

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Физический
институт им. П.Н. Лебедева Российской академии наук

На правах рукописи

Тарусов Александр Андреевич

**Развернутые уравнения и их применение в
пертурбативном анализе уравнений высших спинов и их
мультичастичных обобщений**

Специальность 1.3.3 —
«Теоретическая физика»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2026

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Физическом институте им. П.Н. Лебедева Российской академии наук.

Научный руководитель:

Васильев Михаил Андреевич, доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук (ФИАН РАН), отделение теоретической физики, высококвалифицированный главный научный сотрудник.

Официальные оппоненты:

Зиновьев Юрий Михайлович, доктор физико-математических наук, Институт физики высоких энергий им. А.А. Логунова Национального исследовательского центра «Курчатовский институт», главный научный сотрудник.

Иванов Евгений Алексеевич, доктор физико-математических наук, Международная межправительственная организация Объединенный институт ядерных исследований, главный научный сотрудник Лаборатории теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова.

Ведущая организация:

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау Российской академии наук (ИТФ РАН)

Защита состоится 12 октября 2026 г. в 12:00 на заседании диссертационного совета Д 24.1.262.04 при Физическом институте им. П. Н. Лебедева РАН по адресу: 119991, г. Москва, Ленинский проспект, д. 53.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФИАН, а также на сайте www.lebedev.ru.

Автореферат разослан “___” _____ 2026 года.

Ученый секретарь

диссертационного совета

Д 24.1.262.04,

доктор физ.-мат. наук

Чернышов Дмитрий Олегович

Введение

Актуальность темы. Для описания эволюции физических систем с неизбежностью необходимо использовать дифференциальные уравнения. Существуют различные обобщения и способы получения систем уравнений в частных производных. Так, лагранжев формализм имеет широкое применение в классической физике и является ключевым элементом построения квантовой теории. Математическое обобщение, позволяющее рассматривать уравнения в частных производных в инвариантных терминах, называется расслоением джетов, которое содержит в себе функции вместе со всеми их производными до данного порядка. Дифференциальные уравнения в частных производных можно рассматривать как подмногообразие в расслоении джетов [1; 2]. Решениями уравнения являются сечения исходного расслоения, продолжения которых лежат в этом подмногообразии. На языке пространства джетов возможно обобщение лагранжевого подхода и, при наличии некоторых дополнительных условий, решение обратной вариационной задачи – построение действия для данных уравнений движения [3]. Подобная задача сопряжена с большим количеством сложностей, т.к. ответ часто зависит от изначального выбора полей теории, а также от допустимых локальных преобразований полей.

Весьма близкой к пространству джетов конструкцией является формализм развернутых уравнений, предложенный М.А. Васильевым [4–6] в контексте теории высших спинов, и являющийся в ней одним из ключевых инструментов. Кроме физических полей в формализме с необходимостью присутствуют поля, выражающиеся как производные физического поля – по прямой аналогии с джетами. Существенным отличием является использование языка дифференциальных форм. Это гарантирует координатно-независимую формулировку теории и, как следствие, естественную реализацию диффеоморфизмов. Вместе с условиями совместности на развернутую систему это обеспечивает калибровочную инвариантность. Условия совместности существенно ограничивают допустимые локальные переопределения полей, что в рассматриваемом ниже расширении позволяет сформулировать критерий лагранжевости в более конструктивном

виде.

Явный контроль за калибровочными преобразованиями (во многом аналогичный Q -дифференциалу из BV-формализма [7], [8]) необходим в теориях с бесконечным числом калибровочных полей, таких как теория высших спинов, применение в которой особенно интересно, т.к. теория высших спинов – один из претендентов на теорию квантовой гравитации – ещё одной фундаментальной проблемы теоретической физики. Объединение общей теории относительности с квантовой механикой не может быть достигнуто методами квантовой теории поля. Ещё до формализации механизма перенормировок потенциальные проблемы в теории квантовой гравитации были отмечены в работе Матвея Бронштейна [9]. Пертурбативная ОТО как квантовая теория является перенормируемой – в петлевом разложении возникают контрчлены, не фиксируемые конечным числом параметров [10; 11], а значит требует бесконечного числа измерений, что лишает теорию предсказательной силы.

Для построения квантовой теории, которая в своём классическом пределе воспроизводила бы общую теорию относительности, требовалось модифицировать саму теорию гравитации. Работы в этом направлении представлены, во-первых, работами над модифицированными теориями гравитации, в которых метрика пространства-времени остаётся единственным независимым полем, например [12; 13]. Полученные теории углубили понимание квантовой теории поля и предложили некоторые успешные космологические модели [14], но не смогли представить единую подходящую теорию. Большинству перенормируемых модифицированных теорий гравитации присущи другие недостатки, такие как неунитарность, что означает присутствие в теории состояний с отрицательной нормой, неизбежно приводящее к неустойчивости в теории. Альтернативные, полностью новые подходы добавляют в рассмотрение новые независимые поля [15]. Существенного прогресса на сегодняшний день добились радикальные изменения – теория струн, супергравитация и теория высших спинов.

Теория струн [16–18] является одной из наиболее радикальных модификаций теории поля, основная идея которой заключается в переходе к рассмотрению протяженных объектов вместо точечных частиц. Привычные частицы понимаются в таком описании как возбуждение протяженных объектов — струн или бран. Наиболее успешные версии самой теории струн включают, как правило, суперсимметрию — симметрию, связывающую бозоны и фермионы. Теория

также часто имеет внутреннюю симметрию на мировом листе, наблюдается ряд дуальностей между различными теориями.

Такое радикальное изменение теории, однако, сопровождается многими сложностями. Например, теории струн и М-теории формулируются, как правило, в большом числе измерений: 26 (бозонная струна), 10 (суперструна) или 11 (М-теория) [19]. Так как это явно расходится с нашими наблюдениями, требуется процедура компактификации, при которой «лишние» измерения становятся, например, конечными замкнутыми траекториями [20].

Расчеты в теории струн тоже оказываются затруднены, а непertурбативные результаты известны только в очень специальных случаях. Интерес представляет спектр теории, безмассовый сектор которого содержит гравитон — частицу спина 2, ассоциированную с квантовым гравитационным полем, а полный спектр — ещё и бесконечную башню массивных возбуждений сколь угодно высоких спинов.

Теории супергравитации, объединяющие суперсимметрию с гравитацией, являются часто связанным подходом — в частности, показано, что некоторые теории супергравитации можно рассматривать как низкоэнергетический предел теории суперструн [21]. Для изучения теории супергравитации был разработан особый подход так называемого гармонического суперпространства [22; 23], где вводятся дополнительные гармонические координаты, позволяющие описывать систему вне массовой оболочки в терминах суперполей (т.е. с явной суперсимметрией). Формулировка с помощью суперпространства оказалась удачной и для теории высших спинов [24; 25], где дополнительная симметрия, необходимая для непротиворечивой формулировки квантовой гравитации, введена как симметрия, связывающая безмассовые поля всех целых и полуцелых спинов. В этом случае дополнительные переменные позволяют объединить поля разных спинов в одно суперполе.

Другой подход в теории высших спинов, через развернутые уравнения, был развит в [6]. Уравнения теории записываются как бесконечная цепочка простых дифференциальных уравнений в терминах внешней алгебры дифференциальных форм (в чём и заключается развернутый формализм), что делает возможным пертурбативное рассмотрение. Присутствие в теории бесконечного числа полей также привносит особенности в рассмотрение.

Уравнения Васильева [6] описывают взаимодействующие поля всех целых

и полуцелых спинов. Хотя полное описание теории вне массовой оболочки пока не найдено (хотя в последние годы достигнут большой прогресс), наличие уравнений движения позволяет предположить существование квантовой теории такой, что взаимодействие полей высших спинов в низкоэнергетическом пределе подавлено членами с большим количеством производных.

Сами уравнения Васильева [6] сформулированы в развернутом виде — т. е. в виде цепочки простых дифференциальных уравнений на дифференциальные формы. Для простоты записи в уравнениях введены вспомогательные переменные спинорного типа. Правая часть уравнений записана с помощью специального ассоциативного, так называемого «звёздочного» умножения, играющего ключевую роль [26]. Система уравнений имеет известное вакуумное решение, а также допускает пертурбативное рассмотрение над этим вакуумом. Гомотопическая процедура, применяемая для решения на каждом шаге, позволяет воспроизводить вершины в каждом порядке [27]. Её существование — прямое свойство системы как развернутой системы уравнений и в кохомологических терминах позволяет переписывать замены полей как выбор различных представителей кохомологии. Однако конкретный вид вершины имеет большое значение, в связи с чем параметры гомотопической процедуры должны быть правильно подобраны на каждом шаге [28].

