

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Физический институт им. П.Н. Лебедева Российской академии наук

На правах рукописи

Колганов Никита Михайлович

**Физика ранней Вселенной:  
модифицированные теории гравитации  
и неравновесные явления**

Специальность 1.3.3 —  
«Теоретическая физика»

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
д.ф.-м.н., в.н.с.  
Барвинский Андрей Олегович

Москва — 2024

# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>4</b>
<b>Глава 1 Обобщённая унимодулярная гравитация</b>	<b>15</b>
1.1 Общие свойства модели . . . . .	15
1.2 Гамильтонов формализм и степени свободы . . . . .	19
1.2.1 Алгебра связей двух ветвей теории . . . . .	22
1.2.2 Счёт числа степеней свободы . . . . .	26
1.3 Космологические приложения . . . . .	27
1.3.1 Теория возмущений на космологическом фоне . . . . .	31
1.3.2 Инфляционный спектр возмущений . . . . .	36
1.3.3 Реконструкция параметров модели . . . . .	41
1.4 Ковариантизация с помощью трюка Штюкельберга . . . . .	44
1.4.1 Отщепление пространственных полей Штюкельберга . . . . .	47
1.4.2 Реконструкция действия $k$ -эссенции . . . . .	50
<b>Глава 2 Неравновесная диаграммная техника для смешанных состояний</b>	<b>61</b>
2.1 Подготовительные замечания: свойства функций Грина . . . . .	61
2.1.1 Обозначения . . . . .	61
2.1.2 Гамильтонова формулировка . . . . .	63
2.1.3 Симметричные функции Грина . . . . .	68
2.1.4 Связь задач Дирихле и Неймана . . . . .	71
2.1.5 Каноническое квантование . . . . .	72
2.1.6 Преобразования Боголюбова . . . . .	76
2.1.7 Пространство Фока и когерентные состояния . . . . .	79
2.2 Вычисление производящего функционала . . . . .	80
2.2.1 Гауссовы матрицы плотности . . . . .	80
2.2.2 Краевая задача . . . . .	83

2.2.3	Неймановские базисные функции . . . . .	84
2.2.4	Поворот Келдыша . . . . .	87
2.2.5	Выбор базисных функций . . . . .	88
2.2.6	Квазитепловое состояние . . . . .	91
2.2.7	Аналитическое продолжение и КМС условие . . . . .	94
2.3	Примеры . . . . .	99
2.3.1	Гармонический осциллятор . . . . .	99
2.3.2	Общая одномерная система . . . . .	101
<b>Глава 3 Корреляционные функции в системах с туннелирова-</b>		
	<b>нием</b>	<b>105</b>
3.1	Корреляционные функции в мнимом времени . . . . .	105
3.2	Корреляционные функции в вещественном времени . . . . .	111
3.2.1	Перевальное решение и нулевая мода . . . . .	113
3.2.2	Восстановление инвариантности . . . . .	116
3.2.3	Теория возмущений . . . . .	119
3.3	Диаграммная техника . . . . .	122
3.3.1	Евклидов случай . . . . .	122
3.3.2	Лоренцев случай . . . . .	126
3.4	Трёхкомпонентные функции Грина для систем с инстантонами .	129
3.5	Поворот Келдыша . . . . .	133
<b>Заключение</b>		<b>142</b>
<b>Список литературы</b>		<b>144</b>
<b>Приложение А Приложения к главе 1</b>		<b>150</b>
A.1	Отщепление полей Штюкельберга для семейства (1.162) . . . . .	150
<b>Приложение Б Приложения к главе 2</b>		<b>153</b>
B.1	Обращение некоторых матриц . . . . .	153
B.2	Вывод некоторых уравнений . . . . .	155
B.3	Свойства гауссовых матриц плотности . . . . .	156
<b>Приложение В Приложения к главе 3</b>		<b>159</b>
V.1	Евклидовы функции Грина и нулевые моды . . . . .	159

# Введение

**Актуальность темы.** Общая теория относительности (ОТО) [1], предложенная Эйнштейном в качестве теории гравитации уже более ста лет назад, имеет огромную предсказательную силу на масштабах от лабораторных до галактических, что подтверждается многочисленными физическими экспериментами. Однако на малых (планковских), а также на больших (сверхгалактических) масштабах ОТО приобретает некоторые патологии, что на данный момент не позволяет считать её окончательной теорией гравитации.

В частности, на планковских масштабах, т.е. масштабах, на которых становятся существенными квантовые эффекты, ОТО страдает от проблемы неперенормируемости, а именно невозможности избежать бесконечных вкладов в физические ответы для наблюдаемых величин за счёт добавления конечного количества вспомогательных слагаемых (контрчленов) в действие теории, как это сделано, например, в Стандартной модели элементарных частиц. Кроме того, на сверхгалактических масштабах возникают проблемы тёмной энергии и тёмной материи, физических субстанций, предсказываемых в классической и квантовой космологии и необходимых для описания кривых вращения галактик и позднего ускоренного расширения Вселенной, и которые должны тем или иным способом быть включены в теорию гравитации, что не сделано единственным и естественным образом до сих пор.

Для решения обозначенных проблем обычно предлагается модифицировать (или дополнить) ОТО таким образом, чтобы модификация не испортила предсказательную её силу на тех масштабах, на которых есть совпадение с наблюдаемыми данными, и при этом теория допускала бы непротиворечивое квантование и/или согласованно объясняла бы явления темной энергии и тёмной материи. Такие теории обычно называют модифицированными теориями гравитации, и несмотря на большой прогресс в создании таких моделей, проблема далека от окончательного решения.

Наиболее простой способ модифицировать общую теорию относительности — добавить дополнительные степени свободы помимо метрических и полей материи. Примером таких модификаций являются теории Хорндески или DHOST, в которых дополнительной степенью свободы является скалярное поле [2], взаимодействующее с метрикой, но не с полями материи. Большинство ныне существующих модифицированных теорий гравитации устроены именно таким образом, и даже в тех случаях, когда новые степени свободы не добавляются явно, довольно часто теория может быть переформулирована в терминах общей теории относительности, взаимодействующей с некоторыми дополнительными полями (как происходит, например, в  $f(R)$ -гравитации [3; 4]).

Менее очевидным источником дополнительных степеней свободы является нарушение общековариантной симметрии действия. В ОТО за счет инвариантности действия относительно диффеоморфизмов из десяти независимых компонент метрики физическими являются только две, соответствующие двум поляризациям гравитона. Если симметрия относительно диффеоморфизмов тем или иным образом нарушена, количество физических степеней свободы может увеличиться. Несмотря на то, что общая ковариантность (независимость от выбора системы координат), а также лоренц-ковариантность наблюдаемых физических законов на данный момент с высокой точностью проверены на эксперименте [5], даже небольшое нарушение такой инвариантности может позволить решить некоторые проблемы общей теории относительности.

Примером, когда нарушение общей ковариантности приводит к интересным физическим следствиям, является теория Хоравы-Лифшица [6; 7]. Инвариантность относительно диффеоморфизмов пространства-времени в этой теории нарушена до инвариантности относительно трёхмерных диффеоморфизмов и репараметризаций времени, а лоренц-инвариантность нарушена до инвариантности относительно трёхмерных поворотов. Нарушение достигается за счёт введения анизотропного масштабирования по Лифшицу, которое состоит в неоднородном изменении времени и координат при их масштабировании. Это позволяет эффективно обезразмерить гравитационную постоянную и сделать теорию гравитации перенормируемой с конечным числом контрчленов [8; 9]. Кроме того, есть явные указания на то, что при низких энергиях лоренц-инвариантность теории Хоравы-Лифшица может быть восстановлена [10]. Нарушение общей ковариантности в теории Хоравы-Лифшица приводит к одной

дополнительной степени свободы — скалярному гравитону [6; 11].

Также нарушение лоренц-инвариантности используется при построении массивных теорий гравитации, имеющих применение при модификации ОТО на больших масштабах. Известно, что в лоренц-инвариантном случае массивный гравитон на плоском фоне в линейном порядке единственным образом описывается теорией Паули-Фирца. Однако эта теория не имеет хорошего предела при стремящейся к нулю массе гравитона, в частности, наблюдаемые величины, такие как угол отклонения луча света гравитирующим телом, после взятия такого предела не совпадают с соответствующими предсказаниями общей теории относительности. Данный результат имеет название скачка ван Дама-Вельтмана-Захарова [12; 13] и существенно усложняет построение непротиворечивой массивной теории гравитации. Преодолеть данную проблему можно за счёт введения лоренц-неинвариантного массового члена для линеаризованного действия гравитона [14; 15]. В зависимости от параметров модели, нарушение лоренц-инвариантности, влекущее за собой также нарушение инвариантности относительно диффеоморфизмов, приводит к появлению до четырёх степеней свободы, дополнительных к двум поляризациям безмассового гравитона.

Примером модифицированной теории гравитации, количество и природа степеней свободы в которой совпадает с ОТО, является унимодулярная гравитация [16—18]. Данная модифицированная теория гравитации может быть получена из теории Эйнштейна наложением связи, приравнивающей единице детерминант метрики. Такая связь нарушает общую ковариантность системы до инвариантности относительно диффеоморфизмов, сохраняющих объем. Известно, что наложение связи на теорию может привести как к увеличению, так и к уменьшению числа степеней свободы, в зависимости от её рода [19]. Оказывается, что в случае унимодулярной гравитации модификация не меняет число локальных степеней свободы, но добавляет одну глобальную степень свободы с тривиальной динамикой, имеющую смысл космологической постоянной.

Попыткой обобщить данную модель с целью придать космологической «постоянной» нетривиальную динамику является модель обобщенной унимодулярной гравитации [20]. Эта модель отличается от общей теории относительности наложением связи на метрику, приравнивающей 00-компоненту обратной метрики некоторой функции от детерминанта пространственной части метрики, являющейся функциональным параметром теории. Данный специальный выбор

связи выделен тем, что эффективный тензор энергии-импульса, возникающий из-за её наложения, имеет вид тензора энергии-импульса некоторой идеальной жидкости с произвольным баротропным уравнением состояния, в котором баротропный параметр определяется функциональным параметром модели. Таким образом, в зависимости от выбора параметра, обобщённая унимодулярная гравитация может выступать как в качестве модели тёмной материи, так и в качестве модели тёмной энергии со значением баротропного параметра, отличного от  $-1$ .

В главе 1 данной диссертации мы проводим исследование обобщённой унимодулярной гравитации в трёх её аспектах. Во-первых, мы вычисляем количество степеней свободы в данной модели и обнаруживаем, что в теории может появиться степень свободы, дополнительная к двум степеням свободы ОТО. Во-вторых, мы строим космологическую теорию возмущений в обобщённой унимодулярной гравитации и обнаруживаем, что при подходящем выборе функционального параметра возникающая в модели дополнительная степень свободы может генерировать правдоподобный спектр реликтового излучения. В-третьих, мы получаем ковариантную формулировку обобщённой унимодулярной гравитации, с помощью которой реинтерпретируем модель в терминах скалярной теории поля с нестандартным кинетическим членом ( $k$ -эссенции), минимально взаимодействующей с гравитацией, что позволяет использовать произвольные физически обоснованные координаты, связанные, например, с внешними пробными телами, а не со степенями свободы, присущими системе. Все указанные результаты получены нами впервые в работах [21–23].

Задача выделения физических степеней свободы является нетривиальной, так как наложение связи в обобщённой унимодулярной гравитации явно нарушает как лоренц-инвариантность, так и общую ковариантность теории. Для решения этой задачи мы применяем наиболее общий метод, а именно формализм гамильтоновых систем со связями, позволяющий определить количество физических степеней свободы в теории на нелинейном уровне, исследуя количество связей и их род [19]. Как было упомянуто выше, мы получаем, что в ситуации общего положения количество степеней свободы в обобщённой унимодулярной гравитации равно трём. Однако также мы обнаруживаем, что при специальном выборе начальных условий количество степеней свободы уменьшается до двух.

Степени свободы модифицированных теорий гравитации, дополнительные

к имеющимся в теории Эйнштейна, оставляют отпечаток на спектре и амплитуде реликтового радиационного и гравитационного излучения, сгенерированных на ранних стадиях эволюции Вселенной, и наблюдаемых на эксперименте в настоящее время [24]. Этот факт позволяет исследовать применимость модифицированных теории гравитации, сравнивая соответствующие теоретические предсказания с экспериментом.

Для этого мы строим космологическую теорию возмущений для обобщённой унимодулярной гравитации, т.е. сначала решаем классические уравнения движения теории в космологическом анзаце, строим теорию возмущений на фоне найденного решения, а затем вычисляем наблюдаемые величины, простейшими из которых являются одновременные двухточечные корреляционные функции в скалярном и тензорном секторах, задающие амплитуду и спектр соответствующих возмущений [25; 26]. Мы получаем, что дополнительная степень свободы в обобщённой унимодулярной гравитации на космологическом фоне имеет скалярную природу (ввиду метрического происхождения мы называем её скалярным гравитоном) и может вносить основной вклад в космологические возмущения в скалярном секторе, сгенерированные на инфляционной стадии. Мы обнаруживаем, что можно подобрать функциональный параметр модели таким образом, чтобы обеспечить как инфляционную стадию достаточной продолжительности, так и спектр и амплитуду скалярных и тензорных возмущений, согласующиеся с экспериментом [24].

Явное нарушение общей ковариантности в модифицированной теории гравитации может быть интерпретировано, как специальный выбор системы координат в некоторой ковариантной теории. Чтобы обеспечить возможность использовать произвольные физически обоснованные координаты, мы строим ковариантную формулировку обобщённой унимодулярной гравитации. Для этого мы используем общий метод получения ковариантной формулировки (ковариантизации) модифицированных теорий гравитации, имеющих алгебраическую зависимость от метрики в нековариантной части действия [15; 27]. Он основан на введении набора из четырёх (по размерности пространства-времени) вспомогательных скалярных полей, называемых Штюкельберговскими, с помощью которых можно преобразовать нековариантную часть действия в скаляр. Мы применяем данную конструкцию к обобщённой унимодулярной гравитации, таким образом ковариантизуя часть действия, соответствующую связи. Кроме

того, мы получаем, что на уравнениях движения три из четырёх Штюкельберговских полей, исключаются путём явного решения соответствующих уравнений движения, в результате чего действие теории принимает вид специальной модели  $k$ -эссенции [28; 29], в котором роль скаляра  $k$ -эссенции играет Штюкельберговское поле, соответствующее «временной» координате.

В главе 2 мы переходим к построению общей техники для вычисления наблюдаемых величин в достаточно произвольных моделях квантовой космологии. Эти наблюдаемые величины, например, обсуждавшийся в главе 1 спектр реликтового излучения, вычисляются с помощью методов квантовой теории поля (КТП) [25; 26]. Наиболее общими наблюдаемыми, вычисляемыми в КТП, является корреляционные функции полей. При изучении неравновесных и нестационарных явлений используют in-in корреляционные функции, которые представляют собой произведение упорядоченных и анти-упорядоченных по времени гейзенберговских операторов, усредненных по некоторой матрице плотности [30; 31]. Процесс инфляционного расширения в ранней Вселенной является существенно нестационарным процессом, ввиду чего наблюдаемые в квантовой космологии задаются именно in-in корреляционными функциями с достаточно общим начальным состоянием. В этой части диссертации мы строим производящий функционал таких корреляционных функций и применяем его к специальному классу начальных состояний, задаваемых так называемой евклидовой матрицей плотности. В результате, мы обнаруживаем, что для данного класса состояний корреляционные функции обладают дополнительными аналитическими свойствами, в частности, удовлетворяют условию Кубо-Мартини-Швингера [32; 33], которое наблюдалось ранее только для систем в термодинамическом равновесии. Выполнение этого свойства для неравновесных систем впервые было получено нами в работе [10].

Корреляционные функции можно вычислить точно только для узкого класса точнорешаемых систем, поэтому для их расчета в реальных задачах обычно применяют теорию возмущений, и соответствующая ей диаграммную технику. В частности, для вычисления in-in корреляционных функций используется так называемая техника Швингера-Келдыша [30; 31]. Несмотря на то, что такая техника построена для достаточно широкого класса систем [34], для общего класса полевых систем и состояний, возникающих в задачах квантовой космологии, не разработана. В данной работе мы вычисляем производящий функци-

онал для произвольной нестационарной теории поля, действие которой квадратично по полям, а матрица плотности, задающее начальное состояние, задано в координатном представлении как общее гауссово распределение. Чтобы пертурбативно учесть нелинейности действия и негауссовости состояния, мы вводим соответствующие источники в определение действия модели и матрицы плотности.

Чтобы использовать полученный нами производящий функционал для предсказания наблюдаемых величин в квантовой космологии, нам необходимо выбрать начальное состояние, ассоциируемое с начальным состоянием Вселенной. Для этого мы воспользуемся принципом естественности, согласно которому предпочтительными являются состояния, определяемые теоретико-полевой моделью Вселенной, а не какими-либо свободно изменяемыми начальными условиями. Одним из способов «естественно» задать начальное состояние в моделях пространственно замкнутой космологии является прескрипция Хартла-Хокинга [35], которая, в частности, обобщает понятие волновой функции основного состояния на гравитационные системы. В частности, состояние Хартла-Хокинга является физически оправданным, так как приводит к спектру реликтового излучения и другим космологическим наблюдаемым, согласующимся с экспериментальными данными [36; 37].

В данной работе в качестве начального состояния мы используем обобщение волновой функции Хартла-Хокинга на случай смешанных состояний, которое можно интерпретировать как определение микроканонического ансамбля для гравитационных систем [38]. В формализме Баталина-Фрадкина-Вилковыского такое состояние определяется как евклидов функциональный интеграл по траекториям, где евклидово действие получено из обычного поворотом Вика [10]. Используя специальные аналитические свойства, следующие из постановки задачи, мы получаем, что для рассматриваемых состояний корреляционные функции обладают дополнительными аналитическими свойствами, а именно удовлетворяют также упомянутому условию квазипериодичности Кубо-Мартин-Швингера. С одной стороны, выполнение этого условия обычно приводит к техническим преимуществам при пертурбативном вычислении корреляционных функций, позволяя использовать процедуру аналитического продолжения как инструмент при вычислении. С другой стороны, оно указывает на то, что несмотря на явную нестационарность системы, система имеет свойства, близкие

к свойствам систем в термодинамическом равновесии.

В главе 3 мы вычисляем корреляционные функции в квантовомеханических системах, в которых проявляются эффекты туннелирования. Простейшими системами, в которых реализуются такие эффекты, являются системы, классическая потенциальная энергия в которых имеет несколько локальных и/или вырожденных минимумов. В этой части работы мы строим производящий функционал для корреляционных функций в системах с конечным количеством степеней свободы, и находящихся в состоянии термодинамического равновесия, а потенциальная энергия которых имеет вырожденные минимумы.

Мы имеем две основные мотивации для вычисления корреляционных функций в системах с перечисленными свойствами. Первая мотивация происходит из желания учесть динамику фона в рассматриваемой в главе 2 задаче вычисления корреляционных функций в неравновесных системах с евклидовой матрицей плотности. Второй мотивацией является необходимость вычислять корреляционные функции в системах, проявляющих эффекты туннелирования, явно в вещественном времени, т.е. избегая процедуры аналитического продолжения.

Системы, находящиеся в состоянии термодинамического равновесия, обладают отличительным свойством, а именно их корреляционные могут быть вычислены в мнимом времени, а затем аналитически продолжены в вещественное время [39; 40]. Этот факт может давать заметное техническое преимущество, так как вычисление корреляционных функций в мнимом времени обычно является более простой задачей. Однако, если корреляционные функции в мнимом времени вычислены с помощью какой либо численной процедуры, это преимущество нивелируется, так как численное аналитическое продолжение является математически плохо поставленной задачей и трудно реализуется на практике [41]. Таким образом, вычисление корреляционных функций напрямую в вещественном времени может оказаться неизбежным даже в случае систем в термодинамическом равновесии.

Несмотря на то, что для широкого класса систем для вычисления таких корреляционных функций может быть использована готовая и уже упоминавшаяся выше техника Швингера-Келдыша [34], для систем с туннелированием такая техника в литературе не была известна и впервые построена нами в работе [42]. Технические трудности возникают даже при вычислении корреляционных функций мнимого времени ввиду наличия в таких системах нетривиальных ре-

шений евклидовых уравнений движения (инстантонов). Инстантоны являются перевальными точками в формализме функционала по траекториям, задающего производящий функционал, и приводят к появлению нулевой моды оператора, отвечающего за динамику линейных флуктуаций на фоне инстантонных решений, и как следствие — к наивной расходимости функционального интеграла. В данной ситуации проблема нулевой моды обычно решается с помощью процедуры, аналогичной методу Фаддеева-Попова в калибровочных теориях, фиксирующей инвариантность действия относительно сдвигов мнимого времени [43; 44]. При вычислении производящего функционала корреляционных функций в вещественном времени проблема нулевой моды усложняется тем, что инвариантность действия относительно сдвигов мнимого времени оказывается (как мы показываем, наивно) нарушена, а метод Фаддеева-Попова (также наивно) — неприменим. Мы разрабатываем процедуру, с помощью которой восстанавливаем указанную симметрию. После этого мы учитываем нулевую моду обычным образом, в результате чего вычисляем производящий функционал корреляционных функций в вещественном времени и выводим следующую из него диаграммную технику.

Таким образом, **целями** данной диссертационной работы являются:

1. Выделение физического сектора теории обобщенной унимодулярной гравитации, нахождение числа физических степеней свободы.
2. Установление естественной физической интерпретации дополнительной степени свободы в контексте инфляционного расширения Вселенной.
3. Нахождение эквивалентной ковариантной формулировки обобщенной унимодулярной гравитации.
4. Построение диаграммной техники Швингера-Келдыша для произвольных нестационарных теорий поля и для произвольных смешанных начальных состояний.
5. Разработка процедуры аналитического продолжения евклидовых функций Грина в вещественное время для начальных состояний, задаваемых евклидовой матрицей плотности.
6. Построение процедуры пертурбативного вычисления корреляционных функций в вещественном времени для квантовомеханических систем, допускающих эффекты туннелирования, находящихся в равновесных состояниях. Для достижения поставленных целей были сформулированы и решены сле-

дующие **задачи**:

1. Построить алгебру гамильтоновых связей в обобщенной унимодулярной гравитации, выделить связи первого и второго рода.
2. Построить теорию космологических возмущений в обобщенной унимодулярной гравитации, исследовать спектр скалярных и тензорных возмущений.
3. Произвести ковариантизацию обобщенной унимодулярной гравитации с помощью Штюкельберговских полей, выделить среди них нединамические и разрешить соответствующие им уравнения движения явно.
4. Вычислить производящую функцию in-in корреляционных функций для неравновесных гауссовых теорий поля и гауссовых начальных состояния, для чего поставить соответствующую краевую задачу на функцию Грина и решить, выбрав удобный набор базисных функций.
5. Исследовать аналитические свойства базисных функций в случае евклидовой матрицы плотности, с их помощью установить связь между функциями Грина в мнимом и вещественном времени.
6. Решить проблему непертурбативного учёта нулевой моды дифференциального оператора, задающего квадратичное действие на аналитически продолженном инстантонном фоне в функциональном интеграле с контуром типа Швингера-Келдыша.

**Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Построен гамильтонов формализм теории со связями в обобщённой унимодулярной гравитации, выделены связи первого и второго рода, найдено количество физических степеней свободы.
2. Разработана теория космологических возмущений в обобщенной унимодулярной гравитации, найден критерий отсутствия массовых и градиентных нестабильностей скалярной моды.
3. Вычислен спектр скалярных возмущений, генерируемый на инфляционной стадии эволюции Вселенной скалярным гравитоном.
4. Функциональный параметр обобщённой унимодулярной гравитации подобран из условия соответствия спектров и амплитуд космологических возмущений наблюдаемым данным.
5. Найдена эквивалентная ковариантная формулировка обобщенной унимодулярной гравитации, установлена связь модели с теорией  $k$ -эссенции.

6. Построена диаграммная техника для in-in функций Грина для произвольных нестационарных теорий поля и смешанных начальных состояний.
7. Установлено условие Кубо-Мартина-Швингера на функции Грина в случае евклидовой матрицы плотности и построена процедура аналитического продолжения евклидовых функций Грина в вещественное время.
8. Разработана техника вычисления in-in корреляционных функций в системах в тепловом равновесии, допускающих эффекты туннелирования.

**Научная новизна, достоверность и личный вклад автора.** Новизна рассматриваемых вопросов, а также достоверность полученных результатов привели к продвижению в исследовании модифицированных теорий гравитации и нестационарных квантовых эффектов в ранней Вселенной. Все представленные в диссертации результаты являются оригинальными и получены автором лично или при его непосредственном участии. Приведенные в диссертации результаты являются актуальными, используются и развиваются как российскими, так и зарубежными научными группами.

**Научная и практическая значимость.** Изучаемые в диссертации проблемы представляют научный интерес в области теоретической и математической физики, а также теории конденсированного состояния. Полученные в работе результаты могут быть применены для построения моделей динамической тёмной энергии и тёмной материи, а также для объяснения природы наблюдаемых космологических возмущений с помощью исключительно гравитационной модели. Построенные в работе диаграммные методы могут быть использованы для вычисления наблюдаемых величин в широком классе систем, описывающихся нестационарными и неравновесными квантовополевыми моделями, также допускающими эффекты туннелирования, и включающих в себя модели квантовой космологии и физики твёрдого тела.

**Апробация работы.** Основные результаты работы опубликованы в 4 [22; 23; 42; 45] статьях в журналах, индексируемых Web of Science и Scopus. Кроме того, основные результаты докладывались на семинарах ОТФ ФИАН, на международных конференциях “Supersymmetries and Quantum Symmetries” (SQS’22) в Дубне, “Models in Quantum Field Theory” (MQFT-2022) в Санкт-Петербурге, “Quantum Field Theory and Gravity” (QFTG 2023) в Томске, “International Conference on Particle Physics and Cosmology” в Ереване.

# Глава 1

## Обобщённая унимодулярная гравитация

### 1.1 Общие свойства модели

Действие обобщенной унимодулярной гравитации [20; 21] задаётся действием ОТО, в котором на метрические коэффициенты наложена связь вида

$$(-g^{00})^{-1/2} = N(\gamma), \quad \gamma = \det g_{ij} \quad (1.1)$$

где  $N(\gamma)$  является функциональным параметром модели. Связь может быть введена в действие с помощью множителя Лагранжа, в результате чего действие модели примет вид <sup>1</sup>

$$S_{\text{GUMG}}[g_{\mu\nu}, \lambda] = \int d^4x \sqrt{-g} R - \int d^4x \lambda [(-g^{00})^{-\frac{1}{2}} - N(\gamma)]. \quad (1.2)$$

где первое слагаемое задаёт действие Эйнштейна-Гильберта, а второе соответствующим образом связано. Чтобы сделать вариационную процедуру хорошо определённой, необходимо дополнить это действие граничным слагаемым, с целью занулить граничные вклады при вариации. Так как слагаемое, соответствующее связи не содержит производных, граничная часть действия совпадает с соответствующим слагаемым Гиббонс-Хокинга в ОТО [46].

Уравнения движения в рассматриваемой модели имеют вид уравнений Эйнштейна

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{1}{2} T_{\mu\nu}, \quad (1.3)$$

в которых тензор энергии-импульса сгенерирован дополнительным слагаемым

---

<sup>1</sup>Аббревиатура GUMG является акронимом для обобщённой унимодулярной гравитации — Generalized UniModular Gravity.

в действии, содержащим лагранжев множитель

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \int d^4x \lambda \left( (-g^{00})^{-1/2} - N(\gamma) \right) = (\rho + p) v_\mu v_\nu + p g_{\mu\nu}. \quad (1.4)$$

Специальный выбор связи (1.1) связан с тем, что соответствующих тензор энергии-импульса имеет вид тензора энергии-импульса идеальной жидкости, уравнение состояния и сопутствующая скорость в которой заданы как

$$p = w\rho, \quad w = 2 \frac{d \ln N(\gamma)}{d \ln \gamma}, \quad \rho = \frac{\lambda}{\sqrt{\gamma}}, \quad v_\mu = -\delta_\mu^0 N \quad (1.5)$$

где величина  $w$  называется баротропным параметром. Непостоянность параметра  $w$  отличает обобщённую унимодулярную гравитацию от обычной унимодулярной гравитации, являющейся частным случаем первой, и соответствующей выбору  $N(\gamma) = 1/\sqrt{\gamma}$ .

Параметры получившегося тензора энергии-импульса, а именно плотность энергии, давление и сопутствующая скорость являются функциями только метрических коэффициентов и их производных

$$\rho = 2 v^\mu v^\nu G_{\mu\nu}, \quad G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R, \quad (1.6)$$

что можно увидеть, выразив лагранжев множитель из уравнений движения, например, сворачивая правую и левую часть уравнений Эйнштейна (1.3) с обратной метрикой, и подставляя обратно в правую часть. В результате, из десяти уравнений Эйнштейна (1.3) независимыми остаются только девять, а сами уравнения записываются как действие проектора  $P_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma}$ ,  $P_{\mu\nu}{}^{\gamma\lambda} P_{\gamma\lambda}{}^{\rho\sigma} = \delta_{(\mu}^\rho \delta_{\nu)}^\sigma$  на обычные уравнения Эйнштейна

$$\begin{aligned} P_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma} G_{\rho\sigma} &= 0, \\ P_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma} &\equiv \delta_{(\mu}^\rho \delta_{\nu)}^\sigma - [v_\mu v_\nu + w(v_\mu v_\nu + g_{\mu\nu})] v^\rho v^\sigma. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Данный факт позволяет строить решения уравнений обобщенной унимодулярной гравитации по известным решениям уравнений ОТО, а именно, действуя на последнее решение диффеоморфизмом так, чтобы оно удовлетворяло уравнению связи (1.1), получаем, что оно также решает и уравнения движения рассматриваемой модели.

Для анализа числа физических степеней в обобщённой унимодулярной гравитации мы будем пользоваться каноническим формализмом. Первым шагом при его построении является  $3 + 1$  разбиение метрики, явно выделяющее

в ней временные компоненты и называющееся разбиением Арновитта-Дезера-Мизнера (АДМ) [47]. Независимыми переменными при таком разбиении являются так называемые функция  $\mathcal{N}$ , функция сдвига  $\mathcal{N}^i$ , и трёхмерная метрика, соответствующая сечениям постоянного времени. Явные формулы выражающие АДМ-переменные через компоненты обычной метрики записываются как

$$\begin{aligned}\mathcal{N} &= (-g^{00})^{-1/2}, \quad \mathcal{N}_i = g_{0i}, \quad \mathcal{N}^i = \gamma^{ij}\mathcal{N}_j, \\ \gamma_{ij} &= g_{ij}, \quad \gamma^{ij} = (\gamma_{ij})^{-1} = g^{ij} + \frac{\mathcal{N}^i\mathcal{N}^j}{\mathcal{N}^2}.\end{aligned}\tag{1.8}$$

Преимуществом такого выбора переменных в контексте обобщенной унимодулярной гравитации является также тот факт, что связь приобретает простой вид  $\mathcal{N} = N(\gamma)$  и может быть естественно разрешена явно. В АДМ-переменных действие записывается как

$$S_{\text{GUMG}}[\gamma_{ij}, \mathcal{N}^i] = \int dt d^3x \mathcal{N} \sqrt{\gamma} ({}^3R + K_{ij}^2 - K^2) \Big|_{\mathcal{N}=N(\gamma)},\tag{1.9}$$

где мы опустили дополнительное граничное слагаемое, возникшее при интегрировании по частям, а внешняя кривизна  $K_{ij}$  определена как

$$K_{ij} = \frac{1}{2\mathcal{N}}(\nabla_i\mathcal{N}_j + \nabla_j\mathcal{N}_i - \dot{\gamma}_{ij}), \quad K = \gamma^{ij}K_{ij},\tag{1.10}$$

где  $\nabla_i$  есть ковариантные производные для пространственной метрики  $\gamma_{ij}$ , а  ${}^3R$  есть скаляр кривизны также построенный по  $\gamma_{ij}$ .

Введение связи (1.1) сужает инвариантность действия ОТО относительно группы четырёхмерных диффеоморфизмов до меньшей группы симметрии. Чтобы продемонстрировать это, запишем произвольный инфинитезимальный диффеоморфизм метрики с параметром  $\xi^\mu(t, x^i)$

$$\delta^\xi g_{\mu\nu} = D_\mu \xi_\nu + D_\nu \xi_\mu, \quad \xi_\mu = g_{\mu\nu} \xi^\nu,\tag{1.11}$$

и выделим независимый набор параметров, сохраняющий связью. Здесь  $D_\mu$  есть ковариантная производная для полной метрики  $g_{\mu\nu}$ . В терминах АДМ переменных такое преобразование записывается как

$$\delta^\xi \mathcal{N} = \mathcal{N} \dot{\xi}^0 + \dot{\mathcal{N}} \xi^0 - \mathcal{N} \mathcal{N}^l \partial_l \xi^0 + \xi^l \partial_l \mathcal{N},\tag{1.12}$$

$$\delta^\xi \mathcal{N}^i = \mathcal{N}^i \dot{\xi}^0 + \dot{\mathcal{N}}^i \xi^0 - (\mathcal{N}^2 \gamma^{ij} + \mathcal{N}^i \mathcal{N}^j) \partial_j \xi^0 + \xi^i + \xi^l \partial_l \mathcal{N}^i - \mathcal{N}^l \partial_l \xi^i,\tag{1.13}$$

$$\delta^\xi \gamma_{ij} = \dot{\gamma}_{ij} \xi^0 + 2\mathcal{N}^l \gamma_{l(i} \partial_{j)} \xi^0 + \xi^l \partial_l \gamma_{ij} + 2\gamma_{l(i} \partial_{j)} \xi^l.\tag{1.14}$$

Действуя таким преобразованием на связь  $\mathcal{N} - N(\gamma) = 0$  получаем уравнения на параметры диффеоморфизмов

$$\delta^\xi [\mathcal{N} - N(\gamma)] \Big|_{\mathcal{N}=N(\gamma)} = N [\partial_t \xi^0 - (1+w) \mathcal{N}^k \partial_k \xi^0 - w \partial_t \xi^l] = 0, \quad (1.15)$$

сохраняющие действие (1.2).

Общее решение уравнения (1.15) параметризуется тремя произвольными функциями времени и координат. Тем не менее, эти функции можно считать независимыми калибровочными параметрами только если результирующий закон преобразования полей оказывается локальным по временной переменной. Отсюда следует, что решения (1.15), соответствующие истинным калибровочным преобразованиям, должны выражаться через независимые параметры и их производные до некоторого конечного порядка.

Получим независимые решения уравнения (1.15), удовлетворяющие требованию локальности. Два из них соответствуют двум чисто поперечным пространственным диффеоморфизмам с  $\xi^0 = 0$ , т.е.

$$\xi^\mu = \begin{bmatrix} 0 \\ \xi^\perp \end{bmatrix}, \quad \partial_k \xi^\perp = 0. \quad (1.16)$$

в то время как третье имеет продольную пространственную компоненту, определяемую временным параметром диффеоморфизма  $\xi^0$ . Чтобы получить его явный вид, выразим пространственную часть диффеоморфизма через  $\xi^0$ , а именно

$$\xi^\mu = \begin{bmatrix} \xi^0 \\ \partial^i \frac{1}{\Delta} \frac{\mathcal{D}_t \xi^0}{w} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{D}_t = \partial_t - (1+w) \mathcal{N}^k \partial_k, \quad (1.17)$$

для чего нам потребовалось обратить пространственный лапласиан  $\Delta$ , тем самым введя нелокальность по пространству. Мы также могли бы также поступить наоборот, выразив  $\xi^0$  через продольную часть пространственного диффеоморфизма. Однако в этом случае появилась бы нелокальность по времени, что является недопустимым для истинного калибровочного преобразования.

Если все три полученных решения действительно задают калибровочное преобразование, то счёт степеней свободы в лагранжевом подходе даёт две физические степени свободы в рассматриваемой теории. Однако, используя гамильтонов подход, являющийся более общим и мощным инструментом, мы покажем что реальное число степеней свободы в ситуации общего положения равно трём. В работе [21] показано, что ошибочный результат из лагранжевого

подхода связан с тем, что калибровочное преобразование (1.17) не сохраняет граничные условия, связано с пространственной нелокальностью этого преобразования.

## 1.2 Гамильтонов формализм и степени свободы

Для подсчёта физической степеней свободы в обобщённой унимодулярной гравитации, мы воспользуемся гамильтоновым формализмом систем со связями. Произведём преобразование Лежандра лагранжиана, задающего действие (1.9), для чего определим канонические импульсы для переменных  $\mathcal{N}^i$  и  $\gamma_{ij}$

$$P_i = 0, \quad (1.18)$$

$$\pi^{ij} = -\sqrt{\gamma}(K^{ij} - \gamma^{ij}K). \quad (1.19)$$

Так как функция сдвига  $\mathcal{N}^i$  входит в действие без производной по времени, соответствующий ей канонический импульс тождественно равен нулю, что приводит к появлению первичной связи  $P_i = 0$ . В результате преобразования Лежандра получаем гамильтониан

$$\mathcal{H} = \int_{\Sigma} d^3x (NH_{\perp} + \mathcal{N}^i H_i) \quad (1.20)$$

где

$$H_{\perp} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}(\pi_{ij}^2 - \frac{1}{2}\pi^2) - \sqrt{\gamma}{}^3R, \quad \pi = \gamma_{ij}\pi^{ij}, \quad (1.21)$$

$$H_i = -2\gamma_{ij}\nabla_k\pi^{jk}, \quad (1.22)$$

соответствуют обычным гамильтоновой и импульсной связям общей теории относительности. Однако так как функция хода  $\mathcal{N}$  в обобщённой унимодулярной гравитации не является независимой переменной, то  $H_{\perp}$  вообще говоря не является связью. Гамильтониан также должен быть дополнен граничным слагаемым, делающим вариационную процедуру корректно определённой, однако мы будем опускать этот поверхностный член.

Действие, условие стационарности которого даёт уравнения Гамильтона и первичную связь, имеет вид

$$S_T[\gamma_{ij}, \pi^{ij}, \mathcal{N}^i, P_i, u_1^i] = \int dt d^3x (\pi^{ij}\dot{\gamma}_{ij} + P_i\dot{\mathcal{N}}^i - NH_{\perp} - \mathcal{N}^i H_i - u_1^i P_i), \quad (1.23)$$

где  $u_1^i$  есть лагранжев множитель соответствующий первичной связи.

