ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
НАУКИ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. П.Н. ЛЕБЕДЕВА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

Белавин Владимир Александрович

Интегрируемость и дуальности двумерной конформной теории поля

Специальность 01.04.02 — Теоретическая физика

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени

доктора физико-математических наук

Москва — 2017

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Физическом институте им. П.Н. Лебедева Российской академии наук.

Официальные оппоненты: **Исаев Алексей Петрович,**
доктор физико-математических наук, профессор, Объединенный институт ядерных исследований (ОИЯИ), г. Дубна, заместитель директора лаборатории, ведущий научный сотрудник

Фейгин Евгений Борисович,
доктор физико-математических наук, Национальный исследовательский университет «Высшая Школа Экономики», заместитель декана факультета математики

Чехов Леонид Олегович,
доктор физико-математических наук, Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, ведущий научный сотрудник

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение Институт теоретической и экспериментальной физики им. А.И. Алиханова Национального исследовательского центра «Курчатовский институт»

Защита состоится «19» февраля 2018 г. в 12.00 на заседании диссертационного совета Д 002.023.02 при Физическом Институте им. П.Н. Лебедева РАН по адресу: 119991, г. Москва, Ленинский проспект, д. 53.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФИАН, а также на сайте www.lebedev.ru.

Автореферат разослан «____» ____________ 2017 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 002.023.02, д.ф.-м.н. Истомин Яков Николаевич

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В настоящее время существует весьма ограниченный набор подходов, позволяющих эффективно решать задачи квантовой теории поля за рамками стандартной теории возмущений. Очевидный недостаток последней заключается в невозможности описания непертурбативных эффектов, которые, как известно, играют ключевую роль в построении фундаментальной теории. Наиболее ярким примером такого рода ограничений является неспособность теории возмущений описать низкоэнергетическую физику сильных взаимодействий. Таким образом, изучение точно решаемых моделей квантовой теории поля представляет серьезный научный интерес.

Важным классом точно решаемых моделей являются модели двумерной конформной теории поля. Можно надеяться, что определенные свойства интегрируемости и соответствующие методы описания двумерных точно решаемых моделей и, в частности, конформных моделей найдут свое применение в исследовании четырехмерной квантовой теории поля.

Другой фундаментальной задачей, стоящей перед современной физикой, является проблема объединения теории квантовой гравитации с теорией взаимодействий в стандартной модели. В настоящее время одним из немногих подходов к решению этой проблемы является теория струн, основным ингредиентом которой также является двумерная конформная теория поля, описывающая теорию на мировой поверхности струны.

Представленная работа посвящена изучению точно решаемых моделей квантовой теории поля, связанных с двумерной конформной теорией поля. В ней исследуются модели конформной теории поля с различными киральными алгебрами, массивные интегрируемые модели, рассматриваемые как возмущения конформных теорий, и модели двумерной индуцированной квантовой гравитации Лиувилля, т. е. модели некритической теории струн. Мы анализируем явления дуальности между различными моделями, в частности, мы рассматриваем соответствие между косетными конформными теориями поля и инстантонными секторами суперсимметричных калибровочных теорий, уделяя особое внимание роли интегрируемых структур. Данное соответствие является примером связи и применения методов двумерных точно решаемых моделей для изучения четырехмерной теории поля.

Современное состояние исследований. Изначально интерес к изучению конформной теории поля (КфТП) был обусловлен ее важной ролью в различных контекстах статистической физики и физики конденсированного состояния. КфТП является теорией, описывающей критическое поведение в точках фазовых переходов. Помимо масштабной инвариантности критические теории обладают инвариантностью по отношению к конформным преобразованиям. Критическое поведение определяется неподвижными точками ренормализационной группы в пространстве эффективных теорий. Классификация неподвижных точек ренормгруппы, таким образом, эквивалентна построению всех конформно-инвариантных решений теории поля.

Бесконечномерная конформная симметрия в двумерном случае вместе с другим важным требованием структуры алгебры пространства локальных полей позволяет осуществить в конформной теории поля так называемую программу конформного бутстрапа[1] и найти явное решение соответствующих моделей квантовой теории поля. Наиболее известные примеры конформных теорий – это унитарные минимальные модели и, в частности, критическая модель Изинга, двумерная модель Весса-Зумино и т. д.

Математический аппарат двумерной конформной теории поля включает в себя теорию представлений бесконечномерных алгебр Ли, таких как алгебра Вирасоро, алгебры Каца-Муди, а также теорию представлений так называемых вертекс-операторных алгебр. Программа конформного бутстрапа базируется на алгебраических методах теории представлений и с помощью конформной симметрии позволяет находить корреляционные функции локальных полей – основной объект исследования любой квантовой теории поля. Одним из основных объектов КфТП является функция конформного блока. Конформные блоки содержат в себе информацию о голоморфной зависимости корреляционных функций и играют ключевую роль в реализации программы конформного бутстрапа. В диссертации вопросу изучения функции конформного блока отведена одна из ключевых ролей.

В конформном случае интегрируемость является следствием конформной инвариантности. Действительно, конформная инвариантность в двух измерениях приводит к тому, что тензор энергии-импульса разделяется на голоморфную и антиголоморфную компоненты. Это приводит к наличию беско-

[1] Belavin A., Polyakov A., Zamolodchikov A. Infinite Conformal Symmetry in Two-Dimensional Quantum Field Theory // Nucl. Phys. B. 1984. Vol. 241. P. 333.

нечного набора сохраняющихся величин, так как любое выражение составленное из голоморфных величин и их производных также является голоморфным. Другими словами, все элементы обертывающей алгебры Вирасоро являются интегралами движения, однако при этом не все они коммутируют между собой. Естественная задача заключается в поиске максимальной коммутативной подалгебры.

Обычно возмущение конформной теории нарушает интегрируемость (физический интерес представляют релевантные возмущения), но если же интегрируемость выживает после возмущения, то соответствующая теория представляет собой массивную интегрируемую теорию поля. Ее существенное отличие от конформной теории заключается в том, что она обладает свойством факторизации процессов рассеяния, позволяющим решать соответствующие модели. Данное свойство дает возможность осуществления некоторого аналога бутстрапного подхода[2], в основе которого лежит аксиоматическая конструкция построения форм-факторов локальных операторов в пространстве асимптотических $in-$, $out-$ состояний процесса рассеяния. Этот подход позволяет вычислять корреляционные функции локальных полей.

Имеется естественный вопрос: каким образом точная решаемость КфТП, описывающей теорию в фиксированной точке, связана с интегрируемостью ее массивных возмущений? В конформной точке формулировка задачи усложняется в связи с отсутствием аналогичного массивным моделям формализма анализа интегрируемости. С другой стороны, наличие бесконечномерной алгебры симметрии в КфТП, включающей в себя алгебру Вирасоро, позволяет явно строить интегралы движения, ответственные за точную решаемость конформных моделей. Лишь сравнительно недавно, в процессе анализа соответствия между КфТП и четырехмерными суперсимметричными теориями поля, было достигнуто понимание алгебраической структуры, в полной мере проясняющей свойства интегрируемости КфТП. Это продвижение позволило найти явную конструкцию интегрируемого базиса, состоящего из собственных векторов коммутирующих интегралов движения, а также в отдельных случаях найти явный вид интегралов движения. Изучению этого явления и его следствий в диссертации отводится существенная роль.

[2]Smirnov F. Form-factors in completely integrable models of quantum field theory // Adv. Ser. Math. Phys. 1992. Vol. 14. P. 1.

Важным классом точно решаемых моделей, связанных с конформной теорией поля, являются минимальные модели теории струн[3,4]. Поскольку данные модели включают в себя динамическую метрику, они также представляют собой самосогласованные модели двумерной гравитации.

Существует два независимых подхода к изучению квантовой двумерной гравитации. Первый – непрерывный подход, он основан на формулировке некритической теории струн с использованием континуального интеграла по римановым метрикам. В конформной калибровке функциональный интеграл по флуктуирующим поверхностям приводит к теории Лиувилля (описывающей динамическую метрику), взаимодействующей с полями материи. В том случае, когда в качестве материи берется минимальная конформная модель, теория гравитации имеет специальное название минимальной лиувиллевской гравитации. Дуальный подход к двумерной гравитации основан на идее описания моделей двумерной гравитации как теории, возникающей при рассмотрении статистических систем, определенных на флуктуирующих поверхностях. Данный подход реализуется в матричных моделях.

Сопоставление результатов этих подходов, также как и сам вопрос установления эквивалентности представляется весьма нетривиальным. Важный факт заключается в том, что спектры размерностей в непрерывном и дискретном подходах совпадают[5]. Это наблюдение позволяет сформулировать гипотезу об эквивалентности двух подходов. Другой серьезный аргумент в пользу эквивалентности был сформулирован в работах Виттена (1990-1993гг.), где было сделано предположение, что оба подхода связанны с теорией чисел пересечений на пространстве модулей кривых, получившей впоследствии название топологической теории Виттена. Эквивалентность топологической гравитации с теорией матричных моделей была доказана Концевичем в 1992. А именно, было показано, что статистическая сумма в топологической теории удовлетворяет струнному уравнению, возникающему в матричном подходе. Однако связь с исходной континуальной формулировкой минимальной лиувиллевской гравитации не была раскрыта полностью,

---

[3] Polyakov A. Quantum Geometry of Bosonic Strings // Phys. Lett. B. 1981. Vol. 103. P. 207.

