

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Физический
институт им. П.Н. Лебедева Российской академии наук

На правах рукописи

Ушаков Кирилл Александрович

**Анализ мультичастичных обобщений теорий высших
спинов**

Специальность 1.3.3 —
«Теоретическая физика»

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2026

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Физическом институте им. П.Н. Лебедева Российской академии наук.

Научный руководитель:

Васильев Михаил Андреевич, доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук (ФИАН РАН), отделение теоретической физики, высококвалифицированный главный научный сотрудник.

Официальные оппоненты:

Зиновьев Юрий Михайлович, доктор физико-математических наук, Институт физики высоких энергий им. А.А. Логунова Национального исследовательского центра «Курчатовский институт», главный научный сотрудник.

Федорук Сергей Алексеевич, доктор физико-математических наук, Международная межправительственная организация Объединенный институт ядерных исследований, начальник сектора Лаборатории теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова.

Ведущая организация:

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук (МИАН РАН).

Защита состоится 12 октября 2026 г. в 13-30 на заседании диссертационного совета Д 24.1.262.04 при Физическом институте им. П. Н. Лебедева РАН по адресу: 119991, г. Москва, Ленинский проспект, д. 53.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФИАН, а также на сайте www.lebedev.ru.

Автореферат разослан “___” _____ 2026 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 24.1.262.04,
доктор физ.-мат. наук

Чернышов Дмитрий Олегович

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Построение согласованной квантовой теории гравитации и ее объединение с калибровочными взаимодействиями остаются одними из основных нерешенных задач современной теоретической физики. Общая теория относительности успешно описывает классическую гравитацию, однако при пертурбативном квантовании стандартными методами квантовой теории поля возникает проблема неперенормируемости. Одним из наиболее содержательных подходов к этой проблеме является изучение симметрий гипотетической квантовой теории гравитации. Мотивировкой такого подхода служит ключевая роль калибровочных симметрий в описании электромагнитного, слабого и сильного взаимодействий.

Наиболее успешная реализация подобного симметричного взгляда на проблему квантования гравитации – это теория струн, основанная на двумерной конформной симметрии мирового листа и рассматриваемая как один из основных кандидатов на объединенное описание гравитации и калибровочных взаимодействий. Ее спектр содержит гравитон и бесконечную башню возбуждений сколь угодно высокого спина. На плоском фоне при ненулевом натяжении струны состояния возбужденных уровней, как правило, являются массивными, причем характерный масштаб их масс определяется струнным масштабом. Вместе с тем ряд наблюдений указывает на то, что при переходе к особым пределам теории может проявляться значительно более богатая симметрия.

В работах Гросса и Менде было исследовано рассеяние струн при энергиях, значительно превышающих струнный масштаб, и фиксированных углах рассеяния [4; 5]. Было обнаружено необычное высокоэнергетическое поведение амплитуд. На основе этих результатов Гросс указал на существование соотношений между амплитудами рассеяния различных струнных состояний, которые при низких энергиях воспринимаются как независимые. Такое вырождение естественно интерпретировать как признак скрытой симметрии, становящейся более явной в высокоэнергетическом режиме. Само по себе это наблюдение еще не определяет алгебру симметрии и не доказывает, что речь идет именно о калибровочной симметрии высших спинов. Однако оно согласуется с картиной, возникающей в пределе нулевого натяжения струны.

Параметр α' пропорционален величине, обратной натяжению струны. Для состояния фиксированного уровня масса пропорциональна $1/\sqrt{\alpha'}$, поэтому в пределе нулевого натяжения бесконечная башня массивных состояний схлопывается к нулевому уровню массы. В локальном лоренц-ковариантном описании безмассовые поля ненулевого спина обладают калибровочной симметрией, устраняющей продольные и другие нефизические компоненты полей и оставляющей только физические поляризации. Поэтому одновременное появление бесконечного числа безмассовых состояний сколь угодно высокого спина естественным образом указывает на усиление симметрии и на возникновение высшеспиновой калибровочной структуры [6—9]. Высокоэнергетический предел при фиксированном натяжении и предел нулевого натяжения являются различными предельными процедурами: в первом случае увеличивается энергия процесса, во втором уменьшается струнный масштаб масс. Тем не менее оба предела указывают на возможное проявление большой скрытой симметрии теории струн.

Калибровочная теория высших спинов (ВС) является направлением теории поля, в котором изучаются взаимодействующие безмассовые поля произвольного спина. Существенные ограничения на построение таких взаимодействий в пространстве Минковского отражены в теоремах запрета и их обобщениях [10—13]. Фрадкин и Васильев показали, что взаимодействия безмассовых полей высших спинов могут быть согласованно реализованы в пространстве с ненулевой космологической постоянной [14]. Важную роль при этом играет реперное описание высшеспиновых полей, обобщающее картановскую формулировку гравитации [15—18]. Дальнейшее развитие этого подхода привело к развернутому формализму и нелинейным уравнениям теории высших спинов [19—23].

Развернутый формализм позволяет переписать полевую теорию в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка на набор дифференциальных форм, который в общем случае может быть бесконечным. Такая запись удобна для построения согласованных систем взаимодействующих полей, однако физическое содержание полученных уравнений не всегда видно непосредственно. В частности, необходимо отделить динамические (примарные) поля от вспомогательных, выделить калибровочные параметры для преобразований динамических полей и определить калибровочно-инвариантные

дифференциальные операторы, включающие полевые уравнения. Для решения этой задачи используется когомологический анализ оператора σ_- , выделяемого из развернутых уравнений [24; 25]. Тем самым вычисление $H(\sigma_-)$ является естественным продолжением построения развернутой системы: оно позволяет установить, какие поля и уравнения действительно закодированы в ее компактной форме.

Связь теории струн с теорией высших спинов приводит к вопросу о происхождении масс струнных возбуждений. Естественнo предположить, что предел нулевого натяжения соответствует фазе с ненарушенной высшеспиновой симметрией, тогда как при ненулевом натяжении часть этой симметрии нарушается и высшеспиновые поля приобретают массы. Такое приобретение масс является высшеспиновым аналогом механизма Хиггса и получило название *La Grande Bouffe* [26; 27].

Физический смысл этого механизма можно пояснить на уровне числа степеней свободы. В четырехмерном пространстве безмассовое поле целого спина s имеет две физические поляризации, тогда как массивное поле того же спина имеет $2s + 1$ поляризаций. Следовательно, при приобретении массы должны возникнуть $2s - 1$ дополнительных степеней свободы. В плоском пространстве при включении массы поле спина s последовательно поглощает поля меньших спинов, которые обеспечивают недостающие степени свободы. В пространстве AdS недостающие степени свободы объединяются в голдстоуновский сектор, связанный с представлением спина $s - 1$.

Для реализации такого механизма необходимо располагать теорией с достаточно богатым набором полей, способным содержать как безмассовые высшеспиновые поля, так и необходимые голдстоуновские моды. Одним из возможных подходов является расширение спектра стандартной теории высших спинов. Васильевым были предложены мультичастичное расширение алгебры высших спинов [28] и класс кокстеровских расширений, связанных с алгебрами Чередника и конечными группами Кокстера [29]. В частности, была выдвинута гипотеза о том, что мультичастичное кокстеровское расширение, ассоциированное с группой B_2 , может быть связано с теорией струн. Ожидается, что в рамках этой теории существует точное решение системы нелинейных уравнений, флуктуации над которым соответствуют массивным полям.

Степень разработанности темы.

Связь теории высших спинов с теорией струн активно обсуждается с конца 1980-х годов. Исследование высокоэнергетического поведения струнных амплитуд Гроссом и Менде и последующий анализ Гросса выявили признаки большой скрытой симметрии [4; 5]. Предел нулевого натяжения изучался непосредственно со стороны струнного спектра и его полевой интерпретации [7—9], а также в рамках голографического соответствия AdS/CFT [6; 30; 31]. Высшеспиновый аналог механизма Хиггса и особенности голдстоуновского сектора в пространстве AdS обсуждались в работах [26; 27].

Важные результаты были получены при изучении AdS_3/CFT_2 -голографии. Габердил и Гопакумар показали, что теория высших спинов возникает как подсектор теории струн на фоне $AdS_3 \times S^3 \times T^4$ в пределе нулевого натяжения [32]. При этом полная симметрия значительно превосходит стандартную высшеспиновую алгебру и содержит две некоммутирующие высшеспиновые алгебры, образующие так называемый высшеспиновый квадрат [33]. Эти результаты подтверждают, что связь теории струн с высшими спинами может требовать расширения стандартной высшеспиновой симметрии.

Несмотря на перечисленные результаты, полного описания перехода от безмассовой высшеспиновой фазы к фазе массивных струнных возбуждений в настоящее время нет. Со стороны теории высших спинов исследуется несколько направлений.