Гамильтониан (1.20), дополненный слагаемым с первичной связью задаёт временную динамику на фазовом пространстве

$$\dot{\Phi} = \{ \Phi, \mathcal{H} + \int d^3y u_1^k(y) P_k(y) \}. \quad (1.24)$$

Следуя теории гамильтоновых систем со связями [19], найдём вторичные (третичные и т.д.) связи как условие постоянства во времени первичной (вторичной и т.д.) связей. Таким образом, сохранения во времени первичной связи  $\dot{P}_i = 0$ , т.е.

$$\dot{P}_i = \{ P_i, \mathcal{H} + \int d^3y u_1^k(y) P_k(y) \} = -H_i \quad (1.25)$$

даёт вторичную связь

$$H_i = 0. \quad (1.26)$$

Таким образом, импульсная связь общей теории относительности воспроизводится и в обобщённой унимодулярной гравитации.

Третичная связь появляется как условие сохранения вторичной связи

$$\dot{H}_i = \partial_k (\mathcal{N}^k H_i) + H_k \partial_i \mathcal{N}^k + \partial_i (w N H_\perp) \quad (1.27)$$

которая выполняется при

$$T_i = 0, \quad T_i = \partial_i T, \quad T \equiv w N H_\perp. \quad (1.28)$$

Здесь  $w = w(\gamma)$  есть баротропный параметр, определённый в (1.5).

Аналогично, постоянство третичной связи  $T_i$  эквивалентно равенству

$$\{ T_i, \mathcal{H} \} = \partial_i \left( w \partial_k (N^2 \gamma^{kl} H_l) + \mathcal{N}^k T_k + T S \right) = 0, \quad (1.29)$$

где мы определили функции

$$S = \Omega \partial_k \mathcal{N}^k - \frac{d \ln w}{d \ln \gamma} \frac{\pi N}{\sqrt{\gamma}}, \quad (1.30)$$

$$\Omega = 1 + w + 2 \frac{d \ln w}{d \ln \gamma}. \quad (1.31)$$

На поверхности связей равенство (1.29) есть просто  $T \partial_i S = 0$ . Таким образом сохранение во времени третичной связи может быть осуществлено двумя способами, а именно

$$T = 0 \quad (1.32)$$

либо

$$\partial_i S = 0. \quad (1.33)$$

Отметим, что так как функция  $T$ , определённая в (1.28), пропорциональна гамильтоновой связи ОТО  $H_\perp$ , так что в первом случае восстанавливается полный набор связей общей теории относительности.

Таким образом, мы получаем, что в обобщённой унимодулярной гравитации имеет место бифуркация гамильтоновых связей [19], т.е. появление двух ветвей связей, соответствующих двум различным способам сохранения связи во времени. В обеих ветвях условие постоянства четвертичной связи не приводит к появлению новых связей. Сохранение связи  $T = 0$  первой ветви

$$\{T, \mathcal{H}\} = w \partial_k (N^2 \gamma^{kl} H_l) + \mathcal{N}^k T_k + T S = 0 \quad (1.34)$$

тождественно выполняется на поверхности связей. В свою очередь, постоянство во времени  $S_i = 0$  второй ветви приводит к уравнению на множитель Лагранжа  $u_1^i$ .

В результате, мы имеем два возможных набора связей, первый из которых имеет три поколения

$$\psi_I = (P_i, H_i, T) \quad (1.35)$$

и будет далее именоваться  $T = 0$  ветвью, в то время как второй набор имеет уже четыре поколения

$$\phi_I = (P_i, H_i, T_i, S_i). \quad (1.36)$$

который мы будем называть  $T \neq 0$  ветвью.

Дополнительной проверкой полученного результата является получение уравнений связей как следствий лагранжевых уравнений (1.3). Тождество Бьянки, которое, очевидно, выполняется и в случае обобщенной унимодулярной гравитации, даёт ковариантное сохранение тензора энергии-импульса  $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$ . Запишем отдельно пространственную часть закона сохранения

$$\nabla^\mu T_{\mu i} = \frac{1}{N \sqrt{\gamma}} \partial_i (\sqrt{\gamma} \rho w N) = 0. \quad (1.37)$$

Из явного выражения для плотности энергии (1.6) получаем, что  $\rho \sqrt{\gamma} = -H_\perp$ , так что полученное равенство эквивалентно третичной связи (1.28). Далее, запишем временную компоненту закона сохранения тензора энергии-импульса

$$u^\nu \nabla^\mu T_{\mu\nu} = \frac{\rho}{N} \left[ (1 + w) \partial_k \mathcal{N}^k - (\partial_t - \mathcal{N}^k \partial_k) \ln \sqrt{\gamma} \rho N \right] = 0, \quad (1.38)$$

где мы воспользовались тем, что  $u^0 = 1/N$ ,  $u^i = -\mathcal{N}^i/N$ ,  $p = w\rho$ , и  $w = 2d \ln N / d \ln \gamma$ . При нулевой плотности энергии  $\rho = 0$ , имеем  $T = -w\rho\sqrt{\gamma}N = 0$  что соответствует  $T = 0$  ветви. При  $T \neq 0$ , выразим производную по времени  $\sqrt{\gamma}\rho N$  из уравнения выше и подставим в закон сохранения  $\dot{T}_i = -\partial_i \partial_t (\sqrt{\gamma}\rho w N) = 0$ , откуда  $\dot{T}_i = T S_i = 0$ , где

$$S_i = \partial_i [(1 + w) \partial_k \mathcal{N}^k + (\partial_t - \mathcal{N}^k \partial_k) \ln w] \quad (1.39)$$

есть выражение для связи  $S_i$ , записанной в терминах лагранжевых переменных, т.е. в этом случае мы восстанавливаем ветвь  $T \neq 0$ .

### 1.2.1 Алгебра связей двух ветвей теории

Мы нашли полный набор связей для двух ветвей бифуркации, а именно (1.35) и (1.36). Для подсчёта степеней свободы теперь необходимо выделить среди них связи первого и второго рода, количество которых также оказывается разным для двух ветвей.

Начнём с ветви  $T = 0$ , а именно запишем попарные скобки Пуассона связей

$$\{P_i(x), P_j(y)\} = \{P_i(x), H_j(y)\} = \{P_i(x), T(y)\} = 0, \quad (1.40)$$

$$\{H_i(x), H_j(y)\} = H_j(x) \partial_i \delta(x, y) - (i, x \leftrightarrow j, y), \quad (1.41)$$

$$\{H_i(x), T(y)\} = -\delta(x, y) \partial_i T - (\Omega T)(y) \partial_i \delta(y, x), \quad (1.42)$$

$$\{T(x), T(y)\} = (wN)(y) (\gamma^{ij} w N H_i)(x) \partial_j \delta(x, y) - (x \leftrightarrow y), \quad (1.43)$$

а также их скобки Пуассона с гамильтонианом

$$\{\mathcal{H}, P_i\} = H_i, \quad (1.44)$$

$$\{\mathcal{H}, H_i\} = -\partial_k (\mathcal{N}^k H_i) - H_k \partial_i \mathcal{N}^k - \partial_i T, \quad (1.45)$$

$$\{\mathcal{H}, T\} = -w \partial_k (N^2 \gamma^{kl} H_l) - \mathcal{N}^k \partial_k T - T S. \quad (1.46)$$

Правые части всех равенств снова пропорциональны связям (1.35), т.е. зануляются на поверхности связей. Таким образом, получаем, что все связи данной ветви являются связями первого рода. Отметим, что в этом же случае  $\rho = -T/w\sqrt{\gamma}N = 0$ , так что уравнения движения совпадают с вакуумными уравнениями Эйнштейна. Таким образом, уравнения движения в данной ветви могут быть проинтерпретированы как вакуумные уравнения Эйнштейна, в которых наложена частичная калибровка, задаваемая уравнением связи (1.1).

В качестве отдельного случая рассмотрим (стандартную) унимодулярную гравитацию, т.е.  $N(\gamma) = 1/\sqrt{\gamma}$ . В этом случае связь  $S_i$  тождественно равна нулю, т.е. полным набором связей является  $P_i$ ,  $H_i$  и  $T_i$ . Выпишем тождественно не равные нулю попарные скобки Пуассона связей

$$\{H_i(x), T_j(y)\} = -\partial_j(T_i \delta(y, x)), \quad (1.47)$$

$$\{T_i(x), T_j(y)\} = \partial_i^x \partial_j^y (N(y) (\gamma^{kl} N H_k)(x) \partial_l \delta(x, y)) - (i, x \leftrightarrow j, y). \quad (1.48)$$

и скобки Пуассона с гамильтонианом

$$\{\mathcal{H}, H_i\} = -\partial_k (\mathcal{N}^k H_i) - H_k \partial_i \mathcal{N}^k - T_i, \quad (1.49)$$

$$\{\mathcal{H}, T_i\} = \partial_i (\partial_k (N^2 \gamma^{kl} H_l) - \mathcal{N}^k T_k). \quad (1.50)$$

Получаем, что все связи в унимодулярной гравитации являются связями первого рода [17; 18]. Отметим также, что (стандартная) унимодулярная гравитация имеет структуру связей, аналогичную  $T = 0$  ветви обобщенной унимодулярной гравитации несмотря на то что в ней  $T \neq 0$ .

Рассмотрим теперь вторую ветвь (1.36)  $T \neq 0$ . В отличие от случая  $T = 0$ , в этой ветви тензор энергии-импульса не равен нулю, что является важным для физических приложений. Чтобы выяснить род связей (1.36), запишем матрицу попарных скобок Пуассона на поверхности связей

$$\{\phi_I(x), \phi_J(y)\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \{P_i(x), S_j(y)\} \\ 0 & 0 & \{H_i(x), T_j(y)\} & \{H_i(x), S_j(y)\} \\ 0 & \{T_i(x), H_j(y)\} & 0 & \{T_i(x), S_j(y)\} \\ \{S_i(x), P_j(y)\} & \{S_i(x), H_j(y)\} & \{S_i(x), T_j(y)\} & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.51)$$

Ненулевые компоненты в этой матрице говорят о том, что среди полного набора связей присутствуют связи второго рода. Чтобы выделить их явно, рассмотрим линейные комбинации связей  $\phi_J(x)$

$$\begin{aligned} \phi_A &= \int d^3x U_A^J(x) \phi_J(x) \\ &= \int d^3x [a_A^j(x) P_j(x) + b_A^j(x) H_j(x) + c_A^j(x) T_j(x) + d_A^j(x) S_j(x)]. \end{aligned} \quad (1.52)$$

где  $U_A^J$  есть пока произвольные коэффициенты.

В данной работе заглавные буквы латинского алфавита ( $A, B, C, \dots$ ) используются для обозначения связей первого рода, при этом индексы из второй

половины алфавита  $(I, J, \dots)$  служат для обозначения коллективных индексов исходного набора связей. Отличительной особенностью связей  $\phi_A$  по сравнению с пространственно локальными связями  $\phi_I$  является их пространственно нелокальная природа, как будет продемонстрировано далее. Примерами таких объектов могут служить неприводимые компоненты поперечных векторов. Следовательно, эти индексы могут включать как дискретные индексы с конечным диапазоном, так и непрерывные или счётные индексы с бесконечным диапазоном. Последний случай характерен, например, для импульсов в преобразовании Фурье, где  $\mathbf{k}, A \mapsto A = 1, 2, \dots \mathbf{k}$ .

Уравнение на неизвестные коэффициенты  $U_A^J = (a_A^j, b_A^j, c_A^j, d_A^j)$  получим как условие зануления скобок Пуассона связей первого рода  $\phi_A$  с полным набором связей  $\phi_I$

$$\{\phi_A, \phi_I(y)\}|_{\phi_I=0} \equiv \int d^3x U_A^J(x) \{\phi_J(x), \phi_I(y)\}|_{\phi_I=0} = 0. \quad (1.53)$$

то есть при фиксированном  $A$  величины  $U_A^J$  являются нуль-векторами матрицы попарных скобок Пуассона полного набора связей. Запишем ненулевые элементы этой матрицы

$$\begin{aligned} \{P_i(x), S_j(y)\} &= -\partial_j^y (\Omega(y) \partial_i \delta(y, x)), \\ \{H_i(x), H_j(y)\} &= H_j(x) \partial_i \delta(x, y) - (i, x \leftrightarrow j, y), \\ \{H_i(x), T_j(y)\} &= -T(y) \partial_j^y (\Omega(y) \partial_i \delta(y, x)) - \Omega(y) T_j(y) \partial_i \delta(y, x) \\ &\quad - \partial_j^y (T_i(y) \delta(y, x)), \\ \{H_i(x), S_j(y)\} &= -\partial_j^y \left[ S_i \delta(y, x) - \Omega \partial_i \partial_k \mathcal{N}^k \delta(y, x) \right. \\ &\quad \left. + \frac{d\Omega(y)}{d \ln \gamma} \left( 2\partial_k \mathcal{N}^k - \frac{\pi N}{\sqrt{\gamma}} \right) (y) \partial_i \delta(y, x) \right], \\ \{T_i(x), T_j(y)\} &= \partial_i \partial_j^y ((wN)(y) (wN \gamma^{kl} H_k)(x) \partial_l \delta(x, y)) - (x \leftrightarrow y), \\ \{T_i(x), S_j(y)\} &= \partial_i \partial_j^y (\dots). \end{aligned} \quad (1.54)$$

Таким образом, получаем систему уравнений на коэффициенты  $U_A^J(x)$

$$\begin{aligned} \partial_i (\Omega \partial_j d_A^j) &= 0, \\ \partial_i (\Omega T \partial_j c_A^j) + \int d^3y \{H_i(x), S(y)\} \partial_j d_A^j(y) &= 0, \\ T \partial_i (\Omega \partial_j b_A^j) - \int d^3y \{T_i(x), S(y)\} \partial_j d_A^j(y) &= 0, \\ \partial_i (\Omega \partial_j a_A^j) + \int d^3y \{S_i(x), H_j(y)\} b_A^j(y) - \int d^3y \{S_i(x), T(y)\} \partial_j c_A^j(y) &= 0. \end{aligned} \quad (1.55)$$

Первые три уравнения являются условиями поперечности  $d_A^j, c_A^j$  и  $b_A^j$

$$\partial_j d_A^j = 0, \quad \partial_j c_A^j = 0, \quad \partial_j b_A^j = 0. \quad (1.56)$$

Чтобы получить четвёртое уравнение в явном виде, обратим внимание, что

$$\int d^3 y \{S_i(x), H_j(y)\} b_A^j(y) = -\partial_i [\Omega \partial_j (b_A^j \partial_k \mathcal{N}^k) - b_A^j S_j], \quad (1.57)$$

так что получаем уравнение  $\partial_i [\Omega \partial_j (a_A^j - b_A^j \partial_k \mathcal{N}^k)] = 0$ . Это уравнение имеет два решения, одно из которых имеет вид  $a_A^j = b_A^j \partial_k \mathcal{N}^k$  при  $b_A^j \neq 0$ . В случае  $b_A^j = 0$  получаем  $\partial_j a_A^j = 0$ .

Учитывая оба решения, получаем, что полный набор связей первого рода имеет вид

$$P_A = \int d^3 x a_A^i(x) P_i(x), \quad (1.58)$$

$$H_A = \int d^3 x b_A^i(x) (H_i(x) + \partial_k \mathcal{N}^k(x) P_i(x)), \quad (1.59)$$

где  $a_A^i(x), b_A^i(x)$  есть полный набор поперечных векторов, которые мы для удобства отождествим как

$$a_A^i(x) = b_A^i(x) = e_A^i(x), \quad \partial_i e_A^i(x) = 0, \quad (1.60)$$

без потери общности. Зададим двойственные базисные векторы  $e_i^B(x)$ , такие что

$$\int d^3 x e_A^i(x) e_i^B(x) = \delta_A^B, \quad e_A^i(x) e_j^A(y) = \Pi_j^i(x, y), \quad \partial_i \Pi_j^i(x, y) = 0. \quad (1.61)$$

где  $\Pi_j^i(x, y)$  есть проектор на пространство задаваемое поперечными векторами. Данные обозначения позволяют в замкнутом виде записать попарные скобки Пуассона полученных связей первого рода (1.58), (1.59), а именно

$$\{P_A, P_B\} = \{P_A, H_B\} = 0, \quad (1.62)$$

$$\begin{aligned} \{H_A, H_B\} = H_C \int d^3 x e_i^C (e_A^j \partial_j e_B^i - e_B^j \partial_j e_A^i) \\ + P_C \int d^3 x e_i^C \partial_j [\partial_k \mathcal{N}^k (e_A^i e_B^j - e_B^i e_A^j)], \end{aligned} \quad (1.63)$$

что констатирует замыкание алгебры соответствующих связей. Скобки Пуассона связей первого рода с полным набором связей имеют вид

$$\{P_A, P_i\} = \{P_A, H_i\} = \{P_A, T_i\} = \{P_A, S_i\} = 0, \quad (1.64)$$

$$\{H_A, P_i\} = -\partial_i(e_A^k P_k), \quad (1.65)$$

$$\{H_A, H_i\} = -e_A^k \partial_k H_i - H_k \partial_i e_A^k, \quad (1.66)$$

$$\{H_A, T_i\} = -\partial_i(e_A^k T_k), \quad (1.67)$$

$$\{H_A, S_i\} = -\partial_i(e_A^k S_k), \quad (1.68)$$

в то время как их скобки Пуассона с гамильтонианом записываются как

$$\{\mathcal{H}, P_A\} = \int d^3x e_A^i H_i, \quad (1.69)$$

$$\{\mathcal{H}, H_A\} = \int d^3x H_i \partial_j [\mathcal{N}^j e_A^i - \mathcal{N}^i e_A^j]. \quad (1.70)$$

Правые части этих равенств снова пропорциональны связям, т.е. зануляются на поверхности связей, как и ожидалось.

### 1.2.2 Счёт числа степеней свободы

В разделе, предшествующем данному, было установлено, что в ветви (1.35), соответствующей  $T = 0$ , присутствуют семь связей:  $P_i$ ,  $H_i$  и  $T$ . Все они являются связями первого рода. В то же время, в ветви (1.36), где  $T \neq 0$ ,  $S_i = 0$ , мы имеем восемь связей:  $P_i$ ,  $H_i$ ,  $T_i$  и  $S_i$ . При подсчете учитывалось, что связи  $T_i$  и  $S_i$  являются чисто продольными ( $T_i = \partial_i T$ ,  $S_i = \partial_i S$ ) и несут в себе только по одной независимой компоненте. Связями первого рода среди них оказываются лишь комбинации (1.58), (1.59), в которых насчитывается четыре локальных связи первого рода.

На основе полученных данных можно непертурбативно вычислить число локальных физических степеней свободы. Согласно общей теории, описанной в [17], это число определяется следующей формулой:

$$2 \times \left( \begin{array}{c} \# \text{ физических} \\ \text{степеней свободы} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \# \text{ канонических} \\ \text{переменных} \end{array} \right) - 2 \times \left( \begin{array}{c} \# \text{ связей} \\ \text{1-ого рода} \end{array} \right) - \left( \begin{array}{c} \# \text{ связей} \\ \text{2-ого рода} \end{array} \right). \quad (1.71)$$

Двойной учет связей первого рода обусловлен тем, что они не только выражают часть канонических переменных через оставшиеся, но и генерируют локальную калибровочную симметрию. Эта симметрия, в свою очередь, требует введения

дополнительных условий, или калибровок, по числу этих связей. Калибровки, в свою очередь, выражают еще одну часть канонических переменных через оставшиеся.

В рамках обобщенной унимодулярной гравитации каноническими переменными выступают  $\mathcal{N}^i$ ,  $\gamma_{ij}$  и соответствующие им канонические импульсы  $P_i$ ,  $\pi^{ij}$ . Следовательно, общее число канонических переменных в этой теории равно восемнадцати. Подставив в формулу (1.71) ранее полученные значения числа связей первого и второго рода для обеих ветвей, мы видим, что в ветви  $T = 0$  имеется две физические степени свободы, а в ветви  $T \neq 0$  — на одну больше, то есть три. Анализ структуры связей ветви  $T = 0$  показывает, что этот случай эквивалентен ОТО в частичной калибровке. Следовательно, две степени свободы этой ветви можно интерпретировать как две поляризации гравитона.

Случай  $T \neq 0$ , представляет бóльший интерес. Как будет показано далее на примере теории возмущений на фридмановском фоне, две из трех степеней свободы можно интерпретировать как две поляризации гравитона, аналогичные ОТО, а третью — как физическую конформную моду трехмерной метрики. Как будет продемонстрировано в следующих разделах, ее возмущения могут играть важную роль на инфляционной стадии эволюции Вселенной.

В заключение этого раздела проведем подсчет степеней свободы и в унимодулярной гравитации. В этой теории число канонических переменных также равно восемнадцати. При этом полный набор связей составляют  $P_i$ ,  $H_i$  и  $T_i$ , а их число равно семи. Согласно соотношениям (1.44), (1.47)–(1.50), все они являются связями первого рода. Используя формулу (1.71), получаем, что в унимодулярной гравитации имеется две локальные физические степени свободы.

### 1.3 Космологические приложения

Для того, чтобы понять физическую природу обнаруженной в предыдущем разделе степени свободы в обобщенной унимодулярной гравитации, дополнительной к степеням свободы общей теории относительности, исследуем её поведение на космологическом фоне.

Фоновые решения в космологическом контексте обычно получают, исполь-

зую фридмановский анзац

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + a^2(t) \sigma_{ij} dx^i dx^j, \quad (1.72)$$

где метрика  $\sigma_{ij}$  задаёт топологию пространственных сечений, а именно сферу, плоскость или гиперболоид. Однако, легко видеть, что такая метрика в общем случае не может удовлетворять связи обобщённой унимодулярной гравитации (1.1). В частности, для пространственно замкнутых сечений  $\sigma_{ij}$  задаёт стандартную метрику на трёхмерной сфере

$$\sigma_{ij} dx^i dx^j = d\psi^2 + \sin^2\psi (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (1.73)$$

но из-за того, что  $\sigma(x) = \det \sigma_{ij}(x)$  имеет нетривиальную зависимость от углов, задающих координаты на пространственных сечениях, функция  $N(\gamma)$  также зависит от них, а это противоречит однородности и изотропности пространства, обычно подразумеваемых в квантовой космологии.

Приведём два возможных способа преодолеть эту техническую трудность. Первый способ состоит в том, что преобразованиях координат на пространственных сечениях меняется также и детерминант соответствующей пространственной метрики. Это позволяет выбрать такие координаты, чтобы её детерминант  $\sigma$  равнялся константе, т.е. однородность и изотропность восстанавливались бы. В частности, в случае трёхмерной сферы (1.73) существует следующий выбор локальных координат

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} dx^i dx^j &= \sin^{-4}\psi(y) dy^2 + \sin^2\psi(y) ((1-x^2)^{-1} dx^2 + (1-x^2) d\phi^2), \\ x &= \cos\theta, \quad y = (2\psi + \cos 2\psi)/4, \end{aligned} \quad (1.74)$$

при котором  $\sigma = 1$ .

Второй подход к сохранению однородности и изотропности метрики (1.72) в рамках обобщенной унимодулярной гравитации с учетом связи заключается в модификации самой связи

$$N(\gamma) \mapsto N(\gamma/\sigma), \quad (1.75)$$

что, в общем случае, приводит к изменению всей теории. При этом уравнение связи становится скаляром относительно одновременного преобразования пространственных метрик  $\gamma_{ij}$  и  $\sigma_{ij}$ , что позволяет рассматривать модель в произвольных пространственных координатах. Метрика  $\sigma_{ij}$  может быть выбрана не

зависящей от времени, но, в общем случае, зависящей от пространственных координат. В этом случае формулы предыдущего раздела модифицируются путем замены частной пространственной производной на ковариантную по отношению к метрике  $\sigma_{ij}$

$$\partial_i \mapsto \bar{\nabla}_i, \quad \bar{\nabla}_k \sigma_{ij} = 0, \quad \bar{\nabla}^i = \sigma^{ij} \bar{\nabla}_j, \quad (1.76)$$

при этом изменяется только форма, но не число или род связей. В частности, поскольку  $H_\perp$  является скалярной плотностью, ковариантная производная  $\bar{\nabla}_i$ , заменяющая частную  $\partial_i$  в третичной связи (1.28), принимает вид  $\bar{\nabla}_i T \equiv \sqrt{\sigma} \partial_i (w N H_\perp / \sqrt{\sigma})$ . В четвертичной связи (1.33) ковариантная производная равна частной  $\partial_i = \bar{\nabla}_i$ , поскольку функция  $S$ , определенная в (1.30), является скаляром, а  $\partial_k \mathcal{N}^k$  в ее определении должно быть заменено на  $\bar{\nabla}_k \mathcal{N}^k$ .

Перейдём к получению фоновых уравнений движения в обобщённой уни-модулярной гравитации для космологического анзаца (1.72), в котором метрику  $\sigma_{ij}$  будем считать трёхмерной метрикой постоянной нулевой, положительной или отрицательной кривизны, что соответствует топологии плоскости, трёхмерной сферы или гиперболоида, соответственно. В этом случае все компоненты фоновой метрики выражаются через фактор  $a(t)$ , а величины, входящие в действие (1.9) также через его производные

$$\gamma_{ij} = a^2(t) \sigma_{ij}(x), \quad \mathcal{N} = N(a), \quad \mathcal{N}^i = 0, \quad (1.77)$$

$${}^3R = \frac{6}{a^2} k, \quad K_{ij} = -\frac{a\dot{a}}{N} \sigma_{ij}, \quad H = \frac{\dot{a}}{Na}, \quad (1.78)$$

где  $k = 0$  или  $\pm 1$  и задаёт знак кривизны пространственной метрики, а функция хода  $\mathcal{N} = N$  становится функцией  $a$  согласно (1.75). Здесь мы определяем параметр Хаббла  $H$  как логарифмическую производную масштабного фактора по космическому времени  $\tau$ ,  $d\tau = \mathcal{N} dt$ . Уравнения движения после подстановки анзаца (1.72) имеют вид

$$\frac{\delta S_{\text{GUMG}}}{\delta \gamma_{ij}} = N \sqrt{\sigma} a^3 \left[ 2 \frac{\dot{H}}{N} + 3(1+w)H^2 + (1+3w) \frac{k}{a^2} \right] \sigma^{ij} = 0, \quad (1.79)$$

$$\frac{\delta S_{\text{GUMG}}}{\delta \mathcal{N}^i} \equiv 0, \quad (1.80)$$

где компонента, соответствующая вариации по функции сдвига  $\mathcal{N}^i$  выполняется тождественно ввиду однородности анзаца. В общей теории относительности уравнение Фридмана, представляющее собой уравнение первого порядка

на масштабный фактор, получается из вариации действия по функции хода  $\mathcal{N}$ , которая отсутствует в обобщённой унимодулярной гравитации как независимая переменная. Тем не менее, уравнение (1.79) имеет интеграл движения с константой  $C$ , вследствие чего мы имеем равенство

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{C}{3Na^3}, \quad (1.81)$$

которое и есть искомое уравнение первого порядка на масштабный фактор, и которое мы будем называть уравнением Фридмана в обобщенной унимодулярной гравитации. Его правая часть отождествляется с плотностью энергии идеальной жидкости обобщенной унимодулярной гравитации

$$\rho = \frac{M_P^2 C}{Na^3} \quad (1.82)$$

где мы явно ввели постоянную Планка, в единицах  $G = 1/16\pi$  равную  $M_P^2 = 2$ . В терминах гамильтонова формализма, разработанного в предыдущих разделах, ненулевое и нулевое значение константы  $C$  приводит к ветвям  $T \neq 0$  и  $T = 0$ , соответственно.

В обобщенной унимодулярной гравитации плотность энергии  $\rho$ , фигурирующая в правой части уравнения Фридмана, определяется интегралом движения. Аналогичная ситуация имеет место и в обычной унимодулярной гравитации, где интеграл движения интерпретируется как космологическая постоянная и задает постоянную плотность энергии, однако в обобщенной унимодулярной гравитации эта плотность явно зависит от времени. В силу сохранения тензора энергии-импульса, она подчиняется эволюционному уравнению

$$\frac{d\rho}{da} = -3(1+w)\frac{\rho}{a}, \quad (1.83)$$

которое эквивалентно определению баротропного параметра  $w(a)$

$$w = \frac{1}{3} \frac{d \ln N}{d \ln a}, \quad (1.84)$$

соответствующего выбранной функции  $N(a)$ . Для краткости мы не меняем обозначения для  $N$  и  $w$  (1.5) при переходе от аргумента  $\gamma/\sigma = a^6$  к аргументу  $a$ . Стоит отметить, что выражение (1.82) согласуется со следствием уравнения (1.38) в сопутствующей системе идеальной жидкости обобщенной унимодулярной гравитации. Действительно, в случае  $u^k \sim \mathcal{N}^k = 0$  из (1.39) следует

$S = \partial_t \ln w$ , откуда отношение  $T/w = -N\rho\sqrt{\gamma}$  есть константа во времени, так что  $\rho \sim 1/Na^3$ .

Таким образом, мы получили, что функциональный параметр модели  $N(a)$  задаёт эффективную плотность энергии, т.е. правую часть уравнения Фридмана (1.81). В то же время, в космологических моделях, основанных на ОТО правая часть определяется плотностью энергии полей материи. В частности, это позволяет сгенерировать все стадии эволюции Вселенной подходящим образом выбирая функцию  $N(a)$ . В частности, для постоянного баротропного параметра  $w$  имеем  $N \sim a^{3w}$ , так что, например,  $w = -1$  и  $w = 1/3$  задают инфляционную и радиационно-доминированную стадии соответственно.

### 1.3.1 Теория возмущений на космологическом фоне

В отличие от большинства космологических моделей, основанных на общей теории относительности, в обобщенной унимодулярной гравитации инфляционная стадия и скалярные космологические возмущения не требуют введения дополнительного скалярного поля, называемого инфлатоном. В обобщенной унимодулярной гравитации инфляционное расширение Вселенной генерируется метрическим сектором теории, а возмущения, как будет показано далее, также имеют чисто метрическое происхождение. Примечательно, что, несмотря на принципиальные различия в подходе, формализм описания космологических возмущений в обобщенной унимодулярной гравитации и ОТО демонстрирует удивительное сходство. Более глубокое объяснение этого совпадения будет дано в разделе 1.4 и основано на концепции классической эквивалентности между обобщенной унимодулярной гравитацией и общей теорией относительности, взаимодействующей с некоторым скалярным полем.

В этом разделе мы построим теорию возмущений для независимых компонент метрики на фридмановском фоне (1.72). Мы будем работать в терминах конформного времени  $\eta$ ,  $d\eta = Ndt/a$ , что упростит сравнение с классическими результатами инфляционной космологии [25; 26]. В развиваемом формализме мы также явно вводим массу Планка  $M_P$  в действие, что соответствует домножению действия (1.9) на фактор  $M_P^2/2$ , а канонических импульсов — на обратный ему.

После перехода к конформному времени фоновая метрика принимает вид  $ds^2 = a^2(\eta)(-d\eta^2 + \sigma_{ij}dx^i dx^j)$ . Удобно также ввести конформный параметр

Хаббла  $\mathcal{H} = aH$  как

$$\mathcal{H} = \frac{a'}{a}, \quad \mathcal{H} = aH, \quad (1.85)$$

где штрих обозначает производную по конформному времени  $d/d\eta = (a/N)d/dt$ . Тогда уравнение движения (1.79) и следующее из него уравнение Фридмана (1.81) записываются как

$$\mathcal{H}^2 + k = \frac{\rho a^2}{3M_P^2} \quad (1.86)$$

$$\mathcal{H}' = -\frac{1}{6}(1 + 3w)\frac{\rho a^2}{M_P^2}, \quad (1.87)$$

где плотность энергии задаётся постоянной интегрирования  $C$  согласно (1.82).

Построим теперь квадратичную часть действия для возмущений  $\delta\gamma_{ij}$  и  $\delta\mathcal{N}^i$  на фоне фридмановской метрики. Для этого явно выделим неприводимые компоненты (скалярные, векторные поперечные и тензорные бесследовые поперечные) как

$$\delta\gamma_{ij} = a^2(-2\psi\sigma_{ij} + 2\nabla_i\nabla_j E + 2\nabla_{(i}F_{j)} + t_{ij}), \quad (1.88)$$

$$t^i_i = \nabla^i t_{ij} = \nabla_i F^i = 0, \quad (1.89)$$

$$\delta\mathcal{N}^i = (\nabla^i B + V^i)N/a, \quad \nabla_i V^i = 0, \quad (1.90)$$

где индексы поднимаются и опускаются пространственной метрикой  $\sigma_{ij}$ , а ковариантные производные  $\nabla_k$  строятся по той же метрике (здесь и далее мы будем не будем писать черту над ковариантной производной для краткости).

Вследствие неприводимости введённых тензорных компонент, их квадратичные действия разделяются на скалярную, векторную и тензорную части [26; 48], т.е.  $S_{\text{GUMG}}^{(2)} = S_t + S_v + S_s$ . Уравнения связей ведут к занулению векторной части  $S_v$ , задающую действие для компонент  $F^i$  и  $V^i$ . Квадратичное действие тензорной компоненты

$$S_t = \frac{M_P^2}{8} \int d\eta d^3x \sqrt{\sigma} a^2 [(t'_{ij})^2 - (\nabla_k t_{ij})^2 - 2k t_{ij}^2], \quad (1.91)$$

имеет стандартный вид действия гравитона в общей теории относительности. Квадратичное действие скалярных компонент имеет вид

$$S_s = \frac{M_P^2}{2} \int d\eta d^3x \sqrt{\sigma} a^2 \left[ -6(\psi' + \mathcal{H}A)^2 - 4(\psi' + \mathcal{H}A)\Delta(B - E') + 2k(B - E')\Delta(B - E') - 2(\psi - 2A)(\Delta + 3k)\psi + \frac{a^2 \rho \Omega}{M_P^2 w} A^2 \right]. \quad (1.92)$$

где  $\Delta = \sigma^{ij} \nabla_i \nabla_j$ . Величина  $A$  определяется как возмущение функции хода  $\delta N = NA$  и выражается в терминах остальных компонент вследствие уравнения связи как

$$A = w(\Delta E - 3\psi). \quad (1.93)$$

Действие тензорных возмущений (1.91) является калибровочным инвариантом, в то время как действие скалярных возмущений  $S_s$  требует редукции к физическому сектору. Для этого необходимо разрешить линеаризованные версии связей, найденных в разделе 1.2. Процедура этой редукции различна для нулевых и ненулевых мод действия скалярного сектора  $S_s = S_s^{(0)} + S_s^{(>0)}$ . Действие пространственно однородных мод  $\psi_0$ ,  $E_0$  и  $B_0$  в (1.92) имеет вид

$$S_s^{(0)} = \frac{3M_P^2}{2} \int d\eta d^3x \sqrt{\sigma} a^2 \left\{ -2(\psi'_0 - 3w\mathcal{H}\psi_0)^2 + \left[ 3w\Omega a^2 \rho / M_P^2 - 2k(1 + 6w) \right] \psi_0^2 \right\}, \quad (1.94)$$

и содержит одну физическую моду, являющуюся возмущением масштабного фактора. Эта пространственно однородная мода является духовой, так как имеет отрицательный знак перед кинетическим слагаемым и совпадает аналогичной моды в ОТО, однако в случае обобщённой унимодулярной гравитации не является калибровочной.

Чтобы найти действие физической степени свободы пространственно неоднородной части действия (1.92), построим гамильтоново действие для соответствующих мод  $\psi$ ,  $E$ ,  $B$  для чего найдём выражения для их канонических импульсов  $\Pi_\psi$ ,  $\Pi_E$  и  $\Pi_B$

$$\Pi_\psi = -2M_P^2 \sqrt{\sigma} a^2 [3(\psi' + \mathcal{H}A) + \Delta(B - E')], \quad (1.95)$$

$$\Pi_E = 2M_P^2 \sqrt{\sigma} a^2 [\Delta(\psi' + \mathcal{H}A) - k \Delta(B - E')], \quad (1.96)$$

$$\Pi_B = 0, \quad (1.97)$$

где последнее равенство задаёт первичную связь. Сохранение этой связи во времени задаёт цепочку связей

$$\Pi_E = 0, \quad (1.98)$$

$$\frac{a^2 \rho}{2M_P^2 w} A + (\Delta + 3k)\psi + \frac{\mathcal{H}}{2a^2 M_P^2} \frac{\Pi_\psi}{\sqrt{\sigma}} = 0, \quad (1.99)$$

$$\mathcal{H} \frac{d\Omega}{da} A + \frac{1}{6a^2 M_P^2} \frac{dw}{da} \frac{\Pi_\psi}{\sqrt{\sigma}} + w\Omega \Delta B = 0, \quad (1.100)$$

аналогичную (1.26), (1.28) и (1.33). Все полученные связи являются связями второго рода.

Разрешая их относительно переменных  $E$  и  $B$  в терминах  $\psi$  и  $\Pi_\psi$  получаем гамильтоново действие для пространственно неоднородных мод

$$S_s^{(>0)}[\psi, \Pi_\psi] = \int d\eta d^3x (\Pi_\psi \psi' - \mathbf{H}[\psi, \Pi_\psi]) \quad (1.101)$$

где плотность гамильтониана  $\mathbf{H}$  определяется как

$$\begin{aligned} \mathbf{H}[\psi, \Pi_\psi] = & -\frac{k\sqrt{\sigma}}{4a^2M_P^2} \frac{\Pi_\psi}{\sqrt{\sigma}} \hat{\mathcal{O}}^{-1} \frac{\Pi_\psi}{\sqrt{\sigma}} + a^2M_P^2\sqrt{\sigma} \psi \hat{\mathcal{O}}\psi \\ & + \frac{2M_P^4 w}{\rho} \frac{1}{\Omega} \sqrt{\sigma} \left( \hat{\mathcal{O}}\psi + \frac{\mathcal{H}}{2a^2M_P^2} \frac{\Pi_\psi}{\sqrt{\sigma}} \right)^2, \quad \hat{\mathcal{O}} \equiv \Delta + 3k, \end{aligned} \quad (1.102)$$

и является пространственно нелокальным функционалом для  $k \neq 0$ . Чтобы избавиться от этой нелокальности, следуя [48], мы производим каноническое преобразование

$$q = \frac{2M_P^2 (-\hat{\mathcal{O}})^{1/2}}{\sqrt{(1+w)}\rho} \left( \psi + \frac{\mathcal{H}}{2a^2M_P^2} \hat{\mathcal{O}}^{-1} \frac{\Pi_\psi}{\sqrt{\sigma}} \right), \quad (1.103)$$

$$p = \frac{\sqrt{(1+w)}\rho}{2M_P^2 (-\hat{\mathcal{O}})^{1/2}} \left( -\frac{a^2M_P^2\sqrt{\sigma}}{\mathcal{H}} \hat{\mathcal{O}}\psi + \frac{\Pi_\psi}{2} \right), \quad (1.104)$$

в результате чего лагранжево действие новой переменной  $q$ , получаемое обратным преобразованием Лежандра, оказывается локальным и имеет вид

$$S_s[q] = \frac{1}{2} \int d\eta d^3x \sqrt{\sigma} \left\{ q'^2 + \frac{w(1+w)}{\Omega} q \hat{\mathcal{O}}q + \left[ \frac{z^2}{2} + z \left( \frac{1}{z} \right)'' \right] q^2 \right\}, \quad (1.105)$$

$$z^2 = (1+w) \rho a^2 / M_P^2. \quad (1.106)$$

где мы опустили слагаемые, возникшие при интегрировании по частям.