[4] Polyakov A. Quantum Gravity in Two-Dimensions // Mod. Phys. Lett. A. 1987. Vol. 2. P. 893.

[5] Knizhnik V., Polyakov, Zamolodchikov A. Fractal Structure of 2D Quantum Gravity // Mod. Phys. Lett. A. 1988. Vol. 3. P. 819

поскольку на уровне физических амплитуд подходы приводили к разным результатам.

Как было обнаружено позднее, проблема связана с необходимостью учитывать так называемые контактные члены при вычислении корреляционных чисел. Возможность возникновения контактных членов приводит к смешиванию исходных констант связи[6]. Таким образом, для отождествления операторов и вычисления корреляционных чисел необходимо учитывать резонансные соотношения между константами связи в двух подходах.

Установить эти соотношения долгое время не представлялось возможным ввиду отсутствия каких-либо явных ответов в лиувиллевской гравитации. Однако в результате обнаружения высших квантовых уравнений движения в теории Лиувилля[7] удалось существенно продвинуться в разработке непрерывного подхода к МЛГ. В частности, была установлена нетривиальная связь между БРСТ когомологиями минимальной лиувиллевкой гравитации и логарифмическими полями в теории Лиувилля. Это, в свою очередь, позволило произвести явное аналитическое вычисление интегрирования по пространству модулей в четырехточечной амплитуде. Это позволило более детально исследовать связь между лиувиллевской гравитацией и матричными моделями. Для моделей серии (2,2p+1) было получено[8] полное соответствие на уровне корреляционных чисел для физических наблюдаемых, построенных из примарных полей. При этом были получены нетривиальные соотношения между лиувиллевскими константами связи и КдФ временами в подходе матричных моделей – так называемые резонансные соотношения. Было показано, что требование выполнения конформных правил отбора, таких как отсутствие вакуумных средних и правила слияния для вырожденных полей, позволяет установить явный вид резонансных соотношений. Однако использованная техника была специфична именно для рассматриваемой серии и не позволяла проанализировать более общую ситуацию (q,p) моделей.

Новый прогресс в этом направлении был достигнут в результате установления связи между дуальным подходом к МЛГ и теорией фробениусовых

[6]Moore G., Seiberg N., Staudacher M. From loops to states in 2-D quantum gravity // Nucl. Phys. B. 1991. Vol. 362. P. 665.

[7]Zamolodchikov, A. Higher equations of motion in Liouville field theory // Int. J. Mod. Phys. A. 2004. Vol. 19S2. P. 510.

[8]Belavin A., Zamolodchikov A. On Correlation Numbers in 2D Minimal Gravity and Matrix Models // J. Phys. A. 2009. Vol. 42, 300301.

многообразий. В контексте МЛГ связь с фробениусовыми многообразиями приводит к формулировке нового метода, который позволяет эффективно исследовать корреляционные числа. Часть диссертационной работы посвящена дальнейшему развитию этого направления.

Следующее направление связано с исследованием соответствия между двумерными конформными теориями с различными типами киральной алгебры и четырехмерными $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричными калибровочными теориями поля, открытого в работе Алдая, Гайотто и Тачикавы[9]. Эта нетривиальная связь получила название АГТ-соответствия.

Открытию АГТ дуальности предшествовал следующий важный этап. В 2002 году Некрасов нашел[10] точное решение специальным образом деформированной калибровочной $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной теории (так называемую статсумму Некрасова). В силу $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрии функциональный интеграл теории сводится к конечномерному интегралу по многообразию модулей инстантонов. В результате деформации теория становится предметом теории локализации, а выражение для статсуммы сводится к некоторому эквивариантному интегралу, который вычисляется в явном виде при помощи формул Дюйстермата–Экмана. Поскольку некрасовская статсумма является хорошо определенным объектом, можно сформулировать математически строгое утверждение АГТ соответствия, доказанное позднее несколькими независимыми способами[11,12].

Из АГТ соответствия следует существование специального базиса в пространстве локальных полей конформной теории поля[13]. Матричные элементы вертексных операторов в этом базисе имеют явный факторизованный вид, что дает явные формулы для конформных блоков, которые совпадают с выражениями для некрасовских статсумм. Позднее наличие такого базиса было выведено из геометрической реализации действия киральной алгебры. Под геометрической реализацией понимается построение действия алгебры симметрии конформной теории на прямой сумме эквивариантных когомоло-

[9] Alday, L., Gaiotto D., Tachikawa Yu. Liouville Correlation Functions from Four-dimensional Gauge Theories // Lett. Math. Phys. 2010. Vol. 91. P. 167.

[10] Nekrasov, Nikita A., Seiberg-Witten prepotential from instanton counting // Adv. Theor. Math. Phys. Vol.7. Num. 5. 2003. P. 831.

[11] Nakajima and Yoshioka. Instanton counting on blowup. 1 // Invent. Math. Vol. 162. 2005 P. 313.

[12] Nekrasov and Okounkov. Seiberg-Witten theory and random partitions. Prog. Math. Vol. 244. 2006. P. 525.

[13] Alba V., Fateev V., Litvinov A., Tarnopolskiy G. On combinatorial expansion of the conformal blocks arising from AGT conjecture // Lett. Math. Phys. 2011. Vol. 98. P. 33.

гий многообразий модулей инстантонов. Простейшим примером такой реализации является действие алгебры Гейзенберга на прямой сумме эквивариантных когомологий схем Гильберта. По теореме Атьи-Ботта в этих эквивариантных когомологиях есть базис, занумерованный неподвижными точками, и этот базис соответствует интегрируемому базису в теории с алгеброй Гейзенберга.

АГТ соответствие допускает ряд обобщений. Вскоре после работы АГТ (в 2009 году) в работе Вилларда, посвященной исследованию $A(N)$ конформной теории Тоды, было предложено обобщение АГТ на конформные теории с расширенной W_N симметрией. С точки зрения калибровочных теорий данное обобщение соответствует увеличению ранга калибровочной группы, с $SU(2)$ до $SU(r)$. Позднее Алдай и Тачикава нашли некоторый аналог для случая аффинной алгебры $\widehat{sl}(2)$. В этом случае со стороны калибровочной теории требуется модификация, связанная со вставкой так называемого *поверхностного оператора*. Заключительная часть диссертации посвящена дальнейшему развитию этого направления.

Цели диссертационной работы.

Диссертационная работа преследует следующие цели:

1. Разработать и обосновать метод вычисления конформных блоков в двумерной $\mathcal{N}=1$ суперсимметричной конформной теории поля.
2. Реализовать программу конформного бутстрапа в суперсимметричной теории поля Лиувилля.
3. Развить метод конформной теории возмущений для вычисления корреляционных функций в массивных теориях, обладающий свойством интегрируемости.
4. Получить следствия высших уравнений движения в суперсимметричной теории Лиувилля для конструкции физических полей в МЛГ.
5. Разработать метод вычисления корреляционных чисел в МЛГ.
6. Получить соотношения дуальности для двумерных конформных теорий поля с расширенной киральной алгеброй со специальным классом четырехмерных калибровочных теорий.

Основные задачи.

Для достижения поставленных целей необходимо было решить следующие конкретные задачи:

1. В рамках бутстрапного подхода к конформной теории поля исследовать аналитические свойства конформных блоков.
2. Исследовать структуру пространства локальных полей в теории Лиувилля и структуру операторной алгебры.
3. Исследовать массивные интегрируемые модели и развить методы конформной теории возмущений.
4. Исследовать интегрируемые модели 2d квантовой супергравитации Лиувилля и разработать метод вычисления интеграла по пространству модулей римановых поверхностей.
5. Установить следствия наличия высших уравнений движения в суперсимметричной теории Лиувилля для структуры пространства физических полей в теории минимальной супергравитации Лиувилля.
6. Исследовать специфику вычисления корреляционных чисел в случае несферической топологии, в частности топологии диска.
7. Исследовать дискретный подход к теории 2d гравитации и получить явное выражение для производящей функции корреляционных чисел.
8. Установить вид искомого решения струнного уравнения Дугласа и вид резонансных соотношений.
9. Разработать эффективный метод вычисления плоских координат на фробениусовом многообразии, связанном с МЛГ.
10. Исследовать дуальность между 4d SUSY калибровочными теориями и суперсимметричной двумерной КфТП и получить искомую модификацию пространства модулей инстантонов в дуальной теории.
11. Исследовать дуальность между 4d SUSY калибровочными теориями и двумерной КфТП с симметрией алгебры токов и получить искомую модификацию пространства модулей инстантонов в дуальной теории.

12. Исследовать дуальность между 4d SUSY калибровочными теориями и двумерными минимальными моделями с W_N симметрией и получить искомую модификацию пространства модулей инстантонов в дуальной теории.

Основные положения, выносимые на защиту.

1. Рекуррентные соотношения для конформных блоков суперсимметричной конформной теории поля, рассматриваемых как функции центрального заряда.
2. Рекуррентные соотношения для конформных блоков суперсимметричной конформной теории поля, рассматриваемых как функции конформных полей, появляющихся при использовании разложения операторных произведений.
3. Явная конструкция четырехточечной корреляционной функции в суперсимметричной теории поля Лиувилля. Проверка свойства кроссинг-симметрии, что является доказательством самосогласованности конформного бутстрапа и гипотезы о структуре операторного разложения теории.
4. Комбинированное описание специального класса интегрируемых моделей методом спектрального разложения в режиме IR и методом конформной теории возмущений в режиме UV.
5. Явная конструкция физических амплитуд в минимальных моделях супергравитации Лиувилля. Связь между когомологиями с $N_{ghost} = 1$ и логарифмическими полями в теории Лиувилля, позволяющая вычислять эти амплитуды.
6. Связь гравитации Лиувилля со структурой фробениусовых многообразий. Явная конструкция производящей функции корреляторов.
7. АГТ соответствие для теории $\mathcal{N} = 1$, $\mathcal{N} = 2$ КфТП и W_N минимальных моделей конформной теории поля.

