}$, где ϵ_h - размерность тяжелых операторов. С другой стороны, пертурбативные конформные блоки реализуются в терминах динамики массивных точечных частиц в трехмерном пространстве AdS_3 с метрикой углового дефицита, параметризуемого α. Характеризуя граф на рис. 1 положениями вершин η_i, внешними s_i и внутренними $\tilde{s}_i$ угловыми параметрами, концевыми точками w_i, получаем систему алгебраических уравнений

$$\epsilon_i s_i + \tilde{\epsilon}_{i-1}\tilde{s}_{i-1} - \tilde{\epsilon}_{i-2}\tilde{s}_{i-2} = 0 \ , \qquad i = 2, \ldots, n-1 \ ,$$

$$\tilde{\epsilon}_{k-1}\sqrt{1-\tilde{s}^2_{k-1}\eta_{k-1}} - \tilde{\epsilon}_{k-2}\sqrt{1-\tilde{s}^2_{k-2}\eta_{k-1}} + \epsilon_k\sqrt{1-\tilde{s}^2_{k}\eta_{k-1}} = 0 \ ,$$

$$e^{i\alpha(w_k - w_{k-1})}\frac{1-is_k}{1-is_{k-1}}\frac{D^-_{k-1}}{D^+_k} = 1 \ , \qquad k = 2, \ldots, n-2 \ ,$$

где $D^\pm_k$ – известные функции внешних/внутренних угловых параметров и положения вершин. Геодезическая длина графа задается функцией $S = S(w, \epsilon, \tilde{\epsilon})$ через градиентные уравнения $s_i = (\alpha\epsilon_i)^{-1}\partial S/\partial w_i$, которая является действием системы частиц, вычисленным на графе мировых линий.

Квазиклассическое AdS_3/CFT_2 соответствие требует, чтобы n-точечный пертурбативный классический блок и длина дуального графа, а также акцессорные и угловые параметры были связаны между собой следующим образом

$$f = S + i\sum_{k=1}^{n-2}\epsilon_k w_k \ , \qquad c_k = \epsilon_k\,\frac{1 \pm i\alpha s_k}{1-z_k} \ .$$

Во второй половине главы (раздел **5.4**) рассматривается иная версия квазиклассического AdS_3/CFT_2 соответствия: дуальность глобальных конформных блоков и вильсоновских сетей. Отличие от предыдущих рассуждений состоит, во-первых, в том, что в объеме предъявляется конкретная гравитационная модель – $sl(2,\mathbb{R}) \oplus sl(2,\mathbb{R})$ теория Черна–Саймонса, в то время как все предыдущие построения являлись модельно–независимыми. Во-вторых, изучаемые конформные блоки являются глобальными, что соответствует предельному значению центрального заряда $c = \infty$.

Рассматриваемые сети вильсоновских линий это типичные спиновые сети Пенроуза. Такая сеть является графом в пространстве AdS_3 с некоторым числом граничных прикреплений, ребер, ассоциированных с $sl(2,\mathbb{R})$ представлениями и вершинами, определяемыми 3-валентными интертвинерами. Для реализации конформных блоков посредством вильсоновских сетей необходимы следующие ингредиенты.

1) Вильсоновский оператор $W_a[z,x]$ в спин-j_a представлении $\mathcal{D}_a$ алгебры $sl(2,\mathbb{R})$, соединяющий внешний оператор $\mathcal{O}_{\Delta_a=-j_a}(z,\bar{z})$ на границе с некоторой точкой x в объеме.

2) Вильсоновский оператор $W_a[x, y]$, соединяющий две точки в объеме x и y. Цикл в термальном AdS_3 соответствует вильсоновскому петлевому оператору $W_a[x, x + 2\pi\tau]$, где $q = \exp(2\pi i\tau)$ – модулярный параметр.

3) 3-валентная вершина в точке x_b объема связывает три вильсоновских оператора, ассоциированных с тремя представлениями $\mathcal{D}_a, \mathcal{D}_b, \mathcal{D}_c$ посредством 3-валентного интертвинера $I_{a;b,c} : \mathcal{D}_b \otimes \mathcal{D}_c \to \mathcal{D}_a$.

4) Прикрепленные к конформной границе вильсоновские операторы действует на должным образом определенные граничные состояния $|a\rangle \in \mathcal{D}_a$.

