

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича
Российской академии наук

На правах рукописи

Галахов Дмитрий Максимович

Дефекты в суперсимметричных теориях поля и теории струн

Специальность 1.3.3 — теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва 2025

Работа выполнена в Лаборатории №16 «Методы математической физики и теории информации» ФГБУН Института проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН

Официальные оппоненты: **Арефьева Ирина Ярославна,**

доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН,

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, г.Москва,

отдел теоретической физики, главный научный сотрудник

Кривонос Сергей Олегович,

доктор физико-математических наук,

Международная межправительственная организация Объединенный институт ядерных исследований, г.Дубна, Лаборатория теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова,

отдел современной математической физики, начальник отдела

Решетихин Николай Юрьевич,

доктор физико-математических наук,

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский государственный университет», г.Санкт-Петербург,

факультет математики и компьютерных наук,

главный научный сотрудник

Ведущая организация: ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова»

Защита состоится «20» октября 2025г. в 12 часов 00 минут на заседании диссертационного совета 24.1.262.04 в ФГБУН Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН по адресу: 119991 ГСП-1 Москва, Ленинский проспект, д.53.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФИАН.

Автореферат разослан «__» _____ 20__ г.

Ученый секретарь

диссертационного совета

24.1.262.04,

канд. физ.-мат. наук

Чернышов Дмитрий Олегович

Общая характеристика работы

Диссертационная работа посвящена исследованию геометрических свойств пространств модулей и параметров, находящих отражение в физических показателях спектров возбуждений для соответствующих квантовых теорий поля и теории струн, имеющих топологическую симметрию либо содержащих топологический сектор. Невозможно переоценить влияние понятия симметрии на прогресс в теоретической и математической физике и, тем более, на современную форму этих областей знания. Неудивительно, что в литературе можно наблюдать повышенный интерес мирового научного сообщества к обновленным и обобщенным понятиям симметрии [13], позволяющим расширить понятие и роль теории групп в современной теоретической физике до более абстрактного понятия категории.

Исследование в диссертационной работе направлено на область физических теорий, где топологические свойства достигаются за счет суперсимметрии. В данном контексте теория категорий сменяет теорию представлений групп симметрий, возникающую, например, при классификации типов элементарных частиц на основе симметрий Стандартной модели. Так эффективные квази-частичные и граничные состояния, например, доменные стенки, солитоны, инстантоны, монополи, а также порождающие их дефекты и дефектные операторы, соответствуют объектам и морфизмам некоторых n -категорий. В теориях с суперсимметрией выделяются особые классы таких дефект-состояний, сохраняющих часть суперсимметрии и находящихся на пороге ограничительного энергетического условия Богомольного-Прасада-Зоммерфельда (БПЗ), их обычно классифицируют как БПЗ состояния.

Наличие суперсимметрии как нельзя лучше подходит для круга задач категорификации, поскольку суперсимметрия позволяет естественным образом подавить, или даже в некоторых случаях сократить совсем обычные квантовые флуктуации в форме петлевых поправок в квантовой теории поля. Этот механизм, известный также как механизм локализации, позволяет проводить точные вычисления различных физических характеристик БПЗ состояний и сравнивать соответствующие спектры со спектрами объектов и морфизмов различных математических категорий. Более того, Нетеровы операторы суперзарядов, отвечающих суперсимметрии, приобретают форму дифференциалов на пространствах полей, что открывает непосредственный путь к геометризации физических задач и их точному аналитическому решению: физические объекты, дефекты, квази-частицы приобретают геометрический смысл на пространствах полей, модулей, параметров или деформаций соответствующей теории.

Актуальность темы исследования

Пожалуй наиболее канонической задачей категорификации в современной математической физике [14], стоящей перед научным сообществом на протяжении последних двадцати лет, можно назвать построение физической модели категорификации инвариантов узлов и зацеплений. Своими корнями эта задача уходит в каноническую низкоразмерную топологию. Узлом называется класс отображений $S^1 \rightarrow S^3$ с точностью до объемлющей изотопии, или замкнутая линия в трехмерном пространстве простым языком. Зацеплением называется зацепление нескольких узловых компонент $(S^1)^{\times n} \rightarrow S^3$. Несмотря на сложность формулировки, такие отображения легко кодируются графически с помощью узловых диаграмм – проекций на двумерную плоскость, где в пересечениях нить, которая находится ближе к наблюдателю, изображается сплошной, а нить, которая дальше, разрывной линией (см. рис. 1). При этом становится очевидной основная задача теории узлов: установить, отвечают ли две различные диаграммы одному и тому же узлу, или зацеплению. Так в примере на рис. 1 изображены две визуально непохожие узловые диаграммы для одного и того же узла 4_1 согласно классификации Рольфсена.



Рисунок 1 – Две узловые диаграммы для узла-«восьмерки» 4_1 .

В современной трактовке задача различения диаграмм узлов сводится к построению так называемых инвариантов узлов – отдельных чисел [15; 16] и групп чисел, которые являются инвариантами движений Редемейстера [17] – преобразований диаграмм, следующих из объемлющей изотопии и не меняющих соответствующий узел. Особый интерес в физических приложениях эта задача приобрела после построения инвариантных полиномов Джонса $J_K(q)$ [18; 19] и их физической интерпретации [20–22]:

$$J_K(q) = \langle W_{\square}(K) \rangle \quad (0.1)$$

как вакуумных средних Вильсоновских петель

$$W_R(K) = \text{Tr}_R \text{Pexp} \left(i \oint_K A_i dx^i \right) \quad (0.2)$$

в трехмерной теории Черна-Саймонса с действием:

$$S(A) = \frac{k}{4\pi} \int_{S^3} d^3x \epsilon^{ijk} \text{Tr} \left(A_i \partial_j A_k + \frac{2i}{3} A_i A_j A_k \right), \quad (0.3)$$

где мы выбрали калибровочную группу $SU(2)$ и ее фундаментальное представление $\square$, а параметр q связан с константой связи k , называемой уровнем, следующим образом:

$$q = \exp \frac{2\pi i}{k+2}. \quad (0.4)$$

В таких терминах легко представить простой аргумент, почему среднее Вильсоновской петли вдоль узла K является инвариантом относительно объемлющих изотопий. Действительно, вариация вложения узла K в объемлющее пространство пропорционально кривизне калибровочного поля F_{ij} , а на классических уравнениях движения для действия (0.3) эта величина зануляется $F_{ij} = 0$. В квантовой теории поправки и «обрамляющая» аномалия не портят это классическое рассуждение – среднее Вильсоновских петель вдоль компонент зацепления $\mathcal{L}$ является инвариантом зацепления $\mathcal{L}$ – полином по q – с точностью до общего мономимального множителя q^α .