Один подход состоит в поиске вакуумов, нарушающих высшеспиновую симметрию. В работе [34] было построено вакуумное решение, нарушающее AdS -симметрию до симметрии Пуанкаре меньшей размерности. В работе [35] исследованы флуктуации над вакуумом подобного типа в самодуальном секторе теории высших спинов.

Другой подход связан с расширением стандартной теории высших спинов. В частности, мультичастичное расширение алгебры высших спинов действует на пространствах мультичастичных состояний и рассматривается как возможный элемент струноподобного обобщения теории [28; 36]. Кокстеровские расширения теории высших спинов (КВС) строятся на основе обобщения алгебры деформированных осцилляторов, тесно связанного с рациональными алгебрами Чередника [37; 38], ассоциированными с группами Кокстера C [29]. Особое место занимает модель, связанная с группой B_2 . Она содер-

жит два параметра деформации, соответствующие двум орбитам группы B_2 в пространстве корней. Кроме того, мастер-поля B_2 -модели описываются в терминах удвоенного набора осцилляторов $Y_{1,2}^A$, образующих представление группы B_2 , то есть наивно в модели присутствуют две некоммутирующие стандартные алгебры высших спинов аналогично наблюдениям Габердила и Гопакумара [33] в теории струн. На этом основании было высказано предположение, что мультичастичное B_2 -расширение может быть связано с теорией струн [29]. Предполагается, что один из параметров B_2 -теории отвечает за обычные высшеспиновые взаимодействия в AdS , а второй может быть связан со струнными эффектами.

Дополнительная возможность расширения спектра возникает в конструкциях двойной копии. Пример такой теории был предложен для киральной теории высших спинов [39].

Для дальнейшего развития данного направления требуется изучить содержание мультичастичного расширения теории высших спинов и теорий КВС. В настоящей диссертации изучается содержание B_2 -КВС-теории, а именно описываемые ею $\mathfrak{so}(3, 2)$ -модули и спектр полей.

В стандартной развернутой формулировке теории высших спинов поля один-формы принимают значения в присоединенном модуле алгебры высших спинов, который далее обозначается через (adj) , тогда как поля ноль-формы принадлежат твистованно-присоединенному модулю, обозначаемому через (tw) . Эти два типа модулей играют различную роль: присоединенный модуль содержит калибровочные поля, а твистованно-присоединенный модуль содержит обобщенные тензоры Вейля и их производные. В B_2 -КВС-теории возникают тензорные произведения стандартных модулей, а также модули, не изоморфные таким произведениям.

В стандартной теории высших спинов связь между развернутыми уравнениями и описанием симметричных безмассовых полей произвольного спина устанавливается Первой теоремой о массовой оболочке [40; 41]. С точки зрения σ_- -когомологий эта теорема означает, что соответствующие классы когомологий выделяют динамически существенные компоненты развернутой системы: примарные поля, калибровочно-инвариантные дифференциальные операторы на них и дифференциальные калибровочные параметры. Поэтому для интерпретации B_2 -полей в терминах симметричных безмассо-

вых полей необходимо установить явный вид представителей классов когомологий $H(\sigma_-)$ в стандартной теории высших спинов. Частичный анализ σ_- -когомологий для d -мерной теории в пространстве Минковского был приведен в [25]. В работе [42] соответствующие когомологии описаны на уровне диаграмм Юнга. В связи с этим в диссертации проводится полный анализ σ_- -когомологий для стандартного присоединенного модуля в пространстве Минковского произвольной размерности, а также в пространстве AdS_4 . Результаты получаются с помощью гомотопической леммы, или обобщения теории Ходжа, [43], то есть путем введения обобщенного оператора Лапласа и нахождения его ядра. Аналогичные методы использовались в работах [44—47].

Цель диссертационного исследования.

Целью данной диссертационной работы является исследование когомологической и теоретико-представленческой структуры стандартных и кокстеровски расширенных развернутых систем теории высших спинов, включающее явное вычисление σ_- -когомологий, классификацию модулей B_2 -КВС-теории, установление динамического содержания соответствующих уравнений и анализ линейной вершины $\Upsilon(\Omega_{AdS}, \Omega_{AdS}, C)$, связывающей секторы один-форм и ноль-форм.

Для достижения поставленной цели были сформулированы и решены следующие **задачи**:

1. Построить обобщенный оператор Лапласа Δ для σ_- -комплекса, соответствующего стандартному присоединенному модулю в пространствах $Mink_d$ и AdS_4 . Найти базис собственных векторов оператора Δ и выделить элементы $\ker \Delta$.
2. Для конечной группы Кокстера C получить необходимое и достаточное условие распутываемости соответствующего модуля в классе линейных преобразований осцилляторов, то есть его эквивалентности тензорному произведению модулей стандартной четырехмерной теории высших спинов.
3. Реализовать B_2 -модули в терминах модулей Фока и установить существование либо отсутствие комплексно-эквивалентного унитарного модуля старшего или младшего веса. Найти способ редукции B_2 -системы к унитарному подсектору.

4. Для модулей $(\text{adj} \otimes \text{adj})$ и $(\text{tw} \otimes \text{adj})$ вычислить $H(\sigma_-)$ и интерпретировать полученные результаты в терминах $\mathfrak{so}(3, 2)$ -полей. Исследовать структуру пространств кратностей представлений $\mathfrak{so}(3, 2)$.
5. Проанализировать содержание линейной вершины $\Upsilon(\Omega_{AdS}, \Omega_{AdS}, C)$, используя результаты вычисления $H^2(\sigma_-)$ для модуля $(\text{adj} \otimes \text{adj})$.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Альтернативное доказательство Первой теоремы о массовой оболочке может быть получено с помощью ходжевской процедуры полного вычисления представителей кохомологий $H(\sigma_-)$ для присоединенного модуля теории высших спинов в пространствах $Mink_d$ и AdS_4 .
2. Для КВС-теории, связанной с произвольной конечной группой Кокстера, необходимым и достаточным условием распутываемости модулей – то есть эквивалентности тензорному произведению модулей стандартной четырехмерной теории высших спинов – в классе линейных преобразований осцилляторов является выполнение равенства $(R\bar{R}^T)^2 = \mathbf{1}$ для соответствующих матриц отражений.
3. Классификация B_2 -модулей по критерию существования комплексно-эквивалентного унитарного модуля старшего или младшего веса. Механизм редукции к унитарному подсектору линеаризованной теории.
4. Полный список представителей младших σ_- -когомологий для B_2 -модулей $(\text{adj} \otimes \text{adj})$ и $(\text{tw} \otimes \text{adj})$. Поля один-формы со значениями в модуле $(\text{adj} \otimes \text{adj})$ описывают бесконечное число копий безмассовых полей спина $s \geq 1$ и частично-безмассовых полей всех возможных глубин безмассовости, организованных в неприводимые представления $\mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{sl}(2)$.
5. В примерах полей младших спинов содержание вершины $\Upsilon(\Omega_{AdS}, \Omega_{AdS}, C)$ в секторе полей один-форм $(\text{adj} \otimes \text{adj})$ зависит от веса поля $\omega(Y_1, Y_2)$ относительно алгебры $\mathfrak{sl}(2)$, сохраняющей суммарную степень мономов по переменным Y_i . Для полей ненулевого веса вершина содержит все 2-коциклы оператора σ_- , а в случае поля нулевого веса присутствуют только кохомологии типа Вейля.

Научная новизна, достоверность и личный вклад автора. Новизна рассматриваемых вопросов, а также достоверность полученных результатов привели к продвижению в понимании устройства кокстеровского расширения теории высших спинов. Проводимое в диссертации явное вычисление

когомологий $H(\sigma_-)$ с помощью обобщения теории Ходжа [48] в рамках стандартной теории высших спинов позволяет обосновать вид коциклов, представленных в работе [25]. Тем самым предъясняется альтернативное доказательство Первой теоремы о массовой оболочке [20; 22], ранее доказанной в работах [42; 49]. Впервые исследованы структура и свойства представлений теории высших спинов, расширенной группой Кокстера, в частности группой B_2 . Анализ динамического содержания уравнений на поля, принимающие значения в модулях $(\text{adj} \otimes \text{adj})$ и $(\text{tw} \otimes \text{adj})$ ранее не проводился. Все представленные в диссертации результаты являются оригинальными и получены автором лично или при его непосредственном участии. Вклад автора в работы [1; 3] является определяющим. Вклад в работу [2] заключается в анализе структуры и теоретико-представленческих свойств модулей КВС-теории, в частности B_2 -теории (раздел 4). Достоверность полученных результатов обеспечивается надежностью применяемого в диссертации математического аппарата теоретической физики и согласием с результатами работ других авторов.