В классических теориях с конечным числом степеней свободы локальность означает конечное число производных в уравнениях движения теории, что значит, что эволюция определяется локальным поведением системы.

В теории высших спинов потребовать выполнение такого условия нельзя априори, т.к. поле определенного спина кодируется как производная определенного порядка от мастер-полей. Т.к. в системе представлено бесконечное число спинов, в ней встретится и бесконечное число производных.

Ослабление этого условия для системы с бесконечным набором спинов носит название «спин-локальности», и заключается в требовании, что для каждого конечного подмножества полей система содержит конечное число производных [29]. Более того, для оптимизации анализа требуется добиваться наименьшего возможного числа производных в каждой вершине.

В постановке системы уравнений высших спинов число производных может меняться при замене переменных и подобрать правильную замену — нетривиальная задача. Т.к. замена параметра в гомотопической процедуре эквива-

лентна замене переменных для полей системы, то для сохранения спин-локальности необходимо правильно выбирать параметры гомотопической процедуры [30].

На данный момент алгоритма правильного выбора гомотопических параметров нет, но разработаны эффективные методы подсчёта, позволившие получить вершины вплоть до $\Upsilon_{\omega CCC}$ в спин-локальном виде [31].

Рассмотрение мультичастичных состояний в теории высших спинов, её так называемого мультичастичного расширения, показывает, что в ней содержится достаточное число степеней свободы, чтобы кодировать степени свободы теории струн [32]. Более того, предварительные результаты показывают согласованность результатов, полученных в высокоэнергетическом пределе теории струн с результатами в мультичастичном расширении высших спинов [33].

Эти наблюдения мотивируют изучение мультичастичных и кокстеровских расширений как возможного шага к установлению связи между теориями высших спинов и некоторой теорией струн. Для согласования спектров двух теорий необходимым является выявление механизма спонтанного нарушения симметрии высших спинов, в результате которого поля высших спинов приобретут массу.

Рассмотрение расширения алгебры высших спинов, а точнее её универсальной обёртывающей, позволяет рассматривать мультичастичные состояния теории. Подобное расширение ведёт к кратному усложнению теории, ведь уже одночастичное состояние содержит бесконечную цепочку полей всех спинов. Анализ мультичастичных уравнений также сложнее, так как кроме функционального произвола в гомотопической процедуре, есть ещё произвол в параметрах самого произведения в обёртывающей алгебре [32].

Важным различием между теориями является факт, что теория высших спинов описывается исключительно в рамках безмассовых полей, тогда как спектр теории струн, как было отмечено, массивный. Рабочая гипотеза на данный момент состоит в том, что возможно добиться массивного спектра в мультичастичном расширении теории высших спинов с помощью механизма спонтанного нарушения симметрии — аналогично механизму Хиггса [34; 35].

Степень проработанности темы. Развернутые уравнения, появившиеся в контексте теории высших спинов в работах [5], [6], представляют собой уравнения вида

$$dW^\Omega(\xi, x) = G^\Omega(W(\xi, x)), \quad d := \xi^n \frac{\partial}{\partial x^n}. \quad (1)$$

На функции $G^A(W)$ дополнительно наложено условие совместности

$$G^A(W) \frac{\partial G^\Omega(W)}{\partial W^\Lambda} = 0. \quad (2)$$

Развернутые системы могут описывать как системы вне массовой оболочки, в которой поля старшего порядка выражаются через производные полей младшего порядка, и системы на массовой оболочке, в которых поля дополнительно подчинены некоторым уравнениям в частных производных. Важное замечание, сделанное в работе [36], состоит в том, что одна и та же система может интерпретироваться как система на массовой оболочке в пространстве-времени одной размерности, и как система вне массовой оболочки в пространстве времени другой размерности.

Важное дополнение конструкции, заключающееся в введении Q -дифференциала, было представлено в работе [36]. Важно, что дифференциал формулируется для так называемых универсальных систем, совместность которых не зависит от размерности, т.е. следует из правых частей уравнений, а не из-за наличия форм порядка выше размерности пространства-времени. В этой же работе выделены инвариантные функционалы теории условием Q -замкнутости. Инвариантные функционалы, представленные как формы максимального порядка, естественным образом являются кандидатом на действие, формы меньшего порядка – на сохраняющиеся заряды. В настоящей диссертации будет представлена конструкция, позволяющая ввести в развернутую систему вариации и придать сохраняющимся функционалам смысл действия, получая уравнения движения как экстремали.

Наиболее широкое применение развернутые уравнения нашли в теории высших спинов, т.к. именно на языке развернутых уравнений сформулированы как уравнения высших спинов в реперном формализме [37], обобщающие уравнения Фронсдала [38], так и производящая система Васильева [27], кодирующая вершины нелинейной системы с помощью дополнительной спинорной переменной z . Более точно, уравнения Фронсдала описывают безмассовые поля произвольного спина с помощью абсолютно симметричного тензора ранга s , подчиненного условию так называемой двойной бесследовости:

$$\varphi^{nk}_{nkm_5, \dots m_s} = 0. \quad (3)$$

Это поле подчинено уравнениям

$$\square \varphi^{a(s)}(x) - s \partial^a \partial_m \varphi^{ma(s-1)}(x) + \frac{s(s-1)}{2} \partial^a \partial^a \varphi^{a(s-2)m}_m(x) = 0 \quad (4)$$

с явной калибровочной симметрией

$$\delta \varphi^{a(s)}(x) = \partial^a \xi^{a(s-1)}(x), \quad (5)$$

с бесследовым калибровочным параметром ξ . В записи используется компактное обозначение $\alpha(n)$ для n симметризованных индексов одного типа.

Для обобщения уравнений Фронсдала вводятся один-формы ω и ноль-формы напряженности C [5]. Для удобства описания компоненты поля сворачиваются с вспомогательными $\mathfrak{sp}(4)$ спинорами $Y^A = (y^\alpha, \bar{y}^{\dot{\alpha}})$.

$$\omega(y, \bar{y}, x) = \sum_{n,m} \omega_{\alpha_1 \dots, \alpha_n, \dot{\alpha}_1 \dots \dot{\alpha}_m}(x) y^{\alpha_1} \dots y^{\alpha_n} \dot{y}^{\dot{\alpha}_1} \dots \dot{y}^{\dot{\alpha}_m} \quad (6)$$

$$C(y, \bar{y}, x) = \sum_{n,m} C_{\alpha_1 \dots, \alpha_n, \dot{\alpha}_1 \dots \dot{\alpha}_m}(x) y^{\alpha_1} \dots y^{\alpha_n} \dot{y}^{\dot{\alpha}_1} \dots \dot{y}^{\dot{\alpha}_m} \quad (7)$$

$$(8)$$

Спиноры подчинены коммутационным соотношениям

$$[y_\alpha, y_\beta]_* = 2i\epsilon_{\alpha\beta} \quad [\bar{y}_{\dot{\alpha}}, \bar{y}_{\dot{\beta}}]_* = 2i\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \quad [y_\alpha, \bar{y}_{\dot{\beta}}]_* = 0, \quad (9)$$

реализуемым специальным звёздочным произведением

$$(f * g)(Z, Y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int dU dV f(Z + U, Y + U) g(Z - V, Y + V) e^{iU_A V^A}. \quad (10)$$

Тогда полные нелинейные уравнения на ω , C записываются как

$$d\omega + \omega * \omega = \Upsilon(\omega, \omega, C) + \Upsilon(\omega, \omega, C, C) + \dots \quad (11)$$

$$dC + [\omega, C]_* = \Upsilon(\omega, C, C) + \Upsilon(\omega, C, C, C) + \dots \quad (12)$$

где в правой части появляются поправки всё более высоких порядков записанные как вершины Υ .