Физическая интерпретация полиномов Джонса и связь трехмерной теории Черна-Саймонса с двумерной теорией Весса-Зумино-Виттена-Новикова позволила построить эффективный механизм вычисления инвариантов узлов [23; 24] с помощью сплетающих операторов R-матриц на тензорной категории представлений квантовых групп и обобщить на случаи произвольных представлений и групп. Каноническим инвариантом на сегодняшний день в данной терминологии является полином Хосте-Окнеану-Миллета-Фрейда-Ликориша-Иттера-Пржитицки-Тращука (ХОМФЛИ-ПТ) [25; 26] для фундаментального представления группы $SU(N)$ – многочлен по двум переменным a и q :

$$q = \exp \frac{2\pi i}{k+N}, \quad a = \exp \frac{2\pi i N}{k+N}. \quad (0.5)$$

Иное обобщение полиномов Джонса – категорификация – было предложено в работах М.Хованова [27], а затем и обобщение полиномов ХОМФЛИ в работах Хованова-Рожанского [28; 29]. В новом подходе по зацеплению $\mathcal{L}$ строится биградуированный комплекс, чьи когомологии – инвариант зацепления, а производящая функция для соответствующих чисел Бетти называется полиномом М.Хованова (соответственно Хованова-Рожанского):

$$\mathbf{Kh}_{\mathcal{L}}(t, q) = \sum_{F, Z} t^F q^Z \dim H^{F, Z}. \quad (0.6)$$

Градуировка F является гомологической градуировкой, а данный полином обобщает полином Джонса (ХОМФЛИ) в том смысле, что последний является Эйлеровой характеристикой комплекса Хованова:

$$\mathbf{Kh}_{\mathcal{L}}(t = -1, q) = J_{\mathcal{L}}(q). \quad (0.7)$$

С момента публикации работ М.Хованова начался поиск физической теории, которая описывала бы математическую конструкцию полиномов Хованова-Рожанского, как теория Черна-Саймонса описывает конструкцию полиномов Джонса. Ожидается, что такое физическое

представление позволит естественным образом обобщить конструкцию Хованова-Рожанского и категорификацию Хованова-Лауды-Рокира [30–32] для алгебр $SU(n)$ на неминускульные представления и алгебры Ли прочих серий Дынкина.

Несмотря на то, что в конструкции Хованова-Рожанского используются элементы топологической квантовой теории поля, тем не менее, физическая конструкция, где инвариантность наблюдаемых при деформациях объемлющей изотопии зацепления $\mathcal{L}$ была бы наглядна, как в теории Черна-Саймонса, оставалась неявной в течение двадцати лет.

Изначально предложения решения данной задачи строились на различных способах компактификации М-теории в присутствии дефекта [33–39], определяющего зацепление, однако, отсутствие необходимых вычислительных техник для характеристик БПЗ состояний на тот момент не позволяло ни проверить работоспособность этих конструкций, ни соотнести инварианты, построенные физическими методами, с инвариантами, построенными математическими методами. Определенный прогресс в данном направлении был достигнут в относительно недавней работе [40].

Также данная задача появляется в современных исследованиях гомологической зеркальной симметрии [41–43].

Нельзя также обойти стороной тот факт, что мы могли бы прийти к этому актуальному кругу задач о свойствах и поведении БПЗ состояний в суперсимметричных теориях поля, начав с иной стартовой точки. Роль пространства БПЗ состояний в суперсимметричных теориях поля и струн как носителя дополнительных богатых алгебро-геометрических структур, в частности БПЗ алгебры, были отмечены в работах Дж.Харви и Г.Мура [44; 45]. В основе этого метода лежит отождествление структурных констант алгебры с коэффициентами S-матрицы рассеяния:

$$\begin{aligned} * \cdot * : \mathcal{H}_{\text{BPS}} \otimes \mathcal{H}_{\text{BPS}} &\longrightarrow \mathcal{H}_{\text{BPS}} \\ \Psi_i \cdot \Psi_j &= S_{ij}^k \Psi_k. \end{aligned} \tag{0.8}$$

Подход Дж.Харви и Г.Мура к построению структур на БПЗ пространствах был удачно применен в различных системах, см. обзор в [46]. Однако для систем D-бран, параметризуемых колчанами, М.Концевичем и Я.Сойбельманом в [47] был разработан оригинальный подход к построению алгебраической структуры, основанный на геометрических свойствах колчаных многообразий. Связь этих диаметрально различных подходов была выявлена в работе [3]. А в дальнейшем было показано, что результирующая алгебра – кохомологическая алгебра Холла, принадлежащая к семейству алгебр перетасовок Одесского-Фейгина [48]. Она отвечает положительной по Борелю подалгебре колчанного янгиана [49] – обобщения аффинного янгиана для супералгебр Ли.

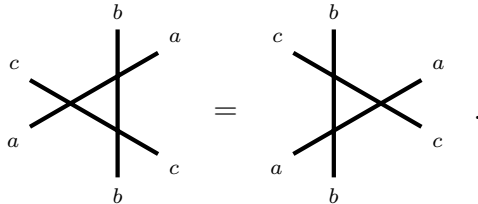
Появление янгиана в этой задаче говорит о связи с теорией интегрируемых систем [50], также известной как дуальность калибровочных и интегрируемых теорий [51–53]. Таким

образом становится актуальной задача выяснить, *все* ли БПЗ алгебры для различных систем имеют дуального партнера в интегрируемых системах, и не представляют ли новые БПЗ алгебры, например, не содержащие в своей основе подалгебры Ли, новые интегрируемые системы, не описанные ранее в литературе.

Связь с интегрируемостью предполагает, что для данных систем может быть разработана трансфер-матрица и R -матрица, перемешивающая представления БПЗ алгебры в тензорном произведении. Графически R -матрица может изображаться как простое переплетение двух нитей, отвечающих представлениям:

$$R_{ab} : V_a \otimes V_b \longrightarrow V_b \otimes V_a, \quad \begin{array}{c} b \quad a \\ \diagdown \quad \diagup \\ a \quad b \end{array} . \quad (0.9)$$

Ожидается, что R -матрица удовлетворяет кубическому уравнению Янга-Бакстера:

$$R_{ab} \circ R_{ac} \circ R_{bc} = R_{bc} \circ R_{ac} \circ R_{ab} ,$$


$$. \quad (0.10)$$

Также R -матрица, или точнее R -функтор, появляется в задаче о категорификации инвариантов зацеплений, R -матрица отвечает элементарной косе из двух нитей. В обоих случаях R -матрице придается смысл переплетающего действия на пространстве параметров суперсимметричной теории, реализованного в форме интерфейса. Уравнение Янга-Бакстера (0.10), в свою очередь, естественным образом следует из того факта, что суперсимметрия делает параллельный перенос плоским для БПЗ состояний вдоль интерфейса. Таким образом оба сюжета исследования переплетаются в один, отражая различные свойства спектров БПЗ состояний на фоне дефекта интерфейса. Исследования свойств интерфейс-дефектов занимают внушительную часть [54–61] среди современных направлений теоретической и математической физики в связи с богатой картиной применимости методологии в смежных областях, как было показано выше, а также в свете возможности разработки и применения новых методов непертурбативных вычислений в квантовой теории поля и теории струн.

Целью работы является построение новых методов вычисления и классификации суперсимметричных состояний в теории поля и теории струн, а также исследование их свойств и, в первую очередь, связи с математическими объектами на пространствах модулей и других параметров.

Для достижения поставленной цели в работе предстояло решить следующие задачи:

1. Разработать методы локализации для суперсимметричных теорий поля в присутствии дефектов типа «интерфейс», имитирующих поведение параллельного переноса на пространстве параметров.
2. Разработать методы построения исчерпывающего низкоэнергетического описания таких систем, методы вычисления эффективных волновых функций.
3. Применить разработанные результаты к проверке следующих гипотез:
 - 3.1. Дефект типа «интерфейс» отвечает функтору параллельного переноса (категорификация связности Берри) на категории граничных условий (D-бран).
 - 3.2. БПЗ сектор в теории компактификации M5-браны с дефектом, отвечающим зацеплению $\mathcal{L}$, является инвариантом $\mathcal{L}$ и эквивалентен теории Хованова для инвариантов зацеплений.
 - 3.3. БПЗ алгебра рассеяния в системах D-бран на трехмерных торических многообразиях Калаби-Яу эквивалентна колчанному янгиану, априорно разработанному в математических работах.
4. Построить физическую теорию тригонометрической и эллиптической деформаций БПЗ алгебр.
5. Построить интегрируемые системы для новых БПЗ алгебр и изучить их поведение относительно дуальности калибровочных и интегрируемых систем.

Научная новизна. Полученные в диссертационной работе результаты являются оригинальными разработками автора диссертации. Все результаты опубликованы в отечественных и иностранных научных журналах, были представлены в докладах на различных международных конференциях. Результаты автора регулярно используются различными исследовательскими группами, известны в научном сообществе.