Научная новизна. Все результаты, изложенные в диссертации, являются оригинальными. Рассматриваемые проблемы представляют конкретный научный интерес в соответствующих областях теоретических исследований. Новизна полученных результатов позволила продвинуться в понимании структуры конформной теории поля, двумерной минимальной теории гравитации Лиувилля, в анализе алгебраической структуры двух независимых подходов к теории двумерной квантовой гравитации, изучении связи конформной теории поля с четырехмерными калибровочными теориями. Эти результаты регулярно используются российскими и зарубежными научными группами для дальнейших исследований в соответствующих областях. Вклад автора во всех полученных результатах в работах с соавторами является определяющим как при формулировке задач, так и при поиске их решения. Все конкретные вычисления проведены автором независимо.

Практическая значимость. Полученные в диссертационной работе результаты могут быть использованы для исследования и описания широкого круга явлений в конформной теории поля, теории струн, теории двумерной гравитации, а также в анализе соответствий между различными точно решаемыми системами, связанными с конформной теорией поля.

Полученные в диссертационной работе рекуррентные соотношения для функции конформного блока в суперсимметричной конформной теории [1–3] представляют собой эффективный инструмент для изучения корреляционных функций в рамках бутстрапного подхода. Они подходят для численных вычислений четырехточечных корреляционных функций примарных полей в секторе Невьё-Шварца в целом и вырожденных примарных полей в частности. Полученное q-представление рекуррентных соотношений для четырехточечных суперконформных блоков существенным образом улучшает сходимость представлений конформных блоков в виде ряда по эллиптическому параметру во всей комплексной плоскости с тремя выколотыми точками, что в частности позволяет произвести анализ спектра суперсимметричной теории Лиувилля, имеющего ранее гипотетический характер, и выполнить программу конформного бутстрапа в суперсимметричном случае.

Развитые в диссертационной работе методы конформной теории возмущений [4;5] позволяют исследовать ультрафиолетовую асимптотику корреляционных функций в возмущенных минимальных моделях конформной теории поля. В интегрируемых возмущениях имеется независимый форм-факторный подход. Таким образом, в этом случае имеется два разных разложения одних и тех же корреляционных функций локальных операторов. В диссертационной работе впервые исследован вопрос сопоставления двух подходов и учета вклада полей потомков в поправки теории возмущений к структурным функциям. Произведено сравнение результатов на больших и малых расстояниях.

Обнаружено, что учет вклада потомков дает широкую область, в которой два разложения совпадают, уже в первом порядке теории возмущений. Это совпадение между разными разложениями демонстрирует, что комбинация конформной теории возмущений и форм-факторного подхода является очень полезным инструментом для проверки согласованности различных предположений, используемых в обеих конструкциях, а также дает знание корреляционных функций на всех масштабах. Мы получаем дополнительное подтверждение утверждения о том, что форм-факторы для примарных полей даются минимальными решениями с заданными аналитическими свойствами, и что нормировка форм-факторов фиксируется правильно. Кроме того, тот факт, что вклад от операторов потомков существенно улучшает сходимость двух разложений, является подтверждением выведенного ранее на основе ряда предположений выражения для вакуумных средних полей потомков.

В диссертационной работе впервые исследована суперсимметричная версия минимальной теории гравитации Лиувилля [6;7]. Данная теория является точно решаемым аналогом критической струны Невьё-Шварца-Рамона. Произведена полная классификации физических состояний теории, в частности, проанализирован специальный дискретный ряд физических состояний – «элементы основного кольца». Найдена связь между логарифмическими аналогами элементов основного кольца и основными физическими полями. Получен общий вид n-точечных корреляционных чисел на сфере в СЛГ. Данное выражение содержит интегрирование по пространству модулей, для которого предложен эффективный метод вычисления на основе установленной связи между физическими полями. Для четырехточечных корреляционных чисел впервые получено явное аналитическое выражение. Исследована проблема вычисления корреляционных чисел на топологиях высших родов [8], а также в случае теории с границей [9].

В диссертационной работе был предложен явный способ вычисления производящей функции корреляционных чисел в минимальной лиувиллевской гравитации. Прояснена связь между подходом к МЛГ, основанным на струнном уравнении, и структурой фробениусова многообразия. Найдено решение струнного уравнения, выбор которого определяет искомую производящую функцию МЛГ [10]. Прояснена роль плоских координат на фробениусовом многообразии и связь МЛГ с интегрируемыми структурами [11]. Показано, что необходимое решение уравнения Дугласа имеет простой вид именно в плоских координатах на фробениусовом многообразии в общем (q,p) случае МЛГ. Найден явный вид резонансных преобразований между естественными параметрами исходного и дуального подходов в терминах многочленов Якоби. Проверено, что использование этих преобразований обеспечивает выполнение необходимых правил отбора для корреляционных чисел в (q,p) МЛГ. Получены явные выражения для корреляционных чисел в случае унитарной серии гравитирующих минимальных моделей [12]. Предложен эффективный метод вычисления плоских координат, который обобщается на широкий класс теорий, в частности, на случай W гравитации [13; 14].

В диссертационной работе предложено обобщение АГТ соответствия на больший класс конформных теорий, содержащий суперсимметричную конформную теорию поля [15; 16]. Показано, что со стороны калибровочных теорий в общем случае выступают многообразия модулей инстантонов не на $\mathbb{C}^2$, а на разрешении $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_p$. Детально изучен случай $p = 2$, отвечающий суперсимметричным конформным теориям, и обнаружено, что в этом случае существует явная АГТ формулировка для конформных блоков, которая соответствуют специальной компактификации многообразия модулей инстантонов. При помощи конструкции Кадзама-Сузуки получено обобщение формулы АГТ соответствия для конформных блоков $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной конформной теории поля и аффинной $\widehat{\mathrm{sl}}(2)$ алгебры токов.

Исследован специальный случай нерегулярных конформных блоков, соответствующих нормам векторов Уиттекера, получивших ясную интерпретацию в терминах дуальной калибровочной теории. Показано, что подпространство пространства инстантонных модулей колчанных $SU(2)$ теорий, состоящее из $\mathbb{Z}_2$ симметричных инстантонных решений, дуально $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной теории Лиувилля и функция конформного блока в пределе Уиттекера совпадает с инстантонной статсуммой, вычисляемой посредством метода локализации в редуцированном пространстве модулей. Это наблюдение имеет обобщение на более широкий класс $SU(n)$ колчанных калибровочных теорий. Показано, что в основе соответствия лежит тот факт, что алгебра, действующая на когомологиях $\mathbb{Z}_n$ симметричных инстантонных многообразий, в конформном пределе имеет вид $A = \widehat{gl}(2)_2 \times \mathrm{SVir}$. Этот факт обобщает наличие $H \times \mathrm{Vir}$ алгебры в случае исходного АГТ соответствия.

Рассмотрена задача вычисления нерегулярных конформных блоков в двумерных конформных теориях поля, алгебра киральной симметрии которых является $\mathcal{N}=2$ суперконформной алгеброй. Установлена и расширена до уровня конформных блоков связь между теориями представлений $\mathcal{N}=2$ суперконформной алгебры и аффинной $\widehat{\mathrm{sl}}(2)$ алгебры. Показано, что эта связь позволяет получить соотношение между $\widehat{\mathrm{sl}}(2)$ конформными блоками и инстантонными статсуммами в четырехмерной $\mathcal{N}=2$ SU(2) калибровочной теории с поверхностным дефектом [17]. Объединяя эти факты, предложено явное комбинаторное выражения для $\mathcal{N}=2$ суперконформных блоков в пределе Гайотто [18].

Изучена специфика рациональных значений центрального заряда конформной алгебры, соответствующих минимальным моделям. Данный результат [19;20] дает явную формулу для конформных блоков минимальных $W(N)$ моделей в случае отсутствия проблемы кратности в каналах слияния.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации получены в 2004–2016 годах и изложены в 20 публикациях в журналах, рекомендованных ВАК: Nucl. Phys. B., Phys. Lett. B, J. Phys. A, JHEP, Theor. Math. Phys., JETP Lett.

Основные результаты, представленные в диссертационной работе, докладывались на конференциях и ежегодных совещаниях, проводимых в различных научных центрах: “Integrabilty and Geometrical correspondences” (Триест, Италия, 2012-2016); “Landau days” (Черноголовка, Россия, 2014-2016); Франко-Русская конференция “Случайная Геометрия и Физика” (Париж, Франция, 2016); “Quantum Geometry, Duality and Matrix Models” (Москва, Россия, 2016); Russia-Japan School of Young Mathematicians (Киото, Япония, 2009); “Classical and Quantum Integrable Systems” (Дубна, Россия, 2004); “Recent Advances in Quantum Integrable Systems” (Аннеси, Франция, 2007-2012).