Коэффициент перед лапласианом задаёт скорость распространения соответствующей моды

$$c_s^2 = \frac{w(1+w)}{\Omega}, \quad (1.107)$$

которая в общем случае отлична от единицы, что отличает рассматриваемую модель от инфлатонных моделей со стандартным кинетическим слагаемым.

Потребуем положительность скорости звука, и кинетического члена в действии (1.102) для  $\psi$ , т.е. отсутствие градиентных и массовых нестабильностей,

соответственно. Это приводит к следующим неравенствам

$$\frac{w}{\Omega} > 0, \quad 1 + w > 0, \quad (1.108)$$

все составляющие которых являются функционалами параметра обобщённой унимодулярной гравитации  $N(\gamma)$ . Таким образом, мы решили задачу о построении космологических возмущений на фридмановском фоне (1.72) с произвольной топологией пространственных сечений, а именно, построили действие для линейных возмущений в тензорном (1.91) и скалярном (1.105) секторах и нашли условия отсутствия неустойчивости возмущений (1.108).

Сконцентрируемся теперь на случае пространственно плоской космологии, т.е.  $\sigma_{ij} = \delta_{ij}$ , наиболее интересном с точки зрения сравнения с экспериментом [24]. При этом действие (1.101) также существенно упрощается, так что обратное преобразование Лежандра даёт пространственно локальное лагранжево действие без привлечения канонического преобразования (1.103), (1.104), которое имеет вид

$$S_s[\psi] = \frac{M_P^2}{2} \int d\eta d^3x a^2 \frac{3\Omega}{w} \left( \psi'^2 + \frac{w}{\Omega} (1+w) \psi \Delta \psi \right). \quad (1.109)$$

Для исследования базисных функций, задающих независимые решения соответствующих уравнений движения, введём канонически нормированную переменную  $\vartheta$  как

$$\vartheta = \theta \psi, \quad \theta^2 = 3a^2 M_P^2 \frac{\Omega}{w}. \quad (1.110)$$

в терминах которой действие записывается как

$$S = \frac{1}{2} \int d\eta d^3x \left( \vartheta'^2 + c_s^2 \vartheta \Delta \vartheta + \frac{\theta''}{\theta} \vartheta^2 \right), \quad (1.111)$$

а уравнение движения имеют вид уравнения Муханова-Сасаки [26; 48].

$$\vartheta'' - c_s^2 \Delta \vartheta - \frac{\theta''}{\theta} \vartheta = 0. \quad (1.112)$$

Найдём решения этого уравнения в импульсном представлении, сшивая его коротковолновые и длинноволновые асимптотики. В коротковолновом приближении  $c_s^2 k^2 \gg \theta''/\theta$ , где  $\mathbf{k}$  есть волновой вектор ( $-\Delta = |\mathbf{k}|^2 \equiv k^2$ ) положительно- и отрицательночастотные решения имеют вид

$$\vartheta_{\mathbf{k}}^{(\mp)}(\eta) = \frac{C_{\mp}}{\sqrt{2c_s(\eta)}} \exp \left[ \mp i k \int^{\eta} d\bar{\eta} c_s(\bar{\eta}) \right]. \quad (1.113)$$

В длинноволновом приближении  $c_s^2 k^2 \ll \theta''/\theta$  линейно-независимые записываются как

$$\vartheta_{\mathbf{k}}(\eta) = C_1 \theta(\eta) + C_2 \theta(\eta) \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{d\bar{\eta}}{\theta^2(\bar{\eta})}. \quad (1.114)$$

При достаточно быстром росте функции  $\theta(\eta)$  с  $\eta$ , интеграл во втором слагаемом быстро сходится к некоторому постоянному значению, определяемому поведением  $\theta(\eta)$  при малых значениях аргумента. В частности, для  $\theta \sim \eta^\gamma$ ,  $\gamma > 1/2$ , интеграл имеет вид  $(1/\eta_0^{2\gamma-1} - 1/\eta^{2\gamma-1})/(2\gamma - 1)$ , а второе слагаемое быстро затухает при больших  $\eta$ . Таким образом, при больших временах решение  $\vartheta_{\mathbf{k}}(\eta)$  стремится к величине  $C_{\mathbf{k}}\theta(\eta)$  где  $C_{\mathbf{k}}$  есть некоторый не зависящий от времени коэффициент. Таким образом, длинноволновые моды «замораживаются» и медленно меняются только за счёт затухающей моды, которой можно пренебречь на поздних стадиях эволюции Вселенной.

Таким образом, мы нашли уравнение (1.112), описывающие канонически нормированные возмущения скалярных мод на плоском фридмановском фоне. Это уравнение имеют форму хорошо известного уравнения Муханова-Сасаки [26; 48], возникающего в космологических моделях со скалярным полем. Кроме того, мы нашли коротко- и длинноволновые асимптотики (1.113), 1.114 решений этого уравнения, которые используем ниже при вычислении спектров возмущений.

### 1.3.2 Инфляционный спектр возмущений

В этом разделе мы найдём спектр возмущений скалярной моды  $\psi$ , заданной действием (1.109), и сравним его со спектром возмущений инфлатона в ОТО. Предположим, что функциональный параметр  $N(a)$  обобщённой унимодулярной гравитации выбран так, что фоновая метрика испытывает квазиэкспоненциальное расширение, что соответствует  $w(a) \simeq -1$ . В отличие от инфлатонных моделей, в которых такое расширение генерируется медленно меняющейся потенциальной энергией поля инфлатона, в обобщённой унимодулярной гравитации его можно интерпретировать как генерируемое масштабным фактором  $a$  (глобальной конформной модой), который в обобщённой унимодулярной гравитации является физической степенью свободы.

Пользуясь соотношением (1.110) и полученными выражениями (1.113), (1.114) для базисных функций переменной  $\vartheta$ , получаем двухточечную одновременную

корреляционную функцию скалярной моды

$$\begin{aligned} \langle 0 | \hat{\psi}(\eta, \mathbf{x}) \hat{\psi}(\eta, \mathbf{y}) | 0 \rangle &= \int \frac{dk}{k} \frac{\sin kr}{kr} \frac{k^3}{2\pi^2 \theta^2(\eta)} |\vartheta_{\mathbf{k}}(\eta)|^2, \\ r &\equiv |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \end{aligned} \quad (1.115)$$

из которого мы извлекаем спектр первичных скалярных возмущений, равный

$$\delta_{\psi}^2(k, \eta) = \frac{k^3}{2\pi^2} \frac{|\vartheta_{\mathbf{k}}(\eta)|^2}{\theta^2(\eta)}, \quad (1.116)$$

где  $\vartheta_{\mathbf{k}}(\eta)$  есть положительночастотная базисная функция уравнения (1.112) для канонически нормированного поля  $\vartheta$ , которой мы сопоставляем вакуум  $|0\rangle$ . Следуя [25], мы предполагаем, что для ранних моментов времени  $\eta$  базисные функции определяются их коротковолновой асимптотикой (1.113),  $\vartheta_{\mathbf{k}}^{(-)}(\eta)$ , с единичной нормировкой  $C_- = 1$  относительно скалярного произведения типа Клейна-Гордона.

При фиксированном сопутствующим импульсе  $\mathbf{k}$  базисная функция  $\vartheta_{\mathbf{k}}(\eta) = \vartheta_{\mathbf{k}}^{(-)}(\eta)$  эволюционирует во времени в свою длинноволновую асимптотику (1.114) так как  $\theta''(\eta)/\theta(\eta)$  быстро растёт в процессе космологического расширения. Последнее имеет место, так как для произвольного степенного поведения  $\Omega/w \sim a^q$  рост определяется выражением  $(a^{2+q})''/a^{2+q} = (2+q)[3(1-w)/2+q]H^2a^2$ , в связи с чем некоторый момент времени  $\eta_*$  происходит переход от коротковолнового поведения (1.113) к длинноволновому (1.114). Момент времени  $\eta_*$  ассоциируется с моментом пересечения волной горизонта, определяемым для волны с фиксированным  $\mathbf{k}$  уравнением  $c_s^2 k^2 \simeq \theta''/\theta$  или  $c_s k = Ha$ . Приравнивая коротко- и длинноволновые асимптотики в этот момент времени, мы находим значение нормировочной постоянной  $C_1 = C_1(k)$  как

$$C_1(k) \theta(\eta_*) = \frac{1}{\sqrt{2c_s(\eta_*)k}}, \quad c_s(\eta_*)k = H(\eta_*)a(\eta_*), \quad (1.117)$$

где мы пренебрегли несущественным фазовый множитель и обсуждавшейся ранее затухающей модой. Таким образом, после пересечения волной горизонта, что соответствует  $\eta > \eta^*$ , базисная функция принимает вид

$$\vartheta_{\mathbf{k}}(\eta) = \frac{1}{\theta \sqrt{2c_s k}} \Big|_{c_s k = Ha} \times \theta(\eta) = \sqrt{\frac{w}{6\Omega}} \frac{H}{(c_s k)^{3/2} M_P} \Big|_{c_s k = Ha} \times \theta(\eta), \quad (1.118)$$

где  $\theta(\eta)$  определена в (1.110). Подставляя полученную базисную функцию в выражение в спектра возмущений скалярного гравитона (1.116), получаем, что зависящий от времени множитель  $\theta(\eta)$  сокращается и спектр оказывается равен

$$\delta_{\psi}^2(k) = \frac{1}{12\pi^2} \sqrt{\frac{\Omega}{w(1+w)^3}} \frac{H^2}{M_P^2} \Big|_{c_s k = Ha}, \quad (1.119)$$

где все величины должны быть вычислены в момент пересечения волной горизонта.

Напомним, что в отличие от общей теории относительности, теория обобщенной унимодулярной гравитации не инвариантна относительно полного набора диффеоморфизмов. Подразумевая, что поля материи и электромагнитного поля взаимодействуют с метрикой обобщённой унимодулярной обычным минимальным образом, мы приходим к выводу, что законы распространения света идентичны ОТО. Таким образом, для вычисления наблюдаемого спектра микроволнового излучения необходимо использовать калибровочные инварианты ОТО, которые в нашем случае выражаются через полк  $\psi$ .

Существует два таких калибровочно инвариантных потенциала, имеющих название потенциалов Бардина [49], выражающихся через скалярные компоненты возмущений метрики

$$\Psi = \psi - \mathcal{H}(B - E'), \quad (1.120)$$

$$\Phi = A + \frac{1}{a} \frac{d}{d\eta} [a(B - E')]. \quad (1.121)$$

В общей теории относительности данные потенциалы совпадают в линейном порядке на уравнениях движения, если тензор энергии-импульса материи является диагональным [26]. Это свойство имеет место и в обобщённой унимодулярной гравитации. Чтобы выразить потенциалы через поле  $\psi$ , воспользуемся выражениями для калибровочных степеней свободы  $B$  и  $E$ , выраженных в терминах физической моды  $\psi$  посредством связей (1.98)–(1.100), а также выражения для канонических импульсов через скорости (1.95)–(1.97). Таким образом, находим выражение для потенциалов

$$\Phi = \Psi = \frac{3\Omega\mathcal{H}}{2} \frac{1}{w} \frac{1}{\Delta} \psi'. \quad (1.122)$$

Также, следуя аналогичным вычислениям в модели инфлатонного поля [26], несложно видеть, что в длинноволновом режиме, имеет место более простое

соотношение между возмущениями  $\Phi$  и  $\psi$

$$\Phi = \psi \frac{1}{a} \frac{d}{d\eta} \left[ \frac{1}{a} \int d\eta a^2 \right] = \psi \frac{d}{d\tau} \left[ \frac{1}{a} \int d\tau a \right]. \quad (1.123)$$

т.е. они отличаются только медленно меняющимся во времени пространственно постоянным множителем. На постинфляционных стадиях эволюции Вселенной, для которых масштабный фактор имеет степенную зависимость от собственного космического времени  $\tau = \int d\eta a$ ,  $a(\tau) \propto \tau^p$ , этот множитель имеет значение порядка единицы и приблизительно равен  $1/(p+1)$ , откуда получаем, что  $\Phi = \psi/(p+1)$ . В результате, наблюдаемая на эксперименте длинноволновая часть спектра оказывается равной

$$\delta_{\Phi}^2(k, \eta) = \frac{1}{12\pi^2(p+1)^2} \sqrt{\frac{\Omega}{w(1+w)^3}} \frac{H^2}{M_P^2} \Big|_{c_s k = Ha}. \quad (1.124)$$

Это выражение тождественно совпадает с классическими результатами в инфлатонных моделях, включая модель  $k$ -инфляции [28; 29], если переписать его в терминах скорости звука (1.107) и плотности энергии как

$$\delta_{\Phi}^2(k, \eta) = \frac{1}{36\pi^2(p+1)^2} \frac{1}{c_s(1+w)} \frac{\rho}{M_P^4} \Big|_{c_s k = Ha}. \quad (1.125)$$

Наклон спектра, соответствующий гравитационному потенциалу, после перехода от дифференцирования по  $k = Ha/c_s$  к дифференцированию по  $a$  оказывается равным

$$n_s - 1 = \frac{d \ln \delta_{\Phi}^2(k)}{d \ln k} = \frac{1}{\frac{d}{d \ln a} \left[ \ln \frac{Ha}{c_s} \right]} \frac{d \ln \delta_{\Phi}^2}{d \ln a} \Big|_{c_s k = Ha}, \quad (1.126)$$

или, более явно

$$n_s - 1 = \frac{-6(1+w) + \frac{d \ln \Omega}{d \ln a} - \frac{d \ln w}{d \ln a} - 3 \frac{d \ln(1+w)}{d \ln a}}{-(1+3w) + \frac{d \ln \Omega}{d \ln a} - \frac{d \ln w}{d \ln a} - \frac{d \ln(1+w)}{d \ln a}} \Big|_{c_s k = Ha}. \quad (1.127)$$

Первые слагаемые в числителе и знаменателе соответствуют стандартному выражению для наклона спектра в модели инфлатона со стандартным кинетическим членом  $n_s - 1 = 6(1+w)/(1+3w) \simeq -3(1+w)$  с постоянной скоростью звука, а остальные слагаемые соответствуют нетривиальной зависимости скорости звука от времени.

Произведём аналогичные вычисления для тензорной моды, задаваемой действием (1.91), совпадает с соответствующим действием в ОТО. Перепишем его в терминах поляризаций  $v_I$

$$t_{ij} = \frac{2}{M_{Pl} a} \sum_{I=\pm} e_{ij}^I v_I, \quad e_{ij}^I e^{Jij} = \delta^{IJ}, \quad (1.128)$$

как

$$S_t = \frac{1}{2} \sum_{I=\pm} \int d\eta d^3x \left( v_I'^2 + v_I \Delta v_I + \frac{a''}{a} v_I^2 \right), \quad (1.129)$$

так что в импульсном представлении уравнения движения имеют вид

$$v_{\mathbf{k}}'' + \left( k^2 - \frac{a''}{a} \right) v_{\mathbf{k}} = 0. \quad (1.130)$$

Приравнивая длинноволновые  $v_{\mathbf{k}}(\eta) = a(\eta)/(\sqrt{2k} a_{k=Ha})$  и коротковолновые моды  $\exp(\mp ik\eta)/\sqrt{2k}$  в момент пересечения волной горизонта  $k = aH$ , получаем спектр первичных возмущений поляризаций

$$\langle 0 | \hat{t}_{ij}(\eta, \mathbf{x}) \hat{t}^{ij}(\eta, \mathbf{y}) | 0 \rangle = \int \frac{dk \sin kr}{k} \frac{2k^3 |v_{\mathbf{k}}(\eta)|^2}{\pi^2 a^2(\eta) M_{Pl}^2}, \quad (1.131)$$

$$\delta_t^2(k, \eta) = \frac{2}{\pi^2 a^2(\eta) M_{Pl}^2} k^3 |v_{\mathbf{k}}(\eta)|^2 = \frac{2}{\pi^2} \frac{H^2}{M_{Pl}^2} \Big|_{k=Ha}, \quad (1.132)$$

а также наклон спектра, который для малых  $1+w$  оказывается равным

$$n_t = \frac{d \ln \delta_t^2}{d \ln k} = \frac{6(1+w)}{1+3w} \Big|_{k=Ha} \simeq -3(1+w) \Big|_{k=Ha}. \quad (1.133)$$

Отношение амплитуд тензорных возмущений к скалярным в обобщенной унимо-дулярной гравитации оказывается пропорциональным отношению плотностей энергии в моменты пересечения горизонта тензорных и скалярных возмущений. В частности, на радиационно-доминированной стадии, для которой  $p = 1/2$  отношение амплитуд равно

$$r \equiv \frac{\delta_t^2}{\delta_{\Phi}^2} = 54 \frac{H_{k=Ha}^2}{H_{c_s k=Ha}^2} \left[ c_s(1+w) \Big|_{c_s k=Ha} \right]. \quad (1.134)$$

На данное выражение существуют экспериментальные оценки [24], что будет важно при реконструкции параметров модели.

### 1.3.3 Реконструкция параметров модели

В рамках данной работы мы не ставим целью реконструкцию функционального параметра обобщенной унимодулярной гравитации  $N(\gamma)$ , который соответствовал бы наблюдаемым космологическим данным на всем протяжении эволюции Вселенной. Однако, учитывая сходство формализма космологических возмущений в обобщенной унимодулярной гравитации и инфляционной космологии ОТО, целесообразно рассмотреть возможность выбора такой функций  $N(\gamma)$ , которая позволила бы реализовать инфляционный сценарий с базовыми феноменологически приемлемыми характеристиками. К таким характеристикам относится спектр реликтового излучения, близкий к плоскому в области длинных волн, с параметрами, соответствующими наблюдаемым. Осуществить эту задачу может быть непросто, так как функция  $N(\gamma)$  должна одновременно удовлетворять строгим требованиям стабильности теории и соответствовать феноменологическим данным о ранней Вселенной. В частности, сложность заключается в довольно необычном выражении для скорости звука скалярного гравитона (1.107).

Выбор параметра модели  $N(\gamma)$ , совместимый с наличием инфляционной стадии, фиксирует поведение параметра  $N(\gamma) \rightarrow 1/\sqrt{\gamma}$  при  $\gamma \rightarrow 0$ , соответствующего  $w \rightarrow -1$  и параметр Хаббла  $H_0$  в начале инфляции, входящий в уравнение Фридмана, через параметр интегрирования (1.81) как  $C = 3H_0^2$ . Поправку к этому закону, отвечающую за малое отклонение  $w$  от значения  $-1$  зададим как

$$N(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left[ 1 + A \left( \frac{\gamma}{\gamma_0} \right)^\alpha \right], \quad (1.135)$$

где  $A > 0$  и  $\alpha > 0$  являются некоторыми безразмерными параметрами, а  $\gamma_0 = a_0^6$  задаёт масштабный фактор в конце инфляционной стадии. При таком выборе функции  $N(\gamma)$  основные величины в теории, вычисленные при  $\gamma \ll \gamma_0$  имеют значения  $w \simeq -1$ ,  $c_s^2 \simeq 1/(2\alpha - 1)$  и  $n_s - 1 \simeq -6\alpha$ . Очевидная сложность, возникающая при таком выборе  $N(\gamma)$ , заключается в том, что положительность  $c_s^2$  требует  $\alpha > 1/2$ , что ведет к неравенству  $n_s - 1 < -3 + O((\gamma/\gamma_0)^\alpha)$ , что противоречит экспериментально наблюдаемому малому наклону спектра  $n_s - 1 \simeq -0.04$ . Чтобы преодолеть эту трудность положим  $\alpha = 1/2$  и учтём поправку

большого порядка малости в (1.135) как

$$N(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left[ 1 + A \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma_0}} + B \left( \frac{\gamma}{\gamma_0} \right)^\beta \right], \quad \beta > \frac{1}{2}. \quad (1.136)$$

В результате, получим следующие выражения для основных величин в виде разложения по  $\gamma/\gamma_0$

$$w \simeq -1 + A \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma_0}}, \quad (1.137)$$

$$\Omega \simeq -2\beta(2\beta - 1)B \left( \frac{\gamma}{\gamma_0} \right)^\beta, \quad (1.138)$$

$$c_s^2 \simeq \frac{A}{2B} \frac{1}{\beta(2\beta - 1)} \left( \frac{\gamma}{\gamma_0} \right)^{\frac{1}{2}-\beta}, \quad (1.139)$$

$$n_s - 1 \simeq 3 \frac{2\beta - 3}{6\beta - 1}. \quad (1.140)$$

Наклон спектра  $n_s - 1$  отрицателен для  $1/2 < \beta < 3/2$  и мал при  $\beta$  порядка  $3/2$ . Рассмотрим сначала случай  $\beta = 3/2$ , соответствующий нулевому наклону  $n_s - 1 = 0$ , поправки к которому попробуем получить, включая старшие слагаемые в разложение  $N(\gamma)$  с полуцелыми степенями

$$N(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left[ 1 + A \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma_0}} + B \left( \frac{\gamma}{\gamma_0} \right)^{3/2} + B_1 \left( \frac{\gamma}{\gamma_0} \right)^2 + B_2 \left( \frac{\gamma}{\gamma_0} \right)^{5/2} + \dots \right]. \quad (1.141)$$

В этом случае основные величины имеют вид

$$w = -1 + A \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma_0}} + O(\gamma/\gamma_0), \quad (1.142)$$

$$\Omega = -6B \left( \frac{\gamma}{\gamma_0} \right)^{3/2} + O((\gamma/\gamma_0)^2), \quad (1.143)$$

$$c_s^2 = \frac{A}{6B} \left( \frac{\gamma}{\gamma_0} \right)^{-1} + O((\gamma/\gamma_0)^{-1/2}). \quad (1.144)$$

что приводит к следующим выражениям для параметров инфляционных спектров, имеющих дополнительные поправки по  $\gamma/\gamma_0$  по сравнению с выражением (1.141) и зависящим от коэффициентов  $A$ ,  $B$  и  $B_1$

$$\delta_\Phi^2(k) = \frac{\sqrt{6B}}{27\pi^2 A^{3/2}} \frac{H_0^2}{M_P^2} \left[ 1 + \left( A + \frac{B_1}{B} \right) \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma_0}} + O\left( \frac{\gamma}{\gamma_0} \right) \right] \Big|_{c_s k = H a}, \quad (1.145)$$

$$n_s - 1 = \frac{3}{4} \left( A + \frac{B_1}{B} \right) \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma_0}} \Big|_{c_s k = H a} + O\left( \frac{\gamma}{\gamma_0} \right), \quad (1.146)$$

$$r = \frac{\delta_t^2(k)}{\delta_\Phi^2(k)} \simeq \frac{54A^{3/2}}{\sqrt{6B}}. \quad (1.147)$$

Условие пересечения волной горизонта  $c_s k = H a$  переписывается как уравнение на масштабный фактор в момент пересечения

$$\sqrt{\frac{A}{6B}} \frac{k}{H_0 a_0} \simeq \left(\frac{a}{a_0}\right)^4. \quad (1.148)$$

Полного набора параметров  $H_0, A, B, B_1$  в принципе достаточно, чтобы удовлетворить экспериментальным значениям и ограничениям основных наблюдаемых величин  $n_s - 1 \simeq -0.04$ ,  $\delta_{\Phi}^2 \simeq 10^{-10}$  и  $r \ll 1$  [24]. Однако, если мы также потребуем достаточную продолжительность инфляционной стадии с числом  $e$ -фолдингов  $N \simeq 60$ , получим равенство

$$\frac{\gamma}{\gamma_0} \Big|_{c_s k = H a} = e^{-6N}, \quad (1.149)$$

противоречащее разложению (1.141) по малости  $\gamma/\gamma_0$ . Продолжительность расширения до выхода из инфляционной стадии при  $\gamma \simeq \gamma_0$  и  $w \simeq 0$  подразумевает, что  $A, B, B_1 = O(1)$ , в то время как  $B_1/B \sim e^{3N}$ , чтобы обеспечить необходимое значение  $n_s$ . Таким образом, параметр  $B$  должен быть экспоненциально малым, то есть  $B \sim e^{-3N}$ . Это приводит к чрезвычайно малой амплитуде  $\delta_{\Phi}^2 \sim e^{-3N/2} (H_0^2 M_P^2)$ , поскольку  $H_0$  принимает огромное значение  $H_0 \sim e^{3N/4} M_P$ , что приводит к недопустимо большому значению отношения амплитуд  $r \sim e^N$ .

Чтобы избежать этих трудностей будем использовать существенно неаналитичную функции. (1.136) с параметром  $\beta = 3/2 - \Delta\beta$ , где  $\Delta\beta$  есть малый параметр. В этом случае выражения для наблюдаемых величин имеют вид

$$\delta_{\Phi}^2(k, \eta) \simeq \frac{\sqrt{6B}}{27\pi^2 A^{3/2}} \frac{H_0^2}{M_P^2} \left(\frac{\gamma}{\gamma_0}\right)^{-\frac{\Delta\beta}{2}} \Big|_{c_s k = H a}, \quad (1.150)$$

$$n_s \simeq 1 - 3\Delta\beta/4, \quad (1.151)$$

$$r \simeq \frac{A^{3/2}}{\sqrt{6B}} \left(\frac{\gamma}{\gamma_0}\right)^{\frac{\Delta\beta}{2}} \Big|_{c_s k = H a}, \quad (1.152)$$

Тогда, согласно (1.148), амплитуда спектра будет иметь степенную зависимость  $\delta_{\Phi}^2 \propto k^{-3\Delta\beta/4}$ . Выбирая  $\Delta\beta \simeq 0.05$ , получаем необходимое значение  $n_s \simeq 0.96$ , согласующееся с экспериментальными данным. В то же время, обычно предполагаемое значение числа  $e$ -фолдингов  $N \simeq 60$  с учетом (1.149) даёт достаточно малые значения амплитуды скалярного спектра и отношения тензорной и скалярной амплитуд  $r$ . При вычислении отношения  $r$  с помощью выражения

(1.134) мы учли, что в течение инфляционной стадии параметр Хаббла изменяется слабо, т.е.  $H_{c_s k=H a}^2 \simeq H_{k=H a}^2 \simeq H_0^2$ . Приблизительное равенство имеет место несмотря на то, тензорная мода пересекает горизонт значительно раньше, чем скалярная, так как размер Вселенной в этот момент времени был приблизительно в  $c_s$  раз меньше.

Ввиду малости параметра  $\Delta\beta/2$  отношение (1.149) имеет значение  $(\gamma/\gamma_0)^{-\Delta\beta/2}|_{c_s k=H a} = e^{3N\Delta\beta} \simeq 10^3$ . Благодаря этому, параметры  $A$  и  $B$  имеют значения порядка единицы, что позволяет удовлетворить наблюдаемым данным в предположении, что значение параметра Хаббла на инфляционной стадии  $H_0$  в несколько раз меньше, чем масса Планка  $M_P$ . Таким образом, мы приходим к выводу, что  $r \sim 10^{-3}$ , что согласуется с современными экспериментальными ограничениями [24].

## 1.4 Ковариантизация с помощью трюка Штюкельберга

Рассмотрим наиболее общую модифицированную теорию гравитации, отличающуюся от ОТО наложением некоторой алгебраической связи на метрические коэффициенты и записанную в виде  $U(g^{\mu\nu}) = 0$ . Реализуем такую связь за счет добавления в действие теории слагаемого с лагранжевым множителем

$$S[g_{\mu\nu}, \Lambda] = S_{\text{EH}}[g_{\mu\nu}] + \int d^4x \sqrt{-g} \Lambda U(g^{\mu\nu}). \quad (1.153)$$

Обобщенная унимодулярная гравитация относится к определённым таким образом классу модифицированных теорий гравитации, а именно за счёт добавления связи специального вида (1.1).

Действие (1.153) не имеет свойства общей ковариантности для неконстантной функции  $U(g^{\mu\nu})$ , так как не существует локальной функции метрических коэффициентов, преобразующейся при диффеоморфизмах как скаляр. Чтобы восстановить общую ковариантность можно воспользоваться хорошо известным методом Штюкельберга. Для этого мы вводим четыре поля Штюкельберга  $\phi^A(x)$ ,  $A = 0, \dots, 3$ , которые имитируют замену координат  $x^\mu \mapsto \phi^A(x)$ . Очевидно, часть действия, соответствующая действию Эйнштейна-Гильберта, инвариантна относительно такой подстановки, в то время как аргумент функции  $U(g^{\mu\nu})$  принимает вид

$$g^{\mu\nu} \mapsto C^{AB}, \quad C^{AB} = g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi^A \partial_\nu \phi^B, \quad (1.154)$$

в результате чего действие (1.153) переходит в

$$S[g_{\mu\nu}, \Lambda, \phi^A] = S_{\text{EH}}[g_{\mu\nu}] + \int d^4x \sqrt{-g} \Lambda U(C^{AB}). \quad (1.155)$$

Теперь, если трактовать поля Штюкельберга  $\phi^A$  и множитель Лагранжа  $\Lambda$  как скаляры, полученное действие становится общековариантным относительно диффеоморфизмов  $g_{\mu\nu}(x)$ ,  $\phi^A(x)$  и  $\Lambda(x)$ . В калибровке  $\phi^A(x) = x^A$  действие  $S[g_{\mu\nu}, \Lambda, \phi^A]$  принимает исходный нековариантный вид (1.153).

Эквивалентность действий (1.153) и (1.155) следует из того факта, что вариация полей Штюкельберга не приводит к новым динамическим уравнениям, то есть уравнения движения  $\delta S/\delta\phi^A = 0$  следуют из вариации по метрике и лагранжевому множителю. Чтобы продемонстрировать эквивалентность, запишем полный набор уравнений движения для теории (1.155), т.е. уравнения Эйнштейна с соответствующим тензором энергии-импульса в правой части

$$T_{\mu\nu} = \Lambda U g_{\mu\nu} - 2\Lambda \frac{\partial U}{\partial C^{AB}} \partial_\mu \phi^A \partial_\nu \phi^B, \quad (1.156)$$

ковариантизированное уравнение связи

$$U(C^{AB}) = 0, \quad (1.157)$$

и уравнения движения для полей Штюкельберга  $\phi^A$

$$\nabla^\mu \left( \Lambda \frac{\partial U}{\partial C^{AB}} \nabla_\mu \phi^B \right) = 0. \quad (1.158)$$

Тождества Бьянки приводят к сохранению тензора энергии-импульса (1.156), т.е.  $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$ . Вместе с уравнением связи (1.157) это даёт

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = -2\nabla_\nu \phi^B \nabla^\mu \left( \Lambda \frac{\partial U}{\partial C^{AB}} \nabla_\mu \phi^A \right) = 0, \quad (1.159)$$

так что если выполняется  $\det \nabla_\nu \phi^B \neq 0$ , то уравнения движения для полей Штюкельберга (1.158) следуют из уравнений Эйнштейна и уравнения связи.

Модифицированная теория гравитации с действием (1.155) похожа на теорию самогравитирующей среды в ведущем порядке градиентного разложения, имеющего действие вида

$$S_{\text{SGM}}[g_{\mu\nu}, \phi^A] = S_{\text{EH}}[g_{\mu\nu}] + \int d^4x \sqrt{-g} U(C^{AB}), \quad (1.160)$$

где величина  $C^{AB}$  определена в (1.154). Основное различие между самогравитирующей средой и «ограниченной» теорией гравитации (1.155) заключается в наличии дополнительного поля, а именно множителя Лагранжа  $\Lambda$  во втором слагаемом действия последней. Таким образом, тензор энергии-импульса этих теорий отличается общим фактором  $\Lambda$ , то есть  $T_{\mu\nu} = \Lambda(T_{\text{SGM}})_{\mu\nu}$ , где  $(T_{\text{SGM}})_{\mu\nu}$  есть тензор энергии-импульса самогравитирующей среды.

Это отличие не меняет классификацию лагранжианов по свойствам симметрии, разработанную для моделей самогравитирующих сред [27]. Согласно этой классификации, существует только два класса функций от  $C^{AB}$  которые приводят к  $SO(3)$ -инвариантной теории, тензор энергии-импульса которой при этом имеет вид тензора энергии-импульса некоторой идеальной жидкости. Теории, имеющие это свойство являются наиболее интересными с точки зрения космологических приложений. Функция  $U(C^{AB})$  в таких теориях может иметь один из двух видов зависимости от  $C^{AB}$ , а именно

$$U(C^{AB}) = V(X, Z) \quad (1.161)$$

и

$$U(C^{AB}) = V(b, Z), \quad (1.162)$$

где мы используем следующие обозначения, являющиеся общепринятыми в теории самогравитирующих сред [27]

$$X = C^{00}, \quad Z = \sqrt{-\det C^{AB}}, \quad b = \sqrt{\det C^{ab}}. \quad (1.163)$$

Здесь индексы  $a, b$  нумеруют «пространственные» компоненты полей Штюкельберга, т.е.

$$\phi^A = (\phi^0, \phi^a), \quad a = 1, 2, 3. \quad (1.164)$$

Очевидно, домножение тензора энергии-импульса на общий скалярный множитель  $\Lambda$  не нарушает ни вид тензора энергии-импульса идеальной жидкости, ни его  $SO(3)$  симметрию. Таким образом, «ограниченные» теории гравитации (1.155) с необходимостью должны иметь функцию  $U(C^{AB})$  вида (1.161) или (1.162), если потребовать, что соответствующий им тензор энергии-импульса является  $SO(3)$ -инвариантным тензором энергии-импульса идеальной жидкости, также как и в случае самогравитирующих сред. Наложение калибровки  $\phi^A(x) = x^A$ , соответствующей переходу к нековариантной версии теории (1.153),

приводит функции  $V(X, Z)$  и  $V(b, Z)$  соответственно, к виду

$$U(g^{\mu\nu}) = V(g^{00}, (-g)^{-1/2}) \quad (1.165)$$

и

$$U(g^{\mu\nu}) = V((\det g^{ij})^{1/2}, (-g)^{-1/2}), \quad (1.166)$$

так как в этой калибровке переменные (1.163) имеют вид

$$X = g^{00}, \quad Z = (-g)^{-1/2}, \quad b = (\det g^{ij})^{1/2}. \quad (1.167)$$

### 1.4.1 Отщепление пространственных полей Штюкельберга

Интересным свойством «ограниченных» теорий гравитации (1.155) и их нековариантных формулировок (1.153), в которых связь принадлежит к классам (1.161) или (1.162), является динамическое отщепление некоторой части полей Штюкельберга. В этом разделе мы продемонстрируем это свойство для случая (1.161) соответствующему обобщенной унимодулярной гравитации. Аналогичная процедура для случая (1.162) проделана в Приложении А.1.

Связь (1.165) и её ковариантная версия  $V(X, Z) = 0$  может быть реализована бесконечным количеством эквивалентных способов. Наиболее удобным является выбор  $Z = P(X)$  (мы предполагаем, что связь может быть разрешена относительно переменной  $Z$ ). В этом случае мы полагаем  $V(X, Z) = P(X) - Z$ , и действие принимает вид

$$S[g_{\mu\nu}, \Lambda, \phi^A] = S_{\text{EH}}[g_{\mu\nu}] + \int d^4x \sqrt{-g} \Lambda (P(X) - Z). \quad (1.168)$$

Чтобы соотнести функцию  $P(X)$  с функцией  $N(\gamma)$  из нековариантной формулировки со связью (1.1) необходимо ковариантизировать составляющие последней, т.е.  $g^{00}$  и  $\gamma$  пользуясь правилами (1.154), что даёт

$$g^{00} \mapsto X, \quad \gamma = g g^{00} \mapsto -X/Z^2. \quad (1.169)$$

Тогда ковариантная форма связи обобщенной унимодулярной гравитации (1.1) принимает вид  $(-X)^{-1/2} = N(-X/Z^2)$ , и её решение относительно переменной  $Z$  имеет форму

$$Z = P(X), \quad P(X) \equiv \left( \frac{-X}{\Gamma(1/\sqrt{-X})} \right)^{1/2}, \quad (1.170)$$

где  $\Gamma(N)$  есть функция, обратная к функции  $N(\gamma)$ , т.е.

$$\Gamma(N(\gamma)) \equiv \gamma. \quad (1.171)$$

Тензор энергии-импульса, соответствующий действию (1.168) имеет вид

$$T_{\mu\nu} = \Lambda (P g_{\mu\nu} + 2P_X X v_\mu v_\nu), \quad v_\mu = -\frac{\partial_\mu \phi^0}{\sqrt{-X}}, \quad (1.172)$$

где нижний индекс  $X$  обозначает частную производную по  $X$ , т.е.  $P_X = \partial_X P(X)$ . Как и ожидалось, тензор энергии-импульса имеет вид тензора энергии-импульса идеальной жидкости со следующими гидродинамическими параметрами

$$p = w\rho = \Lambda P, \quad w = \frac{P}{2P_X X - P}. \quad (1.173)$$

Важно, что полученный тензор энергии импульса, играющий роль материального источника в правой части уравнений Эйнштейна, не содержит в себе зависимости от полей Штюкельберга, соответствующих пространственным координатам  $\phi^a$ ,  $a = 1, 2, 3$ . Как было показано выше, поля Штюкельберга не приводят к новой динамике и следуют из уравнений Эйнштейна. Уравнение связи (1.170) является лишь ограничением на пространственные поля Штюкельберга  $\phi^a$  и выражает их через временное поле  $\phi^0$ . Это означает, что единственными динамическими уравнениями в теории являются уравнения Эйнштейна, которые сами по себе не зависят от пространственных полей  $\phi^a$ . В этом смысле, поля  $\phi^a$  отщепляются от динамики метрического сектора теории.