Результаты, представленные в диссертационном исследовании, имеют большую значимость в теоретических исследованиях топологических физических моделей квантовой теории поля и теории струн, суперсимметричных моделях с топологическими дефектами, в программе категорификации, построения новых инвариантов многообразий, а также в современной программе геометризации непертурбативных физических явлений. Полученные результаты позволяют описывать сложные физические явления в сильно скореллированных системах в терминах современных математических теорий и методологий, что, безусловно, способствует быстрому прогрессу в различных областях современной теоретической и математической физики.

Методология и методы диссертационного исследования. Результаты, представленные в диссертации, получены с помощью аналитических и численных вычислений. Для исследования низкоэнергетического поведения различных суперсимметричных физических систем использовались методы струнно-калибровочных дуальностей и методы локализации. Для математической классификации состояний БПЗ использовались методы алгебраической

и симплектической геометрий, а также алгебраической топологии. Для вычисления квантовых операторов, волновых функций и эффективных действий использовались методы квантовой теории поля. Для описания и исследования низкоэнергетических свойств D-бран на многообразиях Калаби-Яу использовались методы теории колчанов. Для описаний свойств интегрируемости для новых алгебраических результатов, получаемых в диссертационном исследовании, использовались методы интегрируемых систем. Также были применены методы теории групп и теории представлений алгебр и групп.

Основные положения, выносимые на защиту

1. Построен механизм дуальности в описании низкоэнергетического физического поведения дефектов типа «интерфейс». Классификация БПЗ решений и граничных условий в задаче осуществляется посредством объектов математических категорий. Так дуальность отвечает гомологической зеркальной симметрии между категориями Фукаи-Сайдела для специальных симплектических Лагранжевых подмногообразий и (производными) категориями когерентных пучков.
2. С помощью спектральной дуальности разработана новая физическая модель из семейства линейных калибровочных сигма-моделей, реализующая категорифицированное действие группы кос на пространствах модулей колчанов. С помощью техник, упомянутых в предыдущем пункте, вычислены спектры БПЗ состояний, отвечающих элементарным сплетающим дефектам, генерирующим группу кос. Вычислено ядро преобразования Фурье-Мукаи в функториальном представлении этих дефектов. Показано, что результирующая алгебра сплетающих дефектов эквивалентна алгебре Хованова-Лауды-Рокира для $\mathfrak{sl}_2$.
3. Разработаны методы построения солитонных и инстантонных спектров в зеркально дуальной модели Ландау-Гинзбурга. Показано, что физическая модель компактификации M-бран для категорифицированных инвариантов зацеплений эквивалентна математической модели, предложенной М.Ховановым для $\mathfrak{sl}_2$. Предложены пути обобщения полученных результатов на случай более общих алгебр $\mathfrak{sl}_n$.
4. Вычислены коэффициенты рассеяния эффективных БПЗ состояний D-бран на многообразиях Калаби-Яу в молекулярной модели. С их помощью построена так называемая БПЗ алгебра рассеяния. Показано соответствие полученной алгебры кохомологической алгебре Холла, предложенной М.Концевичем и Я.Сойбельманом.
5. Предложен способ вычисления коэффициентов рассеяния БПЗ состояний бран в моделях с сингулярными пространствами модулей. По соответствующим моделям построены новые БПЗ алгебры, обобщающие алгебры аффинных янгианов, – колчаные янгианы. Новые алгебры классифицируются не диаграммами Дынкина, а колчанными диаграммами для торических трехмерных многообразий Калаби-Яу. Построены и явно описаны «кристаллические» представления этих алгебр. Показана связь с кохомологи-

ческой алгеброй Холла и дуальность молекулярного и кристаллического описаний.

6. Предложены тригонометрические (тороидальные алгебры) и эллиптические обобщения колчаных янгианов. Физические модели в иерархии рациональных, тригонометрических и эллиптических алгебр отвечают компактификации дополнительных измерений системы D-бран в точку, на окружность и на тор соответственно. Что, в свою очередь, отвечает локализации основного состояния на эквивариантные кохомологии, К-теорию или эллиптические кохомологии пространства модулей. Показана потенциальная возможность расширения построенной системы на абстрактные обобщенные кохомологии Эйленберга-Стиррода.
7. Предложен метод вычисления структуры ко-произведения и R-матрицы для колчаных янгианов с помощью дефектов параллельного переноса вдоль сплетений параметров на пространствах модулей – обобщении понятия связности Берри. Доказана теорема запрета для колчаных янгианов со сдвигом. Для колчаных янгианов без сдвигов построены трансфер-матрицы и вектора Бете. Показано, что корни Бете отвечают вакуумам в дуальной модели.
8. Получено выражение для зарядовой функции твердотельных разбиений, отвечающих классическим вакуумам в эффективной модели D-бран на четырехмерных многообразиях Калаби-Яу.

Достоверность полученных результатов проверяется обоснованностью методов, примененных в исследовании, обеспечивается публикуемостью результатов в престижных отечественных и международных журналах со строгой рецензионной политикой, а также подтверждается соответствием иным независимым результатам, полученным другими авторами.

Апробация работы. Основные результаты, полученные в диссертации, были доложены на научных семинарах в ИТЭФ, ККТЭФ НИЦ «Курчатовский институт», МФТИ, Сколтех, в университете Кавли физики и математики Вселенной (Кашиваноха, Япония), в университете Калифорнии в Беркли (Беркли, США), в университете Калифорнии в Дэвисе (Дэвис, США), в Калифорнийском технологическом университете (Пасадена, США), в университете Северной Каролины (Чапел-Хилл, США), в лаборатории Ангстрема при университете Уппсалы (Уппсала, Швеция), в Швейцарском Федеральном институте технологий (Цюрих, Швейцария), в университете Сорбонны (Париж, Франция). Также полученные результаты обсуждались на международных онлайн-семинарах, организованных научными группами ИТФ им. Ландау, центра математических исследований им. Яу (Пекин, Китай), университета Канзаса (Канзас, США). Помимо прочего результаты обсуждались на международных конференциях:

- Workshop on quantum fields, knots and integrable systems (Эдинбург, Великобритания, 2017),
- The XXVIIIth International Conference on Supersymmetry and Unification of Fundame-

- ntal Interactions (SUSY 2021) (Пекин, Китай, 2021),
- «Strings and Fields 2021» (Киото, Япония, 2021),
- «Number Theory, Strings and Quantum Physics» (Токио, Япония, 2021).
- «Fields & Strings 2024» (Москва, Россия, 2024).
- «Problems of the Modern Mathematical Physics» (Дубна, Россия, 2024).

Личный вклад. Все результаты, включенные в диссертацию, получены лично соискателем или при его прямом участии. Соискатель принимал непосредственное участие в выполнении всех работ и написании текстов всех публикаций. Имена соавторов указаны в соответствующих публикациях.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 12 печатных изданиях, индексируемых Web of Science и Scopus, [1] (разд. 5.4.6), [2] (разд. 5.3, 5.5), [3] (разд. 3.1, 3.2), [4] (разд. 2.1), [5] (глава 1, разд. 5.4), [6] (разд. 2.2), [7] (разд. 2.3), [8] (разд. 4.1, 4.2, 4.3), [9] (разд. 3.2.5, 3.3.2, 3.3.3), [10] (разд. 4.4), [11] (разд. 2.4), [12] (разд. 3.3.1).

Объем и структура работы

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и одного приложения. Полный объем диссертации составляет 351 страницу, включая 42 рисунка и 5 таблиц. Список литературы содержит 264 наименования.

Содержание работы

Во **введении** обсуждаются актуальность диссертационной работы, представлен обзор современного состояния исследований по тематике работы. Разбирается круг задач, решению которых посвящена работа. Приводится обзорный материал.