Результаты работ, которые легли в основу диссертации, докладывались на семинарах в ФИАН, ИТФ, ИТЭФ, ИППИ, ИЯИ, университета Монтпелье (Монтпелье, Франция), университета Дижона (Дижон, Франция), университета Тура (Тур, Франция), университета Сержи-Понтуаз (Сержи-Понтуаз, Франция), Высшей Нормальной Школы (Париж, Франция), университета Пьера и Марии Кюри (Париж, Франция), Международной школы передовых исследований (Триест, Италия), Международного центра теоретической физики (Триест, Италия), университета Соган (Сеул, Южная Корея), Боннского университета (Бонн, Германия), университета Вупперталя (Вупперталь, Германия), института Вейцмана (Реховот, Израиль).

Представленные в диссертационной работе результаты были получены при финансовой поддержке программ Российского научного фонда, РФФИ, фонда "Династия", Министерства образования Франции, программы ENS-Landau, программы поддержки международного сотрудничества "Research in Paris" института Анри Пункаре, грантов Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав и заключения. Для удобства вспомогательные справочные материалы, а также некоторые технические детали вычислений сосредоточены в приложении, включающем четыре тематических раздела. Полный объем диссертации с приложениями составляет 317 страниц с 5 рисунками и 4 таблицами. Список литературы содержит 209 наименований.

Содержание работы

Введение посвящено обоснованию актуальности исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, обзору научной литературы по изучаемой проблеме, формулировкам цели, задачи, а также научной новизны и практической значимости представляемой работы.

Первая глава направлена на исследование структуры суперсимметричной конформной теории.

Основной объект исследования в КфТП (как и в любой КТП) - корреляционные функции локальных полей. Пространство локальных полей $\mathcal{H}$ КфТП разбирается на неприводимые представления $\mathcal{M}_k$ алгебры симметричной конформной теории $\mathcal{A}_{sym}$, таким образом, $\mathcal{H} = \oplus_k \mathcal{M}_k$. В общем случае $\mathcal{A}_{sym}$ – это некоторая бесконечномерная алгебра, включающая в качестве подалгебры алгебру Вирасоро (Vir), генерируемую голоморфным током $T(z)$ (голоморфной компонентой тензора энергии-импульса), $\mathcal{A}_{sym} \supset \mathrm{Vir}$. Представления включают в себя *примарные поля* Φ_k, соответствующие старшим векторам, и вторичные поля, так называемые *потомки*, которые возникают в операторном разложении тензора энергии импульса и данного примарного поля. В общем случае k представляет некоторый набор квантовых чисел, включающий в себя конформную размерность примарного поля Δ_k, который полностью определяет данное представление M_k алгебры симметрии. Методы КфТП позволяют свести задачу вычисления корреляционных функций полей потомков к вычислению корреляционных функций примарных полей, $\langle\Phi_{\Delta_1}(z_1)...\Phi_{\Delta_n}(z_n)\rangle$, поэтому последние представляют основной интерес. Для простоты мы ограничимся на время случаем $k \Leftrightarrow \Delta_k$, специфика расширенной конформной симметрии будет рассмотрена позднее. Важное свойство корреляционных функций примарных полей – возможность выделения в них некоторых универсальных ингредиентов, вид которых определяется исключительно типом алгебры симметрии. Например, для 4-точечной функции использование операторного разложения по базису в пространстве локальных полей дает

$$\langle\Phi_{\Delta_1}(z_1)\Phi_{\Delta_2}(z_2) \underset{1=\sum_k |k\rangle\langle k|}{\uparrow} \Phi_{\Delta_3}(z_3)\Phi_{\Delta_4}(z_4)\rangle = \sum_k C_{12}^k C_{34}^k \left|\mathcal{F}\left(c,\Delta_i,\Delta_k^{int}|\frac{z_{12}z_{34}}{z_{13}z_{24}}\right)\right|^2 , \quad (1)$$

где C_{ij}^k – структурные константы операторной алгебры, зависящие от конкретной модели, и $\mathcal{F}(z)$ – так называемый конформный блок (КБ), вид которого определяется исключительно $\mathcal{A}_{sym}$. В силу своей универсальности функция конформного блока играет важную роль в исследовании КфТП. Задача вычисления конформного блока связана с задачей определения вклада потомков в операторные разложения. Если обозначить через $|N,\Delta\rangle_{\Delta_1\Delta_2}$ вклад потомков примарного поля Φ_Δ с конформной размерностью Δ, обладающих конформной размерностью $(\Delta+N)$, то голоморфную часть разложения операторного произведения (РОП) схематично можно написать в виде

$$\Phi_{\Delta_1}(z)\Phi_{\Delta_2}(0) = z^{\Delta-\Delta_1-\Delta_2}\sum_{N=0}^{\infty} z^N |N,\Delta\rangle_{\Delta_1\Delta_2} \quad (2)$$

и конформный блок записывается в виде

$$\mathcal{F}(z) = \sum_{N=0}^{\infty} z^N \,{}_{\Delta_1\Delta_2}\langle N,\Delta|N,\Delta\rangle_{\Delta_3\Delta_4} \,. \tag{3}$$

Тот факт, что вклад потомков в РОП (2) и конформный блок (3) полностью определены $\mathcal{A}_{sym}$, сводится к утверждению, что вектора $|N,\Delta\rangle_{\Delta_1\Delta_2}$ удовлетворяют некоторым рекуррентным соотношения. Например, определяющие соотношения в случае $\mathcal{A}_{sym} = \mathrm{Vir}$ имеют вид

$$L_n|N,\Delta\rangle_{\Delta_1\Delta_2} = [\Delta + n\Delta_1 - \Delta_2 + N - n]|N - n\rangle_{\Delta_1\Delta_2} \,. \tag{4}$$

С помощью коммутационных соотношений алгебры Вирасоро

$$[L_m,L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}\delta_{m,-n}(m^3 - m) \tag{5}$$

все вектора $|N,\Delta\rangle_{\Delta_1\Delta_2}$ определяются уровень за уровнем. Вычисляя далее скалярные произведения, мы получаем функцию конформного блока в виде разложения в ряд по степеням z.

Однако построение функции конформного блока исходя из данного выше определения не эффективно в связи с быстрым ростом числа потомков с ростом уровня N, в частности, имеется проблема обращения матрицы скалярных произведений. В данной главе разрабатывается метод вычисления конформного блока для $N = 1$ суперсимметричной конформной теории, $\mathcal{A}_{sym} = \mathrm{SVir}$. В дополнение к тензору энергии-импульса, приводящему к (5), SVir генерируется супер-током $G(z)$ и задается дополнительными (анти)коммутационными соотношениями

$$\{G_k,G_l\} = 2L_{k+l} + \frac{c}{3}\left(k^2 - \frac{1}{4}\right)\delta_{k,-l} \,, \quad [L_n,G_k] = \left(\frac{n}{2} - k\right)G_{n+k} \,. \tag{6}$$

Специфика суперсимметричной теории приводит к необходимости определения двух независимых конформных блоков $\mathcal{F}_{\mathrm{e,o}}$, связанных с учетом потомков четных (e) и нечетных (o) уровней. Метод основан на исследовании аналитических свойств конформных боков, рассматриваемых как функции центрального заряда и конформной размерности. Из определения следует, что КБ является мероморфной функцией размерностей (т. е. функцией, не имеющей особых точек, кроме полюсов). Анализ требует решения ряда проблем, как например установление асимптотического вида КБ как функции центрального заряда, изучение полюсной структуры и т. д. Ключевое наблюдение состоит в том, что конформный блок имеет простые полюса в вырожденных значениях внутренних размерностей $\Delta^{int} = \Delta_{m,n}(c)$ $(m,n \in \mathbb{Z}_+)$, возникающих при слиянии полей. При этом вычет в полюсе пропорционален опять же конформному блоку с определенным образом сдвинутыми значениями параметров. Используя эти свойства, в первой главе получено эффективное рекуррентное представление для функции конформных блоков в суперсимметричной конформной теории

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\mathrm{e,o}}\,(c,\Delta,z) = f_{\mathrm{e,o}}(\Delta,z) &+ \sum_{m,n \text{ чет.}} \frac{B^{(\mathrm{e,o})}_{m,n}(\Delta)}{c - c_{m,n}(\Delta)} \mathcal{F}_{\mathrm{e,o}}(c_{m,n},\Delta + mn/2,z) \\ &+ \sum_{\substack{m,n \text{ нечет.} \\ m>1}} \frac{B^{(\mathrm{e,o})}_{m,n}(\Delta)}{c - c_{m,n}(\Delta)} \mathcal{F}_{\mathrm{o,e}}(c_{m,n},\Delta + mn/2,z)\ ,\end{aligned}$$

где $c = c_{m,n}(\Delta) \Leftrightarrow \Delta = \Delta_{m,n}(c)$, $B^{(\mathrm{e,o})}_{m,n}$ – так называемые *фьюжн* полиномы[14],

$$\begin{aligned} f_{\mathrm{e}} &= z^{\Delta-\Delta_1-\Delta_2}{}_2F_1(\Delta+\Delta_{12},\Delta+\Delta_{34},2\Delta,z) \\ f_{\mathrm{o}} &= \frac{1}{2\Delta} z^{\Delta-\Delta_1-\Delta_2+1/2}{}_2F_1\left(\Delta+\Delta_{12}+\frac{1}{2},\Delta+\Delta_{34}+\frac{1}{2},2\Delta+1,z\right)\end{aligned}$$

и $\Delta_{ij} = \Delta_i - \Delta_j$.