Научная и практическая значимость. Изучаемые в диссертации проблемы представляют научный интерес в области теоретической и математической физики. Успешное применение обобщения теории Ходжа к вычислению σ_- -когомологий в стандартной теории высших спинов подтверждает эффективность данного метода анализа содержания развернутых уравнений. Классификация B_2 -модулей по наличию комплексно-эквивалентного унитарного модуля старшего или младшего веса показала, что в B_2 -теории существуют поля, подходящие для описания безмассовых физических состояний. Существование способа редукции к унитарному подсектору линеаризованной теории подтверждает, что B_2 -расширение теории высших спинов можно рассматривать как непротиворечивое обобщение стандартной теории. Прделанная в диссертации переформулировка B_2 -модулей в терминах модулей Фока и автоморфизмов алгебры осцилляторов может быть полезна для изучения представленческих свойств модулей в рамках иных развернутых систем (в частности для других теорий КВС). Результаты анализа σ_- -когомологий для модулей $(\text{adj} \otimes \text{adj})$ и $(\text{tw} \otimes \text{adj})$ отвечают на вопрос о спектре B_2 -модели и закладывают основу для дальнейшего продвижения к спонтанному нарушению симметрии и установлению четкой картины связи теорий высших спинов

с теорией струн.

Методология и методы исследования. В работе используются методы и понятия из теории развернутых систем, σ_- -когомологического анализа, теории представлений алгебр Ли и звездочных алгебр, а также осцилляторные реализации модулей теории высших спинов. Для вычисления когомологий применяется гомотопическая лемма, или обобщение теории Ходжа, сводящее задачу к построению обобщенного оператора Лапласа и нахождению его ядра. При анализе B_2 -модулей используются реализации в терминах модулей Фока, комплексные преобразования Боголюбова и автоморфизмы алгебры осцилляторов.

Апробация работы. Основные результаты работы опубликованы в трех статьях [1–3] в журналах, индексируемых Web of Science и Scopus. Кроме того, основные результаты диссертации докладывались на семинарах ОТФ ФИАН и ОТФ МИАН, на 64-й и 66-й Всероссийских научных конференциях МФТИ, на международных конференциях “Supersymmetries and Quantum Symmetries” (SQS’24) в Дубне, “Efim Fradkin Centennial Conference” (ESF-2024) в Москве.

Объем и структура работы.

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и двух приложений. Полный объем диссертации составляет 165 страниц. Диссертация не содержит таблиц и рисунков. Список литературы содержит 151 наименование.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируются цель и задачи работы, раскрываются ее научная новизна и практическая значимость.

В **первой главе**, основанной на работе [1], рассматривается применение обобщения теории Ходжа [48] к анализу динамического содержания предложенных в работах [40; 41] развернутых систем для безмассовых полей, описываемых один-формами, в пространствах $Mink_d$ и AdS_4 . Динамическое содержание устанавливается с помощью анализа когомологий σ_- -комплекса дифференциальных форм со значениями в неприводимых представлениях.

Представители младших групп когомологий $H^{0,1,2}(\sigma_-)$ дают полную информацию о дифференциальных калибровочных параметрах, физических полях, а также калибровочно-инвариантных дифференциальных операторах на физических полях, отвечающих данным развернутым системам. В результате получены явные выражения для представителей когомологий $H^p(\sigma_-)$ в случае пространства $Mink_d$ и представителей $H^{0,1,2}(\sigma_-)$ в случае пространства AdS_4 . Таким образом, предъявлено альтернативное доказательство Первой теоремы о массовой оболочке [20].

В разделе 1.1 обсуждаются подходы к описанию симметричных безмассовых полей.

В подразделе 1.1.1 излагается фронсдаловское описание симметричных безмассовых полей в пространстве $Mink_d$ в терминах симметричных дважды бесследовых тензоров.

В подразделе 1.1.2 приводятся развернутые уравнения для полей одной формы, отвечающих безмассовым частицам в пространствах $Mink_d$ и AdS_4 . В первом случае уравнения формулируются в терминах полей, принимающих значения в неприводимых $\mathfrak{so}(d-1, 1)$ -тензорах, соответствующих не более чем двухрядным диаграммам Юнга. Во втором случае поля принимают значения в $\mathfrak{so}(3, 1)$ -мультиспинорах. Далее проводится сопоставление двух подходов к описанию безмассовых полей.

В разделе 1.2 дается интерпретация динамического содержания развернутых уравнений общего положения в терминах когомологий нильпотентного оператора σ_- и приводится обобщение теории Ходжа.

В подразделе 1.2.1 рассматривается уравнение ковариантного постоянства для полей p -форм $\mathcal{W}$, принимающих значения в $\mathbb{N}$ -градуированном векторном пространстве V . Из этого уравнения можно выделить нильпотентный оператор, понижающий градуировку

$$\sigma_- : \Lambda^p(\mathcal{M}^d) \otimes V^q \rightarrow \Lambda^{p+1}(\mathcal{M}^d) \otimes V^{q-1}. \quad (1)$$

В работе [25] было показано, что нетривиальные динамические поля порождают $H^p(\sigma_-)$, параметры калибровочных преобразований для динамических полей порождают $H^{p-1}(\sigma_-)$, а калибровочно-инвариантные дифференциальные операторы на динамических полях, содержащиеся в уравнении на поле $\mathcal{W}$, порождают $H^{p+1}(\sigma_-)$. В конце подраздела обсуждается возможность

снятия дифференциальных уравнений на динамические поля с помощью добавления представителей $H^{p+1}(\sigma_-)$ в правую часть уравнений на $\mathcal{W}$, а также зависимость содержания σ_- -когомологий от определения поля $\mathcal{W}$ и оператора σ_- для развернутых уравнений в теории высших спинов.

В **подразделе 1.2.2** представляется обобщение теории Ходжа. Формулируются две леммы, которые позволяют свести задачу о вычислении σ_- -когомологий к задаче о нахождении ядра оператора Лапласа

$$\Delta = \sigma_- \sigma_-^\dagger + \sigma_-^\dagger \sigma_- , \quad (2)$$

где $\sigma_-^\dagger$ – оператор, сопряженный к σ_- в смысле скалярного произведения на пространстве V . Для этого необходимо, чтобы оператор Δ был диагонализуемым на градуированном векторном пространстве V . В конце подраздела обсуждается выполнение условий лемм в рамках развернутых систем для безмассовых полей в пространствах $Mink_d$ и AdS_4 .

В **разделе 1.3** проводится вычисление σ_- -когомологий для развернутой системы в пространстве $Mink_d$. Рассмотрены случаи полей один-форм, принимающих значения в неприводимых представлениях $\mathfrak{gl}(d)$ и в неприводимых представлениях $\mathfrak{so}(d)$, соответствующих не более чем двухрядным диаграммам Юнга.

В **подразделе 1.3.1** вводятся пространство форм $\Lambda(\mathcal{M}^d) \otimes \mathbb{R}[Y, Z]$ и скалярное произведение, в терминах которых проводятся дальнейшие вычисления. На этом пространстве определяется ограниченная снизу градуировка и ассоциированный с ней оператор σ_- .

В **подразделе 1.3.2** рассматривается пример полей, принимающих значения в неприводимых представлениях $\mathfrak{gl}(d)$. С помощью алгебры $\mathfrak{gl}(2|1)$, Хау-дуальной к $\mathfrak{gl}(d)$, производится ограничение пространства $\Lambda(\mathcal{M}^d) \otimes \mathbb{R}[Y, Z]$ до форм со значениями в неприводимых $\mathfrak{gl}(d)$ -модулях. Далее в терминах генераторов алгебры $\mathfrak{gl}(2|1)$ строится оператор $\sigma_-^\dagger$, корректно действующий на подпространстве $\mathfrak{gl}(d)$ -неприводимых форм. Из операторов σ_- и $\sigma_-^\dagger$ строится оператор Лапласа Δ , коммутирующий с генераторами $\mathfrak{gl}(d)$. Согласно лемме Шура, оператор Δ действует скалярно на каждом неприводимом представлении $\mathfrak{gl}(d)$, что позволяет диагонализировать его на рассматриваемом пространстве. Оставшаяся часть подраздела посвящена нахождению собственных значений оператора Δ . В результате выводятся выражения для представителей

когомологий $H^p(\sigma_-)$. Выражения для представителей групп $H^{0,1,2}(\sigma_-)$ совпадают с полученными в работе [25]. Таким образом, предъявлен альтернативный вывод когомологий $H^{0,1,2}(\sigma_-)$, а также получены выражения для представителей старших когомологий.