Глобальный n-точечный конформный блок $\mathcal{F}(\Delta, \tilde{\Delta}|\mathbf{q}, z)$ на римановой поверхности рода g с модулярными параметрами $\mathbf{q} = (q_1, ..., q_g)$, внешними и внутренними конформными размерностями Δ и $\tilde{\Delta}$, может быть вычислен в виде следующего матричного элемента

$$\mathcal{F}(\Delta_i, \tilde{\Delta}_j|\mathbf{q}, \mathbf{z}) = \langle\!\langle\, \Phi\left[W_a, I_{b;c,d}|\mathbf{q}, \mathbf{z}\right] \rangle\!\rangle \;,$$

где вильсоновский сетевой оператор $\Phi[W_a, I_{b;c,d}]$ строится из вильсоновских операторов W_a, ассоциированных с частными (объем-объем, объем-граница) сегментами, склеенных вместе 3-валентными интертвинерами $I_{b;c,d}$ для образования конкретного графа с граничными прикреплениями $\mathbf{z} = (z_1, ..., z_n)$. Двойные скобки обозначают взятие частного матричного элемента оператора Φ между специальными векторами $sl(2, \mathbb{R})$ представлений таким образом, чтобы итоговая величина была синглетом $sl(2, \mathbb{R})$ калибровочной алгебры.

В силу калибровочной ковариантности вильсоновские сети не зависят от положений вершин в объеме. Отсюда следует, что заданный вильсоновский оператор типа объем-объем стягивается в точку и поэтому все диаграммы, у которых обменные каналы разложены по петлям и деревьям содержат вклады только контактного типа. На нетривиальных топологиях существуют нестягиваемые циклы. Тогда ассоциированные вильсоновские сети будут содержать нестягиваемые петли, задаваемые нетривиальными голономиями. Общая идея такова, что торические блоки можно строить из вильсоновских сетей, описанных на сферической топологии склеиванием внешних концов (рис. 2), и последующим отождествлением соответствующих представлений. Описанный в этой главе формализм позволяет проводить явные вычисления торических конформных блоков в следующей главе.

Шестая глава посвящена изучению торических конформных блоков и их голографически дуальных реализаций. В основном, рассматриваются 1-точечные конформные блоки в различных режимах большого центрального

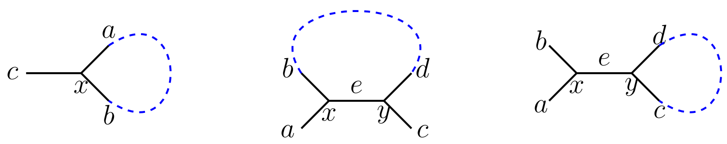

Рис. 2: Вильсоновские сети: 3-валентная вершина (слева) и 4-валентная вершина как две 3-валентные вершины, соединенные ребром (справа).

заряда. Строится реализация торических блоков в терминах графов в трехмерном пространстве. С одной стороны, это геодезические сети мировых линий, дуальные пертурбативным классическим блокам, с другой стороны, это соответствие глобальных блоков с вильсоновскими сетями в гравитационной теории Черна-Саймонса.

В разделе **6.1** изучаются различные квазиклассические конформные блоки торической CFT_2. Существует несколько торических блоков при больших c: глобальный, лёгкий, HL, классический. Три из них известны в сферическом случае. В этот список добавлен ещё один, ранее не известный, торический тип: лёгкий блок. Все квазиклассические блоки связаны друг с другом. Более того, предельные торические блоки (соответствующие бесконечному центральному заряду) определяются разными контракциями алгебры Вирасоро: это глобальный, лёгкий и HL блоки.

1-точечный конформный блок $\mathcal{V}_{\tilde{\Delta},\Delta}(q|c)$ торической CFT_2 определяется как голоморфный вклад в 1-точечную корреляционную функцию примарного оператора и зависит от внешней размерности Δ и внутренней размерности $\tilde{\Delta}$, а также от модулярного параметра q и центрального заряда c. Здесь возможны различные типы блоков, поскольку функция блока также зависит от $\Delta, \tilde{\Delta}$, которые можно по-разному масштабировать в терминах большого центрального заряда.

1) Δ и $\tilde{\Delta}$ фиксированы в пределе $c = \infty$. В зависимости от конкретной $1/c \to 0$ контракции алгебры Вирасоро возникают глобальный или лёгкий блоки. Лёгкий блок является ведущей асимптотикой в c-рекуррентном представлении торического блока. Можно определить экспоненциированный глобальный блок.

2) Δ и $\tilde{\Delta}/c$ фиксированы в пределе $c = \infty$. В этом случае возникает HL блок. Следовательно, $\tilde{\Delta} \gg 1$ и, таким образом, $\Delta/\tilde{\Delta} \ll 1$.