Помимо классификации по типу алгебры симметрии имеется другой принцип, по которому модели КфТП делятся на два класса: рациональные и иррациональные. Примером рациональных моделей являются минимальные модели M(q,p) с дискретной формой РОП. Основным примером иррациональных КфТП выступает теория Лиувилля. Последняя играет важную роль в теории струн, поскольку эффект конформной аномалии приводит к ее появлению во всех моделях некритической струны. Структурные контакты РОП (или трехточечные функции) в суперсимметричной теории Лиувилля (ТСЛ) были определены в работе Ал. Б. Замолодчикова и А. Б. Замолодчикова[15]. Од-

[14] Belavin, A. and Zamolodchikov, Al. Higher equations of motion in N = 1 SUSY Liouville field theory // JETP Lett. 84, 418-424, 2006.

[15] Zamolodchikov, A. and Zamolodchikov, Al. Structure constants and conformal bootstrap in Liouville field theory // Nucl. Phys. B477.,577-605, 1996.

нако завершающим и ключевым этапом построения любой конформной теории поля является решение проблемы реализации так называемого конформного бутстрапа. Именно в результате реализации конформного бутстрапа мы получаем самосогласованную конформную теорию поля с данным типом симметрии и данным типом операторного разложения. Требование конформного бутстрапа – это требование согласованности структуры РОП с конформной симметрией. Другими словами, это есть требование выполнения ассоциативности операторной алгебры на уровне корреляционных функций. Впервые вопрос ассоциативности возникает на уровне четырехточечных корреляционных функций. Однако хорошо установленный факт заключается в том, что выполнение требований ассоциативности на уровне 4-точечных функций является необходимым и достаточным условием выполнения требования бутстрапа для полного набора корреляционных функций. Для 4-точечных функций требование ассоциативности имеет вид:

$$\int dP\, C_{12}^{P}\, C_{34}^{P} \left| \qquad \right|^2 = \int dP\, C_{13}^{P}\, C_{24}^{P} \left| \qquad \right|^2, \tag{7}$$

где P параметризует внутренние размерности, возникающие при слиянии примарных полей теории (супер)Лиувилля, интегрирование производится по всему спектру, а под знаком модуля стоит конформный блок в соответствующем канале слияния. Полученные рекуррентные соотношения снимают проблему учета конформных блоков, однако имеется еще ряд задач, требующих решения для осуществления конформного бутстрапа. Структурные константы представляют собой весьма нетривиальные специальные функции, которые выражаются в терминах двойных гамма-функций Барнса и обладают рядом интересных аналитических свойств. Интеграл по параметру внутренней размерности в (7) в общем случае определен в виде аналитического продолжения из некоторой ограниченной области параметров, что приводит к необходимости учитывать деформацию контура и в некоторых случаях – к появлению дополнительных дискретных слагаемых. Эти проблемы рассматриваются в конце первой главы, и результатом является реализация программы конформного бутстрапа в суперсимметричной теории Лиувилля.

Во **второй главе** изучаются интегрируемые возмущения минимальных моделей.

Как отмечалось выше, суперсимметричная теория Лиувилля является примером иррациональной КфТП. Данная глава посвящена исследованию вопросов, связанных с рациональными теориями – минимальными моделями MM(q,p). Как известно, эти модели описывают фиксированные точки ренормгруппы и определяют таким образом классы универсальности критического поведения. Всем известный пример – критическая модель Изинга, MM(3,4). Имеется интересный вопрос применения методов конформной теории поля при выходе из фиксированной точки. Ультрафиолетовое поведение любой КТП определяется принадлежностью тому или иному классу универсальности, т. е. на малых расстояниях (по сравнению с масштабом массы) корреляционные функции совпадают с корреляционными функциями соответствующей модели КфТП с некоторым значением центрального параметра $c = c_{q,p}$ при соответствующей идентификации скейлинговых размерностей возмущенной теории и конформных размерностей полей в КфТП. Фактически задача заключается в построении некоторого аналога обычной теории возмущений, но не вблизи свободной гауссовой фиксированной точки, а в окрестности некоторой нетривиальной КфТП. В диссертационной работе развивается метод *конформной теории возмущений*. Оказывается, что знание корреляционных функций в фиксированной точке позволяет вычислять корреляционные функции при выходе из нее. Пусть у нас имеется некоторая критическая модель с «действием» $A_{q,p}$, которое, вообще говоря, не известно в явном виде (что отличает построение теории возмущений в данном случае от обычной теории возмущений). Нас интересует теория, описываемая действием

$$A = A_{q,p} + g \int \Phi \, d^2 z \ , \tag{8}$$

где g – константа связи и Φ – некоторое релевантное поле $\Delta < 1$ (из размерных соображений $g \sim m^{2-2\Delta}$). Основное утверждение заключается в том, что при выходе из фиксированной точки, операторная алгебра подвергается аналитической деформации, т. е. структурные константы РОП получают аналитические по константе связи поправки:

$$\Phi_i(r)\Phi_j(0) = \sum_k C_{ij}^k(r)\Phi_k(0) \ ,$$

где

$$C_{ij}^k(r) = r^{2(\Delta_k-\Delta_i-\Delta_j)}\left(C_{ij}^k + g\, r^{2-2\Delta}Q^{(1)} + (g\, r^{2-2\Delta})^2 Q^{(2)} + \cdots\right). \qquad (9)$$

В данной главе исследуется проблема вычисления этих поправок $Q^{(l)}$, а вместе с тем и вопрос вычисления корреляционных функций при выходе из фиксированной точки. Члены нулевого порядка в разложении (9) определяются структурными константами критической модели. В частности, они подчиняются конформным правилам слияния. Конформная теория возмущений направлена на вычисление поправок $Q^{(l)}$.

Используя РОП для 2-точечной корреляционной функции некоторого поля Ψ в скейлинговой модели, мы получаем ее ультрафиолетовую асимптотику

$$\begin{aligned} \langle\Psi(x)\Psi(0)\rangle = C_{\Psi\Psi}^{I}(r)\langle I\rangle + C_{\Psi\Psi}^{\Phi_k}(r)\langle\Phi_k(0)\rangle \\ + C_{\Psi\Psi}^{L_{-2}\bar{L}_{-2}I}(r)\langle L_{-2}\bar{L}_{-2}I\rangle + C_{\Psi\Psi}^{L_{-2}\bar{L}_{-2}\Phi_k}(r)\langle L_{-2}\bar{L}_{-2}\Phi_k(0)\rangle + \cdots \end{aligned}$$

Например, поправки первого порядка имеют вид

$$\begin{aligned} C_{\Psi\Psi}^{\Phi_k\ (1)}(r) := \lim_{R\to\infty}\Bigg[-g\int_{|y|<R}\langle\Phi_k(\infty)\Phi(y)\Psi(x)\Psi(0)\rangle_{\mathrm{CFT}}d^2y \\ +\pi g\sum_j\frac{C_{\Psi\Psi}^{\Phi_j}C_{\Phi\Phi_j}^{\Phi_k}}{\Delta_k-\Delta_j-\Delta_\Phi+1}R^{2(\Delta_k-\Delta_j-\Delta_\Phi+1)}r^{2\Delta_j-4\Delta_\Psi}\Bigg], \end{aligned}$$

где R – инфракрасная регуляция. Для практических целей удобно использовать аналитическую регуляцию, тогда мы имеем дело с регуляризованными интегралами вида

$$\begin{aligned} C_{\Psi\Psi}^{I(1)}(r) &= -g\int'\langle\Phi(y)\Psi(x)\Psi(0)\rangle_{\mathrm{CFT}}d^2y\,, \\ C_{\Psi\Psi}^{\Phi_k(1)}(r) &= -g\int'\langle\Phi_k(\infty)\Phi(y)\Psi(x)\Psi(0)\rangle_{\mathrm{CFT}}d^2y\,. \end{aligned}$$

Поскольку в минимальных моделях поля вырожденные, использование представления свободного поля позволяет записать подынтегральное выражение в виде интегралов от произведений некоторых степеней $|x_{ij}|$, при этом поправки приобретают вид $\int d^2x \int d^2y\ |x|^{2a}|1-x|^{2b}|y|^{2d}|1-y|^{2e}|x-y|^{2c}$. Подобные интегралы могут быть вычислены аналитически. Для этого используется техника сведения интегралов по плоскости к сумме произведений контурных интегралов. Например, в случае моделей M(q,p), возмущенных полем $\Phi=\Phi_{1,3}$, получаем следующие лидирующие поправки к структурным функциям, дающим вклад в 2-точечную функцию поля $\Psi=\Phi_{1,2}$

$$C^{I}_{\Psi\Psi}=r^{\frac{2-\xi}{\xi+1}}\left\{1-(mr)^{\frac{4}{\xi+1}}\frac{(\xi+1)^2}{(\xi-1)(2\xi-1)}\left(\frac{\gamma^2(\frac{\xi}{\xi+1})\gamma^5(\frac{2}{\xi+1})\gamma(\frac{3\xi}{\xi+1})}{\gamma(\frac{2\xi}{\xi+1})\gamma(\frac{2-\xi}{\xi+1})\gamma^2(\frac{4}{\xi+1})}\right)^{\frac{1}{2}}\right\},$$

$$C^{\Phi}_{\Psi\Psi}=-r^{\frac{\xi}{\xi+1}}\left\{\left(\frac{\gamma(\frac{\xi}{\xi+1})\gamma(\frac{2}{\xi+1})}{\gamma(\frac{2\xi}{\xi+1})\gamma(\frac{2-\xi}{\xi+1})}\right)^{\frac{1}{2}}\right.$$

$$\left.+(mr)^{\frac{4}{\xi+1}}\frac{\xi^2(1-\xi)^3}{4(\xi+1)^2(2\xi-1)}\left(\frac{\gamma^8(\frac{1-\xi}{1+\xi})\gamma^9(\frac{\xi}{\xi+1})\gamma(\frac{3\xi}{\xi+1})}{\gamma^2(\frac{2-2\xi}{\xi+1})}\right)^{\frac{1}{2}}\right\},$$

$$C^{\Phi_{15}}_{\Psi\Psi}(r)=-r^{\frac{7\xi-2}{\xi+1}}(mr)^{\frac{4}{\xi+1}}\frac{\xi^2(1-\xi)}{4(1-2\xi)(3\xi+1)^2}\left(\frac{\gamma^7(\frac{\xi}{\xi+1})\gamma^4(\frac{1-\xi}{\xi+1})}{\gamma(\frac{4\xi}{\xi+1})\gamma(\frac{2-2\xi}{\xi+1})\gamma(\frac{2-3\xi}{\xi+1})}\right)^{\frac{1}{2}},$$

где параметр $\xi=\frac{q}{p-q}$.