Можно было бы подумать, что это не так, и пространственные поля взаимодействуют за счёт множителя Лагранжа  $\Lambda$ , который входит в тензор энергии-импульса (1.172) определяющий правую часть уравнений Эйнштейна. Это, однако, оказывается не так, а множитель Лагранжа  $\Lambda$  вовсе является функцией только временного поля  $\phi^0$ . Действительно, используя тождества Бьянки мы получаем ковариантное сохранение тензора энергии-импульса (1.172)  $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$ , а проецируя его на линейное пространство, ортогональное к сопутствующей 4-скорости идеальной жидкости  $v_\mu$ , мы обнаруживаем что

$$(\delta_\sigma^\nu + v^\nu v_\sigma) \nabla^\mu T_{\mu\nu} = P(X) (\delta_\sigma^\nu + v^\nu v_\sigma) \partial_\nu \Lambda = 0, \quad (1.174)$$

так что  $\partial_\nu \Lambda \propto \partial_\nu \phi^0$ . Эквивалентно, это равенство напрямую следует из вариационных уравнений движения (1.158) для пространственных полей Штюкельберга  $\phi^a$ , где  $U(C^{AB}) = P(X) - Z$ . Так или иначе, мы получаем, что зависимость

множителя Лагранжа единственным образом фиксируется как  $\Lambda = K(\phi^0)$ , т.е. последний является функцией только  $\phi^0$ . Это легко увидеть с помощью замены переменных от  $x^\mu$  к  $\phi^A(x)$  при которой  $\Lambda(x) = K(\phi^A(x))$  и  $\partial K(\phi^A)/\partial \phi^a = 0$ . Таким образом, на уравнениях движения зависимость множитель Лагранжа  $\Lambda$  от пространственно-временных переменных осуществляется только через зависимость от  $\phi^0(x)$ . Стоит отметить, однако, что вообще говоря  $\Lambda$  может зависеть от комбинаций  $\phi^a$ , не зависящих от  $x$ , включая, в частности, пространственные интегралы движения. Это значит, что  $K(\phi^A(x))$  может зависеть от начальных условий, что будет продемонстрировано в следующем разделе.

Кроме того, легко видеть, что после проведённого отождествления  $\Lambda(x) = K(\phi^0(x))$ , левая часть уравнений движения (1.158) для поля  $\phi^0$  с функцией  $U(C^{AB}) = P(X) - Z$  принимающая вид

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta \phi^0} = -2\nabla_\mu (\Lambda P_X \nabla^\mu \phi^0) + Z \partial_\mu \Lambda (\partial \phi^{-1})_0^\mu, \quad (1.175)$$

где  $(\partial \phi^{-1})_0^\mu$  обозначают элементы матрицы, обратной к  $\partial_\mu \phi^A$ , может быть переписана как

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta \phi^0} = \left( \frac{\partial}{\partial \phi^0} - \nabla_\mu \frac{\partial}{\partial (\nabla_\mu \phi^0)} \right) K(\phi^0) P(X). \quad (1.176)$$

Это равенство выполняется как следствие связи  $Z = P(X)$  и пространственной части (т.е. при  $A = a$ ) уравнений движения (1.158), но не требует выполнения уравнений движения  $\delta S/\delta \phi^0 = 0$  для самого  $\phi^0$ .

Таким образом, уравнения движения теории (1.168) эквивалентны уравнениям движения скалярного поля  $\phi = \phi^0$ , минимальным образом взаимодействующего с общей теорией относительности, получаемым из действия

$$S_K[g_{\mu\nu}, \phi] = S_{\text{EH}}[g_{\mu\nu}] + \int d^4x \sqrt{-g} K(\phi) P(X). \quad (1.177)$$

Действительно, вариация этого действия по  $\phi$  приводит к (1.176), в то время как его вариация по метрике приводит к уравнениям Эйнштейна с тензором энергии-импульса

$$T_{\mu\nu} = K(\phi^0) P(X) g_{\mu\nu} + 2K(\phi^0) P_X(X) X v_\mu v_\nu, \quad (1.178)$$

являющимся результатом подстановки  $\Lambda = K(\phi^0)$  в тензор энергии-импульса (1.172).

Теория с действием (1.177) имеет вид хорошо известной теории  $k$ -эссенции. Это и является констатацией динамической эквивалентности между обобщенной унимодулярной гравитацией и теорией  $k$ -эссенции. Таким образом, мы избавились от пространственной части полей Штюкельберга  $\phi^a$  (и опустили за ненадобностью индекс 0 у временного поля  $\phi^0$ ).

Эта эквивалентность объясняет сделанное выше наблюдение о том, что космологическая теория возмущений в обобщенной унимодулярной гравитации имеет сходство с аналогичной теорией возмущений в теории  $k$ -эссенции. Как мы видим теперь, эквивалентность между действиями (1.168) и (1.177) выходит за рамки теории возмущений. Однако, эта эквивалентность основывается на конкретной форме функции  $K(\phi)$ , которая возникает в результате решения уравнений движения в ковариантизированной версии обобщенной унимодулярной гравитации, полученных из действия (1.168). К сожалению, полученное действие  $k$ -эссенции не является классически эквивалентным действием в обычном смысле, так как множитель Лагранжа  $\Lambda$  входит в действие (1.168) линейно и соответствующие уравнения движения для этих полей не могут быть разрешены относительно  $\phi^a$ . Природа эквивалентности между (1.168) и (1.177) является более сложной, так как определение  $\Lambda$  в виде функции  $K(\phi)$  требует использование уравнений Эйнштейна из метрического сектора. В частности, следствием этого является специальное свойство полученного лагранжиана  $k$ -эссенции, а именно входящая в него функция  $K(\phi)$ , имеет зависимость от начальных условий теории, которая возникает в процессе определения этой функции из уравнений движения. В разделе 1.4.2 ниже мы демонстрируем это свойство в космологическом контексте, а именно на фоне типа фридмановского.

#### 1.4.2 Реконструкция действия $k$ -эссенции

Явный вид функции  $K(\phi)$  должен быть найден из полного набора уравнений движения, следующих из действия (1.168), что оказывается возможным сделать явно в случае фридмановского фона

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\mathcal{N}^2(t) dt^2 + a^2(t) \delta_{ij} dx^i dx^j, \\ \phi &= \phi(t), \quad \phi^a = x^a, \quad \Lambda = \Lambda(t). \end{aligned} \tag{1.179}$$

Сделанный выбор  $\phi^a = x^a = x^i$  является единственным с точки зрения совместимости с пространственной однородностью тензора энергии-импульса идеаль-

ной жидкости на однородном фридмановском фоне. На таком фоне действие (1.168) имеет вид

$$S[a, \mathcal{N}, \phi, \Lambda] = -3M_P^2 \int dt \mathcal{N} a^3 \frac{\dot{a}^2}{\mathcal{N}^2 a^2} + \int dt \mathcal{N} \Lambda (a^3 P(X) - \sigma \sqrt{-X}), \quad (1.180)$$

$$\sigma \equiv \text{sign}(\dot{\phi}/\mathcal{N}), \quad X = -\frac{\dot{\phi}^2}{\mathcal{N}^2}.$$

Отметим, что знаковый фактор  $\sigma$  остаётся постоянным в процессе непрерывной эволюции поля  $\phi$ , так как в противном случае смена знака  $\dot{\phi}/\mathcal{N}$  привела бы к обнулению детерминанта  $\det \partial_\mu \phi^A = \dot{\phi}$ ,  $\phi = \phi^0$ , который обязан быть ненулевым для эквивалентности ковариантной формулировки.

Уравнение связи, соответствующее вариации по  $\Lambda$  задаёт зависимость масштабного фактора  $a$  как функции от  $X$

$$a^3 = \sigma \sqrt{-X}/P(X), \quad (1.181)$$

которая, в свою очередь может быть обращена, и кинетический член  $X$  выражен как функция от  $a$ , т.е.  $X = X(a)$ .

Уравнение движения для  $\phi$  даёт

$$-\Lambda (2\sigma a^3 P_X \sqrt{-X} + 1) = C, \quad (1.182)$$

где  $C$  есть константа интегрирования, определяемая начальными условиями. Выразим  $\Lambda$  из последнего равенства и использовать определение (1.173) баротропного параметра  $w$  вместе с уравнением связи (1.181), что в итоге даёт

$$\Lambda = C w(X). \quad (1.183)$$

Используя это соотношение, перепишем уравнение Фрийдмана

$$\frac{\dot{a}^2}{\mathcal{N}^2 a^2} = \frac{\Lambda}{3M_P^2} (2P_X X - P) \quad (1.184)$$

как

$$\frac{d \ln a^3}{\mathcal{N} dt} = M_P^{-1} \sqrt{3CP(X)}. \quad (1.185)$$

Деля его на  $\dot{\phi}/\mathcal{N} = \sigma \sqrt{-X}$  и подставляя  $X = X(a)$  из решения уравнения связи (1.181), мы получаем дифференциальное уравнение на  $\phi(a)$ , которое можно проинтегрировать явно, что даёт

$$\phi(a) - \phi_0 = M_P \int_{a_0}^a da' a'^2 \sqrt{\frac{3P(X(a'))}{C}} \equiv \Phi(a) - \Phi(a_0). \quad (1.186)$$

Не теряя общности, выберем  $\phi_0 = \Phi(a_0)$  и выразим  $a = a(\phi)$  как функцию  $\phi$ , которую затем подставим в  $X(a)$ . Таким образом, соотношение (1.183) окончательно задаёт  $\Lambda$  как функцию от  $\phi$

$$\Lambda = Cw(X(a(\phi))) \equiv K(\phi). \quad (1.187)$$

Это равенство и задаёт искомую функцию  $K(\phi)$ , входящую в определение действия  $k$ -эссенции (1.177).

Как и в случае общего фона, в процессе решения уравнений движения  $k$ -эссенции, необходимо использовать те же самые начальные условия, что были использованы при получении функции  $K(\phi)$ . А именно, эти уравнения включают в себя дифференциальное уравнение второго порядка на скалярное поле  $\phi$ , для решения которого необходимы начальное значение самого поля и его производной по времени, а также дифференциальное уравнение первого порядка на масштабный фактор, для решения которого требуется начальное значение этого масштабного фактора. Начальные значения скалярного поля  $\phi_0$  и масштабного фактора  $a_0$  должны быть связаны соотношением (1.186), а значение начальной скорости скалярного поля неявно выражается из связи (1.181). Следовательно, учитывая  $a(t_0) = a_0$ , остальные начальные условия имеют вид

$$\phi(t_0) = \Phi(a_0), \quad \left. \frac{\dot{\phi}}{\mathcal{N}} \right|_{t_0} = \sigma \sqrt{-X(a_0)}. \quad (1.188)$$

Покажем теперь, что параметры идеальной жидкости и инфляционные возмущения в эквивалентной ковариантизованной теории (1.168) а также в теории  $k$ -эссенции (1.177) эквивалентны полученным в разделе 1.3, в терминах оригинального, т.е. нековариантного формализма. Прежде всего отметим, что на поверхности связи (1.170) правило ковариантизации (1.169) для  $\gamma$  принимает вид  $\gamma = \Gamma(1/\sqrt{-X})$ . Следовательно, баротропный параметр  $w$ , определённый в (1.173) может быть записан как

$$w = \left[ \frac{d}{d \ln X} \ln \frac{P^2}{X} \right]^{-1} = 2 \left[ \frac{d \ln \Gamma(1/\sqrt{-X})}{d \ln(1/\sqrt{-X})} \right]^{-1} = 2 \left. \frac{d \ln N(\gamma)}{d \ln \gamma} \right|_{\gamma=\Gamma(1/\sqrt{-X})}, \quad (1.189)$$

что в точности совпадает с (1.5). Действие линеаризованных скалярных возмущений в  $k$ -эссенции имеет тот же вид, что и (1.111) где параметры  $\theta$  и  $c_s$  равны

[28; 29]

$$c_s^2 = \frac{\partial p / \partial X}{\partial \rho / \partial X}, \quad \theta^2 = a^2 \frac{1+w}{c_s^2}. \quad (1.190)$$

Нам необходимо сравнить эти параметры с аналогичными величинами, полученными из нековариантной формулировки обобщённой унимодулярной гравитации. Используя гидродинамические параметры (1.173) и определение (1.170) величины  $P(X(\gamma)) = 1/\sqrt{\gamma}N(\gamma)$  через  $\gamma$  и  $N(\gamma)$ , мы получаем

$$c_s^2 = \frac{\partial p / \partial X}{\partial \rho / \partial X} = \frac{\partial_\gamma P}{\partial_\gamma (P/w)} \Big|_{\gamma=\Gamma(1/\sqrt{-X})} = \frac{w(1+w)}{\Omega} \Big|_{\gamma=\Gamma(1/\sqrt{-X})}, \quad (1.191)$$

что в точности совпадает с результатом (1.110). Отметим, что  $\Lambda = K(\phi)$  в  $p = \Lambda P$  и  $\rho = \Lambda P/w$  не дифференцируется по  $X$  и исчезает из соответствующих выражений. Аналогично, для параметра  $\theta$ , задающего нормировку кинетического слагаемого в действии скалярных возмущений, мы имеем

$$\theta^2 = 3M_P^2 a^2 \frac{1+w}{c_s^2} = 3M_P^2 a^2 \frac{\Omega}{w} \Big|_{\gamma=\Gamma(1/\sqrt{-X})}, \quad (1.192)$$

что также совпадает с (1.107). Равенство этих параметров подразумевает, что спектры первичных возмущений также совпадают в обеих версиях теории. Теперь давайте применим процедуру восстановления функции  $K(\phi)$  из известного  $P(X)$  к нескольким конкретным примерам.

### Точнорешаемый пример

Рассмотрим функцию  $P(X)$  вида

$$P(X) = \frac{-\alpha X}{\beta^2 - \sqrt{-X}} \quad (1.193)$$

с постоянными параметрами  $\alpha$  и  $\beta$ . Этот пример интересен в первую очередь тем, что все шаги процедуры реконструкции, а также интегрирование уравнений движения полученной теории  $k$ -эссенции могут быть проделаны явно в терминах элементарных функций. Уравнение связи (1.181) в данном случае может быть разрешено как

$$\sqrt{-X(a)} = \frac{\beta^2}{1 + \alpha a^3}, \quad (1.194)$$

так что интегрирование в (1.186) даёт

$$\phi(a) = \tilde{\phi} \operatorname{arsinh} \sqrt{\alpha a^3}, \quad \tilde{\phi} \equiv \frac{2\beta M_P}{\sqrt{3C\alpha}}, \quad (1.195)$$

в то время как

$$a^3(\phi) = \frac{1}{\alpha} \sinh^2 \frac{\phi}{\tilde{\phi}}. \quad (1.196)$$

Чтобы воспользоваться (1.187), вычислим сначала баротропный параметр (1.173) для рассматриваемого  $P(X)$ , определённого в (1.193), используя цепочку равенств

$$w = \frac{P}{2P_X X - P} = \frac{1}{\beta^2} (\beta^2 - \sqrt{-X}) = \frac{\alpha a^3}{1 + \alpha a^3} = \tanh^2 \frac{\phi}{\tilde{\phi}} \quad (1.197)$$

и окончательно получим следующий лагранжиан  $k$ -эссенции

$$\mathcal{L}_K(\phi, X) = K(\phi)P(X) = C \tanh^2 \frac{\phi}{\tilde{\phi}} \frac{-\alpha X}{\beta^2 - \sqrt{-X}} \quad (1.198)$$

Таким образом, как было отмечено выше, начальные условия явно входят в лагранжиан  $k$ -эссенции. Согласно (1.188), уравнения, следующие из этого лагранжиана, должны решаться с теми же самыми начальными условиями, а именно параметризованными  $a(t_0) = a_0$  и  $C$ ,

$$\phi(t_0) = \tilde{\phi} \operatorname{arsinh} \sqrt{\alpha a_0^3}, \quad \left. \frac{\dot{\phi}}{\mathcal{N}} \right|_{t_0} = \frac{\beta^2}{1 + \alpha a_0^3}. \quad (1.199)$$

## Пример канонически нормированного скалярного поля

Второй пример соответствует выбору

$$P(X) = -\beta X - \alpha \quad (1.200)$$

с постоянными параметрами  $\alpha$  и  $\beta$ . Этот пример, в частности, интересен тем, что замена переменных

$$\varphi = \int_0^\phi d\phi' \sqrt{2\beta K(\phi')} \quad (1.201)$$

приводит действие скалярного поля в (1.177) к канонической нормировке кинетического члена в соответствующем лагранжиане

$$\mathcal{L}_\varphi = \frac{1}{2} \frac{\dot{\varphi}^2}{\mathcal{N}^2} - V(\varphi) \quad (1.202)$$

и потенциалу  $V(\varphi) = -\alpha K(\phi(\varphi))$ . Пример такого лагранжиана выглядит подходящим для его использования в контексте инфляции в режиме медленного скатывания. Это, однако, оказывается не так, потому что начальные условия

(1.188) с необходимостью нарушают режим медленного скатывания, а именно, как мы увидим, кинетическая энергия скалярного поля оказывается большим в области, в которой потенциал  $V(\varphi)$  является достаточно плоским.

Как и исходное поле  $\phi$ , канонически нормированное  $\varphi$  также имеет очень специальные начальные условия, которые напрямую следуют из начальных условий (1.188) на  $\phi$  и определения  $\varphi$ , т.е.

$$\varphi(t_0) = \int_0^{\phi_0} d\phi' \sqrt{2\beta K(\phi')}, \quad (1.203)$$

$$\left. \frac{\dot{\varphi}}{\mathcal{N}} \right|_{t_0} = \sqrt{2\beta K(\phi_0)} \left. \frac{\dot{\phi}}{\mathcal{N}} \right|_{t_0}. \quad (1.204)$$

Чтобы кинетический и потенциальный член были положительно определёнными, необходимо выбрать  $\alpha$  и  $\beta$  одинаковых знаков. Общий знак оказывается не важен, так что мы выбираем  $\alpha$  и  $\beta$  положительными. Связь (1.181) может быть разрешена как

$$\sqrt{-X_{\pm}(a)} = \frac{1}{2\beta a^3} (\sqrt{1 + 4\alpha\beta a^6} \pm 1), \quad (1.205)$$

где знак должен быть выбран в зависимости от знака  $\alpha$  и  $\beta$  из требования положительности  $H^2 \propto CP(X)$ . Интеграл в (1.186) после подстановки  $X_{\pm}(a)$  может вычислен взят в терминах элементарных функций

$$\Phi_+(a) = \tilde{\phi} (2u(a) - \operatorname{arccoth} u(a)), \quad u(a) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{1 + 4\alpha\beta a^6} + 1)^{1/2}, \quad (1.206)$$

$$\Phi_-(a) = \tilde{\phi} (2v(a) - \arctan v(a)), \quad v(a) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{1 + 4\alpha\beta a^6} - 1)^{1/2}, \quad (1.207)$$

где  $\tilde{\phi} \equiv M_P / \sqrt{3|\beta C|}$ , а нижние индексы соответствуют выбору знака в (1.205). Однако, итоговая зависимость  $\phi(a)$  от  $a$  не может быть обращена в терминах элементарных функций. Поэтому мы приведём только асимптотическое поведение функции  $K(\phi)$  и соответствующего потенциала  $V(\varphi)$ .

В случае положительного знака в (1.205) и пределе  $\phi/\tilde{\phi} \rightarrow -\infty$  асимптотическое поведение имеет вид

$$K(\phi) = C + O[e^{-2|\phi/\tilde{\phi}|}], \quad (1.208)$$

$$\varphi = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{\tilde{\phi}} + O(1), \quad \frac{\varphi}{M_P} \rightarrow -\infty, \quad (1.209)$$

$$V(\varphi) = -C\alpha + O[e^{-\sqrt{6}|\varphi/M_P|}], \quad (1.210)$$

в то время как в пределе  $\phi/\tilde{\phi} \rightarrow +\infty$  мы имеем

$$K(\phi) = 2C \left(\frac{\phi}{\tilde{\phi}}\right)^{-2} + O\left[\left(\frac{\phi}{\tilde{\phi}}\right)^{-3}\right], \quad (1.211)$$

$$\frac{\varphi}{M_P} = \frac{2}{\sqrt{3}} \ln \frac{\phi}{\tilde{\phi}} + O(1), \quad \frac{\varphi}{M_P} \rightarrow +\infty, \quad (1.212)$$

$$V(\varphi) = -C\alpha O[e^{-\sqrt{3}\varphi/M_P}]. \quad (1.213)$$

Результат численного вычисления соответствующего потенциала отображен в виде синей линии на Рис. 1.1.

В случае положительного знака в (1.205) и пределе  $|\phi|/\tilde{\phi} \rightarrow 0$  асимптотическое поведение выглядит как

$$K(\phi) = C \left(1 - 2\left(\frac{\phi}{\tilde{\phi}}\right)^2\right) + O\left[\left(\frac{\phi}{\tilde{\phi}}\right)^4\right] \quad (1.214)$$

$$\frac{\varphi}{M_P} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{\tilde{\phi}} + O\left[\left(\frac{\phi}{\tilde{\phi}}\right)^3\right], \quad \frac{|\varphi|}{M_P} \rightarrow 0, \quad (1.215)$$

$$V(\varphi) = -C\alpha \left(1 - 3\left(\frac{\varphi}{M_P}\right)^2\right) + O\left[\left(\frac{\varphi}{M_P}\right)^4\right] \quad (1.216)$$

в то время как в пределе  $|\phi|/\tilde{\phi} \rightarrow \infty$  мы имеем

$$K(\phi) = -2C \left(\frac{\phi}{\tilde{\phi}}\right)^{-2} + O\left[\left(\frac{\phi}{\tilde{\phi}}\right)^{-3}\right] \quad (1.217)$$

$$\frac{\varphi}{M_P} = \text{sign } \phi \frac{2}{\sqrt{3}} \ln \frac{|\phi|}{\tilde{\phi}} + O(1), \quad \frac{|\varphi|}{M_P} \rightarrow \infty, \quad (1.218)$$

$$V(\varphi) = C\alpha O[e^{-\sqrt{3}|\varphi|/M_P}]. \quad (1.219)$$

Соответствующий результат численного вычисления потенциала показан оранжевой линией на Рис. 1.1.

Из вида потенциала, показанного синей линией на Рис. 1.1 можно ожидать, что этот потенциал может привести к инфляционной стадии в режиме медленного скатывания для больших отрицательных  $\varphi$ ,  $|\varphi|/M_P \rightarrow \infty$ , где потенциал является достаточно плоским, а параметры медленного скатывания являются малыми. К сожалению, это оказывается не так, потому что, согласно (1.205) невозможно выбрать начальные условия таким образом, что кинетическая энергия является произвольно малой величиной без неестественной тонкой подстройки параметров. Действительно, согласно (1.206), масштабный фактор является экспоненциально малым в этой области, т.е.  $a_0^3 \simeq e^{-\sqrt{3/2}|\varphi|/M_P}$ ,

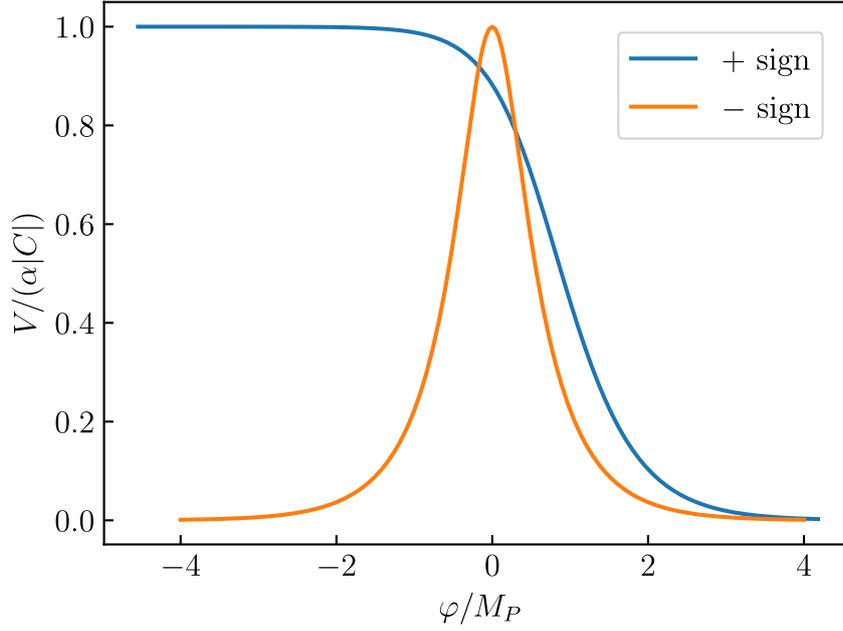


Рис. 1.1: Модифицированная теория гравитации (1.168) со специальным выбором (1.200) функции  $P(X)$  на фридмановском фоне эквивалентен минимально взаимодействующему скалярному полю с одним из показанных потенциалов и специальным выбором начальных условий (1.203), (1.204).

так что кинетическая энергия, определяемая (1.204) и (1.205), имеет поведение  $\dot{\varphi}^2/(2\mathcal{N}^2) \simeq (C/\beta) a_0^{-6} \simeq (C/\beta) e^{\sqrt{6}|\varphi|/M_P}$ , и для больших  $|\varphi|/M_P$  становится намного больше, чем постоянная энергия (1.210) приблизительно равная константе.

## Инфляция в ковариантной форме

Интересным примером, который, в отличие от предыдущих, действительно имеет приложения в контексте инфляции, соответствует случаю обобщенной унимодулярной гравитации (1.2) с функцией  $N(\gamma)$ , определённой в (1.136). В частности, это приводит к космологической теории возмущений, которая воспроизводит спектр первичных возмущений, согласующийся с наблюдаемыми данными реликтового излучения. Как и предыдущий пример, этот случай не является точно решаемым, но сформулируется в терминах разложения по степеням (как целым, так и дробным) отношения  $\gamma/\gamma_*$ , которое является малым вплоть до конца инфляционной стадии, в результате чего получается эквивалентная формулировка в терминах  $k$ -эссенции.

Чтобы привести теорию к ковариантному виду (1.168) мы должны, в первую очередь, разрешить (1.136) относительно  $\gamma$  и найти функцию  $\Gamma(\mathcal{N})$ , обратную к  $\mathcal{N} = N(\gamma)$ . Сделаем это, используя разложение по дробным степеням  $1/(\mathcal{N}\sqrt{\gamma_*})$ . После подстановки  $\mathcal{N} = 1/\sqrt{-X}$  это разложение приводит к ряду для  $P(X)$  по степеням нового малого параметра, а именно

$$\delta \equiv \left( \frac{-X}{\gamma_*} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.220)$$

Для функции  $P(X)$  заданной (1.170) первые несколько слагаемых итогового разложения имеют вид

$$P(X) = 1 - \left( \frac{-X}{\gamma_*} \right)^{\frac{1}{2}} - B \left( \frac{-X}{\gamma_*} \right)^{\frac{3}{2} + 4\frac{n_s-1}{3}} + \dots, \quad (1.221)$$

где многоточие обозначает старшие степени  $\delta$  и  $\delta^{3+8\frac{n_s-1}{3}}$ .

Следующим шагом является получение функции  $K(\phi)$ , что приводит к разложению по целым и дробным степеням другого параметра малости, определяемого как

$$\varepsilon \equiv \frac{3H_0\phi}{\sqrt{\gamma_*}}. \quad (1.222)$$

Здесь  $H_0$  обозначает начальное условие для параметра Хаббла, который параметризует постоянную интегрирования  $C$ , определённую в (1.81), т.е.  $M_P^2 H_0^2 \simeq C/3$ . В начале инфляционной стадии масштабный фактор  $a_0$  является намного меньшим, чем его значение в конце инфляции,  $a_0/a_* = (\gamma_0/\gamma_*)^{1/6} < e^{-60}$ , так что вследствие уравнения связи (1.136) мы имеем  $\mathcal{N}\sqrt{\gamma} \simeq 1$ , что объясняет данную параметризацию.

Используя связь (1.181) и уравнения (1.182), (1.186) и (1.187) мы находим, что в низшем порядке разложения  $\sqrt{-X(a)} \simeq a^3$  и  $a^3(\phi) \simeq 3H_0\phi$ , так что разложение для  $K(\phi)$  имеет вид

$$K(\phi) = -3M_P^2 H_0^2 \left[ 1 - \varepsilon + \frac{3}{4}\varepsilon^2 - \frac{1}{2}\varepsilon^3 - \left( 3 + 8\frac{n_s-1}{3} \right) B \varepsilon^{3+8\frac{n_s-1}{3}} + \dots \right], \quad (1.223)$$

где мы учли уже несколько первых слагаемых разложения, а многоточие обозначает старшие степени по  $\varepsilon$  и  $\varepsilon^{3+8\frac{n_s-1}{3}}$ .

В итоге, лагранжиан  $k$ -инфляционной модели, дуальной к соответствующей инфляционной модели в обобщённой унимодулярной гравитации имеет вид

градиентного и полевого разложения

$$\mathcal{L}_K(\phi, X) = 3M_P^2 H_0^2 \sqrt{\frac{-X}{\gamma_*}} \left[ 1 + O\left(\varepsilon, \varepsilon^{3+8\frac{n_s-1}{3}}, \delta, \delta^{3+8\frac{n_s-1}{3}}\right) \right] - 3M_P^2 H_0^2 \left[ 1 + O\left(\varepsilon, \varepsilon^{3+8\frac{n_s-1}{3}}\right) \right]. \quad (1.224)$$

Уравнения движения для поля  $k$ -эссенции с таким лагранжианом должны быть использованы вместе со следующими начальными условиями, заданными в начале инфляции

$$\phi(t_0) \simeq \frac{a_0^3}{H_0}, \quad \left. \frac{\dot{\phi}}{\mathcal{N}} \right|_{t_0} = \left. \sqrt{-X} \right|_{t_0} \simeq a_0^3. \quad (1.225)$$

Интересным свойством разложения (1.224) является то, что по модулю поправок от степеней  $\delta$  и  $\varepsilon$  полученный лагранжиан имеет вид лагранжиана так называемой модели кускутона [50] с нелинейным корневым кинетическим слагаемым  $\mu^4 \sqrt{-X}$ ,  $\mu^4 \equiv 3M_P^2 H_0^2 / \sqrt{\gamma_*}$  и константным потенциалом  $V \equiv 3M_P^2 H_0^2$ . Вообще говоря, модели кускутона известны своеобразным свойством их скалярного поля, а именно тем, что оно является нединамическим, поскольку его уравнения движения ультралокальны во времени, что интерпретируется как бесконечная скорость звука распространяющихся возмущений поля  $\phi$ . Это свойство находится в полном соответствии с тем, что в обобщённой унимодулярной гравитации с функцией (1.136) и с отброшенными слагаемыми кроме первых двух членов параметр  $\Omega$  в (1.107) зануляется, а скорость звука  $c_s$  является бесконечной.

Третье слагаемое в (1.136) (и, соответственно, в (1.221)) критически важно в обобщённой унимодулярной гравитации, поскольку оно делает ее скалярный сектор динамическим, скорость звука — конечной, в результате генерируется малый красный наклон  $n_s - 1 \simeq -0.04$  в первичном спектре реликтового излучения. Малость этого наклона, отражаемая в виде дробной части степени  $\delta$  и  $\varepsilon$  фактически позволяет разложить в (1.224) поправки по  $\delta$  и  $\varepsilon$  как

$$\delta^{3+8\frac{n_s-1}{3}} \simeq \left(\frac{-X}{\gamma_*}\right)^{\frac{3}{2}} + 4\frac{n_s-1}{3} \left(\frac{-X}{\gamma_*}\right)^{\frac{3}{2}} \ln \frac{-X}{\gamma_*}, \quad (1.226)$$

$$\varepsilon^{3+8\frac{n_s-1}{3}} \simeq \left(\frac{3H_0\phi}{\sqrt{\gamma_*}}\right)^3 + 8\frac{n_s-1}{3} \left(\frac{3H_0\phi}{\sqrt{\gamma_*}}\right)^3 \ln \frac{3H_0\phi}{\sqrt{\gamma_*}}. \quad (1.227)$$

Тогда слагаемые с  $\varepsilon$  в (1.224) сильно напоминают медленно меняющиеся логарифмические квантовые поправки типа Коулмана-Вайнберга, тогда как слагаемые с  $\delta$  представляют собой градиентное разложение квантового эффективного

действия. Это позволяет выдвинуть гипотезу о том, что обе версии инфляции в обобщённой унимодулярной гравитации, т.е. как исходная нековариантная, так и формулировка в терминах  $k$ -эссенции, являются эффективной теорией для некоторой фундаментальной квантовой модели.

Конечно, эта гипотеза требует обоснования с точки зрения известных ограничений на коэффициенты градиентного разложения эффективного действия из соображений унитарности (см., например, [51]). Тем не менее, это наблюдение служит достаточно сильной мотивацией для специального выбора функции (1.136) и ее  $(n_s - 1)$ -разложения, который, вообще говоря, выглядит несколько искусственным. Другим интересным наблюдением, говорящим в пользу естественности этой модифицированной теории гравитации, является механизм генерации необходимого отношения амплитуд тензорных возмущений к скалярным  $r \sim (e^N)^{-4(1-n_s)} \sim 0.001$  без привлечения экспоненциально малых или больших параметров, кроме феноменологической оценки числа  $e$ -фолдингов  $N \sim 60$  [22]).

## Глава 2

# Неравновесная диаграммная техника для смешанных состояний

Целью данной главы является вывод производящего функционала корреляционных функций для общей нестационарной гауссовой теории поля, находящейся в произвольном гауссовом начальном состоянии. Мы покажем, что несмотря на нестационарность, для специального подкласса рассматриваемых теорий и специальных начальных состояний, корреляционные функции могут обладать свойствами, близкими к свойствам корреляционных функций в системах, находящихся в термодинамическом равновесии. В частности, такие корреляционные функции могут удовлетворять условию Кубо-Мартина-Швингера.

## 2.1 Подготовительные замечания: свойства функций Грина

В этом разделе мы введём обозначения, удобные для наших целей, и опишем основные понятия, такие как канонический формализм и каноническое квантование в гауссовых теориях поля. Линейность уравнений движения позволит нам проквантовать теорию просто и, в то же время, систематически.

### 2.1.1 Обозначения

Сформулируем класс полевых моделей, которые будут рассматриваться в этой главе и введём удобные для нас обозначения. Элементы пространства полей будут обозначаться как  $\phi^I(t)$ , где индекс  $I$  является мульти-индексом, и содержит в себе как зависимость от пространственных координат  $\mathbf{x}$  так и

дискретный индекс  $i$  (если таковой имеется), т.е.  $I = (\mathbf{x}, i)$ . Таким образом, если необходимо подчеркнуть зависимость от пространственных координат, мы можем эквивалентно записать  $\phi^I(t) = \phi^i(t, \mathbf{x})$ .

Будем рассматривать наиболее общую теорию, описываемую полями  $\phi^I$ , а уравнения движения являются линейными дифференциальными уравнениями второго порядка. В этом случае действие теории квадратично по полям и имеет вид

$$S[\phi] = \frac{1}{2} \int_{t_-}^{t_+} dt \left( \dot{\phi}^T A \dot{\phi} + \dot{\phi}^T B \phi + \phi^T B^T \dot{\phi} + \phi^T C \phi \right). \quad (2.1)$$

Здесь точка обозначает производную по времени  $t$ .  $A$ ,  $B$ , и  $C$  есть зависящие от времени билинейные формы на пространстве полей. Кроме того,  $A$  и  $C$  предполагаются симметричными. Явное действие последних на поле, например, для  $A$  имеет вид

$$(A\phi)_I(t) = A_{IJ}(t)\phi^J(t) := \sum_j \int d\mathbf{x}' A_{ij}(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}') \phi^j(t, \mathbf{x}'), \quad (2.2)$$

где  $A_{ij}(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}')$  есть интегральное ядро соответствующего оператора. Таким образом, первое слагаемое в (2.1) имеет следующий явный вид

$$\dot{\phi}^T A \dot{\phi} = \dot{\phi}^I (A\dot{\phi})_I = \sum_{ij} \int d\mathbf{x} d\mathbf{x}' \dot{\phi}^i(t, \mathbf{x}) A_{ij}(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}') \dot{\phi}^j(t, \mathbf{x}). \quad (2.3)$$

Верхний индекс  $T$  обозначает транспонирование

$$(B^T)_{ij}(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}') = B_{ji}(t, \mathbf{x}', \mathbf{x}). \quad (2.4)$$

Уравнения движения, полученные вариацией действия (2.1), имеют вид

$$\vec{K}\phi(t) = 0, \quad \vec{K} := -\frac{d}{dt}A\frac{d}{dt} - \frac{d}{dt}B + B^T\frac{d}{dt} + C. \quad (2.5)$$

Вводя дифференциальный оператор  $\overleftrightarrow{K}$ , аналогичный  $\vec{K}$ , на имеющий как правые, так и левые производные

$$\overleftrightarrow{K} := \overleftarrow{\frac{d}{dt}}A\overrightarrow{\frac{d}{dt}} + \overleftarrow{\frac{d}{dt}}B + B^T\overrightarrow{\frac{d}{dt}} + C, \quad (2.6)$$

Можно переписать действие (2.1) в ещё более конденсированной форме

$$S[\phi] = \frac{1}{2} \int_{t_-}^{t_+} dt \phi^T \overleftrightarrow{K} \phi = \frac{1}{2} \int_{t_-}^{t_+} dt \phi^T \vec{K} \phi + \frac{1}{2} \phi^T \overleftarrow{W} \phi \Big|_{t_-}^{t_+} \quad (2.7)$$

Здесь мы ввели так называемый оператор Вронского  $\vec{W}$  как

$$\vec{W} := A \frac{d}{dt} + B, \quad (2.8)$$

а при переходе от первого равенства ко второму использовали интегрирование по частям.