3) Δ/c и $\tilde{\Delta}/c$ фиксированы при $c \gg 1$. Возникающее асимптотическое разложение функции блока Вирасоро – это экспонента классического конформного блока. Пертурбативный классический торический блок возникает при $\Delta/\tilde{\Delta} \ll 1$.

В разделах **6.1.1** – **6.1.5** разбирается каждый из четырех квазиклассических торических блоков, в частности для трех из них выявлена прямая связь с контракциями конформной алгебры. Глобальный блок ассоциирован с контрактированной алгеброй Вирасоро, которая разбивается на алгебру $sl(2,\mathbb{C})$ и бесконечномерную абелеву алгебру $\mathcal{A}$. Легкий блок ассоциирован с контрактированной алгебра Вирасоро, которая разбивается на алгебру $sl(2,\mathbb{C})$ и бесконечномерную алгебру Гейзенберга $\mathcal{H}$. HL блок связан с контракцией алгебры Вирасоро, которая оказывается бесконечномерной алгеброй Гейзенберга $\mathcal{H}$. Такая же процедура контракции может быть в равной степени применена в случае сферической CFT_2, а также для конформных теорий на римановых поверхностях любого рода. В том числе, допускается суперсимметризация всех построений.

В режиме $c \gg 1$ торический блок Вирасоро экспоненциируется,

$$\mathcal{V}_{\tilde{\Delta},\Delta}(q|c) \sim \exp\big[\, c\, f(\epsilon,\tilde{\epsilon}|q)\big]\ ,$$

где функция $f(\epsilon,\tilde{\epsilon}|q)$ – это классический конформный блок на торе. Пертурбативный классический торический блок определяется введением безразмерного параметра лёгкости $\delta = \Delta/\tilde{\Delta} < 1$. В параметризации $(\delta,\tilde{\epsilon})$ классический конформный блок представляется как двойной ряд по параметрам δ и $\tilde{\epsilon}$. Удержание в исходном классическом блоке членов, не более чем линейных по $\tilde{\epsilon}$, определяет линеаризованную версию функции торического блока $f(\epsilon,\tilde{\epsilon}|q) = f^{lin}(\delta,\tilde{\epsilon}|q) + \mathcal{O}(\tilde{\epsilon}^2)$. Примечательно, что пертурбативный классический торический блок связан с глобальным блоком при больших размерностях. А именно, сформулируем следующую гипотезу, которую можно доказывать явным вычислением (проверена до высокого порядка).

Гипотеза 6.1. *Коэффициенты экспоненциированного глобального блока и коэффициенты пертурбативного классического блока совпадают.*

Принимая Гипотезу **6.1** как верную можно получить замкнутое выражение для 1-точечного пертурбативного классического блока на торе

$$f^{lin}(\epsilon,\tilde{\epsilon}|q) = \int_0^q dx\left(-\frac{\tilde{\epsilon}}{x} + \sqrt{\frac{\tilde{\epsilon}^2}{x^2} + \frac{\epsilon^2}{(1-x)^2 x}}\right)\ .$$

С точки зрения AdS/CFT, пертурбативный классический блок естественно реализуется как длина геодезического «головастика» в термальном пространстве AdS_3 (см. раздел **6.2**).

В целом, конформные размерности $\Delta, \tilde{\Delta}$ считаются произвольными. Соответствующие операторы ассоциированы с бесконечномерными представлениями $sl(2, \mathbb{C})$ конформной алгебры. При целых отрицательных размерностях $\Delta = -j_1$ и $\tilde{\Delta} = -j_p$ можно рассматривать фактор–представления $\mathcal{D}_j$, являющиеся конечномерными, неунитарными спин-j модулями. В этом случае, 1-точечный блок задается полиномом по модулярному параметру,

$$\mathcal{F}_{j_p,j_1}(q) = q^{-j_p}\left(f_0 + qf_1 + q^2 f_2 + ... + q^{2j_p} f_{2j_p}\right) ,$$

где $f_n = {}_3F_2(-j_1, j_1+1, -n; 1, -2j_p; 1)$. В разделе **6.3** данная функция блока явно вычислена через вильсоновское представление. Этим соотношением реализуется другой (модельно-зависимый) способ установить AdS_3/CFT_2 соответствие для конформных блоков, в данном случае для глобальных. Для этого следует представить матричный элемент тороидального вильсоновского оператора (см. раздел **5.4**) следующим образом

$$\mathcal{F}_{j_p,j_1}(q) \sim \sum_{m,n=-j_p}^{j_p} \sum_{l=-j_1}^{j_1} \langle j_p, m| \, W_p[q] \, |j_p, n\rangle \langle j_p, n| I_{p;p,1} \, |j_p, m\rangle \otimes |j_1, l\rangle \langle j_1, l|\tilde{a}\rangle \, ,$$