Далее рассматривается случай интегрируемых массивных возмущений. Как известно, в двумерной интегрируемой массивной теории имеется факторизация процессов рассеяния, т. е. многочастичная S-матрица представляется в виде произведения некоторого числа двухчастичных S-матриц. Как показал Ф. Смирнов, требование локальности и факторизация матрицы фиксирует вид форм-факторов (ФФ) локальных операторов

$$F_{a_1\cdots a_n}(\beta_1,\ldots,\beta_n)=\langle 0|\Psi(0)|\beta_1,\ldots,\beta_n\rangle_{a_1\cdots a_n},$$

где β_i и a_i обозначают соответственно быстроты[16] и типы частиц. А именно, имеется ряд требований, так называемых аксиом Смирнова, которым должны удовлетворять ФФ локальных операторов:

[16]Естественная параметризация двумерных импульсов через быстроты $p_i^{(0)}=m\cosh\beta_i$ и $p_i^{(1)}=m\sinh\beta_i$.

1. Уравнения Ватсона

$$F_{a_1\cdots a_j a_{j+1}\cdots}(\beta_1,\ldots,\beta_i,\beta_{i+1},\cdots,\beta_n) =$$
$$= S_{a_j a_{j+1}}(\beta_j-\beta_{j+1})F_{a_1\cdots a_{j+1}a_j\cdots a_n}(\beta_1,\ldots,\beta_{j+1},\beta_j,\ldots,\beta_n)\ ,$$
$$F_{a_1 a_2\cdots a_n}(\beta_1+2\pi i,\beta_2,\cdots,\beta_n) = F_{a_2\cdots a_n a_1}(\beta_2,\cdots,\beta_n,\beta_1)\ .$$

2. Релятивистская инвариантность для локального оператора со спином s

$$F_{a_1\cdots a_n}(\beta_1+\Lambda,\cdots,\beta_n+\Lambda) = e^{s\Lambda}F_{a_1\cdots a_n}(\beta_1,\cdots,\beta_n)\ .$$

3. Условия на кинематические и физические полюса.

В этом случае имеется дуальное описание интегрируемых возмущений конформных моделей, которое хорошо работает в инфракрасной области. Используя спектральное разложение по асимптотическим состояниям, имеем

$$\langle\Psi(x)\Psi(0)\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\frac{d\beta_1}{2\pi}\cdots\frac{d\beta_n}{2\pi}\langle 0|\Psi(x)|\beta_i\rangle_{a_1\cdots a_n}\times{}_{a_1,\ldots,a_n}\langle\beta_i|\Psi(0)|0\rangle =$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{\{a_j\}}\int\frac{d\beta_1}{2\pi}\cdots\frac{d\beta_n}{2\pi}e^{-r\sum_j m_{a_j}\cosh\beta_j}F_{a_n\cdots a_1}(\beta_i)F_{a_1\cdots a_n}(\beta_i)\ ,$$

где форм-факторы определяются явно, исходя из аксиом Смирнова. Мы получаем два представления для корреляционных функций интегрируемых возмущенных моделей. Результаты хорошо сшиваются в широкой области промежуточных расстояний, таким образом, комбинированное описание дает полное знание корреляционных функций в рассматриваемой скейлинговой модели на всех масштабах, см. Рис. 1.

Третья глава посвящена исследованию точнорешаемых моделей некритической струны – минимальных моделей гравитации Лиувилля (МЛГ).

В качестве таргет-пространства в них берутся минимальные модели ММ(q,p). В результате конформной аномалии в струнном действии возникает вклад, описываемый действием Лиувилля. Этот вклад учитывает то, что остается от интегрирования по двумерным метрикам на поверхности мирового листа струны в исходной формулировке Полякова. Таким образом, данную теорию можно рассматривать как модель индуцированной 2d грави-

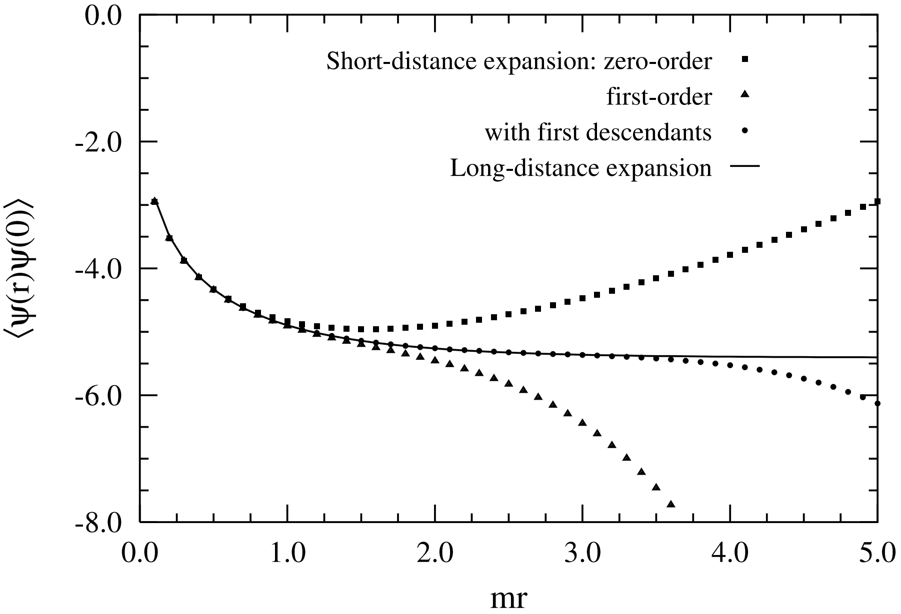

Рис. 1 — Сравнение УФ и ИК асимптотик в модели М(2,7).

тации. Действие МЛГ состоит из трех частей:

$$A_{MLG} = A_{CFT} + A_L + A_{ghosts} \ ,$$

где A_{CFT} определяет материальный сектор, М(q,p) минимальную модель, A_L – гравитационный сектор, теорию Лиувилля и A_{ghosts} – духовый сектор, (b_2,c_{-1})-систему. МЛГ обладает свойствами БРСТ теории с БРСТ зарядом

$$Q = \oint dz[T^M(z) + T^L(z) + \frac{1}{2}T^{gh}(z)]c(z) \ , \tag{10}$$

где T^X – голоморфная компонента тензора энергии-импульса в соответствующем секторе. Условие БРСТ инвариантности требует $c_{q,p} + c_L = 26$, тогда выполняется условие нильпотентности БРСТ заряда $Q^2 = 0$.

Физические поля являются БРСТ когомологиями, определенными условием $QW_{mn} = 0$ и W_{mn} – не является Q-точным. Явный вид физических полей

$$W_{mn} = U_{m,n}c\bar{c} \ , \tag{11}$$

где $U_{m,n} = \Phi_{m,n} V_{m,-n}$ ($\Phi_{m,n}$ – примарное поле из таблицы Каца $\mathrm{M}(q,p)$ модели, $V_{m,-n}$ – одевающее примарное поле теории Лиувилля) и выполнено условие $\Delta(\Phi_{m,n}) + \Delta(V_{m,-n}) = 1$.[17]

Основным объектом исследования МЛГ являются корреляционные числа физических полей

$$\prod_{i=4}^{n} \int d^2 z_i \, \langle W_1(0) W_2(1) W_3(\infty) U_i(z_i) \rangle \; . \tag{12}$$

Их определение включает необходимость интегрирования по пространству модулей поверхности произведения корреляционных функций в материальном секторе и секторе теории Лиувилля. Уже сами эти функции весьма непросты, в частности, их вычисление требует суммирования и интегрирования, связанных с разложением на конформные блоки (1). Поэтому даже численное вычисление корреляционных чисел представляет весьма нетривиальную задачу. В описываемой главе разработан метод аналитического вычисления корреляционных чисел. В основе метода лежит следующее важное соотношение между физическими полями и специальным классом *логарифмических полей* теории Лиувилля. Логарифмические поля $V'_{mn}(z)$ в теории Лиувилля определяются согласно

$$V'_{mn}(z) := \frac{d}{da} V_a(z)|_{a=a_{mn}} \; , \tag{13}$$

где $V_a =: e^{a\phi(z)}:$ (некоторое примарное поле теории Лиувилля), $\phi(z)$ – поле Лиувилля и a – параметр, определяющий конформную размерность V_a. Логарифмические поля удовлетворяют квантовым высшим уравнениям движения (КВУД):

$$D_{mn} \bar{D}_{mn} V'_{mn} = B_{mn} V_{m,-n} \; , \tag{14}$$

где B_{mn} – некоторые числовые коэффициенты и $V_{m,-n}$ входит в выражение физического поля (11). Наконец, D_{mn} – оператор рождения сингулярного вектора. Простейшим примером КВУД является само уравнение Лиувилля $\partial\bar{\partial}\phi = e^{\phi}$. В этом случае берется логарифмический контрпартнер единичного оператора, $V'_{11} = \phi$.