В **подразделе 1.3.3** рассматриваются поля, принимающие значения в неприводимых представлениях $\mathfrak{so}(d)$. Как и в предыдущем подразделе, с помощью Хау-дуальной алгебры, являющейся в данном случае алгеброй $\mathfrak{osp}(2|4)$, производится ограничение пространства форм $\Lambda(\mathcal{M}^d) \otimes \mathbb{R}[Y, Z]$ до форм со значениями в неприводимых $\mathfrak{so}(d)$ -модулях. Строится оператор $\sigma_-^\dagger$ и оператор Δ , для которого впоследствии находится $\ker \Delta$. В результате получены выражения для представителей когомологий $H^p(\sigma_-)$. Выражения для представителей групп $H^{0,1,2}(\sigma_-)$ совпадают с приведенными в работе [25]. Прделанные вычисления на основе оператора Δ дают другой путь извлечения σ_- -когомологий и доказательства Первой теоремы о массовой оболочке по сравнению с методом, использованным в работе [42].

В **разделе 1.4** проводится вычисление σ_- -когомологий для развернутой системы в пространстве AdS_4 . Рассмотрены случаи бозонных и фермионных подсистем.

В **подразделе 1.4.1** вводятся пространство форм $\Lambda(\mathcal{M}^4) \otimes \mathbb{C}[y, \bar{y}]$ и скалярное произведение, в терминах которых проводятся дальнейшие вычисления. Определяются градуировка и оператор σ_- для бозонных и фермионных подсистем, строятся операторы $\sigma_-^\dagger$ и Δ .

Далее в **подразделе 1.4.2** вычисляются собственные значения оператора Лапласа в случае бозонной подсистемы. В результате получены выражения для представителей младших когомологий $H^{0,1,2}(\sigma_-)$.

В **подразделе 1.4.3** аналогичные вычисления проводятся для фермионной подсистемы. В результате находятся представители когомологий $H^{0,1,2}(\sigma_-)$, отвечающие калибровочным параметрам, динамическим полям и калибровочно-инвариантным дифференциальным операторам для безмассовых полей полуцелых спинов.

В **разделе 1.5** суммируются полученные результаты первой главы.

Во **второй главе**, основанной на работе [2], исследуется структура и теоретико-представленческие свойства модулей теории высших спинов, расширенной конечной группой Кокстера, с подробным рассмотрением случая

группы B_2 . Устанавливается существование двух типов модулей в рамках КВС-теории: распутываемые и запутанные. Первые являются многочастичными состояниями, образованными из модулей (tw) и (adj) стандартной теории высших спинов, а последние – это бесконечномерные модули нового вида. Сформулирован и доказан критерий распутываемости модулей, отвечающий на вопрос о существовании линейного преобразования осцилляторных переменных, сводящего рассматриваемый модуль к тензорному произведению модулей стандартной теории. Для группы B_2 проводится классификация модулей по критерию наличия комплексно-эквивалентных унитарных модулей старшего или младшего веса, что необходимо для оценки теории как расширения стандартной теории высших спинов. Предложена редукция сектора полей ноль-форм к унитарным подмодулям. На уровне нелинейных уравнений выделяется подсистема, инвариантная относительно автоморфизма четности, действующего на операторы Клейна, а в линейном приближении на поля ноль-формы накладываются граничные условия.

В разделе 2.1 приводится формулировка кокстеровского расширения теории высших спинов в соответствии с работой [29]. Сначала дается определение конечной группы Кокстера как группы отражений в евклидовом пространстве (пространстве корней). Далее представляется обрaмленная алгебра Чередника, формулируемая в терминах осцилляторов q_α^n , идемпотентов I_n и операторов Клейна $\hat{K}_v$. Отличие данной конструкции от рациональной алгебры Чередника [38; 50] состоит во введении идемпотентных элементов, расщепляющих единичный оператор и индуцирующих фильтрацию на алгебре. Кокстеровское расширение теории высших спинов задается системой нелинейных уравнений на мастер-поля W, B, S , где уравнения имеют вид

$$d_x W + W * W = 0, \quad (3)$$

$$d_x B + W * B - B * W = 0, \quad (4)$$

$$d_x S + W * S + S * W = 0, \quad (5)$$

$$S * B = B * S, \quad (6)$$

$$S * S = i \left(dZ^{An} dZ_{An} + \sum_i \sum_{v \in \mathcal{R}_i} \left[\eta_i B \frac{v^n v^m}{(v, v)} dz_n^\alpha dz_{\alpha m} * \varkappa_v \hat{k}_v + \text{к.с.} \right] \right). \quad (7)$$

Отличие этих уравнений от уравнений стандартной теории заключается в увеличении числа независимых констант η_i . В КВС-теории число независи-

мых констант определяется количеством орбит $\mathcal{R}_i$ группы Кокстера в пространстве корней. В конце раздела обсуждается вопрос роста вакуумной энергии (младшего веса) при переходе от одного набора осцилляторов y_α к p копиям y_α^n , $n = 1, \dots, p$. Введение идемпотентов I_n расщепляет единичный оператор, что сохраняет возможность описания безмассовых полей для любого числа копий осцилляторов.

В разделе 2.2 обсуждается структура модулей теории КВС с конечной группой $\mathcal{C}$ общего положения. Для этого проводится линеаризация уравнения ковариантного постоянства над AdS_4 -вакуумом. В результате линеаризации получается следующая ковариантная производная

$$D_\Omega f(Y, I; \hat{k}, \hat{\bar{k}}|x) = \left[D_L + \frac{1}{2} \delta^{nm} e^{\alpha\dot{\alpha}} \left(\mathbf{1}_n^k \bar{\mathbf{1}}_m^l + R(k)_n^k \bar{R}(\bar{k})_m^l \right) (y_{\alpha k} \hat{\bar{\partial}}_{\dot{\alpha} l} + \bar{y}_{\dot{\alpha} l} \hat{\partial}_{\alpha k}) - \right. \\ \left. - \frac{i}{2} \delta^{nm} e^{\alpha\dot{\alpha}} \left(\mathbf{1}_n^k \bar{\mathbf{1}}_m^l - R(k)_n^k \bar{R}(\bar{k})_m^l \right) (y_{\alpha k} \bar{y}_{\dot{\alpha} l} - \hat{\partial}_{\alpha k} \hat{\bar{\partial}}_{\dot{\alpha} l}) \right] f(Y, I; \hat{k}, \hat{\bar{k}}|x), \quad (8)$$

где D_L – лоренц-ковариантная производная, а $R(k), \bar{R}(\bar{k})$ – матрицы отражений в пространстве корней. Структура модуля определяется матричным произведением $\delta^{nm} R(k)_n^k \bar{R}(\bar{k})_m^l$. При этом количество типов $\mathcal{C}$ -модулей равно $\text{ord}(\mathcal{C})$. В случае группы $A_1 \cong \mathbb{Z}_2$ воспроизводится вид ковариантной производной для присоединенного и твистованно-присоединенного модулей стандартной теории. Далее делается вывод, что $\mathcal{C}$ -модули бывают двух типов: распутываемые и запутанные. Первые изоморфны тензорному произведению модулей (tw) и (adj). Вторые имеют нетривиальное смешивание осцилляторов с различными кокстеровскими номерами, что делает их неизоморфными произведениям стандартных модулей. В контексте этой классификации формулируется и доказывается необходимое и достаточное условие существования линейного преобразования осцилляторов, устанавливающего изоморфизм между $\mathcal{C}$ -модулем и тензорным произведением модулей (tw) и (adj). Условие заключается в выполнении равенства $(R\bar{R}^T)^2 = \mathbf{1}$ для матриц отражений.

В разделе 2.3 проводится анализ модулей B_2 -теории. В начале раздела дается определение группы B_2 через корневые векторы, операторы Клейна и матрицы отражений. Далее обсуждается фильтрация полей по отношению к идемпотентам I_n и разложение на компоненты в соответствии со степенями операторов Клейна. Затем приводятся уравнения ковариантного постоянства

ства, отвечающие каждому из B_2 -модулей. Всего имеется восемь уравнений, шесть из которых описывают тензорные произведения модулей (tw) и (adj) , а два отвечают запутанным модулям. Для запутанных модулей показано, что нелокальным преобразованием

$$C(Y_1, Y_2, I; \hat{k}, \hat{\bar{k}}|x) = \exp \left(\mp i y_{1\alpha} y_2^\alpha \pm i \bar{y}_{1\dot{\alpha}} \bar{y}_2^{\dot{\alpha}} \right) \tilde{C}(Y_1, Y_2, I; \hat{k}, \hat{\bar{k}}|x), \quad (9)$$

совместно с линейной заменой голоморфных переменных можно свести уравнения на запутанные модули к уравнению на модуль $(\text{tw} \otimes \text{tw})$. Однако это не устанавливает изоморфизма исходного запутанного модуля с модулем $(\text{tw} \otimes \text{tw})$: экспоненциальное переопределение выводит за пределы класса полиномиальных функций от Y_n^A , а используемая линейная замена переменных несовместима с условиями сопряжения осцилляторов.