Глава 1 посвящена обсуждению формализма параллельного переноса в пространстве параметров суперсимметричных теорий. Физически параллельный перенос реализуется посредством дефекта типа «интерфейс» (иногда называемого в литературе также янусовым интерфейсом) – параметры системы адиабатически медленно меняются вдоль дефекта, таким образом интерфейс осуществляет переход между двумя различными членами семейства теорий. Как пример приложения этих техник производится вычисление категорифицированного параллельного переноса, отвечающего аналитическому продолжению статсуммы теории, заданной гипергеометрической функцией, за единичный круг в пространстве параметров.

В **разделе 1.1** обсуждается техника локализации для вычисления основных состояний в суперсимметричных теориях с дефектами. В данном разделе выделяются следующие этапы. В **подразделе 1.1.1** обсуждается общий подход к локализации в суперсимметричных теориях засчет перенормирования операторов суперзарядов, оставляющего (вырожденное) основное состояние инвариантным и эквивалентным соответствующим когомологиям.

Проводится аналогия с действием ренормгруппы Вильсона, показывается, что эффективные волновые функции точны в одной петле теории возмущений. **Подраздел 1.1.2** отведен под применение техники локализации к двумерной $\mathcal{N} = (2, 2)$ суперсимметричной калибровочной сигма-модели в присутствии интерфейс-дефекта и пространственных границ на мировом листе, вводятся понятия Хиггсовой и Кулоновой ветвей и условий локализации на соответствующую ветвь. Далее в **подразделах 1.1.3, 1.1.4 и 1.1.5** поочередно обсуждаются эффективные теории, получающиеся при локализации на Кулонову и Хиггсову ветви соответственно, проводится введение в математический аппарат теории категорий, позволяющий классифицировать решения солитонных и инстантонных уравнений в этих теориях. Поскольку эффективная теория при локализации на Кулонову ветвь принадлежит семейству моделей Ландау-Гинзбурга, в **подразделе 1.1.3** приводится общее описание этого семейства моделей. В **подразделе 1.1.6** обсуждается обобщение формализма сетей для вычисления инстантонных вкладов в волновые функции на $\mathcal{N} = (2, 2)$ суперсимметричные двумерные теории с массивными разделенными вакуумами общего вида.

В **разделе 1.2** проводится первичная апробация техник, обсуждаемых в предыдущем разделе, к простейшей модели $U(1)$ теории с двумя киральными мультиплетам. Эффективно пространство полей данной теории может быть описано как комплексная проективная прямая $\mathbb{CP}^1$. Соответственно, $\mathbb{CP}^1$ – основной объект геометрической дискуссии в данном разделе. **Подраздел 1.2.1** отведен под детальное описание физической модели. В **подразделе 1.2.2** строится спектр решений солитонных уравнений на Кулоновой ветви, а в **подразделе 1.2.3** – на Хиггсовой ветви, и доказывается, что спектры Хиггсовой и Кулоновой ветви согласованы. Таким образом подтверждается дуальность Хиггсовой и Кулоновой ветвей в данной модели – одно из проявлений гомологической зеркальной симметрии. В **подразделе 1.2.4** построены решения инстантонных уравнений, как процессы рассеяния солитонных решений, полученных в предыдущих подразделах. И солитонные, и инстантонные решения в данной модели базовые и будут использованы как строительные блоки для получения более сложных решений в последующих вычислениях.

Раздел 1.3 посвящен разбору модели, интерфейс-дефект параллельного переноса в которой отвечает аналитическому продолжению гипергеометрических рядов за единичную окружность на комплексной плоскости. В данной модели комплексная плоскость – пространство параметров, а гипергеометрическая функция описывает статсумму в данной теории на двумерном диске. Математически граничные условия для теории образуют эквивариантную категорию когерентных пучков, а сам дефект отвечает «перескоку» Атьи для разрешенных конических сингулярностей. **Подраздел 1.3.1** отведен под описание физических аспектов данной модели. В **подразделе 1.3.2** обсуждается декатегорифицированное поведение статсумм на дисках, как функций параметров, математически они отвечают соответствующим группам Гротендика. В **подразделе 1.3.3** восстанавливается влияние параллельного пере-

носа вдоль дефекта на браны граничных условий в теории. Показано существование специальных бран (граничных условий), которые остаются инвариантными при параллельном переносе. В **подразделе 1.3.4** вычислены инстантонные решения в данной модели на фоне дефекта и показано, что влияние параллельного переноса на категорию граничных бран (эквивариантную производную категорию когерентных пучков) может быть описано функториально. Строится соответствующий функтор преобразования Фурье-Мукаи, вычисляется его ядро. Показано, что ядро Фурье-Мукаи соответствует ядру для перескока Атии при смене разрешения конической сингулярности.

Глава 2 посвящена применению техник локализации к системам D-бран на трехмерных торических многообразиях Калаби-Яу. Строятся алгебры БПЗ состояний D-бран основанные на процессах рассеяния D-бранных дефектов и проб. Результирующие алгебры обобщают известные алгебры аффинных янгианов. Также обсуждаются их тригонометрические и эллиптические обобщения и модели компактификации, стоящие за ними.

Раздел 2.1 посвящен комбинаторному построению БПЗ состояний в «кристаллической» Хиггсовой фазе эффективной теории и построению БПЗ алгебр в этом формализме. **Подраздел 2.1.1** отведен под общие сведения об эффективном описании D-бран на трехмерных торических многообразиях Калаби-Яу в виде матричной суперсимметричной квантовой механики – размерной редукции суперсимметричной теории Янга-Миллса. В **подразделе 2.1.2** описан эффект кристаллизации при локализации на Хиггсову ветвь в данной модели. Трехмерные кристаллы оказываются удобным средством классификации вакуумов. В **подразделе 2.1.3** предложена конструкция сингулярных операторов Гекке, повышающих и понижающих заряды в системе D-бран. В данном подразделе первичным приближением к БПЗ алгебре предлагается считать именно алгебру операторов Гекке. В **подразделе 2.1.4** алгебра БПЗ операторов расширяется естественным образом до новой алгебры – колчанного янгиана. **Подраздел 2.1.4** отведен детальному обсуждению примера колчанного Янгиана для $\mathbb{C}^3$, совпадающего с аффинным Янгианом $Y(\widehat{\mathfrak{gl}}_1)$, приведены детали физической техники обращения с сингулярными пространствами модулей представлений колчанов, такими как схема Гильберта на $\mathbb{C}^3$.

Раздел 2.2 посвящен построению колчанного янгиана со сдвигом в предложенной модели состояний D-бран на торических многообразиях Калаби-Яу. Сдвиг оказывается важной алгебраической характеристикой, отвечающей структуре собственных значений генераторов Картана в колчанном янгиане. В **подразделе 2.2.1** описывается представление, где вектора модуля перечисляются производными кристаллами, склеенными из частей канонического кристалла, построенного в предыдущем разделе. В **подразделе 2.2.2** обсуждаются вопросы (не)приводимости полученных представлений. **Подраздел 2.2.3** отведен под обсуждение связи конструкции новых представлений сдвинутых колчанного янгианов с обрамлением колчана, а в **подразделе 2.2.4** описываются физические эффекты, сопутствующие приводимым

представлениям.