В таком виде очевидна развернутая природа этих уравнений. На практике весьма важен конкретный вид вершин в правых частях уравнений (11), (12). Так, в частности, важно свойство «спин-локальности», которое соответствует тому, что при фиксированных спинах вершина содержит конечное число производных. Фиксация спина в этом условии чрезвычайно важна, т.к. количество производных в вершинах Υ растёт со спином, поэтому теория не является локальной в привычном смысле. Поскольку выбор вершины не единственный, т.к. существует большой произвол, задающийся богатым набором калибровочных преобразований и замен полей, остро встаёт задача поиска представителя с наименьшим числом производных. Эта задача решена в малых порядках за счет введения производящей системы Васильева, которая, в свою очередь, является развернутой системой для вспомогательной спинорной переменной z . Разрешение производящей системы заключается в явном решении уравнения типа

$$df = g, \quad dg = 0, \quad (13)$$

что достигается с помощью гомотопии (например сдвиговой [30], хотя существуют и более общие техники, которые расширили набор возможных параметров [39]).

$$f(Z; Y; \theta) = [(Z^A + Q^A) \frac{\partial}{\partial \theta^A} \int_0^1 \frac{dt}{t} g(tZ - (1-t)Q; Y; t\theta)] + \\ + h(Y) + d_Z \epsilon(Z; Y; \theta) \quad (14)$$

Различные выборы гомотопии сводятся к добавлению точных форм, или, что аналогично, к полевым заменам. В низших порядках за счет выбора сдвига были достигнуты локальные результаты, хотя пространство параметров не было полностью использовано [40; 41]. Более общая дифференциальная гомотопия, разработанная в последние годы, ещё больше увеличивает пространство параметров в гомотопической процедуре и, успешно воспроизводя известные локальные результаты, обещает более удобный аппарат для обобщений или вычислений в более высоких порядках. В этом ключе задача выбора гомотопических параметров не только вычислительная, но и несёт в себе физический

смысл – различные представители кохомологического класса могут по-разному трактоваться с точки зрения локальности из-за числа производных. Поэтому важно перечислить максимально широкий класс гомотопических сдвигов, сохраняющих интерпретацию свободных уравнений, и приводящих к локальным (ультралокальным) [28; 29] вершинам.

Дальнейшим развитием теории высших спинов являются различные предложенные расширения. Так, мультичастичное расширение и расширение группой Кокстера, предложенные в [42], являются перспективными в контексте осуществления дуальности между теорией высших спинов и теорией струн. С существованием подобной дуальности согласуются расчеты в теории струн в пределе нулевого натяжения [33].

Возможно получение массивного спектра теории через размерную редукцию, но отдельно интересно нарушение предварительно расширенной симметрии высших спинов до пространственно-временной симметрии той же размерности. В качестве механизма было предложено рассматривать систему, порожденную универсальной обёртывающей алгеброй (мультичастичное расширение), которая содержит достаточно степеней свободы для описания массивного спектра теории струн. Наблюдаемое в работах [43–46] удвоение осцилляторов, что близко к введению двух копий алгебр высших спинов, нетривиально коммутирующих друг с другом, может быть реализовано расширением группой Кокстера B_2 . В B_2 теории присутствуют также две константы связи, одну из которых, предполагается, можно связать с константой α' в струнной теории.

Таким образом, для установления дуальности было предложено рассматривать систему, порожденную универсальной обёртывающей алгеброй (мультичастичное расширение) высших спинов, пополненной группой Кокстера [42]. Это пополнение происходит на уровне алгебры деформированных осцилляторов. В этой диссертации построено вложение пространства анти-де-Ситтера в подобное расширение, построены линеаризованные уравнения для произвольной группы, получены конкретные результаты для выделенного случая группы B_2 .

Таким образом, в работе рассмотрены три взаимосвязанных аспекта развернутого формализма. Первый связан с вопросом условий массовой оболочки развернутых уравнений, получения их из вариационного принципа и решения обратной вариационной задачи. Второй касается выбора локального предста-

вителя вершин в теории возмущений высших спинов над AdS_4 -фоном. Третий – к обобщению результатов на теории, расширенные группой Кокстера общего положения и, отдельно, группы B_2 как наиболее вероятного претендента на связь с теорией струн.

Суммируя, **целями** данной диссертации являются:

1. Построение вариационного принципа на развернутых уравнениях
2. Расширение набора параметров в линейном анализе теории высших спинов в размерности 4 для поиска новых вершин, сохраняющих вид Первой теоремы о массовой оболочке
3. Анализ линейного порядка в теории высших спинов, расширенной группой Кокстера, с подробным рассмотрением группы B_2

Поставленные цели достигаются решением следующих **задач**:

1. Введение дополнительных полей-вариаций и расширение Q -дифференциала в развернутой системе
2. Построение условия экстремальности и доказательство критерия лагранжевости, и тем самым решение обратной задачи вариационного исчисления
3. Рассмотрение линейного порядка теории высших спинов с новыми типами параметров сдвиговой гомотопии. Нахождение допустимых параметров, для получения ультралокальных вершин.
4. Поиск вложения пространства анти-де-Ситтера в систему уравнений высших спинов, расширенных группой Кокстера.
5. Проведение линейного анализа теории, расширенной группой Кокстера, над найденным AdS_4 вакуумом, для группы Кокстера общего положения, а также для группы B_2 .

Положения, выносимые на защиту:

1. Системы развернутых уравнений могут быть дополнены вариационным формализмом, позволяющим получать условия массовой оболочки как экстремали инвариантных функционалов

2. Для условия массовой оболочки в развернутой системы существует критерий лагранжевости.
3. В линейном порядке теории высших спинов существует новое семейство ультралокальных вершин, задаваемое так называемыми ослабленными однородными сдвигами.
4. Существует вложение AdS_4 -фона в теорию высших спинов, расширенной группой Кокстера, единственное при условии антиэрмитовости и сохранения фильтрации, индуцированной идемпотентами.
5. Обобщение техники сдвиговой гомотопии позволяет получить выражения для линейных вершин в кокстеровском расширении теории высших спинов.
6. Вид линейных вершин в теории высших спинов, расширенной группой Кокстера общего положения. Явные выражения для вершин в случае группы B_2 ; подтверждение, что данный вид согласуется с Первой теоремой о массовой оболочке.

Методология и методы исследования. В работе используются методы развернутой динамики, кохомологический анализ, методы теории деформаций, гомотопическая техника решения производящей системы Васильева, а также алгебраические методы, связанные с деформированными осцилляторными алгебрами и группами Кокстера.

Научная новизна, достоверность и личный вклад автора. Новизна рассматриваемых вопросов, а также достоверность полученных результатов привели к продвижению в исследовании теорий, описываемых системами уравнений развернутого типа, в частности теорий высших спинов. Все представленные в диссертации результаты являются оригинальными и получены автором лично или при его непосредственном участии. Вклад автора в работы [47; 48] является определяющим. Вклад в работу [49] заключается в анализе вложения AdS_4 фона, обобщении сдвиговой гомотопии и в получении и интерпретации линейных вершин (разделы 3, 5, 6). Приведенные в диссертации результаты являются актуальными, используются и развиваются как российскими, так и зарубежными научными группами.

Научная и практическая значимость. Изучаемые в диссертации проблемы представляют научный интерес в области теоретической и математической физики. Полученные в работе результаты могут быть применены для исследования лагранжеевости имеющихся теорий, а также для построения развернутых формулировок теорий с известным действием. Выполненные исследования в области теорий высших спинов, расширенных группами Кокстера, полезны для проверки дуальности теории струн и расширенных теорий высших спинов.

Апробация работы. Основные результаты работы опубликованы в трёх статьях [47—49] в журналах, индексируемых Web of Science и Scopus. Основные результаты, вошедшие в диссертацию, докладывались на семинарах лаборатории КТП ОТФ ФИАН, на международных конференциях “Supersymmetries and Quantum Symmetries” (SQS’22, SQS’24) в Дубне, “Efim Fradkin Centennial Conference” в Москве.

Содержание диссертации

Глава 1 посвящена построению вариационной структуры для развернутых систем и формулировке условий, переводящих развернутую систему вне массовой оболочки в систему на массовой оболочке. Основная задача главы состоит в том, чтобы описать уравнения Эйлера–Лагранжа непосредственно в кохомологических терминах развернутого формализма, не предполагая заранее ни действия, ни BV-формулировки системы.

В **разделе 1.1** формулируется постановка задачи. Напоминается различие между развернутыми системами вне массовой оболочки, которые кодируют выражение производных через вспомогательные поля и калибровочные симметрии, и системами на массовой оболочке, где на примарные поля дополнительно наложены динамические уравнения. Подчеркивается, что инвариантные функционалы развернутой системы описываются Q -когомологиями [36], однако само наличие такого функционала еще не задает явно условия, переводящие систему на массовую оболочку. Поэтому в главе ставится обратная задача: начиная с развернутой системы вне массовой оболочки, найти кохомологические условия, при которых дополнительные ограничения могут быть интерпретированы как уравнения Эйлера–Лагранжа некоторого действия.