В подразделе 2.3.1 выводятся граничные условия для полей нольформ, отвечающих модулям $(\text{tw} \otimes \text{adj})$ и $(\text{adj} \otimes \text{tw})$. Данные условия устраняют зависимость от осцилляторных переменных, описывающих фактор (adj) . В результате остаются подмодули, эквивалентные (tw) -модулю, обладающему комплексно-эквивалентным унитарным модулем согласно [51]. Вывод граничных условий проводится с помощью решения уравнений ковариантного постоянства на основе метода, разработанного в [52].

В подразделе 2.3.2 модули B_2 -теории переформулируются в терминах модулей Фока и проводится классификация по наличию комплексно-эквивалентных унитарных модулей старшего или младшего веса. Для этого вводится удвоенный набор осцилляторов $\{a_{1,2A}, b_{1,2}^B\}$, с помощью которых определяется алгебра $\mathfrak{su}(2, 2) \oplus \mathfrak{su}(2, 2)$ и модуль Фока

$$|C^{11}\rangle = C^{11}(2b_1, 2\tilde{a}_1, 2b_2, 2\tilde{a}_2) \exp \left\{ -2 \sum_i a_{i\alpha} b_i^\alpha + 2 \sum_i \tilde{a}_{i\dot{\alpha}} \tilde{b}_i^{\dot{\alpha}} \right\}. \quad (10)$$

Далее модуль $(\text{tw} \otimes \text{tw})$ реализуется с помощью уравнения

$$d_x |C^{11}\rangle + \omega_0 * |C^{11}\rangle = 0, \quad (11)$$

где ω_0 – связность AdS_4 , введенная посредством вложения алгебры $\mathfrak{so}(3, 2)$ в $\mathfrak{su}(2, 2) \oplus \mathfrak{su}(2, 2)$. Остальные B_2 -модули получаются путем применения к связности ω_0 автоморфизмов ρ , ассоциированных с операторами Клейна. При этом во всех случаях, за исключением запутанных модулей, действие генераторов энергии и спина на модуле Фока диагонализуемо. Как и в случае

описания в терминах Y_i^A , уравнения на запутанные модули сводятся к уравнению на модуль $(\text{tw} \otimes \text{tw})$ с помощью нелокального экспоненциального преобразования и линейной замены на половине переменных.

Исходные модули с лоренц-инвариантными фоковскими вакуумами не являются унитарными. Однако поле $|C^{11}(x)\rangle$ полностью определяется уравнением и значением в некоторой фиксированной точке x_0 , т. е. модуль $|C^{11}(x_0)\rangle$ содержит всю информацию о динамике четырехмерных полей. В итоге задача сводится к установлению существования или отсутствия унитарного $\mathfrak{su}(2, 2)$ -модуля, комплексно-эквивалентного модулю $|C^{11}(x_0)\rangle$. Для решения этой задачи используется обобщение конструкции из работы [51]. Вводятся новые осцилляторы $e_{\nu A}^i$ и $f_A^{i \nu}$, связанные с исходными осцилляторами комплексным преобразованием Боголюбова, и выделяется диагонально вложенная алгебра $\mathfrak{su}(2, 2)$. Преобразование Боголюбова устанавливает связь между модулем $(\text{tw} \otimes \text{tw})$ и унитарным модулем младшего веса. Для каждого из оставшихся B_2 -модулей с помощью автоморфизмов ρ определяются соответствующие фоковский вакуум, операторы рождения и операторы уничтожения. Затем проверяется, ограничен ли спектр энергии с одной из сторон и допускает ли модуль введение положительно определенной эрмитовой формы, инвариантной относительно действия $\mathfrak{su}(2, 2)$. Таким способом устанавливается наличие или отсутствие комплексно-эквивалентного унитарного модуля старшего или младшего веса.

В подразделе 2.3.3 описанная конструкция применяется к модулям стандартной теории высших спинов. Показано, что твистованно-присоединенный модуль комплексно-эквивалентен унитарному модулю младшего веса, раскладываемому в прямую сумму бесконечномерных неприводимых модулей всех спинов. Присоединенный модуль эквивалентен неунитарному модулю старшего веса, содержащему конечномерные подпредставления. Этот пример используется далее как исходная точка для классификации модулей B_2 -теории.

В подразделе 2.3.4 проводится анализ модулей B_2 -теории. Модуль $(\text{tw} \otimes \text{tw})$ имеет комплексно-эквивалентный унитарный модуль младшего веса. Модули $(\text{tw} \otimes \text{adj})$ и $(\text{adj} \otimes \text{tw})$ содержат унитарные подмодули, эквивалентные модулю (tw) , а модуль $(\text{adj} \otimes \text{adj})$ содержит тривиальный унитарный подмодуль. В случае запутанных модулей обнаруживаются состояния отри-

цательной нормы и потеря весовой структуры, т. е. вакуум не является собственным вектором операторов энергии и спина. В плоском пределе для запутанных уравнений последнее проявляется в недиагонализуемости над полем вещественных чисел матрицы, определяющей плоскую волну, и в невозможности стандартного разделения решений на положительно- и отрицательно-частотные.

В подразделе 2.3.5 обсуждается способ устранения модулей, не имеющих унитарного комплексно-эквивалентного партнера, из сектора ноль-форм нелинейной теории. Нелинейные уравнения КВС-теории допускают автоморфизм четности $\hat{K}_v \rightarrow -\hat{K}_v$. Требование инвариантности относительно этого автоморфизма накладывает ограничения

$$B(Y, Z, I; -\hat{K}|x) = -B(Y, Z, I; \hat{K}|x), \quad W(Y, Z, I; -\hat{K}|x) = W(Y, Z, I; \hat{K}|x). \quad (12)$$

Для B_2 -модели это ограничение оставляет в секторе полей ноль-форм модули $(\text{tw} \otimes \text{adj})$ и $(\text{adj} \otimes \text{tw})$. После наложения граничных условий из подраздела 2.3.1 они редуцируются до твистованно-присоединенных компонент, имеющих комплексно-эквивалентные унитарные модули и описывающих одночастичные безмассовые состояния стандартной теории высших спинов.

В разделе 2.4 суммируются результаты второй главы. Обсуждается возможность обобщения построенной процедуры на КВС-теории, ассоциированные с группами B_p старших рангов, а также проблема продолжения унитарной редукции за пределы линейного приближения.

В третьей главе, основанной на работе [3], исследуется динамическое содержание уравнений для полей второго ранга, то есть полей, зависящих от двух наборов осцилляторов, возникающих в B_2 -КВС-теории в пространстве AdS_4 . Рассматриваются поля один-формы ω , принимающие значения в модуле $(\text{adj} \otimes \text{adj})$, и поля ноль-формы C , принимающие значения в модулях $(\text{tw} \otimes \text{adj})$ и $(\text{adj} \otimes \text{tw})$. Динамическое содержание устанавливается путем вычисления младших кохомологий оператора σ_- . Также анализируется линейная вершина $\Upsilon(\Omega_{AdS}, \Omega_{AdS}, C)$, связывающая секторы полей один-форм и ноль-форм.

В разделе 3.1 рассматривается сектор полей один-форм $(\text{adj} \otimes \text{adj})$. Для выделения неприводимых $\mathfrak{so}(3, 2)$ -подмодулей используется коммутирующая алгебра $\mathfrak{sl}^h(2) \oplus \mathfrak{sl}^v(2)$, определяемая в начале раздела. В данном слу-

чае алгебры $\mathfrak{so}(3, 2) \simeq \mathfrak{sp}(4)$ и $\mathfrak{sl}^h(2) \oplus \mathfrak{sl}^v(2)$ образуют Хау-дуальную пару. Поэтому кольцо дифференциальных форм $\mathfrak{R}$ раскладывается в прямую сумму тензорных произведений конечномерных неприводимых $\mathfrak{so}(3, 2)$ -модулей и соответствующих пространств кратностей, т. е.

$$\mathfrak{R} \simeq \bigoplus_{\lambda_h, \lambda_v} \text{Irrep}_{\mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{sl}(2)}^{\lambda_h, \lambda_v} \otimes \text{Irrep}_{\mathfrak{sp}(4)}^{\lambda_h, \lambda_v}. \quad (13)$$

Выделение неприводимых $\mathfrak{so}(3, 2)$ -подмодулей происходит с помощью решения уравнений, определяющих вектор старшего веса относительно $\mathfrak{sl}^h(2)$ и младшего веса относительно $\mathfrak{sl}^v(2)$. Далее производится переход от производящих функций от пары осцилляторов Y_1 и Y_2 к полям первого ранга. Это позволяет свести уравнение на поле второго ранга к уравнению, для которого оператор σ_- корректно действует на каждом неприводимом $\mathfrak{so}(3, 2)$ -модуле. После этого определяется градуировка и отвечающий ей оператор σ_- .