В **разделе 2.3** обсуждается, каким образом колчаные янгианы вписываются в иерархию рациональных-тригонометрических-эллиптических алгебр. Для этого рассматривается компактификации системы D-бран на $CY_3 \times \mathcal{M}$, где CY_3 – трехмерное торическое многообразие Калаби-Яу, а $\mathcal{M}$ – точка, окружность или тор соответственно. Результирующая эффективная теория – размерная редукция суперсимметричной теории Янга-Миллса на $\mathcal{M}$. В разделе повествование ведется с точки зрения, когда $\mathcal{M}$ – тор, остальные случаи выводятся из этого естественным образом. Так в **подразделе 2.3.1** обсуждаются солитонные вихревые БПЗ решения полевых уравнений на торе. В **подразделе 2.3.2** строится соответствующая БПЗ алгебра на Гильбертовом подпространстве нулевой завихренности. В **подразделе 2.3.3** описывается классификация основных состояний с нетривиальным вкладом вихревых решений на примере четырехмерных кристаллов. **Подраздел 2.3.4** посвящен систематической формулировке тригонометрического и эллиптического обобщения БПЗ алгебр колчаных янгианов. В **подразделе 2.3.5** приведено подтверждение согласованности обобщенных эллиптических БПЗ алгебр с частными случаями эллиптических алгебр, построенных по супералгебрам Ли.

В **разделе 2.4** обсуждаемые методы применены к эффективным моделям D-бран на четырехмерных торических многообразиях Калаби-Яу. Отличительной особенностью данных моделей по сравнению с трехмерными моделями является то, что эффективная колчанная теория имеет меньше суперсимметрий. Таким образом построение алгебры БПЗ в данных моделях является открытым вопросом до сих пор. Так в **подразделе 2.4.1** приведено краткое описание этой модели. В **подразделе 2.4.2** дано описание неподвижных точек на колчанном многообразии, отвечающем $\mathbb{C}^4$, как твердотельных разбиений, обобщающих коробочные диаграммы Юнга на четыре измерения, и как расслоений уровней высот над трехмерной решеткой. В **подразделе 2.4.3** приводится выражение и доказывается его справедливость для зарядовой функции – рациональной функции, чьи полюса находятся во взаимном соответствии с вакантными положениями, где коробки могут быть добавлены или, наоборот, удалены из разбиения. Подобная функция в случае трехмерных Калаби-Яу играла роль собственных значений производящей функции операторов Картана в соответствующем колчанном янгиане.

Глава 3 посвящена построению БПЗ алгебр рассеяния в дуальной картине локализации в молекулярную Кулонову фазу (ветвь). Результирующая алгебра соответствует алгебре, построенной в предыдущей главе, что является нетривиальным следствием физической дуальности двух описаний.

Так в **разделе 3.1** приводится самозамкнутое построение эффективных волновых функций в молекулярной фазе для колчанов общего вида. Этот раздел включает в себя

подразделы 3.1.1, 3.1.2 и 3.1.3, к которых отдельно рассматриваются вклады узлов и морфизмов колчана, а затем собирается полное выражение. В **подразделе 3.1.4** по данному выражению для волновой функции вычисляется улучшенный суперсимметричный индекс для сравнения с выражениями, полученными в литературе независимыми методами.

Раздел 3.2 посвящен построению БПЗ алгебры через коэффициенты рассеяния молекулярных состояний, полученных в предыдущем разделе – кохомологической алгебры Холла. Обсуждается связь алгебры Холла с колчанными янгианами, полученными в предыдущей главе, и возможное дальнейшее обобщение эллиптических алгебр, включающее в себя обобщенные кохомологии Эйленберга-Стинрода. Так в **разделе 3.2.1** представлена конструкция обранных БПЗ молекул, внутри которых эффективные частицы кластеризуются на более элементарные молекулы, что позволяет изучить их рассеяние в наиболее простых терминах. В **разделе 3.2.2** приведена непосредственная формулировка адиабатического рассеяния за счет параллельного переноса к границе маргинальной неустойчивости на пространстве параметров, вычислены соответствующие коэффициенты рассеяния – структурные константы алгебры Холла. В **разделе 3.2.3** из предложенного описания выводятся инварианты Концевича-Сойбельмана, остающиеся неизменными при пересечении границ маргинальной стабильности на пространстве параметров. **Раздел 3.2.4** посвящен сравнительному анализу алгебры Холла и колчанного янгиана, показано, что алгебру Холла можно считать эквивалентной Борелевски положительной части колчанного янгиана (и его обобщений). В **разделе 3.2.5** приведены физические аргументы в пользу того, что возникновение эллиптического обобщения колчаных янгианов в предыдущей главе неслучайно. Абстракция компактификационного многообразия $\mathcal{M}$ для системы D-бран позволяет обобщить волновые функции D-бран до элементов эквивариантных обобщенных кохомологий Эйленберга-Стинрода, где эллиптические кохомологии – частный случай.

Раздел 3.3 посвящен описанию связи различных подходов к построению алгебры БПЗ: как упомянутый выше способ описания алгебры рассеяния Холла и как алгебры инстантонов. Представление алгебры БПЗ как алгебры инстантонов позволяет глубже понять механизмы связи алгебр Холла и колчаных янгианов. В **подразделе 3.3.1** приводятся общие механизмы описания колчаных янгианов через амплитуды инстантонных переходов. В **подразделе 3.3.2** описан вклад инстантонов в классическую R-матрицу. А в **подразделе 3.3.3** приводится описание соотношений гистерезиса, как определенных R-матричных монодромий, что позволяет связать их с амплитудами рассеяния в построенной алгебре Холла.

Глава 4 посвящена построению общей структуры копроизведения и R-матрицы для колчаных янгианов, а также рассмотрению их свойств интегрируемости – построению соответствующих интегрируемых цепочек. Основную роль в данной конструкции играют интерфейс-дефекты, сплетающие массовые параметры соответствующих эффективных теорий поля.

Раздел 4.1 отведен для общих сведений о связи (дуальности) интегрируемых и калибровочных теорий и роли этой связи для колчанных янгианов.

Раздел 4.2 посвящен вычислению структуры ко-произведения и R -матрицы для колчанных янгианов в общем виде. Так в **подразделе 4.2.1** освещается искомая структура ко-произведения, определяемая инстантонными поправками, вводится понятие стабильности для базиса в представлении. В **подразделе 4.2.2** собраны возможные геометрические подходы к построению ко-произведения, так наиболее естественным является способ устроить тензорную степень – разместить несколько кристаллов, отвечающих изолированным представлениям, в общем пространстве параметров. Однако такой подход не определяет ко-произведение как гомоморфизм алгебр, а R -матрица оказывается тривиально диагональной. Инстантонные поправки как раз перемешивают вектора в таком мульти-кристаллическом базисе, деформируют наивное копроизведение до настоящего и могут быть вычислены из условий самосогласованности. В **подразделе 4.2.3** приведено определение R -матрицы как сплетающего оператора для истинного ко-произведения. В **подразделе 4.2.4** построены операторы Лакса и описаны их свойства.

Раздел 4.3 посвящен построению интегрируемых систем на основе алгебр колчанных янгианов. В **подразделе 4.3.1** доказывается теорема запрета для колчанных янгианов со сдвигом. В этом случае гладкий параллельный перенос не позволяет получить самосогласованную структуру копроизведения и R -матрицу. С физической точки зрения этот аспект объясняется тем, что при переносе вдоль дефекта образуются сингулярности из-за дрейфа части вакуумов к границе пространства полей на бесконечности. В **подразделе 4.3.2** в общем виде для колчанных янгианов без сдвигов построены трансфер-матрица и вектора Бете. Показано, что корни Бете находятся в соответствии с вакуумами в дуальной модели, освещенной в **разделе 4.1**.