В **разделе 1.2** приводятся основные сведения о развернутом формализме. Развернутая система записывается в виде

$$dW^\Omega(x) = G^\Omega(W(x)), \quad (0.1)$$

где W^Ω являются дифференциальными формами на пространстве-времени, а правая часть не содержит производных по координатам. Условие совместности этой системы эквивалентно нильпотентности гомологического векторного поля

$$Q = G^\Omega(W) \frac{\partial}{\partial W^\Omega}, \quad Q^2 = 0. \quad (0.2)$$

В этих терминах дифференцирование де Рама на пространстве-времени отождествляется с действием Q на пространстве-мишеней. Инвариантные лагранжианы удовлетворяют условию $Q\mathcal{L} = 0$, а Q -точные добавки соответствуют пол-

ным производным и не меняют функционал действия. Также рассматривается пример уравнения Маурера–Картана как простейшей развернутой системы, описывающей фоновую плоскую связность.

В **разделе 1.3** развернутая система расширяется полями-вариациями δW^Λ . Эти поля имеют ту же степень дифференциальной формы, что и соответствующие W^Λ , но получают дополнительную вариационную градуировку. Вариации подчиняются следствиям исходных развернутых уравнений,

$$d\delta W^\Lambda = -\delta W^\Omega \frac{\partial G^\Lambda(W)}{\partial W^\Omega}. \quad (0.3)$$

После объединения W^Λ и δW^Λ в один набор полей расширенная система снова принимает развернутый вид с дифференциалом

$$\mathcal{Q} = G^\Lambda(W) \frac{\partial}{\partial W^\Lambda} - \delta W^\Omega \frac{\partial G^\Lambda(W)}{\partial W^\Omega} \frac{\partial}{\partial \delta W^\Lambda}, \quad \mathcal{Q}^2 = 0. \quad (0.4)$$

Тем самым вариации рассматриваются как полноценные поля расширенной развернутой системы, а калибровочная структура исходной системы естественно продолжается на вариационный сектор.

В **разделе 1.4** вводится дифференциал де Рама на пространстве-мишени,

$$\delta = \delta W^\Lambda \frac{\partial}{\partial W^\Lambda}, \quad \delta^2 = 0. \quad (0.5)$$

Показывается, что операторы $\mathcal{Q}$ и δ антикоммутируют,

$$\{\mathcal{Q}, \delta\} = 0, \quad (0.6)$$

и поэтому образуют бикомплекс. Это позволяет записать условие Эйлера–Лагранжа в развернутых терминах как

$$\delta\mathcal{L} + \mathcal{Q}\Phi = 0. \quad (0.7)$$

Здесь добавление $\mathcal{Q}$ -точного члена играет роль интегрирования по частям: оно позволяет привести вариацию действия к выражению, содержащему только вариации примарных полей, но не их производных.

В **разделе 1.5** формулируется обратная вариационная задача для развернутых систем. Рассматривается форма $\mathcal{E}(\delta W, W)$, линейная по вариациям и имеющая степень d как форма на пространстве-времени. Условие

$$\int_{M^d} \mathcal{E}(\delta W(x), W(x)) = 0 \quad (0.8)$$

задает калибровочно-инвариантные уравнения тогда, когда $\mathcal{E}$ является $\mathcal{Q}$ -замкнутой. Главный результат раздела состоит в критерии лагранжевости: такие уравнения являются уравнениями Эйлера–Лагранжа тогда и только тогда, когда существует форма Φ , для которой выполнено условие

$$\delta\mathcal{E} = \mathcal{Q}\delta\Phi. \quad (0.9)$$

В этом смысле получена кохомологическая формулировка обратной задачи вариационного исчисления в пространстве-мишени развернутой системы.

В **разделе 1.6** построение обобщается на случай фоновых, то есть нединамических, полей. Развернутая система записывается в треугольном виде: фоновые поля w^α удовлетворяют автономной подсистеме, а динамические поля W^Ω зависят как от фона, так и от самих динамических полей. Вариационный дифференциал δ действует только на динамические поля, тогда как фоновые поля не варьируются. Показано, что при таком разделении сохраняются нильпотентность расширенного оператора $\mathcal{Q}$ и антикоммутационное соотношение $\{\mathcal{Q}, \delta\} = 0$.

В **разделе 1.7** общая конструкция иллюстрируется на примере скалярного поля. Вне массовой оболочки скалярное поле описывается производящей функцией $C(y, x)$, компоненты которой кодируют производные примарного поля $C(x)$. Наложение условия $C_m^m = 0$ приводит к уравнению Клейна–Гордона для $C(x)$. На этом примере явно показано, как вариация лагранжиана приводится к форме, содержащей вариацию только примарного поля, за счет добавления $\mathcal{Q}$ -точного члена. Также демонстрируется работа критерия лагранжевости: для системы двух скалярных полей с несимметричным взаимодействием условие $\delta\mathcal{E} = \mathcal{Q}\delta\Phi$ нарушается, что указывает на нелагранжев характер соответствующих уравнений; симметризация взаимодействия восстанавливает лагранжевость.

В заключение главы сформулированы основные результаты: построено расширение развернутой системы вариационными полями, введена структура бикомплекса $(\mathcal{Q}, \delta)$ на пространстве-мишени, получена кохомологическая запись уравнений Эйлера–Лагранжа и доказан критерий лагранжевости для калибровочно-инвариантных ограничений, переводящих систему на массовую оболочку. Полученные результаты применимы как к чисто динамическим развернутым системам, так и к системам на фиксированном фоне.

Глава 2 посвящена гомотопическим методам в четырехмерной нелинейной теории высших спинов и анализу допустимых параметров сдвиговой гомотопии. Основная задача главы состоит в том, чтобы расширить класс гомотопических процедур, используемых при пертурбативном разрешении уравнений Васильева, и выделить среди них те, которые сохраняют каноническую форму свободных развернутых уравнений, известную как Первая теорема о массовой оболочке. Результаты главы основаны на работе [48].

В **разделе 2.1** приводятся необходимые сведения о развернутом описании безмассовых полей высших спинов в пространстве AdS_4 . Поля системы кодируются производящими функциями от вспомогательных спинорных переменных $Y_A = (y_\mu, \bar{y}_{\dot{\mu}})$ и операторов Клейна $K = (k, \bar{k})$. Калибровочные поля высших спинов описываются один-формой $\omega(Y; K|x)$, а калибровочно-инвариантные напряженности и их производные — ноль-формой $C(Y; K|x)$. Напоминается, что свободные уравнения имеют вид Первой теоремы о массовой оболочке [50]

$$R^{\mu(n), \dot{\mu}(m)} = \delta_{0,n} h_{\nu \dot{\mu}} h^\nu_{\dot{\mu}} \bar{C}^{\dot{\mu}(m+2)} + \delta_{0,m} h_{\mu \dot{\nu}} h_\mu^{\dot{\nu}} C^{\mu(n+2)} \quad (0.1)$$

совместно с уравнением ковариантного постоянства

$$\tilde{D}C(Y; K|x) = 0. \quad (0.2)$$

Подчеркивается, что сохранение именно этой формы свободных уравнений существенно для физической интерпретации ноль-формы C как набора производных поля Фронсдала. Поскольку поле C содержит бесконечную башню производных, вопрос выбора полевых переменных напрямую связан с проблемой локальности и спин-локальности в теории высших спинов.

В этом же разделе записывается развернутый вид нелинейных уравнений в терминах вершин

$$d_x \omega = -\omega * \omega + \Upsilon(\omega, \omega, C) + \Upsilon(\omega, \omega, C, C) + \dots, \quad (0.3)$$

$$d_x C = -[\omega, C]_* + \Upsilon(\omega, C, C) + \dots, \quad (0.4)$$

где $*$ — мояловское звездочное произведение в алгебре высших спинов. Обсуждается, что пертурбативное получение вершин из производящей системы сводится к последовательному разрешению уравнений относительно дополнительных спинорных переменных Z_A . Свобода выбора гомотопического оператора при этом соответствует свободе выбора полевых переменных.