где $W_p[q]$ – вильсоновский петлевой оператор, $|\tilde{a}\rangle$ – граничный вектор. Первый фактор является $SU(1,1)$ D-матрицей Вигнера, второй фактор – это матричный элемент интертвинера, который задает 3j символ Вигнера, третий фактор – l-я координата граничного вектора в стандартном базисе $\{|j_1, l\rangle\}$. Собирая все матричные элементы воедино и проводя явные вычисления находим, что итоговое выражение задается 1-точечным блоком, что доказывает справедливость вильсоновского представления. Аналогичные вычисления проделаны для двух возможных каналов 2-точечного торического глобального блока.

В **Приложениях А – Е** собраны вспомогательные материалы по каждой главе, включая технические подробности вычислений, доказательства утверждений, сформулированных в основном тексте, а также краткие обзоры сторонних вопросов на уровне обозначений, определений и основных тезисов, призванных сделать изложение диссертации самодостаточным.

В **Заключении** приведены основные результаты работы, которые заключаются в следующем:

1. Построена теория, описывающая безмассовые AdS_5 поля высших спинов смешанного типа симметрии, взаимодействующие друг с другом и гравитацией в кубическом приближении. В рамках формулировки FV типа разработаны две модели с калибровочной симметрией, отвечающие редуцированной и нередуцированной $\mathcal{N}=2$ супералгебрам высших спинов, отличие которых состоит в однократном и бесконечнократном вырождении спектра элементарных частиц.

2. Построена производящая формулировка динамики свободных, безмассовых и частично-безмассовых полей смешанного типа симметрии на пространстве AdS_d. Аналогичная формулировка построена для безмассовых полей и полей непрерывного спина смешанного типа симметрии в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{d-1,1}$. Методом гомологической редукции воспроизведены известные формулировки динамики полей высших спинов.

3. Развит формализм несимметричных сохраняющихся токов, описываемых диаграммами Юнга с одной строкой и одним столбцом. Предъявлен полный список сохраняющихся токов, построенных из двух безмассовых спиноров на пространстве Минковского $\mathbb{R}^{d-1,1}$, который в точности соответствует представлениям, возникающим в обобщённой теореме Флато–Фронсдала для двух спинорных синглетонов.

4. Установлено AdS_{d+1}/CFT_d соответствие для простейшего несимметричного безмассового AdS_{d+1} поля типа «крюк». Явно решена задача Дирихле для полевых уравнений. Вычислено эффективное граничное действие теории, откуда получена 2-точечная корреляционная функция примарных операторов. В четных граничных размерностях d действие для конформных полей типа «крюк» на границе отождествлено с сингулярной частью ядра эффективного действия. Явно описана трансмутация симметрий теорий в объеме и на границе.

5. Сформулирована двумерная топологическая гравитация высших спинов, обобщающая гравитацию Джакива–Тейтельбойма. Теория определяется BF действием с бесконечномерной калибровочной алгеброй выс-

ших спинов. Спектр задается (бес)конечным набором «частично-безмассовых» топологических полей высших спинов максимальной глубины на пространстве AdS_2.

6. Сформулирована двумерная динамическая гравитация высших спинов. Описаны кинематические структуры теории: синглетон, алгебра высших спинов, калибровочные поля старшего ранга, поля материи. Динамика задается действием BF типа с расширенной бесконечномерной калибровочной алгеброй высших спинов. Теория описывает бесконечный набор скалярных полей на пространстве AdS_2 с растущим эквидистантным спектром масс, взаимодействующих посредством бесконечного числа топологических калибровочных полей высших спинов.

7. В рамках квазиклассического AdS_3/CFT_2 соответствия показано, что пертурбативный конформный n-точечный блок в CFT_2 на плоскости равен длине дуального геодезического графа в пространстве AdS_3 с конической сингулярностью. С этой целью в граничной CFT_2 разработана специальная теория возмущений, когда два примарных оператора являются фоновыми для остальных $n-2$ операторов, рассматриваемых как флуктуации. В дуальной гравитационной теории показно, что динамика может быть редуцирована на двумерный срез постоянного времени с гиперболической геометрией, а мировые линии образует двумерный геодезический граф.