Раздел 4.4 посвящен построению специальных представлений, отвечающих внесению тяжелой $D4$ -браны в трехмерное многообразие разрешения конической сингулярности. Результирующее колчанное многообразие оказывается гладким, что привносит в систему новые симметрии. В частности БПЗ вакуумы задают Фоковский модуль и перечисляются новым видом разбиений, мы называем супер-разбиениями, а волновые функции находятся во взаимно-однозначном соответствии с системой симметрических полиномов от двух групп коммутирующих и антикоммутирующих переменных, обобщающих полиномы Джека. В **подразделе 4.4.1** освещаются общие вопросы о появлении дополнительных симметрий при рассмотрении гладких циклов в многообразиях Калаби-Яу. А в **подразделе 4.4.2** приводятся точные комбинаторные выражения для эйлеровых классов касательных пространств к неподвижным точкам. **Подраздел 4.4.3** отведен под определение супер-разбиений и супер-диаграмм Юнга. В **подразделе 4.4.4** построены супервремена – генераторы супер-алгебры Гейзенберга – из генераторов аффинного супер-янгиана $Y(\widehat{\mathfrak{gl}}_{1|1})$ и показано, что Картановские гене-

раторы отвечают суперсимметричному обобщению операторов cut-and-join (гамильтонианов Калоджеро).

Последняя **глава 5** посвящена применению интерфейс-дефектов к построению категорифицированных инвариантов зацеплений и представлений группы кос. Соответствующие инварианты возникают как квантовые числа БПЗ состояний в физических системах в присутствии дефекта, определяемого формой зацепления.

В **разделе 5.1** приведен краткий обзор математической конструкции инвариантов зацеплений, предложенной М.Ховановым.

В **разделе 5.2** собраны различные формы представления группы кос в физических и математических задачах. Эти представления будут использованы в дальнейших вычислениях. Так в **подразделе 5.2.1** определена группа кос как система элементарных образующих переплетений, а в **подразделе 5.2.2** описано ее действие на конформные блоки в модели Весса-Зумино-Виттена-Новикова. Выражения для конформных блоков могут быть представлены в интегральном виде, а выбор контуров интегрирования удобно сопоставить с базисом Лефшецевых наперстков. Соответствующее представление действия группы кос как монодромии Пикара-Лефшеца описано в **подразделе 5.2.3**.

Раздел 5.3 посвящен модели категорифицированных инвариантов зацеплений в рамках модели Ландау-Гинзбурга. Для геометрического описания свойств этой модели используются так называемые категории Фукаи-Сайдела, где объектами являются симплектические многообразия – Лефшецевы наперстки – конфигурации D-бран, задающих граничные условия в модели Ландау-Гинзбурга. Этот раздел начинается с **подраздела 5.3.1**, где проводится анализ Лефшецевых наперстков и монодромии Пикара-Лефшеца с точки зрения спектральных накрытий. В **подразделе 5.3.2** представлена методика вырожденных спектральных сетей, позволяющая вычислять инстантонные вклады в этой модели в рамках формализма спектральных накрытий. В **подразделе 5.3.3** приведена классификация вакуумов в выбранной модели, вакуумы соответствуют различным базисным конформным блокам. Таким образом устанавливается действие группы кос на вакуумы модели Ландау-Гинзбурга. **Подраздел 5.3.4** отведен под конструкцию элементарных дефектов, отвечающих сплетающим и замыкающим элементам в зацеплении. Вычисления произведены с использованием формализма спектральных сетей, позволяющего явно устанавливать физические спектры солитонных решений. В **подразделе 5.3.5** показано, что посчитанные таким образом квантовые числа БПЗ состояний модели Ландау-Гинзбурга в присутствии дефекта, определенного зацеплением $\mathcal{L}$, эквивалентны градуировкам когомологий комплекса Хованова, отвечающего $\mathcal{L}$. Таким образом, подтверждается, что физическая модель определяет ту же категорификацию инвариантов зацеплений Черна-Саймонса, что и предсказанная ранее математическая модель. В завершение данного раздела в **подразделе 5.3.5** проведено сравнение когомоло-

гий узлов Хованова с когомологиями в модели Ландау-Гинзбурга.

Раздел 5.4 посвящен разбору модели зеркально дуальной модели Ландау-Гинзбурга, обсуждаемой в предыдущем разделе. В основании математического формализма, используемого для описания граничных условий в данной модели, лежат эквивариантные производные категории когерентных пучков. Согласованность этой модели и модели из предыдущего раздела – наглядная демонстрация гомологической зеркальной симметрии. В **подразделе 5.4.1** приводится обзор некоторых особенностей колчаных многообразий, используемых в данном вычислении, в частности так называемой спектральной дуальности. В **подразделе 5.4.2** освещен изоморфизм Маффеи, позволяющий отобразить пространства модулей колчанов со специальными условиями на пространство флагов. В **подразделе 5.4.3** описаны соответствующие кристаллические фиксированные точки в приведенной модели, а в **подразделе 5.4.4** представлено явное действие группы кос на колчаные многообразия/многообразия флагов. Приведенный в этом разделе формализм применяется для описания интерфейс-дефекта, отвечающего элементарному переплетению в **подразделе 5.4.5**. Из свойств физической теории вычислено функториальное представление дефекта, действующего на категорию D-бранных граничных условий – эквивариантную категорию когерентных пучков. В этой терминологии влияние дефекта сводится к преобразованию Фурье-Мукаи, чье ядро вычисляется в данном подразделе. Результат согласован с другими математическими подходами в литературе, что, в свою очередь, позволяет заключить, что БПЗ алгебра дефектов в данной модели представляет собой категорификацию Хованова-Лауды-Рокира для квантовой алгебры $U_q(\mathfrak{sl}_2)$. В завершение данного раздела в **подразделе 5.4.6** обсуждается декатегорификация данной конструкции и ее соответствие моделям пространства модулей комплексных связностей на дополнении к узлу.

В заключительном **разделе 5.5** для этой главы приведены замечания об обобщении данной конструкции на случаи $\mathfrak{sl}_{n>2}$. Так в **подразделе 5.5.1** приведена классификация вакуумов для случая общего n . А в **подразделах 5.5.2** и **5.5.3** приведены конструкции переплетающих и замыкающих дефектов соответственно. В **подразделах 5.5.4** собрана физическая аргументация, почему результирующее Гильбертово подпространство основных состояний в данной модели в присутствии дефекта изоморфно когомологиям Хованова-Рожанского, отвечающим обобщению когомологий Хованова на случай $\mathfrak{sl}_{n>2}$.

В **заключении** приведены основные результаты диссертационной работы.

В **приложении А** собран справочный материал о структуре действия суперсимметричной теории Янга-Миллса с материей в различном количестве измерений и с различными граничными условиями.

Заключение

В данной диссертационной работе были получены следующие результаты:

1. Вычислены волновые функции в двумерных моделях с $\mathcal{N} = (2, 2)$ суперсимметрией в пределе низких энергий и в присутствии дефектов типа «интерфейс», интерполирующих между различными точками в пространстве параметров теории. Показано, что в данных семействах моделей классификация калибровочно неэквивалентных волновых функций состояний, сохраняющих часть суперсимметрии теории (так называемых состояний Богомольного-Прасада-Зоммерфельда (БПЗ)), отвечает математической классификации в терминах объектов категорий. Показано, что Т-дуальность, спущенная на уровень волновых функций, приводит к гомологической зеркальной симметрии, связывающей категории Фукаи-Сайдела и (производные) категории когерентных пучков.
2. Предложена новая модель, где операторы дефектов отвечают элементам группы кос. Классификация волновых функций таких сплетающих дефектов отвечает классификации объектов в категориальной деформации Хованова-Лауды-Рокира для алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$. С помощью зеркальной симметрии, соответствующей также спектральной дуальности в данном контексте, установлена связь данной модели, реализованной, как сигма-модель на многообразии флагов (или колчанном многообразии в более общем случае), с иными высокоэнергетическими реализациями в терминах суперсимметричных моделей Ландау-Гинзбурга.
3. Предложена новая модель из семейства моделей Ландау-Гинзбурга, где операторы дефектов отвечают зацеплениям нитей в трехмерном пространстве. Показано, что из квантовых чисел состояний (фермионного числа и центрального заряда супералгебры) в данной модели в присутствии дефекта зацепления может быть восстановлен категориальный инвариант зацепления, предложенный М.Ховановым и обобщающий значение вакуумного среднего петель Вильсона в трехмерной теории Черна-Саймонса для калибровочной группы $SU(2)$. Также в работе предложены методы обобщения вычислений на случаи калибровочной группы $SU(n)$, $n \geq 3$.
4. Описаны молекуло-подобные низкоэнергетические состояния в эффективной модели D-бран в теории струн типа IIA, скомпактифицированной на многообразии Калаби-Яу. Непертурбативно вычислены элементы матрицы неупругого рассеяния таких состояний при нулевом импульсе. Показано, что эти элементы находятся во взаимно-однозначном соответствии со структурными константами кохомологической алгебры Холла, введенной М.Концевичем и Я.Сойбельманом для умножения эквивариантных кохомологий на многообразиях Калаби-Яу.
5. Предложен новый способ работы с сингулярными пространствами модулей представлений колчанов. Для этого в эффективных моделях D-бран на торических многообразиях Калаби-Яу, классифицируемых колчанами, вычислены квази-классические волновые