В **разделе 2.2** рассматривается связь развернутых уравнений с полной нелинейной системой Васильева [6; 27]. Производящая система записывается для мастер-полей $W(Z, Y; K|x)$, $B(Z, Y; K|x)$ и $S(Z, Y; K|x)$. Вакуумное решение имеет вид

$$W_0 = \Omega, \quad B_0 = 0, \quad S_0 = \theta^A Z_A, \quad (0.5)$$

где Ω отождествляется с AdS_4 -связностью. В первом порядке поле B_1 не зависит от Z и становится ноль-формой $C(Y; K|x)$ развернутой системы. Поле S_1 определяется из уравнения

$$-2i d_Z S_1 = i\eta C * \gamma + i\bar{\eta} C * \bar{\gamma}. \quad (0.6)$$

Для его решения используется гомотопическая формула Пуанкаре. Вводится сжимающий оператор

$$\Delta_Q g = (Z^A + Q^A) \frac{\partial}{\partial \theta^A} \int_0^1 \frac{dt}{t} g(tZ - (1-t)Q, Y; t\theta) \quad (0.7)$$

и проектор на когомологии $h_Q f = f(-Q; 0)$, удовлетворяющие соотношению

$$\{d_Z, \Delta_Q\} = 1 - h_Q. \quad (0.8)$$

Выбор параметра Q задает выбор представителя решения и тем самым выбор полевых переменных. Стандартная гомотопия $Q = 0$ воспроизводит свободные уравнения, но в высших порядках может приводить к нелокальным вершинам; поэтому в работах [28; 30] были предложены сдвиговые гомотопии.

В **разделе 2.3** собраны свойства сдвиговой гомотопии, необходимые для вычисления вершин. Используются антикоммутационные соотношения для операторов Δ_Q , формулы для композиций $\Delta_b \Delta_a$ и $h_c \Delta_b \Delta_a$, а также тождества, позволяющие контролировать зависимость результатов от вспомогательной переменной z . Важную роль играет соотношение

$$h_{(\kappa+1)q_2 - \kappa q_1} \Delta_{q_2} \Delta_{q_1} = 0, \quad (0.9)$$

которое далее используется для доказательства тривиальности чистых сдвигов по аргументу поля ω . Также приводятся формулы звездочного обмена, позволяющие переносить гомотопические операторы через ноль-форму C :

$$\Delta_{q+\alpha y} (C(y; k) * \phi) = C(y; k) * \Delta_{q+(1-\alpha)p+\alpha y} \phi, \quad (0.10)$$

где $p_\mu = -i\partial/\partial y^\mu$ действует на аргумент поля C . Эти формулы позволяют явно вычислять вершины с различными упорядочениями полей.

В **разделе 2.4** вводятся параметры сдвига общего положения. Помимо оператора p_μ , действующего на аргумент ноль-формы C , вводится оператор

$$t_\mu \omega(Y; K|x) = -i \frac{\partial}{\partial y^\mu} \omega(Y; K|x) \quad (0.11)$$

для сдвигов по аргументу один-формы ω . В голоморфном секторе решение для S_1 выбирается в виде

$$S_1^\eta = -\frac{\eta}{2} \Delta_{q+\alpha y+\lambda p}(C * \gamma). \quad (0.12)$$

Следующее уравнение для W_1^η разделяется на две подсистемы, соответствующие различным упорядочениям $\omega * C$ и $C * \omega$. Для них допускаются независимые гомотопические сдвиги

$$W_1^{\eta(1)} = \frac{1}{2i} \Delta_{l_1+n_1 t+\beta_1 y} (d_x S_1^\eta|_{\omega * C} + \omega * S_1^\eta), \quad (0.13)$$

$$W_1^{\eta(2)} = \frac{1}{2i} \Delta_{l_2+n_2 t+\beta_2 y} (d_x S_1^\eta|_{C * \omega} + S_1^\eta * \omega). \quad (0.14)$$

После подстановки этих решений в уравнение для ω находятся вершины порядка $\omega^2 C$:

$$d\omega + \omega * \omega + \Upsilon^\eta(\omega, \omega, C) + \Upsilon^\eta(\omega, C, \omega) + \Upsilon^\eta(C, \omega, \omega) = 0. \quad (0.15)$$

Показано, что постоянные спинорные сдвиги q^μ и l_i^μ должны быть положены равными нулю, поскольку иначе нарушается лоренцовская ковариантность. Оставшиеся параметры α , λ , β_i и n_i анализируются далее из требования сохранения Первой теоремы о массовой оболочке. Также отмечается, что вершины с различным упорядочением связаны антиавтоморфизмом алгебры высших спиноров.

В **разделе 2.5** определяется класс допустимых параметров гомотопического сдвига. Для этого вершины, найденные в предыдущем разделе, рассматриваются на AdS_4 -фоне. Требование к вершинам состоит в том, чтобы поправка к правой части свободного уравнения имела тот же вид, что и в Первой теореме о массовой оболочке: в голоморфном секторе допустимы только структуры типа

$$\bar{H}^{\dot{\mu}\dot{\nu}} \bar{\partial}_{\dot{\mu}} \bar{\partial}_{\dot{\nu}} C(0, \bar{y}; K) \quad \text{или} \quad \bar{H}^{\dot{\mu}\dot{\nu}} \bar{y}_{\dot{\mu}} \bar{y}_{\dot{\nu}} C(0, \bar{y}; K). \quad (0.16)$$

Иными словами, недопустимы члены, создающие лишнюю зависимость от голоморфных переменных y^μ или свертки тетрады с операторами y_μ и p_μ .

Анализ проводится отдельно для физических и топологических секторов, различающихся четностью по операторам Клейна. Из требования восстановления Первой теоремы о массовой оболочке в обоих секторах получены ограничения

$$\alpha^{e,o} = \lambda^{e,o}, \quad \beta_1^{e,o} = \beta_2^{e,o} = 0. \quad (0.17)$$

При этом параметры $n_i^{e,o}$, отвечающие сдвигам по аргументу один-формы ω , не ограничиваются этим условием. Следовательно, допустимая гомотопическая процедура позволяет использовать независимые операторы для нахождения S_1 и W_1 :

$$S_1 = -\frac{\eta}{2} \Delta_{a(y+p)}(C * \gamma) + c.c., \quad (0.18)$$

$$W_1 = -\frac{i}{2} \Delta_{b(y+p)}(d_x S_1 + \omega * S_1 + S_1 * \omega) + c.c. \quad (0.19)$$

с независимыми параметрами a и b . Такая процедура обобщает однородные сдвиги из [30], где рассматривался случай $a = b$. Случай $a \neq b$ называется ослабленным однородным сдвигом. Он приводит к однопараметрическому семейству ультралокальных вершин, отличных от вершин стандартной гомотопии на произвольном фоне высших спинов, но сохраняющих Первую теорему о массовой оболочке на фоне AdS_4 .

В **разделе 2.6** рассматривается важный частный случай чистого сдвига по аргументу поля ω . Для этого полагается

$$q^\mu = l_i^\mu = \beta_i = \alpha = \lambda = 0 \quad (0.20)$$

и сохраняются только параметры n_i . Прямое вычисление показывает, что вершины

$$\Upsilon^\eta(\omega, \omega, C), \quad \Upsilon^\eta(\omega, C, \omega), \quad \Upsilon^\eta(C, \omega, \omega) \quad (0.21)$$

не содержат зависимости от n_i и совпадают с вершинами, полученными стандартной гомотопией. Более концептуальное объяснение этого факта дается с помощью тождества для $h_Q \Delta_b \Delta_a$: вклад, который мог бы зависеть от n_i , оказывается тождественно равен нулю уже на уровне решения для W_1^η . Таким образом, чистые сдвиги по аргументу один-формы ω не изменяют поля W_1 и

не дают вклада в нелинейные вершины. Они являются тривиальными деформациями гомотопической процедуры.

В **разделе 2.7** подводятся итоги главы. Проанализировано расширение сдвиговой гомотопии, включающее сдвиги по аргументам ноль-форм S , один-форм ω и по самим спинорным переменным. Найдены ограничения на параметры, необходимые для сохранения канонической формы свободных уравнений высших спинов. Показано, что допустимые сдвиги содержат ослабленные однородные сдвиги, порождающие новое однопараметрическое семейство ультралокальных вершин, тогда как чистые сдвиги по аргументу ω не приводят к физически новым вершинам. Полученные результаты уточняют связь между выбором гомотопической процедуры, выбором полевых переменных и проблемой спин-локальности в нелинейной теории высших спинов.

Глава 3 посвящена линеаризованному анализу теорий высших спинов, расширенных группами Кокстера, и исследованию их динамического содержания. Мотивацией служит гипотеза о связи таких расширенных моделей с теорией струн: модели, основанные на обрамленных алгебрах Чередника, обладают более богатой симметрией и спектром, чем стандартная четырехмерная теория высших спинов, и в частности допускают многокомпонентные расширения с несколькими независимыми константами связи [42]. Основная цель главы состоит в том, чтобы построить фоновое решение AdS_4 , получить линейные развернутые уравнения над этим фоном и выделить динамическое содержание уравнений в унитарных подсекторах.