### 2.1.2 Гамильтонова формулировка

Построим гамильтонову формулировку теории с действием (2.1), что является первым шагом к процедуре квантования соответствующей теории. Определим канонический импульс  $\pi$ , соответствующий полю  $\phi$

$$\pi = \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}} = A \dot{\phi} + B \phi = \vec{W} \phi, \quad \vec{W} = A \frac{d}{dt} + B, \quad (2.9)$$

где лагранжиан  $L$  есть подынтегральное выражение в определении действия (2.1). Таким образом, в гамильтониан имеет вид

$$H = \pi^T \dot{\phi} - L = \frac{1}{2} (\pi - B \phi)^T A^{-1} (\pi - B \phi) - \frac{1}{2} \phi^T C \phi. \quad (2.10)$$

и, вместе со скобкой Пуассона определённой как

$$\{\phi^I, \pi_J\} = \delta_J^I, \quad (2.11)$$

определяет динамику системы. Соответствующие уравнения Гамильтона имеют вид

$$\dot{\phi} = \{\phi, H\} = A^{-1} (\pi - B \phi) \quad (2.12a)$$

$$\dot{\pi} = \{\pi, H\} = B^T A^{-1} (\pi - B \phi) + C \phi. \quad (2.12b)$$

Переход обратно к лагранжевой формулировке состоит в выражении  $\pi$  в терминах  $\dot{\phi}$  и последующей подстановке в уравнение для  $\dot{\pi}$ . Результат, очевидно, совпадает с уравнением (2.5) следующим непосредственно из действия (2.1).

Будем обозначать базис линейно независимых решений (базисных функций) уравнения (2.5) как  $v_{\pm A}^I(t)$ , где мульти-индекс  $A$  нумерует конкретное решение и пробегает то же количество значений, что и  $I$ . Общее решение в терминах базисных функций имеет вид

$$\phi^I(t) = v_{+A}^I(t) \alpha^{+A} + v_{-A}^I(t) \alpha^{-A} \quad (2.13)$$

и в конденсированных обозначениях записывается как

$$\phi(t) = v_+(t) \alpha^+ + v_-(t) \alpha^-. \quad (2.14)$$

Здесь  $\alpha^{\pm A}$  есть набор констант, задающих начальные условия. Используя (2.9), находим соответствующее решение для импульсов

$$\pi(t) = \vec{W} v_+(t) \alpha^+ + \vec{W} v_-(t) \alpha^-, \quad (2.15)$$

так что закон эволюции в фазовом пространстве может быть записан как

$$\begin{bmatrix} \phi(t) \\ \pi(t) \end{bmatrix} = \mathcal{M}(t) \begin{bmatrix} \alpha^+ \\ \alpha^- \end{bmatrix}, \quad \mathcal{M}(t) = \begin{bmatrix} v_+(t) & v_-(t) \\ \vec{W} v_+(t) & \vec{W} v_-(t) \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Мы можем снабдить пространство начальных условий, параметризуемое переменными  $\alpha^{\pm}$ , структурой скобки Пуассона, наследуя соответствующую структуру (2.11) для переменных  $\phi$  и  $\pi$ . Подставляя (2.16) в левую часть равенства

$$\left\{ \begin{pmatrix} \phi^I \\ \pi_J \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \phi^{I'} & \pi_{J'} \end{pmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 0 & \delta_{J'}^I \\ -\delta_J^{I'} & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

получаем

$$\mathcal{M}(t) \begin{bmatrix} \{\alpha^+, \alpha^+\} & \{\alpha^+, \alpha^-\} \\ \{\alpha^-, \alpha^+\} & \{\alpha^-, \alpha^-\} \end{bmatrix} \mathcal{M}^T(t) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.18)$$

где  $I$  обозначает единичную матрицу. Полученное тождество задаёт попарные скобки Пуассона переменных  $\alpha^{\pm}$ . Правую часть этого равенства, имеющего смысл Пуассонова бивектора, обозначим как

$$\mathcal{P} := \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

Вводя матрицу  $\mathcal{D}$ , обратную к матрице попарных скобок Пуассона

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} \Delta_{++} & \Delta_{+-} \\ \Delta_{-+} & \Delta_{--} \end{bmatrix} := - \begin{bmatrix} \{\alpha^+, \alpha^+\} & \{\alpha^+, \alpha^-\} \\ \{\alpha^-, \alpha^+\} & \{\alpha^-, \alpha^-\} \end{bmatrix}^{-1} \quad (2.20)$$

где матрицы  $\Delta$  обозначают блочные элементы  $\mathcal{D}$ , мы можем обратить равенство (2.18) как

$$\mathcal{M}^T(t) \mathcal{P} \mathcal{M}(t) = \mathcal{D}. \quad (2.21)$$

Это тождество позволяет выразить матрицу, обратную к  $\mathcal{M}(t)$  в терминах её транспонированной

$$\mathcal{M}^{-1}(t) = \mathcal{D}^{-1} \mathcal{M}^T(t) \mathcal{P}. \quad (2.22)$$

Прежде чем продолжить, давайте явно покажем, что правая часть (2.21) действительно не зависит от времени  $t$ . Для этого домножим левую часть уравнения движения (2.5) в котором  $\phi = \phi_1$ , на другое поле  $\phi_2$ , и вычтем аналогичное же выражение, но в котором оператор  $\vec{K}$ , действует на  $\phi_2$ . Результат выглядит как

$$\phi_2^T \vec{K} \phi_1 - (\vec{K} \phi_2)^T \phi_1 = -\frac{d}{dt} \left[ \phi_2^T \vec{W} \phi_1 - (\vec{W} \phi_2)^T \phi_1 \right]. \quad (2.23)$$

Таким образом, если  $\phi_{1,2}$  есть решения уравнения движения (2.5), то мы имеем

$$\phi_2^T \vec{W} \phi_1 - (\vec{W} \phi_2)^T \phi_1 = \text{const}. \quad (2.24)$$

Легко заметить, что каждый элемент (2.20) имеет форму (2.24), где роль решений  $\phi_1, \phi_2$  играют базисные функции  $v^+, v^-$ . Транспонируя обе части равенства (2.18), получаем, что  $\mathcal{D}$  является антисимметричной, так как  $\mathcal{P}^T = -\mathcal{P}$ . В терминах блочных элементов матрицы  $\mathcal{D}$  это означает, что

$$\Delta_{+-}^T = -\Delta_{-+}, \quad \Delta_{++}^T = -\Delta_{++}, \quad \Delta_{--}^T = -\Delta_{--}. \quad (2.25)$$

Кроме того, так как операторные коэффициенты  $A, B$ , и  $C$  в (2.1) являются вещественными, мы заключаем, что базисные функции  $v_+, v_-$  также могут быть выбраны вещественными. Таким образом, матрица  $\mathcal{D}$  является вещественной и антисимметричной, так что существует не зависящее от времени линейное преобразование  $\mathcal{S}$ , приводящее её к каноническому виду, т.е.  $\mathcal{S}^T \mathcal{D} \mathcal{S} = \mathcal{P}$ . Не теряя общности, мы могли бы изначально положить  $\mathcal{D} = \mathcal{P}^1$ . Однако, по причинам которые станут ясны в процессе изложения (см. формулу (2.139) ниже), мы будем предполагать, что матрица  $\mathcal{D}$  имеет следующую, более общую форму

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} 0 & \Delta_{+-} \\ \Delta_{-+} & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.26)$$

где

$$\Delta_{+-} = -\Delta_{-+}^T = v_+^T \vec{W} v_- - (\vec{W} v_+)^T v_-. \quad (2.27)$$

---

<sup>1</sup>Такой выбор позволяет интерпретировать матрицу  $\mathcal{M}(t)$  в уравнении (2.21), которое принимает вид  $\mathcal{M}^T(t) \mathcal{P} \mathcal{M}(t) = \mathcal{P}$ , как матрицу зависящего от времени симплектоморфизма пуассонового бивектора  $\mathcal{P}$ .

А терминах базисных функций зануление диагональных блоков  $\mathcal{D}$  подразумевает, что  $v_+$ ,  $v_-$  выбраны так что

$$\Delta_{++} = v_+^T \vec{W} v_+ - (\vec{W} v_+)^T v_+ = 0, \quad (2.28)$$

$$\Delta_{--} = v_-^T \vec{W} v_- - (\vec{W} v_-)^T v_- = 0. \quad (2.29)$$

Это всегда может быть сделано подходящим преобразованием базисных функций, в общем случае «перемешивающих»  $v_+$  и  $v_-$ . Следовательно, попарные скобки Пуассона  $\alpha^+$ ,  $\alpha^-$  принимают вид

$$\{\alpha^+, \alpha^-\} = -\{\alpha^+, \alpha^-\} = -\Delta_{-+}^{-1}, \quad \{\alpha^+, \alpha^+\} = \{\alpha^-, \alpha^-\} = 0. \quad (2.30)$$

Как отмечено выше, можно также потребовать  $\Delta_{+-} = -\Delta_{-+}^T = I$ .

Теперь давайте модифицируем гамильтониан, вводя зависящие от времени источники  $J_\phi$ ,  $J_\pi$  для поля и сопряженному ему импульса

$$H \mapsto H + J_\phi^T \phi + J_\pi^T \pi. \quad (2.31)$$

Уравнения движения при этом модифицируются как

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \phi_J(t) \\ \pi_J(t) \end{bmatrix} = \mathcal{A}(t) \begin{bmatrix} \phi_J(t) \\ \pi_J(t) \end{bmatrix} + \mathcal{P} \begin{bmatrix} J_\phi(t) \\ J_\pi(t) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}(t) := \begin{bmatrix} -A^{-1}B & A^{-1} \\ -B^T A^{-1}B + C & B^T A^{-1} \end{bmatrix}, \quad (2.32)$$

где нижний индекс  $J$  у фазовых переменных  $\phi$ ,  $\pi$  подчеркивает их функциональную зависимость от источников. Будем искать решение модифицированных уравнений движений используя метод вариации постоянных. А именно, рассмотрим решение (2.16) уравнений движения где величины  $\alpha^+$ ,  $\alpha^-$  сделаем зависящими от времени

$$\begin{bmatrix} \phi_J(t) \\ \pi_J(t) \end{bmatrix} = \mathcal{M}(t) \begin{bmatrix} \alpha^+(t) \\ \alpha^-(t) \end{bmatrix}, \quad (2.33)$$

Затем, подставим результат в модифицированные уравнения движения, в результате чего получим

$$\mathcal{M}(t) \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \alpha^+(t) \\ \alpha^-(t) \end{bmatrix} = \mathcal{P} \begin{bmatrix} J_\phi(t) \\ J_\pi(t) \end{bmatrix}, \quad (2.34)$$

где мы использовали то, что  $\mathcal{M}(t)$  решает систему (2.12). Используя равенство (2.22) для матрицы, обратной к  $\mathcal{M}(t)$  и интегрируя уравнения на  $\alpha^+(t)$ ,  $\alpha^-(t)$

получаем

$$\begin{bmatrix} \alpha^+(t) \\ \alpha^-(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_0^+ \\ \alpha_0^- \end{bmatrix} - \int_{t_-}^t dt' \mathcal{D}^{-1} \mathcal{M}^T(t') \begin{bmatrix} J_\phi(t') \\ J_\pi(t') \end{bmatrix}, \quad (2.35)$$

где  $\alpha_0^+$ ,  $\alpha_0^-$  есть новые постоянные интегрирования. Подстановка обратно в (2.33) даёт решение уравнений (2.32)

$$\begin{bmatrix} \phi_J(t) \\ \pi_J(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_0(t) \\ \pi_0(t) \end{bmatrix} - \int_{t_-}^t dt' \mathcal{M}(t) \mathcal{D}^{-1} \mathcal{M}^T(t') \begin{bmatrix} J_\phi(t') \\ J_\pi(t') \end{bmatrix}, \quad (2.36)$$

где  $\phi_0(t)$ ,  $\pi_0(t)$  определены как

$$\begin{bmatrix} \phi_0(t) \\ \pi_0(t) \end{bmatrix} := \mathcal{M}(t) \begin{bmatrix} \alpha_0^+ \\ \alpha_0^- \end{bmatrix}, \quad (2.37)$$

и задают решение однородного уравнения, т.е. для равных нулю  $J_\phi$ ,  $J_\pi$ .

Давайте теперь сосредоточимся на случае источнике для импульса, а также для удобства переобозначим источник для поля

$$J_\pi(t) = 0, \quad J(t) := -J_\phi(t). \quad (2.38)$$

Соответствующие лагранжевы уравнения имеют вид

$$\vec{K} \phi_J(t) + J(t) = 0. \quad (2.39)$$

Из (2.36) получаем явный вид решения для  $\phi(t)$ , а именно

$$\phi_J(t) = \phi_0(t) - \int_{t_-}^{t_+} dt' G_R(t, t') J(t'), \quad (2.40)$$

где величина  $G_R(t, t')$  называется запаздывающей функцией Грина и выражается через верхний левый блок матрицы  $\mathcal{M}(t) \mathcal{D}^{-1} \mathcal{M}^T(t')$ , т.е.

$$G_R(t, t') = - \left( v_+(t) \Delta_{-+}^{-1} v_-^T(t') + v_-(t) \Delta_{+-}^{-1} v_+^T(t') \right) \theta(t - t'). \quad (2.41)$$

Свойство  $\Delta_{++} = \Delta_{--} = 0$  является ключевым в получении этого простого выражения для  $G_R$ . Из (2.40) также получаем, что  $G_R$  удовлетворяет уравнению

$$\vec{K} G_R(t, t') = I \delta(t - t') \quad (2.42)$$

и однозначно определяется условием

$$G_R(t, t') = 0, \quad t < t'. \quad (2.43)$$

Последний факт следует, в частности, что любые две функции Грина одного и того же дифференциального оператора отличаются на решение однородного уравнения. Если мы имеем некоторую функцию Грина, удовлетворяющую условию (2.43), то её сдвиг на однородное решение всегда будет нарушать это условие. Альтернативно,  $G_R$  может быть определена начальным условием

$$G_R(t, t')|_{t'=t+0} = 0, \quad \vec{W}G_R(t, t')|_{t'=t+0} = -I. \quad (2.44)$$

То, что (2.40) выражается через запаздывающую функцию Грина означает, что  $\phi(t)$  удовлетворяет задаче с начальными (а не граничными) условиями, а именно

$$\phi_J(t_-) = \phi_0(t_-), \quad \vec{W}\phi_J(t_-) = \vec{W}\phi_0(t_-) \equiv \pi_0(t_-). \quad (2.45)$$

Таким образом, мы построили гамильтонов формализм для теории (2.1), т.е. гамильтониан (2.10) и следующие из него уравнения Гамильтона, решения которых были получены в замкнутом виде (2.16). Для гамильтониана, модифицированного слагаемыми с источником (2.16), мы также получили явный ответ (2.36). В случае наличия только источника для поля  $\phi$  (но не сопряженного ему импульса), ответ выражается через запаздывающую функцию Грина как (2.40), для которой было получено явное выражение (2.41).

### 2.1.3 Симметричные функции Грина

В предыдущем разделе мы получили решение (2.40) задачи о начальном значении (2.45) с помощью запаздывающей функции Грина (2.41). Однако также нам понадобится явный вид решения задачи о граничном значении. Функции Грина, в терминах которых решаются такие задачи, получаются из запаздывающей функции Грина сдвигом на решение однородного уравнения (2.5). В частности, таким образом строится так называемую симметричную функцию Грина

$$\begin{aligned} G_S(t, t') &= G_R(t, t') + v_+(t)\Delta_{-+}^{-1}v_-^T(t') \\ &= -v_+(t)\Delta_{-+}^{-1}v_-^T(t')\theta(t-t') + v_-(t)\Delta_{+-}^{-1}v_+^T(t')\theta(t'-t). \end{aligned} \quad (2.46)$$

Она является инвариантной относительно одновременного транспонирования и перестановки аргументов, т.е.  $G_S^T(t, t') = G_S(t', t)$ . В отличие от запаздывающей функции Грина, она определена не единственным образом, и должна быть дополнительно фиксацией конкретных граничных условий. Эти условия находятся

во взаимно однозначном соответствии с граничными условиями, накладываемыми на базисные функции  $v_+$  и  $v_-$  в конечный и начальный моменты времени  $t = t_+$  и  $t = t_-$ , соответственно.

В частности, чтобы решить неоднородное уравнение (2.39) с однородными граничными условиями Дирихле

$$\phi_J(t_{\pm}) = 0, \quad (2.47)$$

можно использовать симметричную функцию Грина, удовлетворяющую тем же граничными условиям

$$G_D(t_{\pm}, t') = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v_{\pm}(t_{\pm}) = 0, \quad (2.48)$$

так что решение имеет вид

$$\phi_J(t) = - \int_{t_-}^{t_+} dt' G_D(t, t') J(t'). \quad (2.49)$$

Аналогично, при решении того же уравнения с граничными условиями Неймана

$$(i\vec{W} \mp \omega_{\pm})\phi_J(t_{\pm}) = 0, \quad (2.50)$$

можно определить соответствующую функцию Грина, потребовав

$$(i\vec{W} \mp \omega_{\pm})G_N(t_{\pm}, t') = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (i\vec{W} \mp \omega_{\pm})v_{\pm}(t_{\pm}) = 0, \quad (2.51)$$

так что решение записывается как

$$\phi_J(t) = - \int_{t_-}^{t_+} dt' G_N(t, t') J(t'). \quad (2.52)$$

Примечательно, что функции Грина, решающие задачи Неймана и Дирихле с однородными граничными условиями, позволяют решать модифицированные граничные задачи, а именно с неоднородными граничными условиями. Решение может получено следующим образом. Прежде всего, необходимо воспользоваться тождеством (2.23) и сделать в нём подстановки  $\phi_2 \mapsto \phi(t')$ ,  $\phi_1 \mapsto G(t', t)$ , где  $\phi(t')$  есть решение (2.39), а  $G(t', t)$  есть некоторая функция Грина, решающая  $\vec{K}G(t', t) = \delta(t - t')$ . Далее, интегрируя обе части тождества по  $t'$  от  $t_-$  до  $t_+$ , получаем

$$\begin{aligned} \phi_J(t) = & - \int_{t_-}^{t_+} dt' G(t, t') J(t') \\ & + (WG(t_+, t))^T \phi(t_+) - (WG(t_+, t))^T \phi_J(t_+) \\ & - G^T(t_+, t) W \phi_J(t_+) + G^T(t_-, t) W \phi_J(t_-) \end{aligned} \quad (2.53)$$

Пусть теперь нам необходимо решить (2.39) с неоднородными граничными условиями (в отличие от рассмотренных ранее однородных (2.47))

$$\phi_J(t_{\pm}) = \varphi_{\pm}, \quad (2.54)$$

с некоторыми постоянными  $\varphi_+$ ,  $\varphi_-$ . Подставляя эти условия в (2.53) а также функцию Грина для задачи Дирихле  $G \mapsto G_D$ , удовлетворяющую (2.48), мы получаем, что третья строка в (2.53) зануляется, и мы получаем

$$\phi_J(t) = -\mathbf{w}^T(t) \begin{bmatrix} \varphi_+ \\ \varphi_- \end{bmatrix} - \int_{t_-}^{t_+} dt' G_D(t, t') J(t'), \quad (2.55)$$

где мы ввели обозначения для двухкомпонентных строк и столбцов

$$\mathbf{w}^T(t) := \begin{bmatrix} G_D(t, t_+) \overleftarrow{W} & -G_D(t, t_-) \overleftarrow{W} \end{bmatrix}, \quad (2.56)$$

$$\mathbf{w}(t) := \begin{bmatrix} \overrightarrow{W} G_D(t_+, t) \\ -\overrightarrow{W} G_D(t_-, t) \end{bmatrix}, \quad (2.57)$$

а  $\overleftarrow{W}$  обозначает оператор Вронского (2.8) действующий справа на второй аргумент  $G_D$  в конечный и начальный момент времени, т.е.  $t_{\pm}$  (со знаком, учитывая то, что производная по времени действует по направлению наружу временного интервала). Введённая здесь величина  $\mathbf{w}(t)$  имеет следующее важное свойство. А именно, вычисляя обе стороны (2.55) в граничные моменты времени  $t = t_{\pm}$ , и используя (2.48), мы получаем что

$$\mathbf{w}^T(t_+) = \begin{bmatrix} -I & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}^T(t_-) = \begin{bmatrix} 0 & -I \end{bmatrix}. \quad (2.58)$$

Аналогично, можно рассмотреть неоднородную модификацию граничных условий Неймана

$$(\pm i \overrightarrow{W} - \omega_{\pm}) \phi_J(t_{\pm}) = j_{\pm}, \quad (2.59)$$

с некоторыми граничными источниками  $j_+$  и  $j_-$ . Постановка этих условий и функции Грина для задачи Неймана  $G \mapsto G_N$ , удовлетворяющей (2.51), в (2.53) даёт следующее решение уравнения (2.39) с неоднородными граничными условиями

$$\phi_J(t) = -i \mathbf{g}_N(t) \begin{bmatrix} j_+ \\ j_- \end{bmatrix} - \int_{t_-}^{t_+} dt' G_N(t, t') J(t'). \quad (2.60)$$

Здесь  $\mathbf{g}_N(t)$  есть обозначение, аналогичное (2.56), а именно строка, составленная из функции Грина задачи Неймана, в которой второй аргумент приравнен граничным значениям времени  $t_+$  и  $t_-$

$$\mathbf{g}_N(t) := \begin{bmatrix} G_N(t, t_+) & G_N(t, t_-) \end{bmatrix}. \quad (2.61)$$

В результате, мы получили решения (2.49) и (2.52) однородных задач Дирихле (2.47) и Неймана (2.50), соответственно. Также нам удалось получить решения (2.55) и (2.60) неоднородных модификаций (2.54) и (2.59) этих задач в терминах граничных значений соответствующих функций Грина и их производных.

### 2.1.4 Связь задач Дирихле и Неймана

Нам понадобится простая, но важная связь между функциями Грина для задач Дирихле и Неймана, которая может быть получена следующим образом. Идея заключается в том, чтобы рассмотреть задачу Неймана с однородными граничными условиями (2.50) как задачу Дирихле с некоторыми ненулевыми граничными значениями поля  $\varphi_{\pm}$ . Подставляя решение последней задачи (2.55) в (2.50) мы получаем линейное уравнение на  $\varphi_{\pm}$ , решение которого имеет вид

$$\begin{bmatrix} \varphi_+ \\ \varphi_- \end{bmatrix} = (i\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega})^{-1} \int_{t_-}^{t_+} dt \mathbf{w}(t) J(t), \quad (2.62)$$

где матрицы  $\boldsymbol{\omega}$  и  $\boldsymbol{\Omega}$  определены как

$$\boldsymbol{\omega} := \begin{bmatrix} \omega_+ & 0 \\ 0 & \omega_- \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Omega} := \begin{bmatrix} -\vec{W}G_D(t_+, t_+)\overleftarrow{W} & \vec{W}G_D(t_+, t_-)\overleftarrow{W} \\ \vec{W}G_D(t_-, t_+)\overleftarrow{W} & -\vec{W}G_D(t_-, t_-)\overleftarrow{W} \end{bmatrix}. \quad (2.63)$$

Подстановка полученных  $\varphi_{\pm}$  обратно в (2.55) даёт

$$\phi_J(t) = - \int_{t_-}^{t_+} dt' \left[ G_D(t, t') + \mathbf{w}^T(t) (i\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega})^{-1} \mathbf{w}(t') \right] J(t'). \quad (2.64)$$

Сравнивая последнее выражение с (2.52), получаем выражение для функции Грина задачи Неймана через соответствующую функцию задачи Дирихле

$$G_N(t, t') = G_D(t, t') + \mathbf{w}^T(t) (i\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega})^{-1} \mathbf{w}(t'). \quad (2.65)$$

Здесь мы использовали обозначения (2.56), (2.57) введённые выше. Подставляя граничные значения времён  $t = t_{\pm}$  в обе части равенства и используя (2.58), получаем тождество

$$\mathbf{g}_N(t) = -\mathbf{w}^T(t) (i\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega})^{-1}, \quad (2.66)$$

которое позволяет выразить функцию Грина задачи Дирихле из (2.65) через функцию Грина задачи Неймана как

$$G_D(t, t') = G_N(t, t') - \mathbf{g}_N(t) (i\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{g}_N^T(t'), \quad (2.67)$$

где мы использовали обозначения (2.61) для строки  $\mathbf{g}_N(t) = [G_N(t, t_+) \ G_N(t, t_-)]$  и её транспонированной. Используя (2.58) ещё раз, мы можем записать выражения для блочных элементов функции Грина задачи Неймана  $\mathbf{g}_N$  на концах временного интервала

$$\mathbf{G}_N \parallel := \begin{bmatrix} G_N(t_+, t_+) & G_N(t_+, t_-) \\ G_N(t_-, t_+) & G_N(t_-, t_-) \end{bmatrix} = (i\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega})^{-1}. \quad (2.68)$$

Таким образом, мы получили соотношения (2.66), (2.67), выражающие функцию Грина задачи Неймана через функцию Грина задачи Дирихле и наоборот.

### 2.1.5 Каноническое квантование

В предыдущих разделах мы построили канонический формализм теории (2.1) и готовы перейти к построению её квантовой версии. Однако прежде чем перейти к каноническому квантованию, сделаем более конкретный выбор базисных функций, который будет удобен для в контексте квантования. Сначала выберем базисные функции  $v_{\pm}(t)$  вещественными, и такими, что построенная по ним матрица  $\mathcal{D}$ , определённая в (2.26) имеет каноническую форму, т.е.  $\mathcal{D} = \mathcal{P}$ . Вместе с условием вещественности поля  $\phi(t)$  это также подразумевает вещественность соответствующих констант интегрирования  $\alpha^{\pm}$ , фиксирующих конкретное решение. Теперь давайте составим из выбранных таким образом вещественных базисных функций специальные комплексные базисные функции

(и, соответственно, константы интегрирования), производя замену базиса

$$\begin{bmatrix} v_+ & v_- \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} v & v^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_+ & v_- \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} I & I \\ -iI & iI \end{bmatrix}, \quad (2.69)$$

$$\begin{bmatrix} \alpha^+ \\ \alpha^- \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha^* \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} I & iI \\ I & -iI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha^+ \\ \alpha^- \end{bmatrix}. \quad (2.70)$$

В результате такой замены, матрица  $\mathcal{D}$  принимает вид

$$\mathcal{D} \mapsto i\mathcal{P} = \begin{bmatrix} 0 & iI \\ -iI & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.71)$$

Из соотношений (2.30) следуют выражения для попарных скобок Пуассона  $\alpha, \alpha^*$ , а именно

$$\{\alpha, \alpha^*\} = -\{\alpha^*, \alpha\} = -iI, \quad \{\alpha, \alpha\} = \{\alpha^*, \alpha^*\} = 0. \quad (2.72)$$

В терминах новых базисных функций, закон эволюции (2.16) поля и канонического импульса принимает вид

$$\begin{bmatrix} \phi(t) \\ \pi(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v(t) & v^*(t) \\ \vec{W}v(t) & \vec{W}v^*(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha^* \end{bmatrix}. \quad (2.73)$$

Уравнение (2.22) переписывается как

$$\mathcal{M}^{-1}(t) = i\mathcal{P} \mathcal{M}^T(t) \mathcal{P}, \quad \mathcal{M}(t) = \begin{bmatrix} v(t) & v^*(t) \\ \vec{W}v(t) & \vec{W}v^*(t) \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

что даёт возможность обратить (2.73) как

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha^* \end{bmatrix} = i\mathcal{P} \mathcal{M}^T(t) \mathcal{P} \begin{bmatrix} \phi(t) \\ \pi(t) \end{bmatrix}. \quad (2.75)$$

Вычисляя левую и правую часть последнего равенства в начальный момент времени  $t = t_-$  и подставляя обратно в (2.73), получаем явный вид эволюции в терминах известных базисных функций  $v(t), v^*(t)$ , а именно

$$\begin{bmatrix} \phi(t) \\ \pi(t) \end{bmatrix} = i\mathcal{M}(t) \mathcal{P} \mathcal{M}^T(t_-) \mathcal{P} \begin{bmatrix} \phi(t_-) \\ \pi(t_-) \end{bmatrix}. \quad (2.76)$$

Теперь мы готовы осуществить каноническое квантование системы с гамильтонианом (2.10). Мы будем использовать квантование в гейзенберговской

картине, а именно, сопоставлять решения уравнений Гамильтона соответствующим гейзенберговским операторам

$$\phi(t), \pi(t) \mapsto \hat{\phi}(t), \hat{\pi}(t), \quad (2.77)$$

а скобки Пуассона будем заменять коммутатором, помноженным на  $i$ , так что выражения (2.11) переходят в канонические коммутационные соотношения

$$[\hat{\phi}^I(t), \hat{\pi}_J(t)] = i \delta_J^I \hat{I} \quad (2.78)$$

где  $\hat{I}$  есть единичный оператор. Таким образом, уравнениям Гамильтона (2.12) сопоставляются соответствующие уравнения Гейзенберга, определяющие эволюцию операторов

$$\frac{d}{dt} \hat{\phi}(t) = -i[\hat{\phi}(t), \hat{H}(t)] = A^{-1}(\hat{\pi}(t) - B\hat{\phi}(t)) \quad (2.79a)$$

$$\frac{d}{dt} \hat{\pi}(t) = -i[\hat{\pi}(t), \hat{H}(t)] = B^T A^{-1}(\hat{\pi}(t) - B\hat{\phi}(t)) + C\hat{\phi}(t). \quad (2.79b)$$

Здесь  $\hat{H}(t)$  есть классический гамильтониан (2.10) в котором поле и канонический импульс заменены соответствующими гейзенберговскими операторами. Одним из наиболее важных следствий квадратичности действия системы является то, что уравнения Гамильтона и Гейзенберга являются линейными и формально совпадают. Таким образом, решения этих уравнений находятся во взаимно однозначном соответствии. В частности, связь (2.9) между полем  $\phi$  и сопряженным ему импульсом  $\pi$  одинакова как на классическом, так и на квантовом уровне

$$\hat{\pi}(t) = \vec{W} \hat{\phi}(t), \quad \vec{W} = A \frac{d}{dt} + B. \quad (2.80)$$

Таким образом, формальное совпадение уравнений Гамильтона и Гейзенберга и их линейность позволяют получить решение последнего, зная решения первого (2.76) как

$$\begin{bmatrix} \hat{\phi}(t) \\ \hat{\pi}(t) \end{bmatrix} = i \mathcal{M}(t) \mathcal{P} \mathcal{M}^T(t_-) \mathcal{P} \begin{bmatrix} \hat{\phi}(t_-) \\ \hat{\pi}(t_-) \end{bmatrix}. \quad (2.81)$$

Аналогично, процедура квантования подразумевает, что постоянные интегрирования  $\alpha$ ,  $\alpha^*$  находятся во взаимно однозначном соответствии с операторами рождения/уничтожения  $\hat{a}$ ,  $\hat{a}^\dagger$ . Согласно (2.73), операторы  $\hat{\phi}(t)$ ,  $\hat{\pi}(t)$  раскладываются в линейную комбинацию операторов рождения/уничтожения как

$$\begin{bmatrix} \hat{\phi}(t) \\ \hat{\pi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v(t) & v^*(t) \\ \vec{W}v(t) & \vec{W}v^*(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{a}^\dagger \end{bmatrix}. \quad (2.82)$$

Это равенство может быть обращено аналогично (2.75), что даёт

$$\begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{a}^\dagger \end{bmatrix} = i \mathcal{P} \mathcal{M}^T(t) \mathcal{P} \begin{bmatrix} \hat{\phi}(t) \\ \hat{\pi}(t) \end{bmatrix}. \quad (2.83)$$

Тот факт, что  $\hat{a}$  и  $\hat{a}^\dagger$  действительно являются эрмитово сопряженными друг другу, следует из эрмитовости оператора  $\hat{\phi}(t)$ . Сравнивая  $\hat{\phi}(t)$  с его эрмитово сопряженным

$$\hat{\phi}(t) = v(t) \hat{a} + v^*(t) \hat{a}^\dagger, \quad (2.84)$$

$$\hat{\phi}^\dagger(t) = (v(t) \hat{a} + v^*(t) \hat{a}^\dagger)^\dagger = v^*(t) \hat{a}^\dagger + v(t) \hat{a}, \quad (2.85)$$

находим совпадение, для которого выбор базисных функций (2.69) является ключевым. Коммутационные соотношения операторов рождения/уничтожения наследуются из скобок Пуассона (2.72), а именно

$$[\hat{a}^A, \hat{a}^{\dagger B}] = -[\hat{a}^{\dagger B}, \hat{a}^B] = \delta^{AB} \hat{I}, \quad [\hat{a}^A, \hat{a}^B] = [\hat{a}^{\dagger A}, \hat{a}^{\dagger B}] = 0. \quad (2.86)$$

Хотя мы имеем явное решение уравнений Гейзенберга (2.81), мы пока не получили выражения для оператора эволюции в замкнутой форме. Оператор эволюции удовлетворяет уравнению Шрёдингера

$$i \frac{d}{dt} \hat{U}(t, t') = \hat{H}_S(t) \hat{U}(t, t'), \quad \hat{U}(t, t) = \hat{I}, \quad (2.87)$$

где  $\hat{H}_S(t)$  есть гамильтониан в представлении Шрёдингера, т.е. зависимость от времени содержится только в зависящих от времени коэффициентах  $A$ ,  $B$ , и  $C$ . Шрёдингеровские операторы  $\hat{\phi}$ ,  $\hat{\pi}$  отождествляются с гейзенберговскими, вычисленными в начальный момент времени

$$\hat{\phi} := \hat{\phi}(t_-), \quad \hat{\pi} := \hat{\pi}(t_-). \quad (2.88)$$

При наличии источника, т.е. при сдвиге гамильтониана  $H \mapsto H - J^T \phi$ , решение (2.82) уравнений Гейзенберга модифицируется как

$$\hat{\phi}_J(t) = \hat{\phi}(t) - \int_{t_-}^{t_+} dt' G_R(t, t') J(t'), \quad (2.89)$$

что может быть выведено из (2.40). Здесь  $\hat{\phi}(t)$  есть решение (2.82) уравнений Гейзенберга без источника. Уравнение Шрёдингера при наличии источника записывается как

$$i \frac{d}{dt} \hat{U}_J(t, t') = (\hat{H}_S(t) - J^T(t) \hat{\phi}) \hat{U}_J(t, t'), \quad \hat{U}_J(t, t) = \hat{I}. \quad (2.90)$$

и может быть формально решено с использованием операции временного упорядочения  $T$  как

$$\hat{U}_J(t_+, t_-) = \hat{U}(t_+, t_-) T(e^{i \int_{t_-}^{t_+} dt J^T(t) \hat{\phi}(t)}). \quad (2.91)$$

Последнее равенство, помимо всего прочего, задаёт соотношение между оператором эволюции  $\hat{U}_J$  и его версии при нулевом источнике. Наиболее удобным способом получения замкнутого выражения для оператора эволюции является формализм функционального интеграла. Для реализации этого способа введём координатное представление, оссоцированное с шрёдингеровским операторами (2.88)

$$\hat{\phi}|\varphi\rangle = \varphi|\varphi\rangle, \quad \hat{\pi}|\varphi\rangle = i\frac{\partial}{\partial\varphi}|\varphi\rangle, \quad \hat{I} = \int d\varphi |\varphi\rangle\langle\varphi|. \quad (2.92)$$

Тогда матричный элемент оператора  $\hat{U}_J$  в координатном представлении записывается как функциональный интеграл следующего вида

$$\langle\varphi_1|\hat{U}_J(t_+, t_-)|\varphi_2\rangle = \int_{\phi(t_{\pm})=\varphi_{\pm}} \mathcal{D}\phi \exp\left\{iS[\phi] + i \int_{t_-}^{t_+} dt J^T(t)\phi(t)\right\}. \quad (2.93)$$

Так как действие (2.1) является квадратичным по полям  $\phi$ , этот интеграл является гауссовым и может быть вычислен явно. Данное вычисление будет проделано в следующих разделах с помощью метода перевала.

Таким образом, мы произвели каноническое квантование теории (2.1). В частности, мы получили решение (2.82) уравнений Гейзенберга, которое, ввиду линейности уравнений движения теории находится во взаимнооднозначном соответствии с решением (2.16) уравнений Гамильтона.

### 2.1.6 Преобразования Боголюбова

В предыдущем разделе мы сделали выбор базисных функций (2.69), который, в частности, ведёт к простой стандартной форме коммутационных соотношений (2.86) для операторов рождения/уничтожения. Однако, такой выбор является не единственным. Построим преобразования базисных функций и операторов, сохраняющие эти соотношения.