функции основных суперсимметричных состояний до второго порядка в теории возмущений в дуальной «кристаллической» фазе. Показано, что данные состояния подвержены действию операторов дефектов, добавляющих и убавляющих элементарные D-браны. Вместе эта конструкция состояний и операторов, действующих на них, соответствует «кристаллическим» представлениям алгебр колчаных янгианов, которые обобщают обычные алгебры аффинных янгианов, построенных по аффинным диаграммам Дынкина для супер-алгебр Ли. Описана связь кохомологических алгебр Холла с алгебрами колчаных янгианов в терминах дуальности Кулона-Хиггса для физической модели D-бран.

6. В работе рассмотрены компактификации эффективных теорий D-бран на торических многообразиях Калаби-Яу (четырёхмерные $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричные теории Янга-Миллса) на различные дополнительные пространства. Доказано, что таким образом можно получить обобщения колчаных янгианов, как алгебр рассеяния состояний БПЗ, на торические и эллиптические алгебры, отвечающие обобщению умножения Концевича-Сойбельмана на элементы K-теории и эллиптических кохомологий пространств модулей представлений колчанов. Предложены новые аргументы в пользу гипотезы, что компактификация на римановы поверхности старшего рода отвечает обобщенным кохомологическим теориям Эйленберга-Стиррода.
7. Вычислены суперсимметрические индексы дефектных операторов типа «интерфейс» в эффективных теориях D-бран на торических многообразиях Калаби-Яу. Соответствующие индексы отвечают матричным элементам R-матриц для алгебр колчаных янгианов с дополнительной структурой биалгебры Хопфа и удовлетворяют уравнениям Янга-Бакстера. Показано, что требования квантово-полевой согласованности соответствующей теории поля приводит к сужению разрешенного класса колчаных моделей на некиральные колчаны.
8. Показано, что методы работы с трехмерными многообразиями Калаби-Яу не могут быть легко обобщены на четырехмерные многообразия, а требуют нового развития. Предложено новое обобщенное определение зарядовой функции – рациональной функции, чья полюсная структура однозначно определяется волновой функцией состояния БПЗ в «кристаллической» фазе. Показано, что в отличие от трехмерного случая в четырехмерном случае зарядовая функция состоит из вкладов как отдельных узлов «кристалла», так и целых узловых кластеров.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Galakhov D., Mironov A., Morozov A.* $SU(2)/SL(2)$ knot invariants and Kontsevich-Soibelman monodromies // Theor. Math. Phys. — 2016. — Т. 187, № 2. — С. 678—694. — arXiv: [1510.05366 \[hep-th\]](#).
2. *Galakhov D.* Why Is Landau-Ginzburg Link Cohomology Equivalent To Khovanov Homology? // JHEP. — 2019. — Т. 05. — С. 085. — arXiv: [1702.07086 \[hep-th\]](#).
3. *Galakhov D.* BPS Hall Algebra of Scattering Hall States // Nucl. Phys. B. — 2019. — Т. 946. — С. 114693. — arXiv: [1812.05801 \[hep-th\]](#).
4. *Galakhov D., Yamazaki M.* Quiver Yangian and Supersymmetric Quantum Mechanics // Commun. Math. Phys. — 2022. — Т. 396, № 2. — С. 713—785. — arXiv: [2008.07006 \[hep-th\]](#).
5. *Galakhov D.* On supersymmetric interface defects, brane parallel transport, order-disorder transition and homological mirror symmetry // JHEP. — 2020. — Т. 22. — С. 076. — arXiv: [2105.07602 \[hep-th\]](#).
6. *Galakhov D., Li W., Yamazaki M.* Shifted quiver Yangians and representations from BPS crystals // JHEP. — 2021. — Т. 08. — С. 146. — arXiv: [2106.01230 \[hep-th\]](#).
7. *Galakhov D., Li W., Yamazaki M.* Toroidal and elliptic quiver BPS algebras and beyond // JHEP. — 2022. — Т. 02. — С. 024. — arXiv: [2108.10286 \[hep-th\]](#).
8. *Galakhov D., Li W., Yamazaki M.* Gauge/Bethe correspondence from quiver BPS algebras // JHEP. — 2022. — Т. 11. — С. 119. — arXiv: [2206.13340 \[hep-th\]](#).
9. *Galakhov D.* BPS states meet generalized cohomology // JHEP. — 2023. — Т. 07. — С. 059. — arXiv: [2303.05538 \[hep-th\]](#).
10. *Galakhov D., Morozov A., Tselousov N.* Super-Schur polynomials for Affine Super Yangian $Y(\hat{\mathfrak{gl}}_{1|1})$ // JHEP. — 2023. — Т. 08. — С. 049. — arXiv: [2307.03150 \[hep-th\]](#).
11. *Galakhov D., Li W.* Charging solid partitions // JHEP. — 2024. — Т. 01. — С. 043. — arXiv: [2311.02751 \[hep-th\]](#).
12. *Galakhov D., Morozov A., Tselousov N.* Towards the theory of Yangians // Phys. Rev. D. — 2024. — Март. — Т. 109, вып. 6. — С. 066001. — arXiv: [2311.00760 \[hep-th\]](#).

Список литературы

13. A Panorama Of Physical Mathematics с. 2022 / I. Bah [и др.]. — 2022. — Нояб. — arXiv: [2211.04467 \[hep-th\]](#).
14. *Chun S., Gukov S., Roggenkamp D.* Junctions of surface operators and categorification of quantum groups. — 2015. — arXiv: [1507.06318 \[hep-th\]](#).
15. *Vassiliev V.* Cohomology of knot spaces // Theory of Singularities and Its Applications. — 1990. — Т. 1. — С. 23—69.
16. *Kontsevich M.* Vassiliev's knot invariants // Adv. in Sov. Math. — 1993. — Т. 16, № 2. — С. 137—150.
17. *Kauffman L. H.* Knots and physics. Т. 1. — World scientific, 2001.
18. *Jones V. F. R.* A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras // Bull. Am. Math. Soc. — 1985. — Т. 12, № 1. — С. 103—111.
19. *Jones V. F. R.* Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials // Ann. Math. — 1987. — Т. 126. — С. 335—388.
20. *Schwarz A. S.* The partition function of a degenerate functional // Communications in Mathematical Physics. — 1979. — Т. 67. — С. 1—16.
21. *Atiyah M. F.* Topological quantum field theory // Publications Mathématiques de l'IHÉS. — 1988. — Т. 68. — С. 175—186.
22. *Witten E.* Quantum field theory and the Jones polynomial // Communications in Mathematical Physics. — 1989. — Т. 121, № 3. — С. 351—399.
23. *Решетихин Н. Ю.* Квазитреугольные алгебры Хопфа и инварианты связок // Алгебра и анализ. — 1989. — Т. 1, № 2. — С. 169—188.
24. *Reshetikhin N. Y., Turaev V. G.* Ribbon graphs and their invariants derived from quantum groups // Communications in Mathematical Physics. — 1990. — Т. 127. — С. 1—26.
25. A new polynomial invariant of knots and links / P. Freyd [и др.] // Bulletin of the American Mathematical Society. — 1985. — Т. 12, № 2. — С. 239—246.
26. *Przytycki J. H., Traczyk P.* Invariants of links of Conway type // Kobe J. Math. — 1988. — Т. 4. — С. 115—139. — arXiv: [1610.06679 \[math.GT\]](#).
27. *Khovanov M.* A categorification of the Jones polynomial. — 1999. — arXiv: [math/9908171 \[math.QA\]](#).