В подразделе 3.1.1 прямым вычислением находятся группы когомологий $H^{0,1,2}(\sigma_-)$. При работе с двухкомпонентными спинорами тождество Схоутена существенно упрощает вычисления и позволяет не прибегать к обобщенному методу Ходжа, применявшемуся в первой главе.

В подразделе 3.1.2 приводятся результаты вычислений и их физическая интерпретация. Группа $H^0(\sigma_-)$ описывает параметры калибровочных преобразований. Представители группы $H^1(\sigma_-)$ определяют динамические поля. При нулевом вертикальном весе λ_v они воспроизводят бесследовую компоненту поля Фронсдала и его след. При $\lambda_v \neq 0$ представители $H^1(\sigma_-)$ описывают компоненты частично-безмассовых полей глубины безмассовости

$$t = 1 + \frac{\lambda_v}{2}. \quad (14)$$

Группа $H^2(\sigma_-)$ содержит калибровочно-инвариантные дифференциальные операторы: коциклы Вейля, ассоциированные с обобщенными тензорами Вейля для безмассовых и частично-безмассовых полей, а также коциклы, отвечающие полевым уравнениям. Таким образом, установлено, что сектор аджинформ $(\text{adj} \otimes \text{adj})$ содержит бесконечное число копий симметричных безмассовых и частично-безмассовых полей всех допустимых глубин безмассовости. Причина возникновения бесконечной кратности состоит в структуре пространств кратностей неприводимых $\mathfrak{so}(3, 2)$ -модулей. После нахождения представителей когомологий для векторов старшего веса относительно $\mathfrak{sl}^h(2)$ и

младшего веса относительно $\mathfrak{sl}^v(2)$ полный набор калибровочных параметров, полей и уравнений восстанавливается применением генераторов F_h и E_v . Для фиксированной пары весов действие F_h обрывается, поскольку горизонтальные $\mathfrak{sl}^h(2)$ -модули конечномерны, тогда как генератор E_v можно применять неограниченное число раз. В результате каждая безмассовая или частично-безмассовая система возникает в бесконечном числе копий, организованных в модули алгебры $\mathfrak{sl}^h(2) \oplus \mathfrak{sl}^v(2)$.

В разделе 3.2 исследуются поля ноль-формы со значениями в модулях $(\text{tw} \otimes \text{adj})$ и $(\text{adj} \otimes \text{tw})$. Подробный анализ проводится для первого модуля, так как результаты для второго получаются заменой кокстеровских номеров у переменных. Для выделения неразложимых $\mathfrak{so}(3, 2)$ -подмодулей снова используется коммутирующая алгебра $\mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{sl}(2)$. В отличие от сектора $(\text{adj} \otimes \text{adj})$, пространства кратностей имеют более сложную структуру. Наряду с модулями Верма младшего веса они содержат нерасщепляемые расширения модулей Верма. Приводится явный пример короткой точной последовательности

$$0 \longrightarrow V(6, 0) \longrightarrow E \longrightarrow V(6, 2) \longrightarrow 0, \quad (15)$$

которая является нерасщепляемой. Наличие нерасщепляемых расширений не позволяет восстановить полный список представителей классов когомологий как функций от исходных осцилляторных переменных Y_i . Тем не менее, несмотря на некоторую потерю общности, когомологический анализ можно проводить на подмножестве векторов младшего веса алгебры $\mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{sl}(2)$. Уравнение ковариантного постоянства ограничивается на младшие векторы $\mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{sl}(2)$, вводится градуировка и определяются два варианта оператора σ_- , соответствующие двум классам четности параметров $\mathfrak{so}(3, 2)$ -модуля.

В подразделе 3.2.1 вычисляются группы $H^{0,1}(\sigma_-)$.

В подразделе 3.2.2 приводятся результаты вычислений и обсуждается их физическая интерпретация. В нередуцированной системе когомологии оказываются существенно богаче, чем в стандартной теории высших спинов. Классы 0-коциклов разбиваются на два семейства, различающиеся четностью суммы параметров модуля $b + \bar{b}$. Помимо коциклов, существующих при граничном значении веса $\lambda_+ = 4$, возникают дополнительные классы при $\lambda_+ > 4$, что эквивалентно нетривиальной зависимости полей от осцилляторов, ассоциированных с присоединенным модулем. Эти дополнительные

0-коциклы соответствуют двухрядным $\mathfrak{so}(3, 1)$ -диаграммам Юнга общего положения; часть из них допускает интерпретацию как обобщенные тензоры Вейля для безмассовых и частично-безмассовых полей. Аналогично, большинство дополнительных 1-коциклов существует лишь при $\lambda_+ > 4$ и связано с нетривиальной зависимостью от осцилляторов присоединенного модуля. Полная физическая интерпретация дополнительных коциклов требует дальнейшего анализа взаимно однозначной склейки $\mathfrak{so}(3, 2)$ -модулей полей один-форм и ноль-форм, осуществляемой посредством вершины $\Upsilon(\Omega_{AdS}, \Omega_{AdS}, C)$. При унитарной редукции нетривиальными остаются только компоненты, не зависящие от осцилляторов, ассоциированных с присоединенным модулем, то есть компоненты с $\lambda_+ = 4$. Полученные кохомологии совпадают с известными результатами для твистованно-присоединенного модуля стандартной теории высших спинов.

В разделе 3.3 проводится анализ линейной вершины $\Upsilon(\Omega_{AdS}, \Omega_{AdS}, C)$ в уравнениях на поля один-формы ($\text{adj} \otimes \text{adj}$). На примерах полей младших спинов показано, что стандартный выбор гомотопии приводит к появлению $\sigma_{\pm}$ -точных членов в выражении для вершины; в рассмотренных примерах эти члены могут быть устранены переопределением полей. Анализ примеров наводит на предположение, что для полей ω нулевого веса относительно алгебры $\mathfrak{sl}^h(2)$ в вершине остаются только коциклы типа Вейля. Для полей ненулевого веса вершина содержит все 2-коциклы оператора σ_- , включая коциклы, отвечающие полевым уравнениям. Это означает, что некоторые копии безмассовых и частично-безмассовых полей в нередуцированной системе находятся вне массовой оболочки. После унитарной редукции коциклы, отвечающие полевым уравнениям, отсутствуют, и система оказывается на массовой оболочке. При этом все частично-безмассовые и большая часть безмассовых полей становятся нединамическими. Обсуждается необходимость пересуммирования полей один-форм и ноль-форм для получения взаимно однозначной склейки модулей посредством вершины $\Upsilon(\Omega_{AdS}, \Omega_{AdS}, C)$, а также возможность построения вершины, состоящей только из 2-коциклов, с помощью сдвинутой или дифференциальной гомотопии.

В разделе 3.4 суммируются результаты третьей главы.

В заключении перечислены основные результаты работы, а также сформулированы рекомендации по использованию полученных научных выводов

и перспективы дальнейшего развития темы.

В **Приложении А** вводятся мультииндексные обозначения и приводятся выражения для коэффициентов в формуле для $\mathfrak{so}(d)$ -тензора типа $\mathbb{Y}(n-1, m-1, 1^{p-2})$.

В **Приложении Б** приводятся явные выражения, демонстрирующие σ_- -точность форм $(\mathbb{B})$, $(\mathbb{C})$, $(\mathbb{E})$, $(\mathbb{I})$ и $(\mathbb{J})$, входящих в $\ker \sigma_-|_{\deg \Lambda=2}$ при анализе сектора $(\text{adj} \otimes \text{adj})$. Также вводится понятие нерасщепляемого расширения модулей и выводятся условия существования нерасщепляемых расширений между модулями Верма младшего веса алгебр $\mathfrak{sl}(2)$ и $\mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{sl}(2)$. В оставшейся части приложения приводятся формулы действия оператора трансляций P на векторы младшего веса относительно алгебры $\mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{sl}(2)$ в модуле $(\text{tw} \otimes \text{adj})$, а также уравнения на ноль-формы из секторов $(\text{adj} \otimes \text{tw})$ и $(\text{tw} \otimes \text{adj})$ в базисе полей ранга 1.