8. В рамках квазиклассического AdS_3/CFT_2 соответствия показано, что пертурбативный конформный 1-точечный блок в CFT_2 на торе равен длине дуального геодезического графа типа «головастик» в термальном пространстве AdS_3. Данный результат распространен на 2-точечные блоки на торе в одном из каналов рассеяния.

9. Явно вычислены четыре типа 1-точечных блоков (супер)CFT_2 на торе в режиме большого центрального заряда. Показано, что различные пределы конформных весов приводят к глобальному, лёгкому, тяжело-лёгкому и пертурбативному классическому блокам. Установлено, что данные блоки не являются независимыми и связаны цепочками соотношений, соответствующих различным контракциям алгебры Вирасоро.

10. Сформулировано AdS_3/CFT_2 соответствие между вильсоновскими сетями в $3d$ теории гравитации Черна–Саймонса с торическими гранич-

ными условиями и конформными блоками граничной CFT_2 на торе. Показано, что специальные матричные элементы вильсоновских операторов соответствуют глобальным конформным блокам вырожденных квази-примарных операторов. Формализован общий подход к описанию дуальности вильсоновских сетей и конформных блоков. Вычислены 1-точечный торический блок и 2-точечный торический блок в двух разных каналах рассеяния через матричные элементы вильсоновских операторов в конечномерных, неприводимых представлениях алгебры $sl(2, \mathbb{R})$.

Публикации автора по теме диссертации

1. K. B. Alkalaev, “FV-type action for AdS_5 mixed-symmetry fields,” JHEP **03** (2011), 031.

2. K. B. Alkalaev, M. A. Grigoriev and I. Y. Tipunin, “Massless Poincare modules and gauge invariant equations,” Nucl. Phys. B **823** (2009), 509-545.

3. K. B. Alkalaev and M. A. Grigoriev, “Unified BRST description of AdS gauge fields,” Nucl. Phys. B **835** (2010), 197-220.

4. K. B. Alkalaev and M. A. Grigoriev, “Unified BRST approach to (partially) massless and massive AdS fields of arbitrary symmetry type,” Nucl. Phys. B **853** (2011), 663-687.

5. K. B. Alkalaev and M. A. Grigoriev, “Continuous spin fields of mixed-symmetry type,” JHEP **03** (2018), 030.

6. K. B. Alkalaev, “Mixed-symmetry tensor conserved currents and AdS/CFT correspondence,” J. Phys. A **46** (2013), 214007.

7. K. B. Alkalaev, “Massless hook field in AdS(d+1) from the holographic perspective,” JHEP **01** (2013), 018.

8. K. B. Alkalaev, “On higher spin extension of the Jackiw-Teitelboim gravity model,” J. Phys. A **47** (2014), 365401

9. K. B. Alkalaev, “Global and local properties of AdS_2 higher spin gravity,” JHEP **10** (2014), 122.

10. K. B. Alkalaev and X. Bekaert, “Towards higher-spin AdS_2/CFT_1 holography,” JHEP **04** (2020), 206.

11. K. B. Alkalaev and X. Bekaert, “On BF-type higher-spin actions in two dimensions,” JHEP **05** (2020), 158.

12. K. B. Alkalaev and V. A. Belavin, “Classical conformal blocks via AdS/CFT correspondence,” JHEP **08** (2015), 049.

13. K. B. Alkalaev and V. A. Belavin, “Monodromic vs geodesic computation of Virasoro classical conformal blocks,” Nucl. Phys. B **904** (2016), 367-385

14. K. B. Alkalaev and V. A. Belavin, “From global to heavy-light: 5-point conformal blocks,” JHEP **03** (2016), 184.

15. K. B. Alkalaev and V. A. Belavin, “Holographic interpretation of 1-point toroidal block in the semiclassical limit,” JHEP **06** (2016), 183

16. K. B. Alkalaev, “Many-point classical conformal blocks and geodesic networks on the hyperbolic plane,” JHEP **12** (2016), 070

17. K. B. Alkalaev, R. V. Geiko and V. A. Rappoport, “Various semiclassical limits of torus conformal blocks,” JHEP **04** (2017), 070.

18. K. B. Alkalaev and V. A. Belavin, “Holographic duals of large-c torus conformal blocks,” JHEP **10** (2017), 140.

19. K. B. Alkalaev and V. A. Belavin, “Large-c superconformal torus blocks,” JHEP **08** (2018), 042.

20. K. B. Alkalaev and V. A. Belavin, “More on Wilson toroidal networks and torus blocks,” JHEP **11** (2020), 121