Определим новый набор операторов рождения/уничтожения  $\hat{b}$ ,  $\hat{b}^\dagger$  в виде

линейных комбинаций изначальных операторов

$$\begin{bmatrix} \hat{b} \\ \hat{b}^\dagger \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U & V \\ V^* & U^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{a}^\dagger \end{bmatrix}, \quad (2.94)$$

где  $U, V$  называются матрицами коэффициентов Боголюбова. Требуя совпадения коммутационных соотношений  $\hat{b}, \hat{b}^\dagger$  с коммутационными соотношениями (2.86), получаем равенство

$$\begin{bmatrix} U & V \\ V^* & U^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^T & V^\dagger \\ V^T & U^\dagger \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \quad (2.95)$$

из которого следует, что  $U, V$  должны удовлетворять уравнениям

$$UU^\dagger - VV^\dagger = I, \quad UV^T - VU^T = 0. \quad (2.96)$$

Таким образом, полевой оператор  $\hat{\phi}(t)$  имеет эквивалентные разложения

$$\hat{\phi}(t) = v(t) \hat{a} + v^*(t) \hat{a}^\dagger = \tilde{v}(t) \hat{b} + \tilde{v}^*(t) \hat{b}^\dagger, \quad (2.97)$$

где новый набор базисных функций  $\tilde{v}(t), \tilde{v}^*(t)$  связан с изначальными как

$$\begin{bmatrix} v & v^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{v} & \tilde{v}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U & V \\ V^* & U^* \end{bmatrix} \quad (2.98)$$

что в более явном виде записывается как

$$v = \tilde{v}U + \tilde{v}^*V^*. \quad (2.99)$$

Равенство (2.95) приводит к следующему выражению для обратной матрицы коэффициентов Боголюбова

$$\begin{bmatrix} U & V \\ V^* & U^* \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} U^\dagger & -V^T \\ -V^\dagger & U^T \end{bmatrix} \quad (2.100)$$

так что равенство (2.99) может быть обращено как

$$\tilde{v} = vU^\dagger - v^*V^\dagger. \quad (2.101)$$

Теперь давайте решим обратную проблему. А именно, пусть заданы два набора базисных функций  $v(t), v^*(t)$  и  $\tilde{v}(t), \tilde{v}^*(t)$ , такие, что коммутационные

соотношения соответствующих им операторов рождения/уничтожения имеют канонический вид (2.86). Найдём коэффициенты Боголюбова, связывающие эти два набора. Для этого введём скалярное произведение на пространстве решений уравнения (2.5)

$$(\phi_1, \phi_2) = i \phi_1^\dagger (\vec{W} \phi_2) - i (\vec{W} \phi_1)^\dagger \phi_2. \quad (2.102)$$

Это выражение является константой, если  $\phi_1, \phi_2$  являются решением уравнения (2.5) благодаря свойству (2.24), а также тому, что оператор  $\vec{K}$ , определяющий уравнения движения и оператор Вронского  $\vec{W}$  являются вещественными. Скалярное произведение (2.102) обычно называется скалярным произведением Клейна-Гордона. Выбор (2.69) базисных функций подразумевает следующую нормировку относительно введённого скалярного произведения

$$(v, v) = -(v^*, v^*) = I, \quad (v^*, v) = 0, \quad (2.103)$$

и аналогичное равенство для  $\tilde{v}(t), \tilde{v}^*(t)$ . Проецируя равенство (2.99) на  $\tilde{v}$ , и используя свойство  $(v_1, v_2)^* = -(v_1^*, v_2^*)$ , получаем явное выражение для коэффициентов Боголюбова

$$U = (\tilde{v}, v), \quad V = (\tilde{v}, v^*). \quad (2.104)$$

Если оба набора базисных функций удовлетворяют граничным условиям Неймана в начальный момент времени

$$(i\vec{W} - \omega)v(t_-) = 0, \quad (i\vec{W} - \tilde{\omega})\tilde{v}(t_-) = 0, \quad (2.105)$$

оказывается возможным найти явные выражения для коэффициентов  $U, V$  в терминах  $\omega, \tilde{\omega}$ . Запишем явно условия нормировки (2.103)

$$(v, v) = v^\dagger (\omega + \omega^\dagger) v = I, \quad (v^*, v) = v^T (\omega - \omega^T) v = 0, \quad (2.106)$$

где все величины вычислены в начальный момент времени  $t = t_-$ . Аналогичные уравнения выполняются для  $\tilde{v}(t), \tilde{v}^*(t)$ . Второе уравнение подразумевает, что матрицы  $\omega$  и  $\tilde{\omega}$  являются симметричными, в то время как первое уравнение фиксирует значение значения базисных функций в начальный момент времени

$$v(t_-) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\text{re}}}}, \quad \tilde{v}(t_-) = \frac{1}{\sqrt{2\tilde{\omega}_{\text{re}}}}, \quad (2.107)$$

где  $\omega_{\text{re}}$  и  $\tilde{\omega}_{\text{re}}$  обозначают вещественные части  $\omega$  и  $\tilde{\omega}$ , соответственно. Используя (2.104), вместе с определением скалярного произведения (2.102), мы находим следующие ответы для коэффициентов Боголюбова

$$U = \frac{1}{\sqrt{2\tilde{\omega}_{\text{re}}}}(\omega + \tilde{\omega}^\dagger) \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\text{re}}}}, \quad V = \frac{1}{\sqrt{2\tilde{\omega}_{\text{re}}}}(\tilde{\omega}^\dagger - \omega^\dagger) \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\text{re}}}}. \quad (2.108)$$

В результате, мы вывели общий вид (2.104) для коэффициентов преобразования Боголюбова (2.98) в терминах скалярного произведения Клейна-Гордона (2.102), а также явно вычислили коэффициенты преобразования для случая, когда и старый и новый наборы базисных функций удовлетворяют различным граничным условиям Неймана (2.105).

### 2.1.7 Пространство Фока и когерентные состояния

Обсудим детали, касающиеся пространства состояний в проквантованной версии теории (2.1). Как только мы сделали какой-либо выбор базисных функций  $v(t)$ ,  $v^*(t)$ , задающих разложение гейзенберговского поля (2.84) по операторам рождения/уничтожения, мы можем определить пространство Фока, ассоциированное с этими операторами. А именно, вводя вакуум  $|0\rangle$  как

$$\hat{a}|0\rangle = 0, \quad (2.109)$$

определим пространство Фока как линейную оболочку векторов (фоковских состояний)

$$|A_1, A_2, \dots, A_n\rangle := \hat{a}^{\dagger A_1} \hat{a}^{\dagger A_2} \dots \hat{a}^{\dagger A_n} |0\rangle. \quad (2.110)$$

Теперь получим координатное представление для фоковских состояний. Для этого запишем (2.83) явно в момент времени  $t = t_-$  как

$$\begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{a}^\dagger \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\text{re}}}} \begin{bmatrix} \omega^* & iI \\ \omega & -iI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\phi} \\ \hat{\pi} \end{bmatrix}, \quad \omega = (i\vec{W}v)v^{-1} \Big|_{t=t_-}, \quad (2.111)$$

а также перепишем определение (2.109) вакуумного состояния в координатном представлении (2.92) как

$$\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\text{re}}}} \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} + \omega^* \varphi \right) \langle \varphi | 0 \rangle = 0. \quad (2.112)$$

Трактуя это равенство как дифференциальное уравнение на  $\langle \varphi | 0 \rangle$ , находим его решение

$$\langle \varphi | 0 \rangle = (\det \omega_{\text{re}})^{\frac{1}{4}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \varphi^T \omega^* \varphi \right\}. \quad (2.113)$$

Координатное представление возбуждённых фоковских состояний могут быть найдены, используя их определение (2.110) и выражение для  $\hat{a}^\dagger$  в координатном представлении.

Аналогично, можно определить когерентные состояния  $|\alpha\rangle$  как собственные состояния оператора уничтожения

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \quad (2.114)$$

с ненулевым собственным значением  $\alpha$ . Проецируя определение на базисный вектор координатного представления  $|\varphi\rangle$ , получаем уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial\varphi} + \omega^*\varphi\right)\langle\varphi|\alpha\rangle = \sqrt{2\omega_{\text{re}}}\langle\varphi|\alpha\rangle, \quad (2.115)$$

(не нормированное) решение которого имеет вид

$$\langle\varphi|\alpha\rangle = \exp\left\{-\frac{1}{2}\varphi^T\omega^*\varphi + \alpha^T\sqrt{2\omega_{\text{re}}}\varphi - \frac{1}{2}\alpha^T\alpha\right\}. \quad (2.116)$$

В такой нормировке мы имеем следующее простое представление для фоковских состояний в терминах когерентного состояния

$$|A_1, A_2, \dots, A_n\rangle = \frac{\partial^n}{\partial\alpha^{A_1}\partial\alpha^{A_2}\dots\partial\alpha^{A_n}}|\alpha\rangle\Big|_{\alpha=0}. \quad (2.117)$$

Также когерентные состояния позволяют произвести следующее разбиение единицы

$$\hat{I} = \int d\alpha^* d\alpha e^{-\alpha^\dagger\alpha}|\alpha\rangle\langle\alpha|. \quad (2.118)$$

Таким образом, мы получили выражения (2.113) и (2.114) для вакуумного и когерентного состояний в координатном представлении, соответственно, ассоциированные с конкретным выбором операторов рождения/уничтожения. Ниже нам также понадобится выражение (2.117) для возбуждённых фоковских состояний в терминах производных от когерентного состояния.

## 2.2 Вычисление производящего функционала

### 2.2.1 Гауссовы матрицы плотности

Нашей целью является найти явное и удобное представление для производящего функционала

$$Z[J_1, J_2] = \text{tr} \left[ \hat{U}_{J_1}(T, 0) \hat{\rho} \hat{U}_{-J_2}^\dagger(T, 0) \right], \quad (2.119)$$

вариации которого дают in-in корреляционные функции.

$$D_{n,m}(t_1, \dots, t_n; t'_1, \dots, t'_m) = \text{tr} \left[ \hat{\rho} \bar{\Gamma}(\hat{\phi}(t'_1) \dots \phi(t'_m)) \Gamma(\hat{\phi}(t_1) \dots \phi(t_n)) \right] \\ = (-i)^{m+n} \frac{1}{Z} \frac{\delta^{n+m} Z[J_1, J_2]}{\delta J_1(t_1) \dots \delta J_1(t_n) \delta J_2(t'_1) \dots \delta J_2(t'_m)} \Big|_{J_1=J_2=0}. \quad (2.120)$$

где  $\hat{U}_{J_1}, \hat{U}_{J_2}$  есть операторы эволюции, удовлетворяющие уравнению (2.90) каждый со своим источником  $J_1, J_2$ , а  $\Gamma$  и  $\bar{\Gamma}$  обозначают временное и анти-временное упорядочение, соответственно. Связь между производящим функционалом (2.119) и корреляционными функциями (2.120) может быть легко получено из выражения (2.91) для оператора эволюции. Базовыми элементами являются различные двух-точечных корреляционных функций, а именно

$$iG_{\Gamma}(t, t') := \text{tr} \left[ \hat{\rho} \Gamma(\hat{\phi}(t)\hat{\phi}(t')) \right] = D_{2,0}(t, t'), \quad (2.121a)$$

$$iG_{\bar{\Gamma}}(t, t') := \text{tr} \left[ \hat{\rho} \bar{\Gamma}(\hat{\phi}(t)\hat{\phi}(t')) \right] = D_{0,2}(t, t'), \quad (2.121b)$$

$$iG_{>}(t, t') := \text{tr} \left[ \hat{\rho} \hat{\phi}(t)\hat{\phi}(t') \right] = [D_{1,1}(t', t)]^T, \quad (2.121c)$$

$$iG_{<}(t, t') := \text{tr} \left[ \hat{\rho} \hat{\phi}(t')\hat{\phi}(t) \right] = D_{1,1}(t, t'), \quad (2.121\check{c})$$

где  $G_{\Gamma}, G_{\bar{\Gamma}}$ , и  $G_{>}$  есть фейнмановская, анти-фейнмановская и вайтмановская функции Грина, соответственно.

Мы будем предполагать, что  $\hat{\rho}$  удовлетворяет обычным свойствам матрицы плотности, то есть является эрмитовым положительно определённым оператором с единичным следом. Подставляя разбиение единицы в координатном представлении в определение (2.119) производящего функционала между соответствующими операторами, и используя представление (2.93) оператора эволюции в виде функционального интеграла, мы получаем следующее выражение для производящего функционала

$$Z[J_1, J_2] = \int d\varphi_1 d\varphi_2 d\varphi' \rho(\varphi_1, \varphi_2) \\ \times \int_{\substack{\phi_{1,2}(0)=\varphi_{1,2} \\ \phi_{1,2}(T)=\varphi'}} \mathcal{D}\phi_1 \mathcal{D}\phi_2 \exp \left\{ iS[\phi_1] - iS[\phi_2] + i \int_0^T dt (J_1^T \phi_1 + J_2^T \phi_2) \right\} \quad (2.122)$$

где мы ввели обозначение  $\rho(\varphi_1, \varphi_2) := \langle \varphi_1 | \hat{\rho} | \varphi_2 \rangle$  для матрицы плотности в координатном представлении.

Давайте теперь рассмотрим класс гауссовых матриц плотности, то есть таких, что их координатное представление имеет вид гауссовой экспоненты

$$\rho(\varphi) = \frac{1}{Z} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \varphi^T \boldsymbol{\Omega} \varphi + \mathbf{j}^T \varphi \right\}, \quad \varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} \quad (2.123)$$

где матрица  $\boldsymbol{\Omega}$  и вектор  $\mathbf{j}$  играют роль параметров  $\hat{\rho}$ , а нормировочный множитель  $1/Z$  не зависит от  $\varphi$ . Требование свойства эрмитовости

$$\langle \varphi_1 | \hat{\rho} | \varphi_2 \rangle = \langle \varphi_2 | \hat{\rho} | \varphi_1 \rangle^* \quad \leftrightarrow \quad \rho(\varphi_2, \varphi_1) = \rho^*(\varphi_1, \varphi_2), \quad (2.124)$$

накладывает следующие условия на  $\boldsymbol{\Omega}$  и  $\mathbf{j}$

$$\mathbf{X} \boldsymbol{\Omega} \mathbf{X} = \boldsymbol{\Omega}^*, \quad \mathbf{X} \mathbf{j} = \mathbf{j}^*, \quad \mathbf{X} := \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.125)$$

или, в терминах блочных компонент

$$\mathbf{j} = \begin{bmatrix} j \\ j^* \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} R & S \\ S^* & R^* \end{bmatrix}, \quad R = R^T, \quad S = S^\dagger. \quad (2.126)$$

Свойство нормируемости  $\hat{\rho}$  выполняется, если вещественная часть суммы  $R + S$  является положительно определённой. В случае ненулевого недиагонального блока  $S$  матрица плотности задаёт смешанное состояние, т.е. такое, что  $\hat{\rho}^2 \neq \hat{\rho}$ . Роль же линейного члена в экспоненте (2.123) является двойкой. Во-первых,  $\mathbf{j}$  задаёт ненулевое среднее полевого оператора. Во-вторых, линейный член может быть использован как источник, т.е. чтобы ввести нелинейности в гауссову матрицу плотности дифференцируя по  $\mathbf{j}$ . Типичным примером чистого гауссового состояния является вакуумное состояние (2.109), т.е.  $\hat{\rho} = |0\rangle\langle 0|$ , соответствующее некоторому выбору операторов рождения/уничтожения. Для такого состояния  $R = \omega^*$ ,  $S = 0$ , и  $\mathbf{j} = 0$ . Другим примером чистого гауссового состояния является когерентное состояние (2.114), для которого матрица плотности имеет вид  $\hat{\rho} = |\alpha\rangle\langle \alpha|$ , а параметры заданы как  $R = \omega^*$ ,  $S = 0$ , и имеют ненулевой линейный член  $j = \sqrt{2\omega_{\text{re}}}\alpha$ .

### 2.2.2 Краевая задача

Подставляя общую гауссову матрицу плотности в (2.122), получаем

$$Z[J_1, J_2] = \int_{\phi_1(T)=\phi_2(T)} \mathcal{D}\phi_1 \mathcal{D}\phi_2 \exp \left\{ iS[\phi_1] - iS[\phi_2] + i \int_0^T dt (J_1^T \phi_1 + J_2^T \phi_2) - \frac{1}{2} \varphi^T \Omega \varphi + \mathbf{j}^T \varphi \right\}, \quad (2.127)$$

где мы добавили граничные значения  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi'$ , по которым ведётся интегрирование в (2.122), в меру функционального интеграла, а также опустили нормировочный множитель матрицы плотности.

Мы будем вычислять интеграл (2.127) задающий искомый производящий функционал, используя метод перевала. В данном случае этот метод оказывается точным, так как интеграл имеет гауссов вид. Прежде всего, давайте введём удобные обозначения для блочных величин и операторов

$$\vec{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \vec{K} & 0 \\ 0 & -\vec{K} \end{bmatrix}, \quad \vec{\mathbf{W}} = \begin{bmatrix} \vec{W} & 0 \\ 0 & -\vec{W} \end{bmatrix}, \quad \phi = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \end{bmatrix}, \quad (2.128)$$

в терминах которых сумма действий для полей  $\phi_1, \phi_2$  в (2.127) может быть записана в единой форме

$$\mathcal{S}[\phi] = \frac{1}{2} \int_0^T dt \phi^T \vec{\mathbf{K}} \phi = \frac{1}{2} \int_0^T dt \phi^T \vec{\mathbf{K}} \phi + \frac{1}{2} \phi^T \vec{\mathbf{W}} \phi \Big|_0^T. \quad (2.129)$$

Это позволит обращаться с уравнениями движения, функциями Грина и т.п., следующими из действия  $\mathcal{S}[\phi]$  точно также как это делалось для действия исходной теории (2.1), с той лишь разницей, что количество полей было удвоено. В терминах новых обозначений выражение для производящего функционала принимает вид

$$Z[J_1, J_2] = \int D\phi_1 D\phi_2 \exp \left\{ i\mathcal{S}[\phi] + i \int_0^T dt \mathbf{J}^T \phi - \frac{1}{2} \varphi^T \Omega \varphi + \mathbf{j}^T \varphi \right\}. \quad (2.130)$$

Давайте теперь запишем уравнение на перевальную точку, варьируя выражение в экспоненте по всем полям, включая граничные значения в  $t = 0$ , и  $t = T$ . Вариация внутри интервала даёт уравнение

$$\vec{\mathbf{K}} \phi(t) + \mathbf{J}(t) = 0, \quad (2.131)$$

в то время как вариация граничных значений  $\phi(0)$  и  $\phi(T)$  дополняет последнее уравнение граничными условиями

$$(i\vec{W} + \Omega)\phi|_{t=0} = \mathbf{j}, \quad (2.132)$$

$$\begin{bmatrix} I & I \end{bmatrix} i\vec{W}\phi|_{t=T} = 0, \quad \begin{bmatrix} I & -I \end{bmatrix} \phi|_{t=T} = 0, \quad (2.133)$$

где мы также учли условие  $\phi_1(T) = \phi_2(T)$ , диктуемое функциональной мерой.

Для решения граничной задачи найдём сначала функцию Грина, решающую ту же граничную задачу, но с однородными граничными условиями, т.е. для  $\mathbf{j} = 0$

$$\vec{K}\mathbf{G}(t, t') = \mathbf{I} \delta(t - t'), \quad (2.134)$$

$$(i\vec{W} + \Omega)\mathbf{G}(t, t')|_{t=0} = 0, \quad (2.135)$$

$$\begin{bmatrix} I & I \end{bmatrix} i\vec{W}\mathbf{G}(t, t')|_{t=T} = 0, \quad \begin{bmatrix} I & -I \end{bmatrix} \mathbf{G}(t, t')|_{t=T} = 0. \quad (2.136)$$

Мы будем строить такую функцию Грина в терминах базисных функций  $\mathbf{v}_\pm$ . Эти базисные функции должны решать однородную версию граничной задачи

$$\vec{K}\mathbf{v}_\pm(t) = 0, \quad (i\vec{W} + \Omega)\mathbf{v}_-(t)|_{t=0} = 0, \quad (2.137)$$

$$\begin{bmatrix} I & I \end{bmatrix} i\vec{W}\mathbf{v}_+(t)|_{t=T} = 0, \quad \begin{bmatrix} I & -I \end{bmatrix} \mathbf{v}_+(t)|_{t=T} = 0. \quad (2.138)$$

Используя общее выражение (2.46) для удвоенного набора полей, получаем выражение для функции Грина в терминах базисных функций

$$\mathbf{G}(t, t') = -\mathbf{v}_+(t) \Delta_{-+}^{-1} \mathbf{v}_-^T(t') \theta(t - t') + \mathbf{v}_-(t) \Delta_{+-}^{-1} \mathbf{v}_+^T(t') \theta(t' - t), \quad (2.139)$$

$$\Delta_{-+} = \mathbf{v}_-^T \vec{W} \mathbf{v}_+ - (\vec{W} \mathbf{v}_-)^T \mathbf{v}_+ = -\Delta_{+-}^T. \quad (2.140)$$

### 2.2.3 Неймановские базисные функции

Несмотря на то, что мы построили выражение для искомой функции Грина  $\mathbf{G}$  в терминах базисных функций, в данный мы не имеем явного вида самих базисных функций  $\mathbf{v}_\pm$ . Мы будем строить эти функции с помощью другого набора базисных функций  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{v}^*$  удовлетворяющих более простым, диагональным граничным условиям

$$\vec{K}\mathbf{v}(t) = 0, \quad (i\vec{W} - \omega)\mathbf{v}(t)|_{t=0} = 0, \quad \omega = \begin{bmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^* \end{bmatrix}. \quad (2.141)$$

Так как  $\vec{W}$  и  $\omega$  являются блочно-диагональными, базисные функции  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{v}^*$  также могут быть выбраны в блочно-диагональном виде, а именно

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v & 0 \\ 0 & v^* \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}^* = \begin{bmatrix} v^* & 0 \\ 0 & v \end{bmatrix}. \quad (2.142)$$

Ввиду блочной структуры уравнений и граничных условий, уравнения на  $v$ , и  $v^*$  разделяются

$$\vec{K}v(t) = 0, \quad (i\vec{W} - \omega)v(t)|_{t=0} = 0, \quad (2.143)$$

а уравнение и граничное условие на  $v^*$  получается комплексным сопряжением таковых на  $v$  ввиду вещественности операторов  $\vec{K}$ ,  $\vec{W}$ . Таким образом  $v$ ,  $v^*$  являются ни чем иным как базисными функциями на одиночные поля  $\phi_1$  и  $\phi_2$  и удовлетворяют неймановским граничным условиям, указанным выше. Мы будем подразумевать, что  $\omega$  есть симметричная матрица с положительно определённой вещественной частью. В терминах  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{v}^*$  базисная функция  $\mathbf{v}_+$  может быть легко представлена как

$$\mathbf{v}_+ = \mathbf{v} + \mathbf{v}^* \mathbf{X} = \begin{bmatrix} v & v^* \\ v & v^* \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.144)$$

В свою очередь, соответствующее представление для  $\mathbf{v}_-$  требует чуть больше усилий. Мы построим  $\mathbf{v}_-$  используя преобразование Боголюбова между двумя наборами базисных функций, удовлетворяющих двум различным условиям типа Неймана (2.108). Трактую  $\mathbf{v}_-$  как отрицательно-частотную базисную функцию с соответствующей положительно-частотным аналогом  $\mathbf{v}_-^*$ , т.е.  $(i\vec{W} - \Omega^*)\mathbf{v}_-^*|_{t=0} = 0$ , получаем ответ

$$\mathbf{v}_- = \mathbf{v}^* \mathbf{U}^T - \mathbf{v} \mathbf{V}^T. \quad (2.145)$$

где  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{V}$  есть соответствующие коэффициенты Боголюбова

$$\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{2\Omega_{\text{re}}}}(\Omega + \omega) \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\text{re}}}}, \quad \mathbf{V} = \frac{1}{\sqrt{2\Omega_{\text{re}}}}(\Omega - \omega^*) \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\text{re}}}}. \quad (2.146)$$

Здесь мы подразумеваем нормировку  $\mathbf{v}(0) = 1/\sqrt{2\omega_{\text{re}}}$ ,  $\mathbf{v}_-(0) = 1/\sqrt{2\Omega_{\text{re}}}$ , и обозначаем вещественные части  $\omega$  и  $\Omega$  как  $\omega_{\text{re}}$  и  $\Omega_{\text{re}}$ , соответственно.

В конце концов, давайте более детально рассмотрим структуру функции Грина  $\mathbf{G}(t, t')$ . Для этого подставим полученные выражения для базисных функций  $\mathbf{v}_\pm$  в определение (2.139). В частности, матрица  $\Delta_{-+}$  может быть записана как

$$i\Delta_{-+} = \frac{1}{\sqrt{2\Omega_{\text{re}}}} \left[ (\mathbf{I} - \mathbf{X}) \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega} (\mathbf{I} + \mathbf{X}) \right] \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\text{re}}}} \quad (2.147)$$

Далее, рассмотрим отдельно первое слагаемое (2.139). Используя результат Приложения Б.1, получаем следующее равенство

$$\mathbf{v}_+(t) (i\Delta_{-+})^{-1} \mathbf{v}_-^T(t') = \mathbf{v}_+(t) \mathbf{v}^\dagger(t') + \mathbf{v}_+(t) \boldsymbol{\nu} \mathbf{v}_+^T(t'), \quad (2.148)$$

где мы ввели симметричную матрицу

$$\boldsymbol{\nu} = \left[ \mathbf{I} + \mathbf{X} - \sqrt{2\omega_{\text{re}}} \mathbf{X} (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega})^{-1} \mathbf{X} \sqrt{2\omega_{\text{re}}} \right]^{-1} - \mathbf{X}. \quad (2.149)$$

Замечая, что второе слагаемое в выражении (2.139) получается из первого одновременным транспонированием перестановкой аргументов, а также используя то, что второе слагаемое в (2.148) инвариантно относительно такого преобразования, мы получаем, что две  $\theta$ -функции суммируются в единицу. Таким образом, получаем финальное выражение для функции Грина

$$i\mathbf{G}(t, t') = i\mathbf{G}_0(t, t') + \mathbf{v}_+(t) \boldsymbol{\nu} \mathbf{v}_+^T(t'), \quad (2.150)$$

где  $\mathbf{G}_0$  определена как

$$\begin{aligned} i\mathbf{G}_0(t, t') &= \mathbf{v}_+(t) \mathbf{v}^\dagger(t') \theta(t - t') + \mathbf{v}^*(t) \mathbf{v}_+^T(t') \theta(t' - t) \\ &= \mathbf{v}(t) \mathbf{v}^\dagger(t') \theta(t - t') + \mathbf{v}^*(t) \mathbf{v}^T(t') \theta(t' - t) + \mathbf{v}^*(t) \mathbf{X} \mathbf{v}^\dagger(t'), \end{aligned} \quad (2.151)$$

и может быть интерпретирована как функция Грина, соответствующая вакуумному состоянию, имеющему матрицу плотности  $\hat{\rho}_0 = |0\rangle\langle 0|$ , ассоциированную с базисными функциями  $v(t)$ ,  $v^*(t)$  и соответствующими операторами рождения/уничтожения. Действительно, из (2.113) мы получаем, что матрица  $\boldsymbol{\Omega}$ , определяющая вакуумную матрицу плотности  $\hat{\rho}_0$ , совпадает с  $\boldsymbol{\omega}^*$ , т.е.  $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}^*$ . В этом случае  $\boldsymbol{\nu} = 0$  из (2.149), так что из определения (2.150) мы заключаем что  $\mathbf{G} = \mathbf{G}_0$ .

Теперь, используя полученную функцию Грина, мы готовы найти записать решение  $\phi(t)$  задачи (2.131)–(2.133). Для этого мы используем выражение (2.60)

для неоднородной задачи, где  $j_+ \mapsto 0$ ,  $j_- \mapsto -\mathbf{j}$ , и получаем

$$\phi(t) = i\mathbf{G}(t, 0) \mathbf{j} - \int_0^T dt' \mathbf{G}(t, t') \mathbf{J}(t') \quad (2.152)$$

Подстановка этого решения в (2.130) даёт выражение для производящей функции

$$Z[J_1, J_2] = \text{const} \times \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int dt dt' \mathbf{J}^T(t) \mathbf{G}(t, t') \mathbf{J}(t') - \int dt \mathbf{J}^T(t) \mathbf{G}(t, 0) \mathbf{j} + \frac{i}{2} \mathbf{j}^T \mathbf{G}(0, 0) \mathbf{j} \right\} \quad (2.153)$$

где все интегрирования по времени ведутся от  $t = 0$  до  $t = T$ . Зануление одного аргумента в  $\mathbf{G}(t, t')$  не ведёт к значительным упрощениям, в то время как  $\mathbf{G}(0, 0)$  имеет простой вид в терминах параметра  $\mathbf{\Omega}$  матрицы плотности

$$i\mathbf{G}(0, 0) = \frac{\mathbf{I} + \mathbf{X}}{2\mathbf{\Omega}_{\text{re}}}, \quad (2.154)$$

выведенный в Приложении Б.2. Здесь «отношение» двух матриц  $\mathbf{I}$  и  $\mathbf{\Omega}_{\text{re}}$  является однозначно определённым ввиду того, что они коммутируют друг с другом. Последнее, следует из специального свойства матрицы  $\mathbf{\Omega}$ , а именно  $\mathbf{X}\mathbf{\Omega}\mathbf{X} = \mathbf{\Omega}^*$ .

Подставляя полученный производящий функционал (2.153) в выражение (2.120) для корреляционных функций, мы получаем, что для  $\mathbf{j} = 0$  блочные компоненты матрицы  $\mathbf{G}$  есть фейнмановская, анти-фейнмановская и вайтмановская функции Грина (2.121), а именно

$$\mathbf{G}(t, t') = \begin{bmatrix} G_{\text{T}}(t, t') & G_{<}(t, t') \\ G_{>}(t, t') & G_{\text{T}}(t, t') \end{bmatrix}, \quad (2.155)$$

где  $G_{>}(t, t') := G_{<}^T(t', t)$ , а явная форма блочных компонент может быть извлечена из (2.150).

## 2.2.4 Поворот Келдыша

Для будущего удобства сделаем замену переменных в удвоенном пространстве полей  $\phi_1, \phi_2$ , а именно, введём так называемые классические и квантовые

поля  $\phi_c$  и  $\phi_q$  как [34]

$$\tilde{\phi}(t) = \begin{bmatrix} \phi_c(t) \\ \phi_q(t) \end{bmatrix} = \mathbf{C}\phi(t), \quad \mathbf{C} := \begin{bmatrix} \frac{1}{2}I & \frac{1}{2}I \\ I & -I \end{bmatrix}. \quad (2.156)$$

Такое преобразование обычно называется поворотом Келдыша. В новом базисе функция Грина  $\mathbf{G}$  имеет вид

$$\tilde{\mathbf{G}}(t, t') := \mathbf{C}\mathbf{G}(t, t')\mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} G_K(t, t') & G_R(t, t') \\ G_A(t, t') & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.157)$$

Здесь  $G_R$  и  $G_A$  есть запаздывающая и опережающая функции Грина, соответственно, которые имеют следующее определение в терминах гейзенберговских полевых операторов

$$\begin{aligned} iG_R(t, t') &= \text{tr}\left(\hat{\rho}[\hat{\phi}(t), \hat{\phi}(t')]\right)\theta(t-t') \\ &= [v(t)v^\dagger(t') - v^*(t)v^T(t')]\theta(t-t'), \end{aligned} \quad (2.158)$$

$$G_A(t, t') = G_R^T(t', t), \quad (2.159)$$

не зависящие от состояния и согласующиеся с классическим определением (2.41). Блок  $G_K$ , в свою очередь, называется келдышевской функцией Грина, содержит информацию о состоянии, и имеет следующее операторное определение

$$iG_K(t, t') = \frac{1}{2}\text{tr}\left(\hat{\rho}\{\hat{\phi}(t), \hat{\phi}(t')\}\right) = \begin{bmatrix} v(t) & v^*(t) \end{bmatrix} \left(\boldsymbol{\nu} + \frac{1}{2}\mathbf{X}\right) \begin{bmatrix} v^T(t') \\ v^\dagger(t') \end{bmatrix}. \quad (2.160)$$

где мы также записали явный вид, следующий из (2.150) и определения (2.157).

### 2.2.5 Выбор базисных функций

До сих пор, матрица  $\omega$ , определяющая неймановские граничные условия на базисные функции  $v$ ,  $v^*$  не была зафиксирована, кроме общего требования симметрии относительно транспонирования и положительной определённости вещественной части. В этом разделе мы сделаем удобный выбор  $\omega$ , который, помимо прочего, приведёт к выражениям для функций Грина, допускающим корпускулярную интерпретацию с хорошо определённым понятием средних чисел заполнения.

Для этого, перепишем келдышевскую функцию Грина в терминах неаномального и аномального средних чисел заполнения, определённых как

$$\nu = \text{tr}[\hat{\rho} \hat{a}^\dagger \hat{a}], \quad \kappa = \text{tr}[\hat{\rho} \hat{a} \hat{a}], \quad (2.161)$$

так что  $G_K$  записывается как

$$iG_K(t, t') = \begin{bmatrix} v(t) & v^*(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa & \nu^* + \frac{1}{2}I \\ \nu + \frac{1}{2}I & \kappa^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^T(t') \\ v^\dagger(t') \end{bmatrix}. \quad (2.162)$$

отметим, что матрица  $\kappa$  является симметричной, в то время как  $\nu$  — эрмитовой. Сравнивая с (2.160) мы находим связь  $\nu$  и средних чисел заполнения

$$\nu = \begin{bmatrix} \kappa & \nu^* \\ \nu & \kappa^* \end{bmatrix}. \quad (2.163)$$

Таким образом, мы заключаем, что блочно-диагональные компоненты матрицы  $\nu$  отвечают за аномальные средние. Чтобы придать корпускулярную интерпретацию операторам рождения/уничтожения, мы постараемся выбрать матрицу  $\omega$ , определяющую граничное условие для базисных функции  $v(t)$ ,  $v^*(t)$  таким образом, что диагональные блоки, равные аномальным средним, зануляются. Кроме того, такой выбор существенно упростит выражения для функций Грина, так как слагаемые, содержащие  $\kappa$ , занулятся. В частности, для ненулевого аномального среднего вайтмановская функция имеет вид

$$G_{>}(t, t') = v(t) (\nu^* + I) v^\dagger(t') + v^*(t) \nu v^T(t') + v(t) \kappa v^T(t') + v^*(t) \kappa^* v^\dagger(t'). \quad (2.164)$$

Чтобы сделать матрицу  $\nu$  блочно-антидиагональной, давайте изучим определяющее её выражение (2.149) более детально. В частности, заметим, что вклад в диагональные блоки выражения в квадратных скобках (а значит, и в саму матрицу  $\nu$ ) вносится единичной матрицей  $I$  и, возможно, слагаемым содержащим  $(\omega + \Omega)^{-1}$ . Таким образом, нам необходимо выбрать  $\omega$  таким образом, что блочно-диагональный вклад в точности сокращал бы соответствующий вклад от  $I$ . Используя формулу для обращения блочных матриц

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & 0 \\ 0 & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -BD^{-1} \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix},$$

где в нашем случае  $A = D^* = R + \omega$ ,  $B = C^* = S$ , получаем следующее условия зануления диагональных блоков

$$R + \omega - S(R^* + \omega^*)^{-1}S^* = 2\omega_{\text{re}}. \quad (2.165)$$

Мы сосредоточимся на случае вещественных матриц  $R$  и  $S$ . Конструкция, представленная ниже легко обобщается на случай комплексных  $R$ , однако, по-видимому не существует простого обобщения на случай общих комплексных (эрмитовых)  $S$ . По существу, основная сложность на пути к такому обобщению заключается в том, что разрешены только вещественные преобразования полей так что в общем случае  $S$  не может быть диагонализирована. Предположим также, что решение  $\omega$  уравнения (2.165) вещественное и положительно определённое. В терминах безразмерных величин

$$r = \omega^{-1/2} R \omega^{-1/2}, \quad s = \omega^{-1/2} S \omega^{-1/2}, \quad (2.166)$$

уравнение (2.165) переписывается как

$$r + I - s(r + I)^{-1}s = 2 \quad (2.167)$$

что может быть приведено к ещё более простому виду введением переменной  $\tilde{s} = (r + I)^{-1/2}s(r + I)^{-1/2}$ . Решая это уравнения относительно  $\tilde{s}$ , получаем

$$r^2 = s^2 + I. \quad (2.168)$$

Последнее равенство является неявным уравнением на  $\omega$ , ввиду определения (2.166) величин  $r$ ,  $s$ . В явном виде уравнение записывается как

$$R\omega^{-1}R = S\omega^{-1}S + \omega, \quad (2.169)$$

и имеет следующее решение

$$\omega = R^{1/2}\sqrt{I - \sigma^2}R^{1/2}, \quad \sigma := R^{-1/2}SR^{-1/2}. \quad (2.170)$$

Отметим, что требование положительной определённости подразумевает, что матрица  $I - \sigma^2 = (I - \sigma)(I + \sigma)$  положительно определена. Учитывая, что матрица  $R + S = R^{1/2}(I + \sigma)R^{1/2}$  должна быть положительно определена из условия нормируемости матрицы плотности, получаем, что  $I - \sigma = R^{-1/2}(R - S)R^{-1/2}$ , или эквивалентно  $R - S$ , должна быть положительно определена.

Подстановка полученного выражения для  $\omega$  в (2.149) даёт требуемую блочно-диагональную форму  $\nu$ , а именно

$$\nu = \begin{bmatrix} 0 & \nu \\ \nu & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \nu &:= \frac{1}{2} \varkappa \left( \sqrt{\frac{I - \sigma}{I + \sigma}} - I \right) \varkappa^T, \\ \varkappa &:= \omega^{-1/2} R^{1/2} (R^{1/2} \omega^{-1} R^{1/2})^{-1/2}, \end{aligned} \quad (2.171)$$

где матрица  $\varkappa$  является ортогональной. Ввиду положительной определённости матриц  $I + \sigma$  и  $I - \sigma$ , матрица  $\nu$ , является вещественной. Как показано в Приложении Б.3, чтобы матрица плотности была положительно определённой, матрица  $\sigma$  должна быть отрицательно определённой, что даёт положительно определённую матрицу  $\nu$ , задающую средние числа заполнения.

Подставляя полученное выражение (2.171) в функцию Грина (2.150), мы немедленно получаем простые выражения для блочных компонент последней. В частности, для вайтмановской функции Грина мы имеем выражение (ср. с (2.164))

$$iG_{>}(t, t') = v(t) (\nu + I) v^\dagger(t') + v^*(t) \nu v^T(t'), \quad (2.172)$$

через которую легко переписываются остальные компоненты.

Для дальнейших целей будет полезно выразить  $\Omega$  в терминах  $\nu$ . Выражая  $\Omega$  из равенства (2.149), а затем используя явную форму (2.171) для  $\nu$ , получаем следующее выражение

$$\Omega = \omega^{1/2} \begin{bmatrix} \frac{2\nu^2 + 2\nu + I}{2\nu + I} & -\frac{2\nu(\nu + I)}{2\nu + I} \\ -\frac{2\nu(\nu + I)}{2\nu + I} & \frac{2\nu^2 + 2\nu + I}{2\nu + I} \end{bmatrix} \omega^{1/2}, \quad (2.173)$$

являющее следствием специального выбора (2.170).

## 2.2.6 Квazитепловое состояние

Теперь давайте сосредоточимся на выделенном гауссовом состоянии, определяемом в терминах евклидоваго функционального интеграла

$$\rho_E(\varphi_2, \varphi_1; J_E) = \frac{1}{Z} \int_{\substack{\phi_E(0) = \varphi_2 \\ \phi_E(\beta) = \varphi_1}} D\phi_E \exp \left\{ -S_E[\phi_E] - \int_0^\beta d\tau J_E(\tau) \phi_E(\tau) \right\}, \quad (2.174)$$

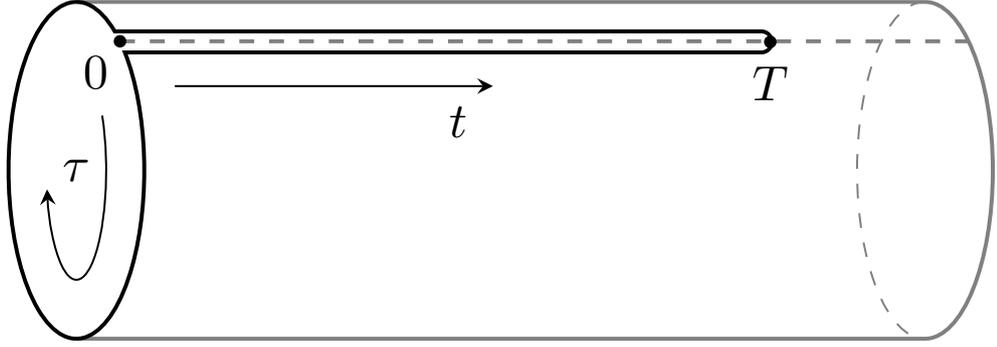


Рис. 2.1: Контур Швингера-Келдыша в плоскости комплексного времени.