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем:

1. Для развернутых систем, отвечающих присоединенному модулю стандартной теории высших спинов, в пространствах $Mink_d$ и AdS_4 с помощью обобщения теории Ходжа получены когомологии $H(\sigma_-)$. Найдена реализация в терминах $\mathfrak{so}(d-1, 1)$ -тензоров в случае пространства $Mink_d$ и $\mathfrak{so}(3, 1)$ -мультиспиноров в пространстве AdS_4 для примарных полей, калибровочно-инвариантных дифференциальных операторов на примарных полях, а также дифференциальных калибровочных параметров. Дано альтернативное доказательство Первой теоремы о массовой оболочке.
2. В теории высших спинов, расширенной конечной группой Кокстера, идентифицированы два типа модулей, отличающихся по теоретико-представленческим свойствам: запутанные и распутываемые. Сформулирован и доказан критерий распутываемости модуля, то есть необходимое и достаточное условие эквивалентности тензорному произведению модулей стандартной четырехмерной теории высших спинов, устанавливаемой в классе линейных преобразований осцилляторов. Критерий состоит в выполнении равенства $(R\bar{R}^T)^2 = \mathbf{1}$ для матриц отражений.

3. В теории высших спинов, расширенной группой Кокстера B_2 , проведена классификация модулей по критерию наличия комплексно-эквивалентного унитарного модуля старшего или младшего веса. Классификация получена с помощью комплексного преобразования Боголюбова и автоморфизмов звездочной алгебры. Предъявлен механизм редукции к унитарному подсектору линеаризованной теории путем наложения граничных условий на ноль-формы C , а также сужения нелинейной системы до подпространства, инвариантного относительно автоморфизма четности, действующего на операторы Клейна.
4. В теории высших спинов, расширенной группой Кокстера B_2 , установлено динамическое содержание уравнений для полей один-форм ω , принимающих значения в модуле $(\text{adj} \otimes \text{adj})$ (тензорном квадрате присоединенного модуля стандартной теории высших спинов), а также для полей ноль-форм C , принимающих значения в модуле $(\text{tw} \otimes \text{adj})$ (тензорном произведении твистованно-присоединенного и присоединенного модулей стандартной теории высших спинов). Показано, что один-формы ω описывают бесконечное число копий безмассовых и частично-безмассовых полей всех возможных глубин безмассовости, организованных в неприводимые представления алгебры $\mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{sl}(2)$. В случае модуля $(\text{tw} \otimes \text{adj})$ обнаружено, что пространства кратностей представлений $\mathfrak{so}(3, 2)$ содержат нерасщепляемые расширения модулей Верма алгебры $\mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{sl}(2)$.
5. В теории высших спинов, расширенной группой Кокстера B_2 , на примере полей младших спинов проведен анализ σ_- -когомологического содержания вершины $\Upsilon(\Omega_{AdS}, \Omega_{AdS}, C)$ в секторе полей один-форм $(\text{adj} \otimes \text{adj})$. Показано, что для полей ω , имеющих ненулевой вес относительно алгебры $\mathfrak{sl}(2)$, сохраняющей суммарную степень мономов по переменным Y_i , вершина содержит все 2-коциклы оператора σ_- , что отвечает системе вне массовой оболочки, в то время как в случае полей нулевого веса присутствуют только когомологии типа Вейля, что соответствует системе на массовой оболочке. При этом унитарная редукция, осуществляемая с помощью наложения граничных условий на поля ноль-формы C , устраняет из вершины 2-коциклы, относящиеся к полевым уравнениям.

Полученные результаты могут быть использованы при дальнейшем ис-

следовании кокстеровских расширений теории высших спинов, а также других развернутых систем, для которых требуется явное вычисление σ_- -когомологий и анализ теоретико-представленческой структуры пространств полей.

Перспективными направлениями дальнейшей работы являются распространение проведенного анализа на другие конечные группы Кокстера, изучение унитарной редукции за пределами линеаризованного приближения, а также исследование роли кокстеровских расширений в механизмах нарушения высшеспиновой симметрии и в выявлении возможной связи теорий высших спинов с теорией струн.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Bychkov A. S., Ushakov K. A., Vasiliev M. A.* The σ_- Cohomology Analysis for Symmetric Higher-Spin Fields // Symmetry. — 2021. — Т. 13, № 8. — С. 1498. — DOI: 10.3390/sym13081498. — arXiv: 2107.01736 [hep-th].
2. *Tarusov A. A., Ushakov K. A., Vasiliev M. A.* Linearized Coxeter higher-spin theories // JHEP. — 2025. — Т. 08. — С. 052. — DOI: 10.1007/JHEP08(2025)052. — arXiv: 2503.05948 [hep-th].
3. *Tarusov A. A., Ushakov K. A.* The σ_- cohomology analysis for Coxeter higher spin B_2 model // JHEP. — 2026. — Т. 06. — С. 044. — DOI: 10.1007/JHEP06(2026)044. — arXiv: 2602.10788 [hep-th].

Список литературы

4. *Gross D. J.* High-energy symmetries of string theory // Phys. Rev. Lett. — 1988. — Март. — Т. 60, вып. 13. — С. 1229—1232. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.60.1229.
5. *Gross D. J., Mende P. F.* String theory beyond the Planck scale // Nuclear Physics B. — 1988. — Т. 303, № 3. — С. 407—454. — ISSN 0550-3213. — DOI: 10.1016/0550-3213(88)90390-2.
6. *Sundborg B.* Stringy gravity, interacting tensionless strings and massless higher spins // Nucl. Phys. B Proc. Suppl. / под ред. D. P. Sorokin. — 2001. — Т. 102. — С. 113—119. — DOI: 10.1016/S0920-5632(01)01545-6. — arXiv: hep-th/0103247.

7. *Bonelli G.* On the tensionless limit of bosonic strings, infinite symmetries and higher spins // Nucl. Phys. B. — 2003. — T. 669. — C. 159—172. — DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2003.07.002. — arXiv: hep-th/0305155.
8. *Sagnotti A., Tsulaia M.* On higher spins and the tensionless limit of string theory // Nucl. Phys. B. — 2004. — T. 682. — C. 83—116. — DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2004.01.024. — arXiv: hep-th/0311257.
9. *Lindstrom U., Zabzine M.* Tensionless strings, WZW models at critical level and massless higher spin fields // Phys. Lett. B. — 2004. — T. 584. — C. 178—185. — DOI: 10.1016/j.physletb.2004.01.035. — arXiv: hep-th/0305098.
10. *Weinberg S.* Photons and Gravitons in S-Matrix Theory: Derivation of Charge Conservation and Equality of Gravitational and Inertial Mass // Physical Review. — 1964. — АВГ. — Т. 135, 4B. — C. 1049—1056. — DOI: 10.1103/PhysRev.135.B1049.
11. *Coleman S., Mandula J.* All Possible Symmetries of the S Matrix // Phys. Rev. — 1967. — ИЮЛЬ. — Т. 159, ВЫП. 5. — C. 1251—1256. — DOI: 10.1103/PhysRev.159.1251.
12. *Weinberg S., Witten E.* Limits on Massless Particles // Phys. Lett. B. — 1980. — Т. 96. — C. 59—62. — DOI: 10.1016/0370-2693(80)90212-9.
13. *Poratti M.* Universal Limits on Massless High-Spin Particles // Phys. Rev. D. — 2008. — Т. 78. — C. 065016. — DOI: 10.1103/PhysRevD.78.065016. — arXiv: 0804.4672 [hep-th].
14. *Fradkin E. S., Vasiliev M. A.* On the Gravitational Interaction of Massless Higher Spin Fields // Phys. Lett. B. — 1987. — Т. 189. — C. 89—95. — DOI: 10.1016/0370-2693(87)91275-5.
15. *Cartan É.* Sur une généralisation de la notion de courbure de Riemann et les espaces à torsion // Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris. — 1922. — Т. 174. — C. 593—595.
16. *Cartan E.* Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée (première partie) // Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure. — 1923. — Т. 40. — C. 325—412. — DOI: 10.24033/asens.751.