В **разделе 3.1** вводятся теории высших спинов, расширенные группами Кокстера. Сначала напоминаются основные свойства групп Кокстера, порожденных отражениями относительно корневых векторов v ,

$$R_v x^i = x^i - 2 \frac{(v, x)}{(v, v)} v^i, \quad R_v^2 = 1. \quad (0.1)$$

Далее описывается обрамленная алгебра Чередника, в которой каждому направлению корневого пространства сопоставляется идемпотента I_n , а каждому корневому вектору — оператор Клейна $\hat{K}_v$. Деформированные осцилляторы q_α^n удовлетворяют соотношению

$$[q_\alpha^n, q_\beta^m] = -i\varepsilon_{\alpha\beta} \left(2\delta^{nm} I_n + \sum_{v \in \mathcal{R}} \nu(v) \frac{v^n v^m}{(v, v)} \hat{K}_v \right), \quad (0.2)$$

где функция $\nu(v)$ постоянна на орбитах корневой системы. Наличие идемпотент I_n является принципиальным отличием от обычной алгебры Чередника: оно задает фильтрацию алгебры и позволяет разделить систему на сектора, которые в низших порядках ведут себя как копии стандартной теории, а в высших порядках перемешиваются треугольным образом.

В этом же разделе формулируется производящая система высших спинов для произвольной группы Кокстера. Как и в стандартной теории Васильева, она записывается для мастер-полей W , B и S , но теперь эти поля зависят от p наборов вспомогательных спинорных переменных Y_A^n , Z_A^n , идемпотент I_n и операторов Клейна $\hat{K}_v$. Звездочное произведение модифицируется так, что осцилляторы несут соответствующие идемпотенты,

$$[Y_A^n, Y_B^m]_* = -[Z_A^n, Z_B^m]_* = 2iC_{AB}\delta^{nm}I_n, \quad [Y_A^n, Z_B^m]_* = 0. \quad (0.3)$$

Нелинейные уравнения имеют тот же структурный вид, что и в стандартной теории, но последнее уравнение для $S * S$ содержит сумму центральных элементов $\hat{\gamma}_i$ по орбитам корневой системы. Их центральность обеспечивает совместность производящей системы и является расширенным аналогом условия Якоби для деформированных осцилляторов.

В разделе 3.2 строится вложение пространства AdS_4 в расширенную систему. Рассматривается вакуумный анзац

$$B_0 = 0, \quad S_0 = dZ^{An}Z_{An}, \quad W = W_0(Y, I|x), \quad (0.4)$$

при котором уравнения сводятся к условию нулевой кривизны для фоновой связности W_0 . Показано, что диагональный билинейный анзац по кокстеровским индексам приводит к обычной AdS_4 -геометрии со спин-связностью и тетрадой:

$$\Omega_{AdS}(Y|x) = -\frac{i}{4}\delta^{nm} \left(\omega_{\alpha\beta} y_n^\alpha y_m^\beta + \bar{\omega}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{y}_n^{\dot{\alpha}} \bar{y}_m^{\dot{\beta}} + 2e_{\alpha\dot{\alpha}} y_n^\alpha \bar{y}_m^{\dot{\alpha}} \right). \quad (0.5)$$

Отмечается, что такая связность не содержит явной зависимости от идемпотент и поэтому сохраняет фильтрацию по секторам. Обсуждается также возможность более общих решений, связанных с $SO(p, \mathbb{R})$ -вращениями в пространстве кокстеровских индексов. Требование антиэрмитовости связности и сохранения фильтрации исключает нетривиальные вращения, так что выбранное AdS_4 -вложение оказывается единственным в рассматриваемом классе.

В **разделе 3.3** выводится обобщение Первой теоремы о массовой оболочке для теории, расширенной группой Кокстера. Для получения линейных развернутых уравнений производящая система последовательно разрешается по переменным Z . Техника сдвиговой гомотопии [30] обобщается с учетом идемпотент: уравнения вида

$$d_Z f(Y, Z, I; \hat{K}; dZ) = g(Y, Z, I; \hat{K}; dZ) \quad (0.6)$$

решаются с помощью стягивающего оператора, в котором сдвиг сопровождается множителем I_n ,

$$\partial = (Z_n^A + I_n Q_n^A) \frac{\partial}{\partial dZ_n^A}. \quad (0.7)$$

Это позволяет построить линейные поправки S_1 и W_1 и затем получить вершины порядка $\omega\omega C$, определяющие свободные уравнения для один-формы ω над фоном AdS_4 .

Для группы Кокстера общего положения найденные вершины выражаются через проектор

$$(\mathbb{P}_v)^n{}_m = \delta_m^n - \frac{v^n v_m}{(v, v)}, \quad (0.8)$$

который зануляет компоненту спинорных переменных вдоль корневого вектора v . Поэтому вклад каждого корня имеет тот же ультраллокальный характер, что и правая часть Первой теоремы о массовой оболочке в стандартной теории высших спинов [50]. В частности, при $\mathcal{C} = \mathbb{Z}_2$ формулы сводятся к обычной четырехмерной Первой теореме о массовой оболочке. Для произвольной группы Кокстера полученные уравнения показывают, что стандартные модули высших спинов возникают вдоль корневых направлений, но вместе с ними появляются новые модули, связанные с нетривиальными произведениями операторов Клейна.

Отдельно в **разделе 3.3** рассмотрена группа Кокстера B_2 , представляющая особый интерес как простейшая модель с двумя орбитами корней и двумя независимыми константами связи. Корневая система имеет вид

$$\mathcal{R}_1 = \{\pm e^i, 1 \leq i \leq 2\}, \quad \mathcal{R}_2 = \{\pm e^1 \pm e^2\}. \quad (0.9)$$

Первой орбите соответствуют операторы $\hat{k}_1, \hat{k}_2$, а второй — операторы $\hat{k}_{12}$ и $\hat{k}_{12}^+$. Для этой модели явно выписаны все линейные вершины, возникающие из орбит $\mathcal{R}_1$ и $\mathcal{R}_2$. После унитарной редукции часть уравнений принимает форму

прямого обобщения стандартной Первой теоремы о массовой оболочке,

$$\begin{aligned}
& \left[D_L + e^{\alpha\dot{\alpha}} \sum_{i=1}^2 (\bar{y}_{\dot{\alpha}i} \partial_{\alpha i} + y_{\alpha i} \bar{\partial}_{\dot{\alpha}i}) \right] \omega(y_1, y_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2, I|x) = \\
& = -\frac{i\eta_1}{2} \bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\partial}_1^{\dot{\alpha}} \bar{\partial}_1^{\dot{\beta}} C(0, \bar{y}_1, I; \hat{k}_1|x) * \hat{k}_1 - \frac{i\eta_1}{2} \bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\partial}_2^{\dot{\alpha}} \bar{\partial}_2^{\dot{\beta}} C(0, \bar{y}_2, I; \hat{k}_2|x) * \hat{k}_2 \\
& - \frac{i\eta_2}{2} \bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\partial}_-^{\dot{\alpha}} \bar{\partial}_-^{\dot{\beta}} C(0, \bar{y}_-, I; \hat{k}_{12}|x) * \hat{k}_{12} - \frac{i\eta_2}{2} \bar{H}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\partial}_+^{\dot{\alpha}} \bar{\partial}_+^{\dot{\beta}} C(0, \bar{y}_+, I; \hat{k}_{12}^+|x) * \hat{k}_{12}^+ + \text{с.с.}
\end{aligned} \tag{0.10}$$

Здесь $y_{\pm}$ обозначают линейные комбинации y_1 и y_2 . Это уравнение демонстрирует, что в модели B_2 присутствуют несколько копий стандартной склейки присоединенного модуля один-формы с твистованно-присоединенным модулем ноль-формы.

В разделе 3.4 анализируется динамическое содержание найденных линейных уравнений. Используется редукция к унитарным подмодулям [49], исключая неподходящие по четности компоненты по операторам Клейна. После такой редукции ноль-формы C лежат в тензорных произведениях присоединенного и твистованно-присоединенного модулей стандартной теории, а дополнительные граничные условия оставляют зависимость только от одной комбинации спинорных переменных. Поэтому оставшиеся ноль-формы интерпретируются как обобщенные тензоры Вейля и их потомки.