Здесь  $S_E$  есть действие некоторой евклидовой теории поля, которое подразумевается квадратичным по полям и задано как

$$S_E[\phi_E] = \frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau \phi_E^T \overleftrightarrow{K}_E \phi_E = \frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau \phi_E^T \overrightarrow{K}_E \phi_E + \frac{1}{2} \phi_E^T \overrightarrow{W}_E \phi_E \Big|_0^\beta, \quad (2.175)$$

$$\overrightarrow{K}_E := -\frac{d}{d\tau} A_E \frac{d}{d\tau} - \frac{d}{d\tau} B_E + B_E^T \frac{d}{d\tau} + C_E, \quad \overrightarrow{W}_E := A_E \frac{d}{d\tau} + B_E. \quad (2.176)$$

Нормировочный множитель  $1/Z$  выбран таким образом, что матрица плотности является нормированной, т.е.  $\text{tr } \hat{\rho}_E = 1$  для выключенного источника  $J_E = 0$ . Эрмитовость матрицы плотности может быть достигнута наложением следующего достаточного условия на операторные коэффициенты  $A_E$ ,  $B_E$ , и  $C_E$  как функции евклидового времени  $\tau$

$$A_E(\beta - \tau) = A_E^*(\tau), \quad B_E(\beta - \tau) = -B_E^*(\tau), \quad C_E(\beta - \tau) = C_E^*(\tau), \quad (2.177)$$

Таким образом, коэффициентные функции, и само евклидово действие не обязательно должны быть вещественными, однако мы ограничимся здесь лишь вещественным случаем. Источник  $J_E$  включен в функциональный интеграл чтобы иметь возможность пертурбативно включать нелинейности в евклидово действие и определённую с его помощью матрицу плотности.

Мы будем вычислять интеграл (2.174) по евклидовым полям  $\phi_E$  используя метод перевала. Граничные условия, диктуемые функциональной мерой подразумевают  $\phi_E(\beta) = \varphi_1$ ,  $\phi_E(0) = \varphi_2$ , так при получении уравнения на перевальную точку мы варьируем поля только внутри интервала, и накладываем условия Дирихле

$$\overrightarrow{K}_E \phi + J_E = 0, \quad (2.178a)$$

$$\phi_E(\beta) = \varphi_1, \quad \phi_E(0) = \varphi_2. \quad (2.178b)$$

Используя функцию Грина для задачи Дирихле  $G_D$  для однородных граничных условий

$$\vec{K}_E G_D(\tau, \tau') = \delta(\tau - \tau'), \quad G_D(\beta, \tau') = G_D(0, \tau') = 0, \quad (2.179)$$

и подставляя в (2.55), мы получаем следующее решение задачи (2.178)

$$\phi_E(\tau) = -\mathbf{w}_E^T(\tau) \boldsymbol{\varphi} - \int_0^\beta d\tau' G_D(\tau, \tau') J_E(\tau'), \quad \boldsymbol{\varphi} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}, \quad (2.180)$$

где мы ввели обозначения, аналогичные введённым ранее в (2.56), (2.57), а именно строка  $\mathbf{w}_E^T(\tau)$  получена транспонированием столбца  $\mathbf{w}_E(\tau)$ , определённого как

$$\mathbf{w}_E(\tau) = \begin{bmatrix} \vec{W}_E G_D(\beta, \tau) \\ -\vec{W}_E G_D(0, \tau) \end{bmatrix} \quad (2.181)$$

подстановка обратно в (2.174) даёт

$$\rho_E(\varphi_+, \varphi_-; J_E) = \frac{1}{Z} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \boldsymbol{\varphi}^T \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{j}^T \boldsymbol{\varphi} + \frac{1}{2} \int d\tau d\tau' J_E(\tau) G_D(\tau, \tau') J_E(\tau') \right\}, \quad (2.182)$$

где  $1/Z$  есть не зависящий от источника нормировочный множитель, и интегрирования по  $\tau$  и  $\tau'$  производятся в пределах от 0 до  $\beta$ , а матрица  $\boldsymbol{\Omega}$  и источник  $\mathbf{j}$ , введённые в (2.123) имеют следующий специальный вид

$$\boldsymbol{\Omega} \equiv \begin{bmatrix} -\vec{W}_E G_D(\beta, \beta) \overleftarrow{W}_E & \vec{W}_E G_D(\beta, 0) \overleftarrow{W}_E \\ \vec{W}_E G_D(0, \beta) \overleftarrow{W}_E & -\vec{W}_E G_D(0, 0) \overleftarrow{W}_E \end{bmatrix}, \quad (2.183a)$$

$$\mathbf{j} = \int_0^\beta d\tau \mathbf{w}_E(\tau) J_E(\tau). \quad (2.183b)$$

Теперь давайте подставим матрицу плотности (2.182), определяемую параметрами (2.183) в общее выражение (2.153) для производящего функционала. Результат такой подстановки имеет вид

$$Z[\mathbf{J}, J_E] = \text{const} \times \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int dt dt' \mathbf{J}^T(t) \mathbf{G}(t, t') \mathbf{J}(t') - \int dt d\tau \mathbf{J}^T(t) \mathbf{G}(t, 0) \mathbf{w}_E(\tau) J_E(\tau) + \frac{1}{2} \int d\tau d\tau' J_E(\tau) G_E(\tau, \tau') J_E(\tau') \right\}. \quad (2.184)$$

Отметим, что интегральное ядро в третьей строке есть периодическая евклидова функция Грина

$$G_E(\tau, \tau') = G_D(\tau, \tau') + i \mathbf{w}_E^T(\tau) \mathbf{G}(0, 0) \mathbf{w}_E(\tau') \quad (2.185)$$

что согласуется с тем фактом, что при выключенных лоренцевых источниках  $\mathbf{J}$  функционал  $Z[0, J_E]$  представляет собой функциональный интеграл по периодическим полевым конфигурациям  $\phi_E(\tau)$ , т.е. с отождествлёнными значениями в точках 0 и  $\beta$ . Выражение для этой функции Грина кажется зависящим от лоренцевых объектов через  $\mathbf{G}(0, 0)$ , однако на самом деле это не так. Последний факт следует, в частности из (2.154) и продемонстрирован в Приложении Б.2.

### 2.2.7 Аналитическое продолжение и КМС условие

Дальнейшие преобразования производящего функционала, позволяющие обнаружить новые аналитические свойства функций Грина, могут быть осуществлены при следующих двух дополнительных предположениях. Первое предположение заключается в том, что евклидово действие (2.175) получено аналитическим продолжением лоренцева (2.1), т.е.

$$iS[\phi] \Big|_{t=-i\tau} = -S_E[\phi] \quad (2.186)$$

Это ведёт к следующим выражениям коэффициентных функций евклидова действия через соответствующие функции лоренцева действия

$$A_E(\tau) = A(-i\tau), \quad B_E(\tau) = -iB(-i\tau), \quad C_E(\tau) = -C(-i\tau). \quad (2.187)$$

Второе предположение заключается в том, что может быть сделан специальный выбор базисных функций (2.170), полученный в разделе 2.2.5.

Прежде всего давайте перепишем второе и третье слагаемые в экспоненте производящего функционала (2.184) в терминах евклидовой функции Грина задачи Неймана  $G_N(\tau, \tau')$  вместо соответствующей функции задачи Дирихле, т.е. удовлетворяющей граничным условиям

$$(W_E + \omega)G_N(\beta, \tau') = (W_E - \omega^*)G_N(0, \tau') = 0 \quad (2.188)$$

где  $\omega$  есть та же матрица, что и в (2.141). Это может быть сделано с использованием соотношений (2.66), (2.67), где необходимо сделать подстановку  $\omega \mapsto -i\omega$

ассоциированную с переходом к евклидовому времени. Детали соответствующего вычисления изложены в Приложении Б.2. Результат представлен как (2.184), где в перекрёстном члене, содержащем лоренцевы и евклидов источники, выражение  $-\mathbf{G}(t, 0) \mathbf{w}_E(\tau)$  заменено  $\mathbf{G}(t, 0) (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{g}_N(\tau)$ , а периодическая функция Грина  $G_E(\tau, \tau')$  переписана как

$$G_E(\tau, \tau') = G_N(\tau, \tau') + \mathbf{g}_N^T(\tau) \sqrt{2\omega_{\text{re}}} (\boldsymbol{\nu}^* + \mathbf{X}) \sqrt{2\omega_{\text{re}}} \mathbf{g}_N(\tau'), \quad (2.189)$$

где  $\mathbf{g}_N(\tau)$  есть евклидова версия выражения (2.61).

Чтобы продвинуться дальше, необходимо вывести некоторые важные свойства евклидовой функции Грина для задачи Неймана, входящей в выражение (2.189), являющиеся следствием специальным выбором (2.170) матрицы  $\omega$ . В терминах базисных функций эта функция Грина представляется как

$$\begin{aligned} G_N(\tau, \tau') = & -u_+(\tau) (\Delta_{-+}^N)^{-1} u_-(\tau') \theta(\tau - \tau') \\ & + u_-(\tau) (\Delta_{+-}^N)^{-1} u_+(\tau') \theta(\tau' - \tau), \end{aligned} \quad (2.190)$$

где  $u_+$ ,  $u_-$  есть базисные функции, удовлетворяющие граничным условиям Неймана

$$(W_E + \omega)u_+|_{\tau=\beta} = 0, \quad (W_E - \omega)u_-|_{\tau=0} = 0 \quad (2.191)$$

и, как и ранее

$$\Delta_{+-}^N = u_+^T W_E u_- - (W_E u_+)^T u_-, \quad \Delta_{-+}^N = -(\Delta_{+-}^N)^T. \quad (2.192)$$

Отметим, что граничные условия на  $u_{\pm}$  в точности являются аналитическим продолжением  $t \mapsto -i\tau$  граничных условий (2.143) на  $v$ ,  $v^*$ .

Теперь рассмотрим матрицу, состоящую из граничных значений функции Грина  $G_N$ , т.е. в точках  $\beta$  и  $0$

$$\mathbf{G}_N \parallel := \begin{bmatrix} u_-(\beta) (\Delta_{+-}^N)^{-1} u_+^T(\beta) & -u_+(\beta) (\Delta_{-+}^N)^{-1} u_-^T(0) \\ u_-(0) (\Delta_{+-}^N)^{-1} u_+^T(\beta) & -u_+(0) (\Delta_{-+}^N)^{-1} u_-^T(0) \end{bmatrix} \quad (2.193)$$

определённую так же, как и в (2.68). Используя евклидову версию соотношения (2.67), получаем другую форму для этой матрицы

$$\mathbf{G}_N \parallel = (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega})^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \begin{bmatrix} I & \frac{\nu}{\nu+I} \\ \frac{\nu}{\nu+I} & I \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2\omega}}, \quad (2.194)$$

где мы использовали явный вид (2.171) матрицы  $\boldsymbol{\nu}$ , соответствующий специальному выбору (2.170) матрицы  $\omega$ .

Приравнивая две формы для  $\mathbf{G}_N$  и используя явный вид матрицы  $\Delta_{+-}^N$  в (2.192), мы находим два набора равенств. Первый следует из диагональных блоков и имеет вид

$$(W_E + \omega)u_+|_{\tau=0} = 0, \quad (W_E - \omega)u_-|_{\tau=\beta} = 0, \quad (2.195)$$

и означает, что базисные функции  $u_+$ ,  $u_-$  удовлетворяют одинаковым граничным условиям Неймана на обоих граничных значениях евклидового времени (ср. (2.191)). Этот факт также подразумевает следующую явную форму матриц  $\Delta_{+-}^N$ ,  $\Delta_{-+}^N$

$$\Delta_{+-}^N = -(\Delta_{-+}^N)^T = 2u_+^T \omega u_-, \quad (2.196)$$

где базисные функции  $u_+$ ,  $u_-$  вычислены при  $\tau = 0$  либо при  $\tau = \beta$ . Аналогично, из недиагональных блоков (2.194), мы получаем соотношения на граничные значения базисных функций

$$u_-(\beta) = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \frac{\nu + I}{\nu} \sqrt{2\omega} u_-(0), \quad u_+(\beta) = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \frac{\nu}{\nu + I} \sqrt{2\omega} u_+(0). \quad (2.197)$$

Оказывается удобным продолжить евклидовы уравнения движения за границы интервала  $0 < \tau < \beta$  с периодом  $\beta$

$$A_E(\tau + \beta) = A_E(\tau), \quad B_E(\tau + \beta) = B_E(\tau), \quad C_E(\tau + \beta) = C_E(\tau). \quad (2.198)$$

Вместе с (2.177) это также подразумевает

$$A_E(\tau) = A_E(-\tau), \quad B_E(\tau) = -B_E(-\tau), \quad C_E(\tau) = C_E(-\tau). \quad (2.199)$$

Так как функции  $u_{\pm}(\tau)$  удовлетворяют одним и тем же граничным условиям при  $\tau = 0$  и  $\tau = \beta$  (ср. (2.191) и (2.195)), сдвиг их аргумента на период (монодромия) может привести только к домножению на некоторые невырожденные матрицы  $L_{\pm}$ ,  $u_{\pm}(\tau + \beta) = u_{\pm}(\tau)L_{\pm}$ . Из (2.197) мы получаем явный вид для этих матриц

$$\begin{aligned} u_-(\tau + \beta) &= u_-(\tau) u_-^{-1}(0) \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \frac{\nu + I}{\nu} \sqrt{2\omega} u_-(0), \\ u_+(\tau + \beta) &= u_+(\tau) u_+^{-1}(0) \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \frac{\nu}{\nu + I} \sqrt{2\omega} u_+(0). \end{aligned} \quad (2.200)$$

При выборе нормировки

$$u_+(0) = u_-(0) = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}, \quad (2.201)$$

закон монодромии принимает более простой вид

$$u_-(\tau + \beta) = u_-(\tau) \frac{\nu + I}{\nu}, \quad u_+(\tau + \beta) = u_+(\tau) \frac{\nu}{\nu + I}. \quad (2.202)$$

Аналогично, ввиду симметрии (2.199) относительно отражений оператора  $K_E$  функции  $u_+(\tau)$   $u_-(\tau)$  могут отличаться лишь домножением на невырожденную матрицу  $L$ , т.е.  $u_+(\tau) = u_-(\tau) L$ . Для нормировки (2.201) это матрица равна единичной и мы имеем

$$u_+(\tau) = u_-(\tau). \quad (2.203)$$

Для выбора нормировки (2.201) мы получаем  $\Delta_{+-}^N = -\Delta_{-+}^N = I$ , так что блоки евклидовой и смешанной функций Грина в (2.189) имеют вид

$$G_E(\tau, \tau') = u_+(\tau) u_-^T(\tau') \theta(\tau - \tau') + u_-(\tau) u_+^T(\tau') \theta(\tau' - \tau) + u_+(\tau) \nu u_-^T(\tau') + u_-(\tau) \nu u_+^T(\tau'), \quad (2.204)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} G_{LE}^1(t, \tau) \\ G_{LE}^2(t, \tau) \end{bmatrix} &:= \mathbf{G}(t, 0)(\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega})\mathbf{g}_N(\tau) \\ &= \begin{bmatrix} I \\ I \end{bmatrix} \left( v(t) \nu u_-^T(\tau) + v^*(t) (\nu + I) u_+^T(\tau) \right). \end{aligned} \quad (2.205)$$

Если ввести вайтмановскую евклидову функцию Грина как

$$\begin{aligned} G_E^>(\tau, \tau') &= u_+(\tau) (\nu + I) u_-^T(\tau') + u_-(\tau) \nu u_+^T(\tau'), \\ G_E^<(\tau, \tau') &= [G_E^>(\tau', \tau)]^T, \end{aligned} \quad (2.206)$$

то  $G_E(\tau, \tau')$  может быть записана как

$$G_E(\tau, \tau') = G_E^>(\tau, \tau') \theta(\tau - \tau') + G_E^<(\tau, \tau') \theta(\tau' - \tau), \quad (2.207)$$

и лоренцева вайтмановская функция Грина (2.172) есть аналитическое продолжение  $G_E^>(\tau)$ .

Теперь мы можем найти связь между евклидовыми базисными функциями  $u_{\pm}$  их лоренцевыми аналогами  $v, v^*$ . В частности, мы покажем, что оба набора

функций могут быть получены из единственной функции  $V(z)$  комплексного времени  $z = t - i\tau$ , удовлетворяющей комплексифицированным уравнениям движения (2.5)

$$\left[ -\frac{d}{dz}A(z)\frac{d}{dz} - \frac{d}{dz}B(z) + B^T(z)\frac{d}{dz} + C(z) \right] V(z) = 0. \quad (2.208)$$

Это уравнение совпадает с лоренцевыми уравнениями движения при  $z = t$  и с евклидовыми при  $z = -i\tau$ . Предполагая, что коэффициенты  $A(t)$ ,  $B(t)$ , и  $C(t)$  являются вещественными, а также используя (2.199), получаем, что функция  $V^*(z) := (V(z^*))^*$  удовлетворяет тому же уравнению. Кроме того, граничные условия (2.143) для  $v$ ,  $v^*$  связаны с соответствующими граничными условиями (2.191) для  $u_{\pm}$  аналитическим продолжением  $t \mapsto -i\tau$ . Это является мотивацией к наложению аналогичных граничных условий на  $V$ , а именно

$$[iW_C - \omega] V(z)|_{z=0} = 0, \quad W_C \equiv A(z)\frac{d}{dz} + B(z) \quad (2.209)$$

которое сводится к граничным условиям на  $v$  или  $u_+$  при подстановке  $z = t$  или  $z = -i\tau$ , соответственно. Требуя также нормировку

$$V(0) = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}, \quad (2.210)$$

окончательно получаем

$$v(t) = V(t), \quad u_+(\tau) = V(-i\tau), \quad (2.211)$$

т.е. функции  $v$  и  $u_+$  действительно являются аналитическими продолжениями друг друга. Аналогично, комплексно сопрягая (2.209) и имея те же условия на коэффициентные функции, получаем, что функция  $V^*(z)$  удовлетворяет граничному условию

$$[iW_C + \omega] V^*(z)|_{z=0} = 0, \quad (2.212)$$

так что  $v^*$  и  $u_-$  получаются из  $V^*$  как

$$v^*(t) = V^*(t), \quad u_-(\tau) = V^*(-i\tau). \quad (2.213)$$

Тогда, предполагая, что комплексифицированная базисная функция  $V(z)$ ,  $z = t - i\tau$  аналитична при  $0 \leq t \leq T$ ,  $0 \leq \tau < \beta$ , мы получаем следующий закон преобразования лоренцевых базисных функций

$$v(t - i\beta) = v(t) \frac{\nu}{\nu + I}, \quad v^*(t - i\beta) = v^*(t) \frac{\nu + I}{\nu}. \quad (2.214)$$

Используя полученные равенства в (2.172), получаем следующее тождество на вайтмановскую функцию Грина

$$G_{>}(t - i\beta, t') = G_{<}(t, t'), \quad (2.215)$$

которое есть ни что иное как условие Кубо-Мартина-Швингера.

## 2.3 Примеры

### 2.3.1 Гармонический осциллятор

В качестве простейшего показательного примера рассмотрим гармонический осциллятор, демонстрирующий основные понятия и величины, введенные выше, а также удобство специального выбора базисных функций, сделанного в разделе 2.2.5. Действие осциллятора запишем в виде

$$S[\phi] = \frac{1}{2} \int dt (\dot{\phi}^2 - \omega_0^2 \phi^2), \quad (2.216)$$

где  $\phi$  есть однокомпонентное поле, определяющее координату осциллятора, а  $\omega_0$  задаёт его частоту.

Рассмотрим состояние, определяемое евклидовым функциональным интегралом (2.174), в котором евклидово действие есть аналитическое продолжение (2.186) лоренцева

$$S_E[\phi_E] = \frac{1}{2} \int d\tau (\dot{\phi}_E^2 + \omega_0^2 \phi_E^2). \quad (2.217)$$

Отметим, что для  $J_E = 0$  матрица плотности (2.174) совпадает с тепловой матрицей плотности с обратной температурой  $\beta$ . Соответствующий дифференциальный оператор, задающий евклидовы уравнения движения  $K_E \phi_E = 0$  и оператор Вронского имеют вид

$$K_E = -\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega_0^2, \quad W_E = \frac{d}{d\tau}. \quad (2.218)$$

чтобы использовать ответ (2.182) для матрицы плотности, нам необходимо сначала найти функцию Грина задачи Дирихле, которая строится из соответствующих базисных функций  $u_{\pm}^D(\tau)$  удовлетворяющих граничным условиям

$$K_E u_{\pm}^D(\tau) = 0, \quad u_{+}^D(\beta) = u_{-}^D(0) = 0. \quad (2.219)$$

Эти базисные функции могут быть выбраны в виде

$$u_+^D(\tau) = \sinh \omega_0(\tau - \beta), \quad u_-^D(\tau) = \sinh \omega_0 \tau \quad (2.220)$$

так что функция Грина задачи Дирихле имеет вид

$$G_D(\tau, \tau') = \frac{1}{\Delta_{+-}^D} [u_+^D(\tau) u_-^D(\tau') \theta(\tau - \tau') + u_-^D(\tau) u_+^D(\tau') \theta(\tau' - \tau)], \quad (2.221)$$

$$\Delta_{+-}^D = u_+^D(W_E u_-^D) - (W_E u_+^D) u_-^D = -\sinh \beta \omega_0.$$

Подставляя полученную функцию Грина в (2.183), находим параметры гауссовой матрицы плотности (2.123) как

$$\mathbf{\Omega} = \frac{\omega_0}{\sinh \beta \omega_0} \begin{bmatrix} \cosh \beta \omega_0 & -1 \\ -1 & \cosh \beta \omega_0 \end{bmatrix} \quad (2.222)$$

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\sinh \beta \omega_0} \int_0^\beta d\tau \begin{bmatrix} -\sinh \omega_0 \tau \\ \sinh \omega_0(\tau - \beta) \end{bmatrix} J_E(\tau) \quad (2.223)$$

Базисные функции, удовлетворяющие (2.143), являются линейными комбинациями решений уравнений движения  $e^{\pm i\omega_0 t}$  и имеют вид (ср. (2.101) и (2.108))

$$v(t) = \frac{1}{2\sqrt{2\omega\omega_0}} \left[ (\omega_0 + \omega)e^{-i\omega_0 t} + (\omega_0 - \omega)e^{i\omega_0 t} \right], \quad (2.224)$$

где для простоты мы предполагаем  $\omega$  вещественной.

Для получения лоренцевой функции Грина (2.150) нам необходимо также вычислить матрицу  $\boldsymbol{\nu}$ , определённую в (2.149). Подставляя матрицу  $\mathbf{\Omega}$  определённую в (2.222), получаем

$$\boldsymbol{\nu} = \begin{bmatrix} \kappa & \nu \\ \nu & \kappa \end{bmatrix}, \quad \nu = \frac{\omega^2 + \omega_0^2}{4\omega\omega_0} \coth \frac{\beta\omega_0}{2} - \frac{1}{2}, \quad \kappa = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{4\omega\omega_0} \coth \frac{\beta\omega_0}{2} \quad (2.225)$$

что делает функцию Грина (2.150) довольно сложной даже в случае гармонического осциллятора (см. также (2.164) для вайтмановской функции). Очевидно, при выборе  $\omega = \omega_0$  диагональные компоненты  $\kappa$  в  $\boldsymbol{\nu}$  сокращаются, что приводит к существенным упрощениям. Покажем, что этот выбор следует также из конструкции, представленной в разделе 2.2.5. Выражая  $R$  и  $S$  из (2.222) как

$$R = \frac{\omega_0 \cosh \beta \omega_0}{\sinh \beta \omega_0}, \quad S = -\frac{\omega_0}{\sinh \beta \omega_0}, \quad \sigma := \frac{S}{R} = -\frac{1}{\cosh \beta \omega_0} \quad (2.226)$$

и подставляя в (2.170), получаем  $\omega = \omega_0$  как и ожидалось. Это немедленно приводит к занулению  $\kappa$  и

$$\boldsymbol{\nu} = \begin{bmatrix} 0 & \nu \\ \nu & 0 \end{bmatrix}, \quad \nu = \nu_0 := \frac{1}{e^{\beta\omega_0} - 1}, \quad (2.227)$$

где в полученном выражении для  $\nu$  мы распознаём распределение Бозе-Эйнштейна. Базисная функция  $v(t)$  принимает вид положительно частотной базисной функции

$$v_0(t) := v(t)|_{\omega=\omega_0} = \frac{1}{\sqrt{2\omega_0}} e^{-i\omega_0 t}. \quad (2.228)$$

Таким образом, из (2.150) мы получаем хорошо знакомое выражение для вайтмановской функции

$$\begin{aligned} G_{>}(t, t') &= (\nu_0 + 1) v_0(t) v_0^*(t') + \nu_0 v_0(t) v_0^*(t') \\ &= \frac{1}{2\omega_0} \left( (\nu_0 + 1) e^{-i\omega_0(t-t')} + \nu_0 e^{i\omega_0(t-t')} \right), \end{aligned} \quad (2.229)$$

в терминах которой выражаются также фейнмановская и анти-фейнмановская функции Грина. Отметим, что (2.164) с подставленными (2.225), (2.224) даёт в точности тот же ответ, но в значительно более громоздкой форме.

### 2.3.2 Общая одномерная система

Теперь давайте рассмотрим общий случай, в котором поел  $\phi$  по-прежнему однокомпонентное, однако действие явно зависит от времени таким образом, что предположения раздела 2.2.7. В этом случае базисные функции определённые в (2.191) также являются однокомпонентными. Тогда из (2.202) мы заключаем, что при сдвиге аргумента базисной функций  $u_{\pm}(\tau)$  на период, они лишь домножаются на некоторый числовой множитель. Согласно теории Флоке периодических дифференциальных уравнений, к которым в нашем случае относятся евклидовы уравнения движения (2.175), это означает, что функции  $u_{\pm}(\tau)$  являются функциями Блоха, т.е. собственными функциями оператора трансляции на период. Этот факт мотивирует нас применить теорию Флоке, которая является наиболее развитой для одномерного случая.

В одномерном случае евклидовы уравнения движения имеют вид

$$\left[ -\frac{d}{d\tau} A_E \frac{d}{d\tau} - \dot{B}_E(\tau) + C_E(\tau) \right] \phi_E(\tau) = 0. \quad (2.230)$$

где коэффициенты  $A_E(\tau)$ ,  $B_E(\tau)$  и  $C_E(\tau)$  есть обычные функции евклидоваго времени. Предполагая, что кинетический член является положительным, т.е.  $A_E(\tau) > 0$  мы можем определить новую переменную

$$y(\tau) = \sqrt{A_E(\tau)}\phi_E(\tau). \quad (2.231)$$

так что уравнения движения принимают канонический вид

$$\left[ \frac{d^2}{d\tau^2} + Q(\tau) \right] y(\tau) = 0, \quad (2.232)$$

где функция  $Q(\tau)$  определена как

$$Q(\tau) = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{d\tau^2} \log A_E(\tau) - \frac{1}{4} \left( \frac{d}{d\tau} \log A_E(\tau) \right)^2 + \frac{1}{A_E(\tau)} \left( \dot{B}_E(\tau) - C_E(\tau) \right) \quad (2.233)$$

и является периодической и симметричной относительно отражений

$$Q(\tau + \beta) = Q(\tau), \quad Q(\tau) = Q(-\tau). \quad (2.234)$$

Уравнение (2.232) с периодической функцией  $Q(\tau)$  обычно называют уравнением Хилла.

Теория Флоке гарантирует, что если уравнение (2.232) не имеет периодических или дважды периодических решений, то существует базис  $y_{\pm}(\tau)$  решений этого уравнения, такой что

$$y_{\pm}(\tau + \beta) = e^{\mp\beta\varepsilon} y_{\pm}(\tau) \quad (2.235)$$

где параметр  $\varepsilon$  является либо вещественным либо чисто мнимым, и функционально зависит от  $Q(\tau)$ . Не теряя общности мы можем считать, что  $\varepsilon > 0$  в вещественном случае, и  $\varepsilon = -iq$ ,  $0 < q < \pi/\beta$  в мнимом случае. Базисные функции имеют следующие важные свойства, зависящие от того, является ли параметр  $\varepsilon$  вещественным или мнимым. Вещественный  $\varepsilon$  приводит к вещественным базисным функциям  $y_{\pm}(\tau)$ , в то время как мнимый  $\varepsilon$  подразумевает  $(y_{\pm}(\tau))^* = y_{\mp}(\tau)$ . Симметрия относительно отражений  $Q(\tau) = Q(-\tau)$  приводит к дополнительному свойству  $y_{\pm}(\tau) = -y_{\mp}(\tau)$  так что для мнимого  $\varepsilon$ , мы имеем  $(y_{\pm}(\tau))^* = y_{\pm}(-\tau)$ .

Теперь мы можем вернуться к изначальному уравнению (2.230). Используя (2.231), мы можем записать базис его решений  $u_{\pm}(\tau)$  в терминах  $y_{\pm}(\tau)$  как

$$u_{\pm}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{A_E(\tau)}} y_{\pm}(\tau). \quad (2.236)$$

Эти базисные функции наследуют все свойства  $y_{\pm}(\tau)$  касающиеся сдвига аргумента на период, отражения и комплексного сопряжения. В частности

$$u_{\pm}(\tau + \beta) = e^{\mp\beta\varepsilon} u_{\pm}(\tau). \quad (2.237)$$

Сравнивая с (2.202) мы заключаем, что параметр  $\varepsilon$  связан с  $\nu$  как

$$\nu = \frac{1}{e^{\beta\varepsilon} - 1}. \quad (2.238)$$

Базисные функции  $u_{\pm}(\tau)$  имеют существенно различные свойства, в зависимости от того, является ли параметр  $\varepsilon$  вещественным или мнимым. В вещественном случае мы имеем

$$(W_E \pm \omega)u_{\pm}|_{\tau=0,\beta} = 0 \quad (2.239)$$

где  $\omega$  есть вещественное число, как мы покажем ниже, совпадающее с определённым в (2.170). Напротив, мнимый  $\varepsilon$  приводит к свойству  $(u_{\pm}(\tau))^* = u_{\pm}(-\tau)$ , так что отношение  $W_E u_{\pm}(0)/u_{\pm}(0) = W_E u_{\pm}(\beta)/u_{\pm}(\beta)$  является чисто мнимым<sup>2</sup>, так что мы можем записать

$$(iW_E \pm \omega')u_{\pm}|_{\tau=0,\beta} = 0, \quad (2.240)$$

где число  $\omega' = i\omega$  является мнимым.

Давайте теперь вычислим матрицу плотности (2.174) и исследуем её свойства. Чтобы воспользоваться ответом (2.182), необходимо сначала построить функцию Грина задачи Дирихле. Соответствующие базисные функции  $u_{\pm}^D(\tau)$ , удовлетворяющие  $u_{\pm}^D(0) = u_{\pm}^D(\beta) = 0$  могут быть построены из линейных комбинаций  $u_{\pm}(\tau)$ . А именно, определим  $u_{\pm}^D(\tau)$  как

$$u_{\pm}^D(\tau) = \frac{1}{2}(u_{+}(\tau) - u_{-}(\tau)) \quad (2.241)$$

так что  $u_{\pm}^D(0) = 0$  следует из свойства  $u_{-}(\tau) = u_{+}(-\tau)$ . Благодаря свойству симметрии (2.230) относительно отражений мы можем получить  $u_{+}^D(\tau)$  из  $u_{-}^D(\tau)$  как

$$u_{+}^D(\tau) \equiv u_{-}^D(\beta - \tau) = \frac{1}{2}(e^{-\beta\varepsilon}u_{-}(\tau) - e^{\beta\varepsilon}u_{+}(\tau)). \quad (2.242)$$

Соответствующий Вронскиан  $u_{+}^D$  и  $u_{-}^D$  имеет вид

$$\Delta_{+-}^D = u_{+}^D(W_E u_{-}^D) - (W_E u_{+}^D)u_{-}^D = -\sinh \beta\varepsilon u_{+}(0)W_E u_{+}(0) \quad (2.243)$$

<sup>2</sup>При выводе этого свойства мы использовали то, что  $\dot{A}_E(0) = B_E(0) = 0$ , как следствие  $A_E(\tau) = A_E(-\tau)$  и  $B_E(\tau) = -B_E(-\tau)$ .

где мы использовали соотношения (2.241), (2.242) между базисными функциями задач Дирихле  $u_{\pm}(\tau)$  и их производными в граничных точках

$$W_E u_-^D(0) = -W_E u_+^D(\beta) = W_E u_+(0), \quad W_E u_-^D(\beta) = -W_E u_+^D(0) = \cosh \beta \varepsilon W_E u_+(0). \quad (2.244)$$

Подстановка соответствующей функции Грина задачи Дирихле в (2.183) даёт

$$\mathbf{\Omega} = \frac{\omega}{\sinh \beta \varepsilon} \begin{bmatrix} \cosh \beta \varepsilon & -1 \\ -1 & \cosh \beta \varepsilon \end{bmatrix}, \quad (2.245)$$

где  $\omega$  определена в (2.239). Отметим, что для вещественных  $\varepsilon$  полученное выражение совпадает с (2.173), где необходимо подставить (2.238). Для мнимого  $\varepsilon = iq$ , получаем, что  $\mathbf{\Omega}$  имеет вид

$$\mathbf{\Omega} = \frac{\omega'}{\sin \beta q} \begin{bmatrix} \cos \beta q & -1 \\ -1 & \cos \beta q \end{bmatrix}, \quad (2.246)$$

где  $\omega'$  определена в (2.240).

Следуя Приложению Б.3, давайте исследуем свойства полученной матрицы плотности, определяемой  $\mathbf{\Omega}$ . Для вещественных  $\varepsilon$  мы имеем  $R = \omega \coth \beta \varepsilon$ ,  $S = -\omega / \sinh \beta \varepsilon$ , так что  $R$ ,  $R+S$  и  $R-S$  имеют один знак, и мы заключаем, что матрица плотности является ограниченной, нормируемой и положительно определённой для  $\omega > 0$ . Если это так, то  $\sigma \equiv S/R = -1 / \cosh \beta \varepsilon$  и определение (2.239) согласовано с (2.170), что делает возможной корпускулярную интерпретацию в теории. Напротив, для мнимого  $\varepsilon$  мы имеем  $R = \omega' \cot \beta q$ ,  $S = -\omega' / \sin \beta q$ , так что  $R+S$  и  $R-S$  имеют различные знаки, так что даже если матрица плотности является нормируемой, корпускулярная интерпретация в такой теории невозможна.

## Глава 3

# Корреляционные функции в системах с туннелированием

Целью данной главы является построение техники вычисления корреляционных функций в системах, проявляющих инстантонные (туннельные) эффекты, и находящихся в тепловом равновесии. Для этого мы используем технику Швингера-Келдыша. Однако вещественная часть контура Швингера-Келдыша (имеющая в случае тепловых состояний три сегмента, соответствующие прямой и обратной эволюции в вещественном времени, и эволюции в мнимом времени), по крайней мере, наивно нарушает инвариантность относительно сдвигов мнимого времени, поэтому возникает проблема непertурбативного учёта нулевой моды, соответствующей этой симметрии. Мы разрабатываем процедуру, с помощью которой указанная симметрия может быть восстановлена. После этого мы учитываем нулевую моду непertурбативно, используя метод Фаддеева-Попова, и строим диаграммную технику для корреляционных функций в вещественном времени в системах с эффектами туннелирования.

### 3.1 Корреляционные функции в мнимом времени

Перед тем как перейти непосредственно к изучению корреляционных функций в инстантонных системах в вещественном времени, мы рассмотрим схему вычисления аналогичных корреляционных функций в мнимом времени. Процедура вычисления последних имеет, во многом те же самые тонкости и сложности, но в существенно упрощенном виде. Это даст нам важную интуицию при обобщении этой процедуры на случай вещественного времени, представляющий основной объект нашего интереса. При рассмотрении корреляционных функций

в мнимом времени мы, в основном, следуем линиям [43] и [44], однако обобщаем первую ссылку с точки зрения систематического учёта петлевых поправок, а также применяем технические приёмы из второй в случае многоточечных корреляционных функций.

Рассмотрим сначала тепловую статсумму некоторой квантовомеханической системы

$$Z = \text{Tr} e^{-\beta \hat{H}}, \quad (3.1)$$

где  $\beta$  обозначает обратную температуру. Эта статсумма может быть представлена в виде функционального интеграла по периодическим траекториям

$$Z = \int_{\text{periodic}} \mathcal{D}x e^{-S_e[x]}, \quad S_e[x] = \int_0^\beta d\tau \left[ \frac{\dot{x}^2}{2} + V(x) \right]. \quad (3.2)$$

Здесь  $S_e$  есть евклидово действие рассматриваемой системы. Вплоть до конца этого раздела мы будем опускать индекс  $e$  у  $S_e$  для краткости.