[17] Индекс $(m, -n)$ одевающего поля определяется в стандартной параметризации теории Лиувилля и, по существу, определяет его размерность согласно приведенному условию.

Анализ КВУД позволяет установить следующее соотношение:

$$W_{mn} = B_{mn}^{-1}\bar{Q}QO'_{mn} \ , \tag{15}$$

где $O'_{mn} = H_{mn}\bar{H}_{mn}\Phi_{mn}V'_{mn}$ и H_{mn} строится в явном виде, с использованием требования физичности поля O_{mn}. Применяя к (15) $b_{-1}\bar{b}_{-1}$ и используя коммутационные соотношения $L_n = \{b_n,Q\}$, получаем

$$U_{mn} = B_{mn}^{-1}\partial\bar{\partial}O'_{mn} \quad \mathrm{mod}\ Q - \mathrm{exact}\ . \tag{16}$$

Данное соотношение можно использовать для взятия интеграла по пространству модулей в выражении корреляционных чисел (12). По теореме Стокса интегрирование сводится к границе пространства модулей – вкладу контурных интегралов вокруг особых точек. Последние вычисляются аналитически, поскольку мы контролируем РОП вырожденных полей в конструкции O'_{mn} и, следовательно, знаем поведение при $z \to z_{1,2,3}$. Таким образом можно получить явные аналитические выражения для 4-точечных корреляционных чисел.

Несмотря на это существенное продвижение в разработке прямого подхода, задача вычисления амплитуд в МЛГ остается не полностью решенной. В частности, в случае топологии сферы, N-точечный коррелятор содержит $(N-3)$-кратный интеграл и при повторном применении КВУД возникает проблема учета членов, не являющихся Q-точными. Имеется также проблема обобщения данного метода на другие топологии мирового листа (тор, диск и т. д.). Однако имеется альтернативная формулировка МЛГ, которая не только позволяет вычислять отдельные корреляторы, но и дает замкнутое выражение для их производящей функции. Этому направлению посвящена следующая глава диссертации.

Четвертая глава посвящена исследованию альтернативного подхода к МЛГ и его связи со структурой фробениусовых многообразий (ФМ).

Как отмечалось выше, в МЛГ в качестве полей материи выступает некоторая КфТП ММ(q,p). Идея альтернативного подхода основана на том, что теорию струн и, в частности, модели МЛГ можно мыслить как теорию, описывающую некоторую статистическую систему в специальной области фазового пространства (так сказать, в дважды критическом режиме). Мы имеем дело с некоторой статистической моделью (скажем, моделью Изинга), но данная модель определена не на регулярной решетке, а на случайно флуктуирующей решетке или поверхности. Таким образом, объектом статистического ансамбля выступают с одной стороны спиновые степени свободы, а с другой – сами решетки, которые являются случайными. Гравитация МЛГ описывает подобную модель в точке фазового перехода спиновой системы, а с другой стороны, когда параметры задачи настроены таким образом, что сами поверхности, дающие вклад в ансамбль, обладают большим размером или площадью, то есть, другими словами, являются гладкими.

Такое описание, известное как *матричные модели в двойном скейлинг-пределе*, приводит к строгой математической формулировке моделей двумерной гравитации. В этой формулировке, предложенной Дугласом, производящая функция строится по некоторому специальному решению так называемого струнного (P,Q)-уравнения

$$[P,Q]=1\ , \tag{17}$$

где P,Q – некоторые дифференциальные операторы, зависящие от определенного набора параметров, $\lambda=\{\lambda_{mn}\}$ $(m,n\in$ таблице Каца $\mathrm{M}(q,p)$ модели) и $u=\{u_i\}$ $(i-1,...,q-1)$. Уравнение Дугласа (17) обладает некоторым специальным решением $u^*(\lambda)$ и производящая функция корреляционных чисел

$$Z(\lambda)=\langle \exp \sum_{mn} \lambda_{mn} W_{mn}\rangle \tag{18}$$

определяется условием

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial\lambda_{11}}=u_1^*(\lambda)\ , \tag{19}$$

где $u_1^*(\lambda)$ – определенная компонента векторного решения u^* струнного уравнения.

До последнего времени этот подход был применим лишь для ленточной серии гравитирующих минимальных моделей $\mathrm{M}(2,2p+1)$, $p\in\mathbb{Z}_+$, описываемых однополосной таблицей Каца и связанных посредством данной дуальности с одноматричными моделями в двойном-скейлинг пределе. В общем (q,p) случае имеется дополнительный ряд проблем, в частности, проблема определения решения струнного уравнения, ответственного за описание моделей минимальной гравитации Лиувилля.

Используя связь МЛГ со структурой специального фробениусова многообразия в обсуждаемой главе решается проблема определения требуемого решения струнного уравнения Дугласа и строится замкнутое выражение для производящей функций корреляционных чисел МЛГ. Оказывается, что ключевую роль в дуальном описании играет выбор плоских координат $v^{\alpha}(u)$ $(\alpha = 1,...,q-1)$ на фробениусовом многообразии.[18] Этот выбор позволяет получить явное представление для производящей функции. Для сферической топологии струнное уравнение допускает эквивалентную формулировку принципа наименьшего действия $\partial S/\partial u_i = 0$ (для всех i), где *действие*

$$S = \operatorname*{res}_{y=\infty} \sum_{m,n} \lambda_{mn} Q^{\frac{|pm-qn|}{q}} \ , \tag{20}$$

и $Q(y) = \sum_k u_k y^{q-k}$. В этом случае производящая функция записывается в виде

$$\langle \exp \sum_{mn} \lambda_{mn} W_{mn} \rangle = \int_0^{v^*(\lambda)} C_{\alpha}^{\beta\gamma} \frac{\partial S}{\partial v^{\beta}} \frac{\partial S}{\partial v^{\gamma}} dv^{\alpha} \ , \tag{21}$$

где $\alpha,\beta,\gamma = 1,...,q-1$ и $C_{\alpha}^{\beta\gamma}$ – структурные константы фробениусовой алгебры $\Phi\mathrm{A}_q$, ответственной за описание МЛГ. Данная алгебра определяется как алгебра полиномов одной переменной y по модулю полинома $Q'(y)$:

$$\Phi\mathrm{A}_q = \mathbb{C}[y]/\frac{dQ}{dy} \ . \tag{22}$$

Представление (21) позволяет получить явное выражение для произвольных n-точечных корреляционных чисел. С помощью данного метода в четвертой главе производится вычисление корреляционных чисел и проверяется, что полученные результаты согласуются с соответствующими результатами континуального подхода, рассмотренного в третьей главе.

Пятая глава посвящена исследованию АГТ соответствия.

[18] По определению ФМ является плоским римановым многообразием, в котором метрика определенным образом согласована с дополнительной структурой фробениусовой алгебры.

АГТ устанавливает связь между КфТП с алгеброй симметрии Vir и некоторым классом $N = 2$ суперсимметричных калибровочных теорий в четырех измерениях. В частности, согласно АГТ, Vir конформные блоки связаны с инстантонными статсуммами в этих теориях. Калибровочные теории устроены таким образом, что выполняются так называемые условия локализации, и это позволяет вычислять инстантонные вклады в статистическую сумму в явном виде. При этом, согласно соответствию, центральный заряд связан с параметрами деформации, которые обеспечивают выполнение условий локализации, конформные размерности, от которых зависит конформный блок, определяют состав материи (т. е. задают массы частиц в том или ином проявлении калибровочной группы), и, наконец, разложение в ряд по аргументам конформного блока (координатам вставок z_i) соответствует разложению по $\exp(-\frac{4\pi}{g_i^2})$, где g_i – константы связи калибровочной теории, $z_i \Leftrightarrow g_i$. В частности, для 4-точечного конформного блока N инстантонный вклад определяет коэффициент разложения конформного блока при степени z^N.

В пятой главе решается проблема обобщения АГТ соответствия на случай суперсимметрии конформной теории. А именно, показывается, что SVir КфТП соответствует $N = 2$ SUSY калибровочной теории, определенной на пространстве орбифолда на $\mathbb{R}^4/\mathbb{Z}_2$. В частности, это дает явное комбинаторное представление для конформных блоков. Для того чтобы установить данное соответствие, в данной калибровочной теории производится вычисление инстантонных сумм с помощью методов локализации.

Данное соответствие проливает свет на интегрируемую структуру конформной теории. Исходное АГТ соответствие устанавливает соответствие $\mathcal{F}(z_i) \Leftrightarrow Z_{\text{inst}}(g_i)$, где конформный блок $\mathcal{F}(z_i)$ определен по отношению к алгебре $\mathcal{A} = H \otimes \text{Vir}$ и H – алгебра Гейзинберга, определенная коммутационными соотношениями $[a_m, a_n] = \delta_{m,-n}$. Из наличия этого соответствия следует существование ортогонального базиса в представлении алгебры $\mathcal{A}$. АГТ соответствие дает возможность определить этот базис и найти коммутирующие интегралы движения в пространстве представления алгебры, которые диагонализуются в данном базисе, поскольку базисные вектора являются собственными по отношению ко всему бесконечному набору коммутирующих операторов. Аналогичная конструкция реализуется и в случае суперсимметричной конформной теории, детально рассмотренной в пятой главе.