Показано, что модуль один-форм $M_{adj \otimes adj}$ после редукции подклеивается к этим тензорам Вейля и описывает несколько копий полей Фронсдала. Например, поле ω может быть разложено на компоненты

$$\begin{aligned}
\omega(y_1, y_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2, I|x) = & \omega_1(y_1, \bar{y}_1, I|x) + \omega_2(y_2, \bar{y}_2, I|x) + \\
& + \omega_+(y_+, \bar{y}_+, I|x) + \omega_-(y_-, \bar{y}_-, I|x) + \dots, \tag{0.11}
\end{aligned}$$

и каждая из первых компонент удовлетворяет уравнению того же типа, что и в стандартной теории. При этом сектор, пропорциональный одной идемпотенте I_n , совпадает со стандартной теорией с заменой $Y^A \rightarrow Y_n^A$, тогда как билинейный сектор $I_1 I_2$ содержит смешанные поля и отличается от стандартного уже в нелинейной системе.

Кроме динамических модулей, в разделе обсуждаются модули типа $M_{tw \otimes tw}$ и так называемые запутанные модули. Их уравнения содержат не только примарные ноль-формы, но и их потомки, что указывает на более сложную, вероятно топологическую, интерпретацию этих секторов. До редукции к унитарным

подмодулям в модели также возникают дополнительные поля, включая сектора, связанные с частично-безмассовыми представлениями; их полная классификация требует отдельного кохомологического анализа [51].

В разделе 3.5 подводятся итоги главы. Построено AdS_4 -вложение для теорий высших спинов, расширенных произвольной группой Кокстера, и показано, что в физически релевантной факторизации оно единственно при естественных условиях на эрмитовость и фильтрацию. Обобщена техника сдвиговой гомотопии на кокстеровские модели и получены линейные вершины, задающие обобщение Первой теоремы о массовой оболочке. Для модели B_2 явно выписаны вершины линейного приближения и показано, что после унитарной редукции они содержат несколько копий стандартных тензоров Вейля, полей Фронсдала и соответствующих свободных уравнений. Новые сектора, возникающие благодаря идемпотентам и нетривиальным операторам Клейна, задают основу для дальнейшего анализа нелинейных взаимодействий и возможной связи расширенных теорий высших спинов с теорией струн.

Заключение

В диссертации исследованы три взаимосвязанных применения развернутого формализма: построение вариационной структуры для развернутых систем, анализ свободы выбора представителей в гомотопической процедуре в пертурбативном анализе теории высших спинов и первый порядок теории возмущений для теории высших спинов, расширенной группой Кокстера. Полученные результаты показывают, что кохомологический язык развернутых систем является эффективным и позволяет формулировать условия массовой оболочки, контролировать локальность выбором представителей кохомологий и структуру расширений моделей высших спинов.

Основные результаты работы заключаются в следующем:

1. Построен вариационный принцип для развернутых систем уравнений. Введение дополнительных переменных для описания вариаций позволяет определить дополнительный дифференциал, задающий бикомплекс вместе с дифференциалом $\mathcal{Q}$ расширенной развернутой системы.
2. Лагранжианы и их вариации описаны в кохомологических терминах в расширенной развернутой системе уравнений, а условия, переводящие систему на массовую оболочку, получены как условия замкнутости относительно дополнительного дифференциала с точностью до $\mathcal{Q}$ -точных членов. Получен критерий лагранжевости условий, переводящих систему на массовую оболочку.
3. Рассмотрение новых параметров сдвиговой гомотопии, включающих сдвиги по аргументу поля один-формы ω и ноль-формы C , позволило выписать новое однопараметрическое семейство ультралокальных линейных вершин. Показано, что сдвиги только на аргумент один-формы ω являются тривиальными и не дают поправки в следующие порядки теории возмущений.
4. Для теории высших спинов, расширенной общей конечной группой Кокстера, получена реализация фона AdS_4 как точного решения нелинейной системы и показано, что эта реализация единственна при условиях анти-

- эрмитовости и сохранения фильтрации, задаваемой идемпотентами.
5. С помощью обобщения сдвиговой гомотопии получены линейные вершины, зависящие от матриц отражения, задаваемых группой Кокстера.
 6. Для представляющего особый интерес случая группы Кокстера B_2 получено явное выражение для ультралокальных линейных вершин, согласующихся со стандартной $\mathbb{Z}_2$ теорией высших спинов.

Публикации автора по теме диссертации

47. *Tarusov A. A., Vasiliev M. A.* On the variational principle in the unfolded dynamics // Phys. Lett. B. — 2022. — Т. 825. — С. 136882. — DOI: 10.1016/j.physletb.2022.136882. — arXiv: 2111.12691 [hep-th].
48. *Tarusov A. A., Ushakov K. A., Vasiliev M. A.* Shifted homotopy analysis of the linearized higher-spin equations in arbitrary higher-spin background // JHEP. — 2023. — Т. 03. — С. 128. — DOI: 10.1007/JHEP03(2023)128. — arXiv: 2212.01908 [hep-th].
49. *Tarusov A. A., Ushakov K. A., Vasiliev M. A.* Linearized Coxeter higher-spin theories // JHEP. — 2025. — Т. 08. — С. 052. — DOI: 10.1007/JHEP08(2025)052. — arXiv: 2503.05948 [hep-th].

Список литературы

1. *Виноградов А. М.* Геометрия нелинейных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Серия: Проблемы геометрии. — Москва, 1980. — Т. 11. — С. 89—134.
2. Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики / А. В. Бочаров [и др.] ; под ред. А. М. Виноградова, И. С. Красильщика. — Москва : Факториал, 1997. — С. 464. — ISBN 5-88688-019-4.
3. *Anderson I. M.* Introduction to the Variational Bicomplex // Mathematical Aspects of Classical Field Theory. Т. 132 / под ред. М. J. Gotay, J. E. Marsden, V. Moncrief. — Providence, RI : American Mathematical Society, 1992. — С. 51—73. — (Contemporary Mathematics).
4. *Vasiliev M. A.* Free Massless Fields of Arbitrary Spin in the de Sitter Space and Initial Data for a Higher Spin Superalgebra // Fortschritte der Physik. — 1987. — Т. 35, № 11. — С. 741—770. — DOI: 10.1002/prop.2190351103. — Also published in Yad. Fiz. 45 (1987) 1784–1797.
5. *Vasiliev, Mikhail A.* Equations of Motion of Interacting Massless Fields of All Spins as a Free Differential Algebra // Phys. Lett. B. — 1988. — Т. 209. — С. 491—497. — DOI: 10.1016/0370-2693(88)91179-3.
6. *Vasiliev M. A.* Consistent equation for interacting gauge fields of all spins in (3+1)-dimensions // Phys. Lett. B. — 1990. — Т. 243. — С. 378—382. — DOI: 10.1016/0370-2693(90)91400-6.
7. Parent field theory and unfolding in BRST first-quantized terms / G. Barnich, M. Grigoriev, A. Semikhatov, I. Tipunin // Commun. Math. Phys. — 2005. — Т. 260. — С. 147—181. — DOI: 10.1007/s00220-005-1408-4. — arXiv: hep-th/0406192.
8. *Barnich G., Grigoriev M.* First order parent formulation for generic gauge field theories // JHEP. — 2011. — Т. 01. — С. 122. — DOI: 10.1007/JHEP01(2011)122. — arXiv: 1009.0190 [hep-th].

9. *Bronstein M.* Quantentheorie schwacher Gravitationsfelder // Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion. — 1936. — T. 9. — C. 140—157.
10. *'t Hooft, G. and Veltman, M. J. G.* One-loop divergencies in the theory of gravitation // Ann. Inst. H. Poincare Phys. Theor. — 1974. — T. 20. — C. 69—94. — URL: https://www.numdam.org/item/AIHPA_1974__20_1_69_0/.
11. *Goroff M. H., Sagnotti A.* The Ultraviolet Behavior of Einstein Gravity // Nucl. Phys. B. — 1986. — T. 266. — C. 709—736. — DOI: 10.1016/0550-3213(86)90193-8.
12. *Stelle K. S.* Renormalization of Higher-Derivative Quantum Gravity // Phys. Rev. D. — 1977. — T. 16. — C. 953—965. — DOI: 10.1103/PhysRevD.16.953.
13. *Fradkin E., Tseytlin A.* Renormalizable asymptotically free quantum theory of gravity // Nuclear Physics B. — 1982. — T. 201, № 3. — C. 469—491. — ISSN 0550-3213. — DOI: [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(82\)90444-8](https://doi.org/10.1016/0550-3213(82)90444-8).
14. *Starobinsky A. A.* Spectrum of relict gravitational radiation and the early state of the universe // JETP Lett. — 1979. — T. 30. — C. 682—685. — Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. 30 (1979) 719-723.
15. *Horndeski G. W.* Second-order scalar-tensor field equations in a four-dimensional space // Int. J. Theor. Phys. — 1974. — T. 10. — C. 363—384. — DOI: 10.1007/BF01807638.
16. *Polyakov A. M.* Quantum Geometry of Bosonic Strings // Phys. Lett. B. — 1981. — T. 103. — C. 207—210. — DOI: 10.1016/0370-2693(81)90743-7.
17. *Green M. B., Schwarz J. H.* Anomaly cancellations in supersymmetric D=10 gauge theory and superstring theory // Phys. Lett. B. — 1984. — T. 149. — C. 117—122. — DOI: 10.1016/0370-2693(84)91565-X.
18. *Witten E.* String theory dynamics in various dimensions // Nucl. Phys. B. — 1995. — T. 443. — C. 85—126. — DOI: 10.1016/0550-3213(95)00158-0. — arXiv: hep-th/9503124.
19. *Schwarz J. H.* Introduction to Superstring Theory. — 2000. — arXiv: hep-ex/0008017 [hep-ex]. — URL: <https://arxiv.org/abs/hep-ex/0008017>.
20. *Strominger A., Witten E.* New Manifolds for Superstring Compactification // Commun. Math. Phys. — 1985. — T. 101. — C. 341. — DOI: 10.1007/BF01216094.