17. *Cartan E.* Sur les variétés à connexion affine, et la théorie de la relativité généralisée (première partie) (Suite) // Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure. — 1924. — T. 41. — C. 1—25. — DOI: 10.24033/asens.753.
18. *Cartan E.* Sur les variétés à connexion affine, et la théorie de la relativité généralisée (deuxième partie) // Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure. — 1925. — T. 42. — C. 17—88. — DOI: 10.24033/asens.761.
19. *Vasiliev M. A.* Equations of Motion of Interacting Massless Fields of All Spins as a Free Differential Algebra // Phys. Lett. B. — 1988. — T. 209. — C. 491—497. — DOI: 10.1016/0370-2693(88)91179-3.
20. *Vasiliev M. A.* Consistent Equations for Interacting Massless Fields of All Spins in the First Order in Curvatures // Annals Phys. — 1989. — T. 190. — C. 59—106. — DOI: 10.1016/0003-4916(89)90261-3.
21. *Vasiliev M. A.* More on equations of motion for interacting massless fields of all spins in (3+1)-dimensions // Phys. Lett. B. — 1992. — T. 285. — C. 225—234. — DOI: 10.1016/0370-2693(92)91457-K.
22. *Vasiliev M. A.* Higher Spin Gauge Theories: Star-Product and AdS Space // The Many Faces of the Superworld / под ред. М. А. Shifman. — Singapore : World Scientific, 2000. — C. 533—610. — DOI: 10.1142/9789812793850_0030. — arXiv: hep-th/9910096.
23. *Vasiliev M. A.* Nonlinear equations for symmetric massless higher spin fields in (A)dS(d) // Phys. Lett. B. — 2003. — T. 567. — C. 139—151. — DOI: 10.1016/S0370-2693(03)00872-4. — arXiv: hep-th/0304049.
24. *Shaynkman O. V., Vasiliev M. A.* Scalar field in any dimension from the higher spin gauge theory perspective // Theor. Math. Phys. — 2000. — T. 123. — C. 683—700. — DOI: 10.1007/BF02551402. — arXiv: hep-th/0003123.
25. Nonlinear higher spin theories in various dimensions / X. Bekaert, S. Cnockaert, C. Iazeolla, M. A. Vasiliev // 1st Solvay Workshop on Higher Spin Gauge Theories. — 2004. — C. 132—197. — arXiv: hep-th/0503128.

26. *Bianchi M.* Higher spin symmetry (breaking) in N=4 sym theory and holography // Comptes Rendus Physique / под ред. G. Vilasi, G. Esposito, G. Lambiase, G. Marmo, G. Scarpetta. — 2004. — Т. 5. — С. 1091–1099. — DOI: 10.1016/j.crhy.2004.10.006. — arXiv: hep-th/0409292.
27. *Bianchi M., Heslop P. J., Riccioni F.* More on La Grande Bouffe // JHEP. — 2005. — Т. 08. — С. 088. — DOI: 10.1088/1126-6708/2005/08/088. — arXiv: hep-th/0504156.
28. *Vasiliev M. A.* Multiparticle extension of the higher-spin algebra // Class. Quant. Grav. — 2013. — Т. 30. — С. 104006. — DOI: 10.1088/0264-9381/30/10/104006. — arXiv: 1212.6071 [hep-th].
29. *Vasiliev M. A.* From Coxeter Higher-Spin Theories to Strings and Tensor Models // JHEP. — 2018. — Т. 08. — С. 051. — DOI: 10.1007/JHEP08(2018)051. — arXiv: 1804.06520 [hep-th].
30. *Sezgin E., Sundell P.* Massless higher spins and holography // Nucl. Phys. B. — 2002. — Т. 644. — С. 303–370. — DOI: 10.1016/S0550-3213(02)00739-3. — arXiv: hep-th/0205131. — [Erratum: Nucl.Phys.B 660, 403–403 (2003)].
31. *Bianchi M., Morales J. F., Samtleben H.* On stringy $AdS_5 \times S^5$ and higher spin holography // JHEP. — 2003. — Т. 07. — С. 062. — DOI: 10.1088/1126-6708/2003/07/062. — arXiv: hep-th/0305052.
32. *Gaberdiel M. R., Gopakumar R.* Higher Spins & Strings // JHEP. — 2014. — Т. 11. — С. 044. — DOI: 10.1007/JHEP11(2014)044. — arXiv: 1406.6103 [hep-th].
33. *Gaberdiel M. R., Gopakumar R.* Stringy Symmetries and the Higher Spin Square // J. Phys. A. — 2015. — Т. 48, № 18. — С. 185402. — DOI: 10.1088/1751-8113/48/18/185402. — arXiv: 1501.07236 [hep-th].
34. *Didenko V. E., Korybut A. V.* Toward higher-spin symmetry breaking in the bulk // Phys. Rev. D. — 2024. — Т. 110, № 2. — С. 026007. — DOI: 10.1103/PhysRevD.110.026007. — arXiv: 2312.11096 [hep-th].
35. *Didenko V. E., Faliakhov I. S.* Symmetry breaking in the self-dual higher-spin theory // Phys. Rev. D. — 2025. — Т. 112, № 10. — С. 106010. — DOI: 10.1103/nmxv-c8kx. — arXiv: 2509.01477 [hep-th].

36. *Gelfond O. A., Vasiliev M. A.* Operator algebra of free conformal currents via twistors // Nucl. Phys. B. — 2013. — T. 876. — C. 871—917. — DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2013.09.001. — arXiv: 1301.3123 [hep-th].
37. *Cherednik I., Markov Y.* Hankel transform via double Hecke algebra // Iwahori-Hecke Algebras and their Representation Theory: Lectures given at the C.I.M.E. Summer School held in Martina Franca, Italy, June 28 - July 6, 1999. — Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2002. — C. 1—25. — ISBN 978-3-540-36205-0. — DOI: 10.1007/978-3-540-36205-0_1.
38. *Etingof P., Ginzburg V.* Symplectic reflection algebras, Calogero-Moser space, and deformed Harish-Chandra homomorphism // Inventiones mathematicae. — 2002. — T. 147, № 2. — C. 243—348.
39. *Ponomarev D.* Chiral higher-spin double copy // JHEP. — 2025. — T. 01. — C. 143. — DOI: 10.1007/JHEP01(2025)143. — arXiv: 2409.19449 [hep-th].
40. *Vasiliev M. A.* Free Massless Fields of Arbitrary Spin in the de Sitter Space and Initial Data for a Higher Spin Superalgebra // Fortsch. Phys. — 1987. — T. 35, № 11. — C. 741—770. — DOI: 10.1002/prop.2190351103.
41. *Lopatin V. E., Vasiliev M. A.* Free Massless Bosonic Fields of Arbitrary Spin in d -dimensional De Sitter Space // Mod. Phys. Lett. A. — 1988. — T. 3. — C. 257—270. — DOI: 10.1142/S0217732388000313.
42. *Skvortsov E. D.* Gauge fields in (A)dS(d) within the unfolded approach: algebraic aspects // JHEP. — 2010. — T. 01. — C. 106. — DOI: 10.1007/JHEP01(2010)106. — arXiv: 0910.3334 [hep-th].
43. *Henneaux M., Teitelboim C.* Quantization of Gauge Systems. — Princeton, NJ : Princeton University Press, 1992. — ISBN 978-0-691-03769-1.
44. *Gelfond O. A., Vasiliev M. A.* Higher-Rank Fields and Currents // JHEP. — 2016. — T. 10. — C. 067. — DOI: 10.1007/JHEP10(2016)067. — arXiv: 1312.6673 [hep-th].
45. *Gelfond O. A., Vasiliev M. A.* Higher rank conformal fields in the $Sp(2M)$ symmetric generalized space-time // Theor. Math. Phys. — 2005. — T. 145. — C. 1400—1424. — DOI: 10.1007/s11232-005-0168-9. — arXiv: hep-th/0304020.

46. *Vasiliev M. A.* Bosonic conformal higher-spin fields of any symmetry // Nucl. Phys. B. — 2010. — T. 829. — C. 176—224. — DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2009.12.010. — arXiv: 0909.5226 [hep-th].
47. *Misuna N. G., Vasiliev M. A.* Off-Shell Scalar Supermultiplet in the Unfolded Dynamics Approach // JHEP. — 2014. — T. 05. — C. 140. — DOI: 10.1007/JHEP05(2014)140. — arXiv: 1301.2230 [hep-th].
48. *Hodge W. V. D.* The Theory and Applications of Harmonic Integrals. — Cambridge : Cambridge University Press, 1941.
49. Parent field theory and unfolding in BRST first-quantized terms / G. Barnich, M. Grigoriev, A. Semikhatov, I. Tipunin // Commun. Math. Phys. — 2005. — T. 260. — C. 147—181. — DOI: 10.1007/s00220-005-1408-4. — arXiv: hep-th/0406192.
50. *Brink L., Hansson T. H., Vasiliev M. A.* Explicit solution to the N body Calogero problem // Phys. Lett. B. — 1992. — T. 286. — C. 109—111. — DOI: 10.1016/0370-2693(92)90166-2. — arXiv: hep-th/9206049.
51. *Vasiliev M. A.* Conformal higher spin symmetries of 4-d massless supermultiplets and $osp(L, 2M)$ invariant equations in generalized (super)space // Phys. Rev. D. — 2002. — T. 66. — C. 066006. — DOI: 10.1103/PhysRevD.66.066006. — arXiv: hep-th/0106149.
52. *Bolotin K. I., Vasiliev M. A.* Star product and massless free field dynamics in $AdS(4)$ // Phys. Lett. B. — 2000. — T. 479. — C. 421—428. — DOI: 10.1016/S0370-2693(00)00307-5. — arXiv: hep-th/0001031.