В наиболее общем случае в качестве обобщения $\mathcal{A}$ выступает косет $\mathcal{A}(r,k) = \widehat{gl}(n)_k/\widehat{gl}(n-r)_k$, где n посредством "уровень-ранг" дуальности связывается с параметрами деформации, p определяет орбифолд евклидова пространства $\mathbb{R}^4/\mathbb{Z}_p$ и r – ранг калибровочной группы. Например, случай $r = 2$, $k = 2$ соответствует $N = 1$ суперконформной теории, поскольку алгебра $\mathcal{A}(2,2) \simeq H \otimes \widehat{sl}(2)_2 \otimes \mathrm{Svir}$.

Далее в пятой главе рассматриваются приложения данного утверждения для конформных теорий с различными типами алгебры симметрии: $N = 2$ суперконформная алгебра, аффинная $\widehat{sl}_k(2)$ и W_N алгебры. Отдельно исследуется специфика выбора рациональных значений центрального заряда, соответствующих минимальным моделям.

В **заключении** приведены основные результаты работы, которые заключаются в следующем:

1. Разработан и обоснован метод вычисления конформных блоков суперсимметричной конформной теории. Получены рекуррентные соотношения для конформных блоков $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной конформной теории поля, рассматриваемых как функции центрального заряда. Для конформных блоков, рассматриваемых как функции конформных размерностей, получены эллиптические рекуррентные соотношения.
2. Предложен вывод структурных констант операторной алгебры в секторе Невье-Шварца $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной конформной теории поля, который позволяет рассматривать этот сектор независимо от сектора Рамона.
3. С помощью эллиптических рекуррентных соотношений для конформных блоков, а также явных выражений для супер-лиувиллевских структурных констант выполнена программа конформного бутстрапа в суперсимметричной теории поля Лиувилля. Это вычисление представляет собой доказательство самосогласованности конформного бутстрапа и гипотезы о структуре операторного разложения $\mathcal{N} = 1$ теории Лиувилля.
4. В контексте исследования массивных интегрируемых теорий, рассматриваемых как возмущения конформных теорий, развит метод конформной теории возмущений для вычисления корреляционных

функций в возмущенных конформных теориях, обладающий свойством интегрируемости. Впервые предложен способ учета полей потомков в вычислении возмущенных структурных функций.

5. На уровне локальных полей и корреляционных функций установлено соответствие между методами конформной теории возмущений и подходом спектрального разложения, основанным на конструкции форм-факторов локальных полей в интегрируемых массивных теориях с факторизованным рассеянием. Произведены численные исследования, показывающие, что построенное таким образом комбинированное описание интегрируемых возмущений дает возможность вычисления корреляционных функций на всех масштабах.
6. В минимальной суперсимметричной теории гравитации Лиувилля получено соотношение между физическими БРСТ когомологиями с духовым зарядом $N_{gh} = 1$ и логарифмическими полями в суперсимметричной теории Лиувилля. Это соотношение выведено с помощью высших уравнений движения суперсимметричной теории Лиувилля, описывающей гравитационный сектор минимальной супергравитации. Получены высшие уравнения движения в конформной теории Лиувилля с границей. Как следствие, получено соотношение между физическими БРСТ когомологиями с $N_{gh} = 1$ и логарифмическими производными когомологий с$N_{gh} = 0$.
7. Разработан метод вычисления корреляционных чисел в суперсимметричной теории минимальной гравитации Лиувилля. Задача вычисления интегралов по пространству модулей римановых поверхностей, входящих в определение корреляционных чисел, сведена к учету граничных членов, определяемых известными свойствами операторной алгебры теории.
8. Развиты методы вычислений в альтернативном подходе к минимальной теории некритической струны, основанном на струнном уравнении Дугласа. Путем использования связи струнного уравнения со структурой фробениусовых многообразий, найдено релевантное для минимальных моделей гравитации Лиувилля решение струнного уравнения Дугласа. Показано, что для нахождения решения струнного уравнения, обеспечивающего требуемые свойства

корреляционных чисел, и для установления вида резонансных соотношений в общем случае минимальной (q,p) гравитации необходимо использовать плоские координаты на фробениусовом многообразии. Разработан метод вычисления плоских координат.

9. Исходя из требования выполнения конформных правил отбора, которым подчиняются корреляционные числа теории, найден явный вид резонансного преобразования между константами связи теории Лиувилля и соответствующими параметрами, возникающими в альтернативном подходе.
10. Изучено представление производящей функции корреляционных чисел минимальной гравитации в общем (q,p) случае в виде тау-функции, соответствующей специальной интегрируемой иерархии. Эта конструкция включает в себя структурные константы фробениусовой алгебры. Получены явные выражения для структурных констант фробениусовых алгебр, связанных с минимальной гравитацией Лиувилля. Путем использования структурных констант и перехода к плоским координатам, получены явные выражения для корреляционных чисел в унитарной серии минимальных моделей гравитации Лиувилля.
11. В рамках исследования АГТ соответствия получены соотношения дуальности между двумерной конформной теорией с $\mathcal{N}=1$ суперконформной киральной алгеброй и специальным классом четырехмерных калибровочных теорий, определенных на орбифолде $\mathbb{R}_4/\mathbb{Z}_2$.
12. Установлено обобщение АГТ соответствия для класса конформных теорий, включающего суперсимметричные и W_N расширения конформной алгебры. С помощью найденного соответствия получено явное комбинаторное представление для конформных блоков $\mathcal{N}=1$ и $\mathcal{N}=2$ КфТП, а также минимальных моделей с W_N симметрией.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Belavin V. A.* N=1 supersymmetric conformal block recursion relations // *Theor. Math. Phys.* — 2007. — Vol. 152. — Pp. 1275–1285. — [Teor. Mat. Fiz.152,476(2007)].

2. Bootstrap in Supersymmetric Liouville Field Theory. I. NS Sector / A. Belavin, V. Belavin, A. Neveu, Al. Zamolodchikov // *Nucl. Phys.* — 2007. — Vol. B784. — Pp. 202–233.

3. *Belavin V. A.* On the N=1 super Liouville four-point functions // *Nucl. Phys.* — 2008. — Vol. B798. — Pp. 423–442.

4. On correlation functions in the perturbed minimal models M(2,2n+1) / A. A. Belavin, V. A. Belavin, A. V. Litvinov et al. // *Nucl. Phys.* — 2004. — Vol. B676. — Pp. 587–614.

5. *Belavin V. A., Miroshnichenko O. V.* Correlation functions of descendants in the scaling Lee-Yang model // *JETP Lett.* — 2005. — Vol. 82. — Pp. 679–684. — [Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.82,775(2005)].

6. *Belavin A., Belavin V.* Four-point function in Super Liouville Gravity // *J. Phys.* — 2009. — Vol. A42. — P. 304003.

7. *Belavin V. A.* Modular Integrals in Minimal Super Liouville Gravity // *Theor. Math. Phys.* — 2009. — Vol. 161. — Pp. 1361–1375.

8. *Belavin V.* Torus Amplitudes in Minimal Liouville Gravity and Matrix Models // *Phys. Lett.* — 2011. — Vol. B698. — Pp. 86–90.

9. *Belavin A., Belavin V.* Higher Equations of Motion in Boundary Liouville Field Theory // *JHEP.* — 2010. — Vol. 02. — P. 010.

10. *Belavin V.* Unitary Minimal Liouville Gravity and Frobenius Manifolds // *JHEP.* — 2014. — Vol. 07. — P. 129.

11. *Belavin A. A., Belavin V. A.* Frobenius manifolds, Integrable Hierarchies and Minimal Liouville Gravity // *JHEP.* — 2014. — Vol. 09. — P. 151.

12. *Belavin V.* Correlation Functions in Unitary Minimal Liouville Gravity and Frobenius Manifolds // *JHEP.* — 2015. — Vol. 02. — P. 052.

13. *Belavin Alexander, Belavin Vladimir.* On exact solution of topological CFT models based on Kazama–Suzuki cosets // *J. Phys.* — 2016. — Vol. A49, no. 41. — P. 41LT02.

14. *Belavin Alexander, Belavin Vladimir.* Flat structures on the deformations of Gepner chiral rings // *JHEP.* — 2016. — Vol. 10. — P. 128.

15. *Belavin V., Feigin B.* Super Liouville conformal blocks from N=2 SU(2) quiver gauge theories // *JHEP.* — 2011. — Vol. 07. — P. 079.

16. *Belavin A., Belavin V., Bershtein M.* Instantons and 2d Superconformal field theory // *JHEP.* — 2011. — Vol. 09. — P. 117.

17. *Belavin V.* Conformal blocks of Chiral fields in N=2 SUSY CFT and Affine Laumon Spaces // *JHEP.* — 2012. — Vol. 10. — P. 156.

18. *Belavin V., Wyllard Niclas.* N=2 superconformal blocks and instanton partition functions // *JHEP.* — 2012. — Vol. 06. — P. 173.

19. *Alkalaev K. B., Belavin V. A.* Conformal blocks of W_N minimal models and AGT correspondence // *JHEP.* — 2014. — Vol. 07. — P. 024.

20. *Belavin Vladimir, Foda Omar, Santachiara Raoul.* AGT, N-Burge partitions and $\mathcal{W}_N$ minimal models // *JHEP.* — 2015. — Vol. 10. — P. 073.