28. *Khovanov M., Rozansky L.* Matrix factorizations and link homology. — 2004. — arXiv: [math/0401268 \[math.QA\]](#).
29. *Khovanov M., Rozansky L.* Matrix factorizations and link homology II // Geometry & Topology. — 2008. — Т. 12, № 3. — С. 1387—1425.
30. *Khovanov M., Lauda A.* A diagrammatic approach to categorification of quantum groups I // Representation Theory of the American Mathematical Society. — 2009. — Т. 13, № 14. — С. 309—347.
31. *Khovanov M., Lauda A.* A diagrammatic approach to categorification of quantum groups II // Transactions of the American Mathematical Society. — 2011. — Т. 363, № 5. — С. 2685—2700.
32. *Rouquier R.* 2-Kac-Moody algebras. — 2008. — arXiv: [0812.5023 \[math.RT\]](#).
33. *Gukov S., Schwarz A. S., Vafa C.* Khovanov-Rozansky homology and topological strings // Lett. Math. Phys. — 2005. — Т. 74. — С. 53—74. — arXiv: [hep-th/0412243](#).
34. *Gukov S., Saberi I.* Lectures on Knot Homology and Quantum Curves. — 2012. — Ноябрь. — arXiv: [1211.6075 \[hep-th\]](#).
35. *Witten E.* Khovanov Homology And Gauge Theory. — 2011. — Август. — arXiv: [1108.3103 \[math.GT\]](#).
36. *Witten E.* Fivebranes and Knots. — 2011. — Январь. — arXiv: [1101.3216 \[hep-th\]](#).
37. Topological Strings, D-Model, and Knot Contact Homology / М. Aganagic [и др.] // Adv. Theor. Math. Phys. — 2014. — Т. 18, № 4. — С. 827—956. — arXiv: [1304.5778 \[hep-th\]](#).
38. *Witten E.* Two Lectures On The Jones Polynomial And Khovanov Homology. — 2014. — Январь. — arXiv: [1401.6996 \[math.GT\]](#).
39. *Aganagic M., Shakirov S.* Knot Homology and Refined Chern-Simons Index // Commun. Math. Phys. — 2015. — Т. 333, № 1. — С. 187—228. — arXiv: [1105.5117 \[hep-th\]](#).
40. *Gaiotto D., Moore G. W., Witten E.* Algebra of the Infrared: String Field Theoretic Structures in Massive $\mathcal{N} = (2, 2)$ Field Theory In Two Dimensions. — 2015. — Июнь. — arXiv: [1506.04087 \[hep-th\]](#).
41. *Aganagic M.* Knot Categorification from Mirror Symmetry, Part I: Coherent Sheaves. — 2020. — Апрель. — arXiv: [2004.14518 \[hep-th\]](#).
42. *Aganagic M.* Knot Categorification from Mirror Symmetry, Part II: Lagrangians. — 2021. — Май. — arXiv: [2105.06039 \[hep-th\]](#).
43. *Aganagic M.* Homological Knot Invariants from Mirror Symmetry. — 2022. — Июль. — arXiv: [2207.14104 \[math.GT\]](#).
44. *Harvey J. A., Moore G. W.* Algebras, BPS states, and strings // Nucl. Phys. B. — 1996. — Т. 463. — С. 315—368. — arXiv: [hep-th/9510182](#).
45. *Harvey J. A., Moore G. W.* On the algebras of BPS states // Commun. Math. Phys. — 1998. — Т. 197. — С. 489—519. — arXiv: [hep-th/9609017](#).

46. BPS Algebras in 2D String Theory / S. M. Harrison [и др.] // Annales Henri Poincare. — 2022. — Т. 23, № 10. — С. 3667—3752. — arXiv: [2107.03507 \[hep-th\]](#).
47. *Kontsevich M., Soibelman Y.* Cohomological Hall algebra, exponential Hodge structures and motivic Donaldson-Thomas invariants // Commun. Num. Theor. Phys. — 2011. — Т. 5. — С. 231—352. — arXiv: [1006.2706 \[math.AG\]](#).
48. *Feigin B. L., Odesskii A. V.* Vector bundles on elliptic curve and Sklyanin algebras. — 1995. — arXiv: [q-alg/9509021 \[math.QA\]](#).
49. *Li W., Yamazaki M.* Quiver Yangian from Crystal Melting // JHEP. — 2020. — Т. 11. — С. 035. — arXiv: [2003.08909 \[hep-th\]](#).
50. *Spill F.* Yangians in Integrable Field Theories, Spin Chains and Gauge-String Dualities // Rev. Math. Phys. — 2012. — Т. 24. — С. 1230001. — arXiv: [1201.1884 \[hep-th\]](#).
51. *Nekrasov N. A., Shatashvili S. L.* Bethe/Gauge correspondence on curved spaces // JHEP. — 2015. — Т. 01. — С. 100. — arXiv: [1405.6046 \[hep-th\]](#).
52. *Nekrasov N., Pestun V., Shatashvili S.* Quantum geometry and quiver gauge theories // Commun. Math. Phys. — 2018. — Т. 357, № 2. — С. 519—567. — arXiv: [1312.6689 \[hep-th\]](#).
53. *Nekrasov N.* Superspin chains and supersymmetric gauge theories // JHEP. — 2019. — Т. 03. — С. 102. — arXiv: [1811.04278 \[hep-th\]](#).
54. *Gaiotto D., Moore G. W., Neitzke A.* Spectral networks // Annales Henri Poincare. — 2013. — Т. 14. — С. 1643—1731. — arXiv: [1204.4824 \[hep-th\]](#).
55. *Costello K., Witten E., Yamazaki M.* Gauge Theory and Integrability, II // ICCM Not. — 2018. — Т. 06, № 1. — С. 120—146. — arXiv: [1802.01579 \[hep-th\]](#).
56. *Costello K., Yamazaki M.* Gauge Theory And Integrability, III. — 2019. — Август. — arXiv: [1908.02289 \[hep-th\]](#).
57. *Kerr G., Soibelman Y.* On 2d-4d motivic wall-crossing formulas. — 2017. — Ноябрь. — arXiv: [1711.03695 \[math.AG\]](#).
58. *Clingempeel J., Le Floch B., Romo M.* Brane transport in anomalous (2,2) models and localization. — 2018. — Ноябрь. — arXiv: [1811.12385 \[hep-th\]](#).
59. *Brunner I., Klos F., Roggenkamp D.* Phase transitions in GLSMs and defects // JHEP. — 2021. — Т. 05. — С. 006. — arXiv: [2101.12315 \[hep-th\]](#).
60. *Dedushenko M., Nekrasov N.* Interfaces and Quantum Algebras, I: Stable Envelopes. — 2021. — Сентябрь. — arXiv: [2109.10941 \[hep-th\]](#).
61. *Dedushenko M., Nekrasov N.* Interfaces and Quantum Algebras, II: Cigar Partition Function. — 2023. — Июнь. — arXiv: [2306.16434 \[hep-th\]](#).