21. *Polchinski J.* String theory. Vol. 2: Superstring theory and beyond. — Cambridge University Press, 12.2007. — (Cambridge Monographs on Mathematical Physics). — ISBN 978-0-511-25228-0. — DOI: 10.1017/CB09780511618123.
22. Unconstrained N=2 Matter, Yang-Mills and Supergravity Theories in Harmonic Superspace / A. S. Galperin, E. A. Ivanov, V. I. Ogievetsky, E. S. Sokatchev // Classical and Quantum Gravity. — 1984. — T. 1. — C. 469—498. — Erratum: Class. Quant. Grav. 2 (1985) 127.
23. *Ivanov E. A.* N=2 Supergravities in Harmonic Superspace // Handbook of Quantum Gravity. — Springer, 2024. — DOI: 10.1007/978-981-19-3079-9_43-1. — arXiv: 2212.07925 [hep-th].
24. *Buchbinder I., Ivanov E., Zaigraev N.* N=2 higher spins: superfield equations of motion, the hypermultiplet supercurrents, and the component structure // Journal of High Energy Physics. — 2023. — T. 2023, № 03. — C. 036. — DOI: 10.1007/JHEP03(2023)036. — arXiv: 2212.14114 [hep-th].
25. *Ivanov E.* Higher spins in harmonic superspace // Theoretical and Mathematical Physics. — 2023. — T. 217. — C. 1855—1869. — DOI: 10.1134/S004057792312005X. arXiv: 2306.10401 [hep-th].
26. *Vasiliev M. A.* Higher spin gauge theories: Star product and AdS space. — 1999. — ОКТ. — DOI: 10.1142/9789812793850_0030. — arXiv: hep-th/9910096.
27. *Vasiliev M. A.* More on equations of motion for interacting massless fields of all spins in (3+1)-dimensions // Phys. Lett. B. — 1992. — T. 285. — C. 225—234. — DOI: 10.1016/0370-2693(92)91457-K.
28. *Gelfond O. A., Vasiliev M. A.* Homotopy Operators and Locality Theorems in Higher-Spin Equations // Phys. Lett. B. — 2018. — T. 786. — C. 180—188. — DOI: 10.1016/j.physletb.2018.09.038. — arXiv: 1805.11941 [hep-th].
29. *Gelfond O. A., Vasiliev M. A.* Spin-Locality of Higher-Spin Theories and Star-Product Functional Classes // JHEP. — 2020. — T. 03. — C. 002. — DOI: 10.1007/JHEP03(2020)002. — arXiv: 1910.00487 [hep-th].

30. Homotopy Properties and Lower-Order Vertices in Higher-Spin Equations / V. E. Didenko, O. A. Gelfond, A. V. Korybut, M. A. Vasiliev // J. Phys. A. — 2018. — T. 51, № 46. — C. 465202. — DOI: 10.1088/1751-8121/aae5e1. — arXiv: 1807.00001 [hep-th].
31. *Gelfond O. A., Korybut A. V.* Manifest form of the spin-local higher-spin vertex $\mathcal{V}_{\omega CCC}^{\eta\eta}$ // Eur. Phys. J. C. — 2021. — T. 81, № 7. — C. 605. — DOI: 10.1140/epjc/s10052-021-09401-4. — arXiv: 2101.01683 [hep-th].
32. *Vasiliev M. A.* Multiparticle extension of the higher-spin algebra // Class. Quant. Grav. — 2013. — T. 30. — C. 104006. — DOI: 10.1088/0264-9381/30/10/104006. — arXiv: 1212.6071 [hep-th].
33. *Gross D. J.* High-Energy Symmetries of String Theory // Phys. Rev. Lett. — 1988. — T. 60. — C. 1229. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.60.1229.
34. *Englert F., Brout R.* Broken Symmetry and the Mass of Gauge Vector Mesons // Physical Review Letters. — 1964. — T. 13. — C. 321–323. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.13.321.
35. *Higgs P. W.* Broken Symmetries, Massless Particles and Gauge Fields // Physics Letters. — 1964. — T. 12. — C. 132–133. — DOI: 10.1016/0031-9163(64)91136-9.
36. *Vasiliev M. A.* Actions, charges and off-shell fields in the unfolded dynamics approach // Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. — 2006. — T. 3. — C. 37–80. — DOI: 10.1142/S0219887806001016. — arXiv: hep-th/0504090.
37. *Васильев М. А.* Калибровочная форма описания безмассовых полей произвольного спина // Ядерная физика. — 1980. — Т. 32. — С. 855–861.
38. *Fronsdal C.* Massless Fields with Integer Spin // Phys. Rev. D. — 1978. — T. 18. — C. 3624. — DOI: 10.1103/PhysRevD.18.3624.
39. *Vasiliev, M. A.* Differential contracting homotopy in higher-spin theory // JHEP. — 2023. — T. 11. — C. 048. — DOI: 10.1007/JHEP11(2023)048. — arXiv: 2307.09331 [hep-th].
40. Limiting Shifted Homotopy in Higher-Spin Theory and Spin-Locality / V. E. Didenko, O. A. Gelfond, A. V. Korybut, M. A. Vasiliev // JHEP. — 2019. — T. 12. — C. 086. — DOI: 10.1007/JHEP12(2019)086. — arXiv: 1909.04876 [hep-th].

41. Spin-locality of η^2 and $\bar{\eta}^2$ quartic higher-spin vertices / V. E. Didenko, O. A. Gelfond, A. V. Korybut, M. A. Vasiliev // JHEP. — 2020. — T. 12. — C. 184. — DOI: 10.1007/JHEP12(2020)184. — arXiv: 2009.02811 [hep-th].
42. *Vasiliev M. A.* From Coxeter Higher-Spin Theories to Strings and Tensor Models // JHEP. — 2018. — T. 08. — C. 051. — DOI: 10.1007/JHEP08(2018)051. — arXiv: 1804.06520 [hep-th].
43. *Gaberdiel M. R., Gopakumar R.* Higher Spins & Strings // JHEP. — 2014. — T. 11. — C. 044. — DOI: 10.1007/JHEP11(2014)044. — arXiv: 1406.6103 [hep-th].
44. *Gaberdiel M. R., Gopakumar R.* Stringy Symmetries and the Higher Spin Square // J. Phys. A. — 2015. — T. 48, № 18. — C. 185402. — DOI: 10.1088/1751-8113/48/18/185402. — arXiv: 1501.07236 [hep-th].
45. *Gaberdiel, Matthias R. and Peng, Cheng and Zadeh, Ida G.* Higgsing the stringy higher spin symmetry // JHEP. — 2015. — T. 10. — C. 101. — DOI: 10.1007/JHEP10(2015)101. — arXiv: 1506.02045 [hep-th].
46. *Gaberdiel M. R., Gopakumar R.* String Theory as a Higher Spin Theory // JHEP. — 2016. — T. 09. — C. 085. — DOI: 10.1007/JHEP09(2016)085. — arXiv: 1512.07237 [hep-th].
50. *Vasiliev M. A.* Consistent Equations for Interacting Massless Fields of All Spins in the First Order in Curvatures // Annals Phys. — 1989. — T. 190. — C. 59–106. — DOI: 10.1016/0003-4916(89)90261-3.
51. *Tarusov A. A., Ushakov K. A.* The σ_- Cohomology Analysis for Coxeter HS B_2 model // JHEP. — 2026. — T. 6. — C. 44. — DOI: 10.1007/JHEP06(2026)044. — arXiv: 2602.10788 [hep-th].