Вычисление статсуммы с использованием теории возмущений на фоне нетривиальной перевальной точки имеет хорошо известную проблему нулевой моды. Чтобы продемонстрировать эту проблему, разложим действие на фоне траектории  $\bar{x}(\tau)$ , удовлетворяющей классическим уравнениям движения

$$\ddot{\bar{x}}(\tau) - V'(\bar{x}) = 0, \quad \bar{x}(0) = \bar{x}(\beta), \quad \dot{\bar{x}}(0) = \dot{\bar{x}}(\beta) \quad (3.3)$$

и перейдем к от интегрирования по  $x$  к интегрированию по возмущениям  $\eta$  около траектории  $\bar{x}$ , т.е.  $x(\tau) = \bar{x}(\tau) + \eta(\tau)$ . Тогда выражение для статсуммы принимает вид

$$Z = e^{-S[\bar{x}]} \int_{\text{periodic}} \mathcal{D}\eta \exp\left(-S^{(2)}[\bar{x}, \eta] - S^{\text{int}}[\bar{x}, \eta]\right) \quad (3.4)$$

где  $S^{(2)}[\bar{x}, \eta]$  есть квадратичная по возмущениям часть  $S[\bar{x} + \eta]$

$$S^{(2)}[\bar{x}, \eta] = \frac{1}{2} \int d\tau d\tau' \eta(\tau) K(\tau, \tau') \eta(\tau'), \quad K(\tau, \tau') = [-\partial_\tau^2 + V''(\bar{x})] \delta(\tau - \tau'), \quad (3.5)$$

а  $S^{\text{int}}$  содержит в себе члены взаимодействия

$$S^{\text{int}}[\bar{x}, \eta] = \sum_{k \geq 3} \frac{1}{k!} \int_0^\beta d\tau V^{(k)}(\bar{x}(\tau)) \eta^k(\tau). \quad (3.6)$$

Оператор  $K$ , определяемый своим интегральным ядром  $K(\tau, \tau')$  может быть диагонализирован набором своих собственных функций  $\eta_n$  удовлетворяющих периодическим граничным условиям

$$(K\eta_n)(\tau) = \int_0^\beta d\tau' K(\tau, \tau')\eta_n(\tau') = \lambda_n\eta_n(\tau). \quad (3.7)$$

Далее, вычисляя производную от обеих частей равенства (3.3), мы получаем

$$[-\partial_\tau^2 + V''(\bar{x})]\dot{\bar{x}}(\tau) = 0, \quad (3.8)$$

и заключаем, что оператор  $K$  имеет нулевую моду

$$\eta_0(\tau) = \frac{1}{\|\dot{\bar{x}}\|}\dot{\bar{x}}(\tau), \quad \|\dot{\bar{x}}\|^2 = \int_0^\beta d\tau (\dot{\bar{x}}(\tau))^2, \quad (3.9)$$

причиной возникновения которой является инвариантность действия относительно сдвигов евклидоваго времени

$$S[x^{\tau_0}] = S[x], \quad x^{\tau_0}(\tau) = x(\tau + \tau_0). \quad (3.10)$$

Таким образом, однопетлевая статсумма, пропорциональная  $(\text{Det } K)^{-1/2}$  наивно расходится, так что мы вынуждены прибегнуть к процедуре фиксации «калибровочной» инвариантности относительно сдвигов по мнимому времени. Для этого, сделаем следующее разбиение единицы

$$1 = \frac{1}{\sqrt{\xi}} \int_0^\beta d\tau_0 \frac{d\chi[x^{\tau_0}]}{d\tau_0} \delta\left(\frac{1}{\sqrt{\xi}}\chi[x^{\tau_0}] - \lambda\right), \quad (3.11)$$

где  $\chi$  функционал, фиксирующий калибровку

$$\chi[x] = \frac{1}{\|\dot{\bar{x}}\|} \int_0^\beta d\tau \dot{\bar{x}}(\tau)x(\tau), \quad \lambda, \xi = \text{const.} \quad (3.12)$$

Дельта-функция фиксирует проекцию  $x(\tau)$  на нулевую моду, а  $\lambda$  и  $\xi$  — параметры, чья роль станет ясна ниже. Делая подстановку разбиение единицы в функциональный интеграл (3.2), и переходя к интегрированию по  $x^{\tau_0}$  в мере функционального интегрирования, мы получаем следующее выражение для статсуммы

$$Z = \frac{\beta}{\sqrt{\xi}} \int_{\text{periodic}} \mathcal{D}x J[x] \delta\left(\frac{1}{\sqrt{\xi}}\chi[x] - \lambda\right) e^{-S[x]}, \quad (3.13)$$

$$J[x] = \left. \frac{d\chi[x^{\tau_0}]}{d\tau_0} \right|_{\tau_0=0} = \frac{1}{\|\dot{\bar{x}}\|} \int_0^\beta d\tau \dot{\bar{x}}(\tau)\dot{x}(\tau),$$

где интегрирование по  $\tau_0$  отщепилось, и мы заменили интеграл на его значение, равное  $\beta$ . Так как  $Z$  не зависит от параметра  $\lambda$ , мы можем усреднить по нему с гауссовым весом  $e^{-\lambda^2/2}d\lambda/\sqrt{2\pi}$ , в результате чего выражение для статсуммы принимает вид

$$Z = \frac{\beta}{\sqrt{2\pi\xi}} \int_{\text{periodic}} \mathcal{D}x J[x] e^{-S_\xi[x]}, \quad S_\xi[x] = S[x] + \frac{1}{2\xi}\chi[x]^2. \quad (3.14)$$

Отметим, что параметр  $\xi$  обязан стремиться к нулю, чтобы уравнения, накладываемое дельта-функцией, имело решение при произвольно больших значениях параметра  $\lambda$ . Здесь как  $S_\xi$  мы обозначили калибровочно-фиксированный функционал действия. В конце концов, раскладывая подынтегральное выражение около  $\bar{x}$ , мы получаем пертурбативную форму статсуммы<sup>1</sup>

$$Z = \frac{\beta\|\dot{\bar{x}}\|}{\sqrt{2\pi\xi}} e^{-S[\bar{x}]} \int_{\text{periodic}} \mathcal{D}\eta \left[ 1 + \frac{1}{\|\dot{\bar{x}}\|} \int_0^\beta d\tau \eta_0(\tau)\dot{\eta}(\tau) \right] e^{-S_\xi^{(2)}[\bar{x},\eta] - S^{\text{int}}[\bar{x},\eta]}. \quad (3.15)$$

Квадратичная часть калибровочно-фиксированного действия принимает вид

$$S_\xi^{(2)}[\bar{x},\eta] = \frac{1}{2} \int d\tau d\tau' \eta(\tau) K_\xi(\tau, \tau') \eta(\tau'), \quad (3.16)$$

$$K_\xi(\tau, \tau') = [-\partial_\tau^2 + V''(\bar{x})] \delta(\tau - \tau') + \frac{1}{\xi} \eta_0(\tau)\eta_0(\tau'). \quad (3.17)$$

Таким образом, нулевая мода  $\eta_0$  приобретает ненулевое собственное значение  $\xi^{-1}$ . Функция Грина оператора  $K_\xi$ , в свою очередь, может быть найдена с помощью спектрального разложения

$$(K_\xi \eta_n)(\tau) = \lambda_n \eta_n(\tau), \quad (3.18)$$

где собственные функции  $\eta_n(\tau)$  удовлетворяют периодическим граничным условиям и нормированы, а  $\eta_0(\tau) = \dot{\bar{x}}(\tau)/\|\dot{\bar{x}}\|$ , как и ранее. Таким образом, функция Грина, удовлетворяющая

$$(K_\xi G_\xi)(\tau, \tau') = \delta(\tau - \tau') \quad (3.19)$$

имеет следующее явное представление

$$G_\xi(\tau, \tau') = \xi \eta_0(\tau)\eta_0(\tau') + \sum_{n \neq 0} \lambda_n^{-1} \eta_n(\tau)\eta_n(\tau'). \quad (3.20)$$

---

<sup>1</sup>В общем случае может существовать целый набор неэквивалентных перевальных решений, т.е. периодических решений классических уравнений движения, так что необходимо произвести суммирование по ним. Однако, мы будем учитывать только одно такое решение с целью сокращения обозначений.

В пределе  $\xi \rightarrow 0$ , соответствующая функция Грина  $G_0$  удовлетворяет следующему уравнению

$$(-\partial_\tau^2 + V''(\bar{x}))G_0(\tau, \tau') = \delta(\tau - \tau') - \eta_0(\tau)\eta_0(\tau'), \quad \int_0^\beta d\tau \eta_0(\tau)G_0(\tau, \tau') = 0, \quad (3.21)$$

явное решение которого найдено в Приложении В.1.

Теперь давайте обобщим процедуру вычисления статсуммы  $Z$  на случай производящего функционала корреляционных функций, упорядоченных по мнимому времени

$$Z[j] = \text{Tr} \left[ e^{-\beta \hat{H}} T_\tau \exp \left( \int_0^\beta d\tau j(\tau) \hat{x}(\tau) \right) \right], \quad \hat{x}(\tau) = e^{\tau \hat{H}} \hat{x} e^{-\tau \hat{H}}, \quad (3.22)$$

в терминах которого  $n$ -точечная корреляционная функция имеет вид

$$D_n(\tau_1, \dots, \tau_n) = \frac{1}{Z} \text{Tr} \left[ e^{-\beta \hat{H}} T_\tau \left( \hat{x}(\tau_1) \dots \hat{x}(\tau_n) \right) \right] = \frac{1}{Z} \frac{\delta^n Z[j]}{\delta j(\tau_1) \dots \delta j(\tau_n)} \Big|_{j=0}. \quad (3.23)$$

Здесь  $T_\tau$  обозначает упорядочение операторов по мнимому времени. Представление функционала  $Z[j]$  в виде функционального интеграла имеет вид

$$Z[j] = \int_{\text{periodic}} \mathcal{D}x e^{-S[x] + \int_0^\beta d\tau j(\tau)x(\tau)} \quad (3.24)$$

Процедура вычисления  $Z[j]$  повторяет соответствующую процедуру для статсуммы  $Z$ , исключая тот факт, что интегрирование по  $\tau_0$ , возникающее из разбиения единицы (3.11) не отщепляется, а приводит к усреднению экспоненты члена с источником по калибровочной группе сдвигов евклидоваго времени

$$Z[j] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\xi} \|\dot{\bar{x}}\|} \int_{\text{periodic}} \mathcal{D}x \left[ \int_0^\beta d\tau \dot{\bar{x}}(\tau) \dot{\bar{x}}(\tau) \right] e^{-S_\xi[x]} \int_0^\beta d\tau_0 e^{\int_0^\beta d\tau j(\tau)x(\tau-\tau_0)}, \quad (3.25)$$

или, после разложения около перевальной траектории  $\bar{x}$

$$Z[j] = \frac{\|\dot{\bar{x}}\|}{\sqrt{2\pi\xi}} e^{-S[\bar{x}]} \int_{\text{periodic}} \mathcal{D}\eta \left[ 1 + \frac{1}{\|\dot{\bar{x}}\|} \int_0^\beta d\tau \eta_0(\tau) \dot{\eta}(\tau) \right] e^{-S_\xi^{(2)}[\bar{x}, \eta] - S^{\text{int}}[\bar{x}, \eta]} \times \int_0^\beta d\tau_0 e^{\int_0^\beta d\tau j(\tau)(\bar{x}(\tau-\tau_0) + \eta(\tau-\tau_0))}. \quad (3.26)$$

Усреднение по  $\tau_0$  подчеркивает тот факт, что наблюдаемые величины должны быть «калибровочно-инвариантными», а именно, подставляя производящий функционал (3.25) в (3.23), мы получаем, что  $n$ -точечная функция имеет вид

$$D_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \propto \int \mathcal{D}x \left[ \frac{1}{\beta} \int_0^\beta d\tau_0 x(\tau_1 - \tau_0) \dots x(\tau_n - \tau_0) \right] \left[ \int_0^\beta d\tau \dot{x}(\tau) \dot{x}(\tau) \right] e^{-S_\xi[x]}. \quad (3.27)$$

Здесь величина, подлежащая усреднению под знаком функционального интеграла

$$\tilde{D}_n[x](\tau_1, \dots, \tau_n) = \frac{1}{\beta} \int_0^\beta d\tau_0 x(\tau_1 - \tau_0) \dots x(\tau_n - \tau_0), \quad (3.28)$$

действительно является калибровочным инвариантом, то есть  $\tilde{D}_n[x^{\tau'}] = \tilde{D}_n[x]$ , где  $x^{\tau'}(\tau) = x(\tau + \tau')$  как и ранее.

Производящий функционал корреляционных функций мнимого времени (3.25) и его пертурбативная форма (3.26) могут быть переписаны в немного другом виде, имеющим, тем не менее, дополнительные полезные свойства. В частности, если сделать подстановку  $\tau_0 \mapsto -\tau_0$ , и перейти от интегрирования по  $x(\tau)$  к интегрирования по  $x(\tau + \tau_0)$ , производящий функционал приобретает вид

$$Z[j] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\xi\|\dot{\bar{x}}\|}} \int_0^\beta d\tau_0 \int_{\text{periodic}} \mathcal{D}x \left[ \int_0^\beta d\tau \dot{x}^{\tau_0}(\tau) \dot{x}(\tau) \right] \times \exp \left\{ -S[x] - \frac{1}{2\xi} (\chi[\bar{x}^{\tau_0}; x])^2 + \int_0^\beta d\tau j(\tau)x(\tau) \right\}, \quad (3.29)$$

где мы ввели обозначение

$$\chi[\bar{x}; x] = \frac{1}{\|\dot{\bar{x}}\|} \int_0^\beta d\tau \dot{\bar{x}}(\tau)x(\tau), \quad (3.30)$$

для калибровочно-фиксированного функционала, подчеркивающее его явную зависимость от перевального решения  $\bar{x}$ . Аналогично, пертурбативная форма (3.26) производящего функционала может быть переписана как

$$Z[j] = \frac{\|\dot{\bar{x}}\|}{\sqrt{2\pi\xi}} e^{-S[\bar{x}]} \int_0^\beta d\tau_0 \int_{\text{periodic}} \mathcal{D}\eta \left[ 1 + \frac{1}{\|\dot{\bar{x}}\|} \int_0^\beta d\tau \eta_0^{\tau_0}(\tau) \dot{\eta}(\tau) \right] \times \exp \left\{ -S_\xi^{(2)}[\bar{x}^{\tau_0}, \eta] - S^{\text{int}}[\bar{x}^{\tau_0}, \eta] + \int_0^\beta d\tau j(\tau)(\bar{x}^{\tau_0}(\tau) + \eta(\tau)) \right\}, \quad (3.31)$$

где  $\eta_0^{\tau_0}(\tau) = \eta_0(\tau + \tau_0)$ . Эта форма производящего функционала имеет следующую важную интерпретацию. В процессе вычисления корреляционных функций мы сначала фиксируем фон  $\bar{x}^{\tau_0}$  и вычисляем корреляционную функцию на этом фоне. После этого, мы интегрируем по  $\tau_0$ , параметризующему сдвиг фонового решения  $\bar{x}$  по мнимому времени. Таким образом, в некотором смысле процедура вычисления включает в себя «усреднение по фоновым решениям» в качестве последнего шага.

Для разработки диаграммной техники полезно переписать производящий функционал  $Z[j]$  в виде, знакомом из функциональной формулировки теоремы Вика

$$Z[j] = Z_{1\text{-loop}} \frac{1}{\beta} \int_0^\beta d\tau_0 \exp \left\{ \frac{1}{2} \int d\tau d\tau' \frac{\delta}{\delta\eta(\tau)} G_\xi^{\tau_0}(\tau, \tau') \frac{\delta}{\delta\eta(\tau')} \right\} \times \left[ 1 + \frac{1}{\|\dot{\bar{x}}\|} \int_0^\beta d\tau \eta_0^{\tau_0}(\tau) \dot{\eta}(\tau) \right] e^{-S^{\text{int}}[\bar{x}^{\tau_0}, \eta] + \int_0^\beta d\tau j(\tau)(\bar{x}^{\tau_0}(\tau) + \eta(\tau))} \Big|_{\eta=0}, \quad (3.32)$$

где мы обозначили

$$Z_{1\text{-loop}} = \frac{\beta \|\dot{\bar{x}}\|}{\sqrt{2\pi\xi}} e^{-S[\bar{x}]} \int_{\text{periodic}} \mathcal{D}\eta e^{-S_\xi^{(2)}[\bar{x}, \eta]}, \quad (3.33)$$

а  $G_\xi^{\tau_0}(\tau, \tau')$  есть функция Грина оператора  $K_\xi$ , определенного в (3.17), но для сдвинутого фона  $\bar{x} \mapsto \bar{x}^{\tau_0}$  (и нулевой моды, соответственно  $\eta_0 \mapsto \eta_0^{\tau_0}$ ).

### 3.2 Корреляционные функции в вещественном времени

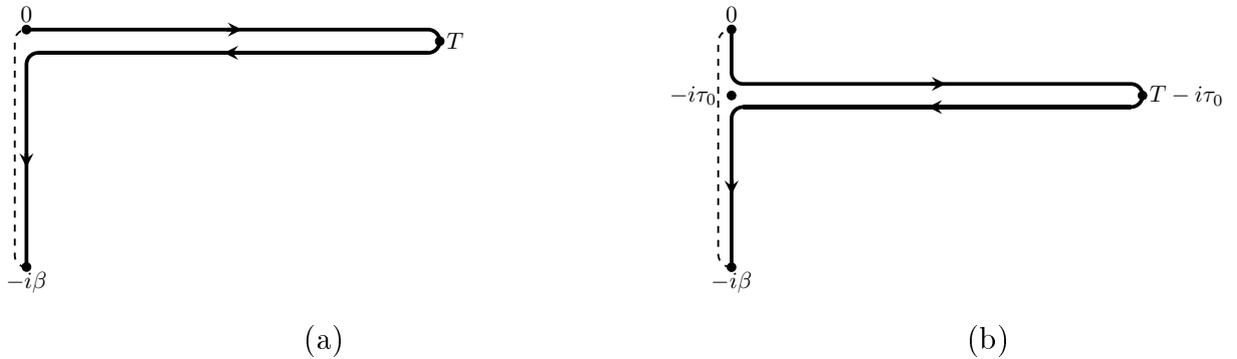


Рис. 3.1: (a) Традиционный контур Швингера-Келдыша  $C$  в комплексном времени  $z = t - i\tau$ . (b) Контур Швингера-Келдыша  $C^{\tau_0}$ , сдвинутый на  $-i\tau_0$ .

Теперь мы готовы приступить к изучению корреляционных функций в вещественном времени, определяемых производящим функционалом

$$Z[j_+, j_-] = \text{Tr} \left[ e^{-\beta \hat{H}} \bar{T} \exp \left( -i \int_0^T dt j_-(t) \hat{x}(t) \right) T \exp \left( i \int_0^T dt j_+(t) \hat{x}(t) \right) \right], \quad (3.34)$$

$$\hat{x}(t) = e^{i\hat{H}t} \hat{x} e^{-i\hat{H}t},$$

так, что вариационные производные по источникам  $j_{\pm}$  дают корреляционные функции следующего вида

$$\begin{aligned} D_{nm}(t_1^+, \dots, t_n^+; t_1^-, \dots, t_m^-) &= \frac{1}{Z} \text{Tr} \left[ e^{-\beta \hat{H}} \bar{T} (\hat{x}(t_1^-) \dots \hat{x}(t_m^-)) T (\hat{x}(t_1^+) \dots \hat{x}(t_n^+)) \right] \\ &= i^{m-n} \frac{1}{Z} \frac{\delta^{n+m} Z[j_+, j_-]}{\delta j_+(t_1^+) \dots \delta j_+(t_n^+) \delta j_-(t_1^-) \dots \delta j_-(t_m^-)} \Big|_{j_{\pm}=0} \end{aligned} \quad (3.35)$$

где  $T$  и  $\bar{T}$  обозначают временное и обратное временное упорядочение операторов, соответственно. В действительности, существует неоднозначность в определении производящего функционала (3.34). А именно, используя циклическое свойство операции взятия следа, мы можем переписать его как

$$\begin{aligned} Z^{\tau_0}[j_+, j_-] &= \text{Tr} \left[ e^{-(\beta-\tau_0)\hat{H}} \bar{T} \exp \left( -i \int_0^T dt j_-(t) \hat{x}(t) \right) T \exp \left( i \int_0^T dt j_+(t) \hat{x}(t) \right) e^{-\tau_0 \hat{H}} \right], \end{aligned} \quad (3.36)$$

для произвольного параметра  $\tau_0$ , который мы будем считать принадлежащим интервалу  $0 \leq \tau_0 \leq \beta$ . Таким образом, временная эволюция под знаком следа идёт вдоль комплексного контура<sup>2</sup>  $C^{\tau_0}$ , показанного на Рис. 3.1b. В свою очередь, вариационные производные по  $j_+$  и  $j_-$  соответствуют вставке операторов на верхнем и нижнем горизонтальных сегментах контура, соответственно. Случай  $\tau_0 = 0$  соответствует контуру Швингера-Келдыша  $C$ , показанному на Рис. 3.1a (в присутствии сегмента, параллельного мнимой оси также называемом контуром Каданова-Байма [53]), в то время как ненулевое значение  $\tau_0$  приводит к контуру  $C^{\tau_0}$  имеющему сегменты, параллельные вещественной

<sup>2</sup>Отметим, что контур такого типа впервые возник в работе [52] в контексте, не связанном с инстантонами.

оси, сдвинутые на  $-i\tau_0$ . В терминах функционального интеграла производящий функционал может быть записан как<sup>3</sup>

$$Z^{\tau_0}[j_+, j_-] = \int_{x_e(0)=x_e(\beta)} \mathcal{D}x_e \int_{\substack{x_{\pm}(0)=x_e(\tau_0 \mp 0) \\ x_+(T)=x_-(T)}} \mathcal{D}x_+ \mathcal{D}x_- \exp \left\{ -S_e[x_e] + iS[x_+] - iS[x_-] + i \int_0^T dt j_+(t)x_+(t) - i \int_0^T dt j_-(t)x_-(t) \right\}. \quad (3.37)$$

Здесь  $S$  обозначает обычное (лоренцево) действие системы в вещественном времени

$$S[x] = \int_0^T d\tau \left[ \frac{\dot{x}^2}{2} - V(x) \right] \quad (3.38)$$

в то время как  $S_e$  есть его евклидова версия, определённая в (3.2). Отметим, что в отличие от предыдущего, в этом разделе мы будем явно указывать нижний индекс у  $S_e$ .

### 3.2.1 Перевальное решение и нулевая мода

Изучим перевальные точки подынтегрального выражения в (3.37) для случая нулевых источников  $j_{\pm}$ . Чтобы упростить учёт граничных условий, присутствующих в определении функциональной меры, удобно переписать сумму действий в экспоненте как единый интеграл по натуральному параметру  $\sigma$  на контуре  $C^{\tau_0}$  параметризуемого функцией  $z = z(\sigma)$

$$-S_e[x] + iS[x_+] - iS[x_-] = i \int_0^{2T+\beta} d\sigma e(\sigma) \left( \frac{(\partial_{\sigma} x(\sigma))^2}{2e^2(\sigma)} - V(x) \right), \quad (3.39)$$

где  $e(\sigma) = \partial_{\sigma} z(\sigma)$ , а также мы подразумеваем следующие отождествления

$$x(\sigma) = x_e(\sigma), \quad e(\sigma) = -i, \quad 0 \leq \sigma \leq \tau_0, \quad (3.40a)$$

$$x(\sigma) = x_+(\sigma - \tau_0), \quad e(\sigma) = +1, \quad \tau_0 \leq \sigma \leq T + \tau_0, \quad (3.40b)$$

$$x(\sigma) = x_-(2T + \tau_0 - \sigma), \quad e(\sigma) = -1, \quad T + \tau_0 \leq \sigma \leq 2T + \tau_0, \quad (3.40c)$$

$$x(\sigma) = x_e(\sigma - 2T - \tau_0), \quad e(\sigma) = -i, \quad 2T + \tau_0 \leq \sigma \leq 2T + \beta. \quad (3.40\check{c})$$

---

<sup>3</sup>Для большей общности мы могли бы добавить также источники для евклидовых операторов, соответствующих мнимой части контура  $C^{\tau_0}$ . Однако в данный момент это не даёт ничего нового, но приводит к ненужным усложнениям.

Здесь  $e(\sigma)$  играет роль «монады». Вариация действия выше по  $x(\sigma)$  даёт уравнение

$$\partial_\sigma(e^{-1}\partial_\sigma x) + eV'(x) = 0. \quad (3.41)$$

Зануление граничного слагаемого, возникающего в процессе вычисления вариационной производной, подразумевает, в терминах приведённых выше идентификаций

$$\partial_\tau x_e(0) = \partial_\tau x_e(\beta). \quad (3.42)$$

Вне точек излома контура  $\tau_0$ ,  $T + \tau_0$ ,  $T + 2\tau_0$  это уравнение может быть переписано как набор уравнений на  $x_e$ ,  $x_\pm$ , а именно

$$\ddot{x}_e(\tau) - V'(x_e) = 0, \quad \ddot{x}_\pm(t) + V'(x_\pm) = 0. \quad (3.43)$$

Чтобы учесть точки излома, необходимо проинтегрировать уравнение (3.41) по малой окрестности этих точек. В результате мы получаем следующие условия на производные от  $x_e$ ,  $x_\pm$  в этих точках

$$\partial_\tau x_e(\tau_0 \mp 0) = i \partial_t x_\pm(0), \quad \partial_t x_+(T) = \partial_t x_-(T). \quad (3.44)$$

Эти условия должны быть дополнены условиями, диктуемыми определением функциональной меры

$$x_e(0) = x_e(\beta), \quad x_e(\tau_0 \mp 0) = x_\pm(0), \quad x_+(T) = x_-(T). \quad (3.45)$$

Полученные граничные условия имеют следующие важные следствия. Из (3.43) мы видим, что  $x_+(t)$  и  $x_-(t)$  удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению. Кроме того, из второго равенства в (3.44) и третьего равенства в (3.45) мы обнаруживаем, что  $x_+(t)$  и  $x_-(t)$  имеют совпадающие значения и производные в точке  $t = T$ . В действительности, это означает, что эти функции совпадают, т.е.  $x_+(t) = x_-(t)$  для всех  $t$ . В частности,  $x_+(0) = x_-(0)$ , так что сопоставляя это с первым равенством в (3.44) и вторым равенством в (3.45), мы заключаем, что  $x_e(\tau)$  является непрерывной функцией в точке  $\tau_0$  также вместе со своей производной. Учитывая также условие (3.42) и первое равенство в (3.45), мы получаем, что  $x_e(\tau)$  есть гладкая,  $\beta$ -периодическая функция. Более того, первое равенство в (3.44) есть ни что иное как условие Коши-Римана, так что  $x_+(t) = x_-(t)$  есть аналитическое продолжение функции  $x_e(\tau)$  из точки  $-i\tau_0$  вдоль прямой, параллельной вещественной оси. Подытоживая все полученные факты, мы заключаем, что для достаточно гладкого потенциала  $V(x)$ ,

перевальное решение определяется некоторой голоморфной функцией  $\bar{x}(z)$ , удовлетворяющей уравнению

$$\partial_z^2 \bar{x}(z) + V'(\bar{x}) = 0, \quad \bar{x}(z - i\beta) = \bar{x}(z), \quad (3.46)$$

вместе со следующим набором отождествлений

$$x_e(\tau) = \bar{x}(-i\tau) = \bar{x}_e(\tau), \quad x_{\pm}(t) = \bar{x}(t - i\tau_0) = \bar{x}^{\tau_0}(t). \quad (3.47)$$

Рассмотрим линейные возмущения  $\eta$  около  $\bar{x}$ , т.е.

$$x_e(\tau) = \bar{x}_e(\tau) + \eta_e(\tau), \quad x_{\pm}(t) = \bar{x}^{\tau_0}(t) + \eta_{\pm}(t). \quad (3.48)$$

Подстановка в экспоненту в подынтегральном выражении в (3.37) даёт

$$\begin{aligned} -S_e[x] + iS[x_+] - iS[x_-] &= -S_e[\bar{x}_e] - S_e^{(2)}[\bar{x}_e, \eta_e] + iS^{(2)}[\bar{x}^{\tau_0}, \eta_+] - iS^{(2)}[\bar{x}^{\tau_0}, \eta_-] \\ &\quad - S_e^{\text{int}}[\bar{x}_e, \eta_e] + iS^{\text{int}}[\bar{x}^{\tau_0}, \eta_+] - iS^{\text{int}}[\bar{x}^{\tau_0}, \eta_-], \end{aligned} \quad (3.49)$$

где квадратичная часть действия имеет следующую явную форму

$$S_e^{(2)}[\bar{x}_e, \eta_e] = \frac{1}{2} \int d\tau d\tau' \eta_e(\tau) K_e(\tau, \tau') \eta_e(\tau'), \quad (3.50)$$

$$K_e(\tau, \tau') = [-\partial_{\tau}^2 + V''(\bar{x}_e(\tau))] \delta(\tau - \tau'),$$

$$S^{(2)}[\bar{x}^{\tau_0}, \eta_{\pm}] = \frac{1}{2} \int dt dt' \eta_{\pm}(t) K^{\tau_0}(t, t') \eta_{\pm}(t'), \quad (3.51)$$

$$K^{\tau_0}(t, t') = [-\partial_t^2 - V''(\bar{x}^{\tau_0}(t))] \delta(t - t').$$

Пертурбативное вычисление производящего функционала (3.37) начинается с решения уравнения на перевальную точку квадратичного действия (с нетривиальным источником), которое имеет следующий вид

$$\begin{bmatrix} -\partial_{\tau}^2 + V''(\bar{x}_e) & 0 & 0 \\ 0 & \partial_t^2 + V''(\bar{x}^{\tau_0}) & 0 \\ 0 & 0 & \partial_t^2 + V''(\bar{x}^{\tau_0}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_e(\tau) \\ \eta_+(t) \\ \eta_-(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_e(\tau) \\ j_+(t) \\ j_-(t) \end{bmatrix}, \quad (3.52)$$

Здесь мы для удобства ввели также источник  $j_e$  для возмущений евклидоваго поля  $\eta_e$ . Возмущения  $\eta_e, \eta_{\pm}$  удовлетворяют тем же граничным условиям, что и перевальное решение  $x_e, x_{\pm}$ , т.е.

$$\eta_e(0) = \eta_e(\beta), \quad \partial_{\tau} \eta_e(0) = \partial_{\tau} \eta_e(\beta), \quad (3.53a)$$

$$\eta_{\pm}(0) = \eta_e(\tau_0), \quad \partial_{\tau} \eta_e(0) = i \partial_t \eta_{\pm}(0), \quad (3.53b)$$

$$\eta_+(T) = \eta_-(T), \quad \partial_t \eta_+(T) = \partial_t \eta_-(T). \quad (3.53c)$$

Таким образом, нам необходимо обратить дифференциальный оператор в левой части (3.52). Однако, легко заметить, что этот оператор является необратимым, так как он имеет нулевую моду. Последнюю можно построить аналитическим продолжением функции  $\eta_0(z)$ , удовлетворяющей уравнению

$$[\partial_z^2 + V''(\bar{x}(z))] \eta_0(z) = 0 \quad (3.54)$$

с теми же отождествлениями как и в (3.47), а именно

$$\eta_{0e}(\tau) = \eta_0(-i\tau), \quad \eta_{0\pm}(t) = \eta_0(t - i\tau_0), \quad (3.55)$$

так что она удовлетворяет граничным условиям (3.53). Вычисляя производную обеих частей равенства (3.46), мы находим, что производная перевального решения  $\partial_z \bar{x}(z)$  удовлетворяет уравнению (3.54), и нормированная нулевая мода имеет вид

$$\eta_0(z) = -\frac{i}{\|\dot{\bar{x}}\|} \partial_z \bar{x}(z), \quad (3.56)$$

где мы ввели множитель  $-i$  из соображений удобства, а именно так, что  $\eta_{0e}(\tau) = \partial_\tau \bar{x}_e(\tau) / \|\dot{\bar{x}}\|$  как и в чисто евклидовом случае, рассмотренном в предыдущем разделе.

Таким образом, как и в при вычислении производящего функционала корреляционных функций мнимого времени (3.23), мы столкнулись с проблемой нулевой моды. Однако, в отличие от евклидоваго случая, подынтегральное выражение в (3.37) не имеет симметрии относительно преобразований вида  $x_e(\tau) \mapsto x_e(\tau + \tau')$  для любых конечных  $\tau'$ , так как контур  $C^{\tau_0}$  (а именно, его лоренцева часть) явно нарушает такую инвариантность. А именно, не существует преобразования полного набора полей  $x_e, x_\pm$ , включающего сдвиги аргумента  $x_e$  по мнимому времени и одновременно сохраняющего граничные условия, которые задаются мерой функционального интегрирования в (3.37). По этой причине оказывается невозможным учесть нулевую моду (3.56), буквально используя технику, аналогичную изложенной в разделе 3.1. Таким образом, нам необходимо разработать более изощрённый метод решения обозначенной проблемы.

### 3.2.2 Восстановление инвариантности

Чтобы спасти ситуацию, нам необходимо каким-либо образом восстановить инвариантность интеграла (3.37) относительно сдвигов мнимого времени.

Для этого мы используем то, что производящий функционал  $Z^{\tau_0}$  вообще говоря не зависит от параметра  $\tau_0$ . Это позволяет эффективно усреднить его по  $\tau_0$  без какого-либо воздействия на конечный ответ и определить усреднённый функционал  $Z$  как

$$Z[j_+, j_-] = \frac{1}{\beta} \int_0^\beta d\tau_0 Z^{\tau_0}[j_+, j_-] = Z^{\tau_0}[j_+, j_-], \quad (3.57)$$

имеющий следующий вид в формализме функционального интеграла

$$Z[j_+, j_-] = \frac{1}{\beta} \int_0^\beta d\tau_0 \int \mathcal{D}[x]^{\tau_0} \exp \left\{ -S_e[x_e] + iS[x_+] - iS[x_-] + i \int_0^T dt j_+(t)x_+(t) - i \int_0^T dt j_-(t)x_-(t) \right\}. \quad (3.58)$$

Здесь мы обозначили функциональную меру как

$$\int \mathcal{D}[x]^{\tau_0} (\dots) = \int_{x_e(0)=x_e(\beta)} \mathcal{D}x_e \int_{\substack{x_\pm(0)=x_e(\tau_0 \mp 0) \\ x_+(T)=x_-(T)}} \mathcal{D}x_+ \mathcal{D}x_- (\dots). \quad (3.59)$$

Включая меру интегрирования по  $\tau_0$  в определение функциональной меры «на равных правах» с интегрированием по полям  $x_e$ ,  $x_+$ ,  $x_-$ , мы обнаруживаем, что подынтегральное выражение вместе с граничными условиями в функциональной мере оказываются инвариантны относительно преобразования

$$x_e(\tau) \mapsto x_e^{\tau_1}(\tau) = x_e(\tau + \tau_1), \quad x_\pm(t) \mapsto x_\pm(t), \quad \tau_0 \mapsto \tau_0^{\tau_1} = \tau_0 - \tau_1. \quad (3.60)$$

Таким образом, инвариантность относительно сдвигов мнимого времени восстанавливается, и мы можем применить тот же метод учёта нулевой моды, что и в чисто мнимом случае. Чтобы проделать это, введём разбиение единицы

$$1 = \frac{1}{\sqrt{\xi}} \int_0^\beta d\tau_1 \frac{d\chi^{\tau_1}}{d\tau_1} \delta\left(\frac{1}{\sqrt{\xi}}\chi^{\tau_1} - \lambda\right), \quad \chi^{\tau_1} = \chi[x_e^{\tau_1}, x_\pm; \tau_0^{\tau_1}]. \quad (3.61)$$

Выберем также функционал, фиксирующий калибровку  $\chi$  следующим образом

$$\begin{aligned} \chi[x_e, x_\pm; \tau_0] &= \frac{1}{\|\dot{\bar{x}}\|} \int_0^{2T+\beta} dz(\sigma) \partial_z \bar{x}(z(\sigma)) x(\sigma) \\ &= \frac{1}{\|\dot{\bar{x}}\|} \left[ \int_0^\beta d\tau \partial_\tau \bar{x}_e(\tau) x_e(\tau) + \int_0^T dt \partial_t \bar{x}^{\tau_0}(t) (x_+(t) - x_-(t)) \right], \end{aligned} \quad (3.62)$$

где мы использовали отождествления (3.40а)–(3.40ё) при переходе от первой строки ко второй. Подстановка разбиения единицы (3.61) в (3.58) и последующее преобразование, обратное к (3.60) даёт следующее выражение для производящего функционала

$$Z[j_+, j_-] = \frac{1}{\sqrt{\xi}} \int_0^\beta d\tau_0 \int \mathcal{D}[x]^{\tau_0} J[x_e, x_\pm; \tau_0] \delta\left(\frac{1}{\sqrt{\xi}}\chi - \lambda\right) \times \exp\left\{-S_e[x_e] + iS[x_+] - iS[x_-] + i \int_0^T dt j_+(t)x_+(t) - i \int_0^T dt j_-(t)x_-(t)\right\}. \quad (3.63)$$

где «детерминант Фаддеева-Попова»  $J$  имеет вид

$$J[x_e, x_\pm; \tau_0] = \frac{d\chi^{\tau_1}}{d\tau_1} \Big|_{\tau_1=0} = \frac{1}{\|\dot{\bar{x}}\|} \left[ \int_0^\beta d\tau \partial_\tau \bar{x}_e(\tau) \dot{x}_e(\tau) + i \int_0^T dt \partial_t^2 \bar{x}^{\tau_0}(t) (x_+(t) - x_-(t)) \right], \quad (3.64)$$

а интегрирование по параметру  $\tau_1$  было произведено явно, так как подынтегральное выражение становится независимым от этого параметра после сделанных переопределений. Как и в чисто евклидовом случае, производящий функционал не зависит от параметра  $\lambda$ , так что мы можем усреднить по нему с гауссовой мерой  $e^{-\lambda^2/2} d\lambda/\sqrt{2\pi}$ , так что результат представляется как

$$Z[j_+, j_-] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\xi}} \int_0^\beta d\tau_0 \int \mathcal{D}[x]^{\tau_0} J[x_e, x_\pm; \tau_0] \times \exp\left\{-S_e[x_e] + iS[x_+] - iS[x_-] - \frac{1}{2\xi}(\chi)^2 + i \int_0^T dt j_+(t)x_+(t) - i \int_0^T dt j_-(t)x_-(t)\right\}. \quad (3.65)$$

Перепишем теперь полученный производящий функционал, в форме, близкой к (3.29). Для этого в функциональном интеграле выше перейдём от инте-

грирования по  $x_e(\tau)$  к интегрированию по  $x_e(\tau + \tau_0)$ . Результат имеет вид

$$Z[j_+, j_-] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\xi}} \int_0^\beta d\tau_0 \int_{\substack{x_+(0)=x_e(\beta) \\ x_-(0)=x_e(0) \\ x_+(T)=x_-(T)}} \mathcal{D}x_e \mathcal{D}x_+ \mathcal{D}x_- J[\bar{x}^{\tau_0}; x_e, x_\pm] \\ \times \exp \left\{ -S_e[x_e] + iS[x_+] - iS[x_-] - \frac{1}{2\xi} (\chi[\bar{x}^{\tau_0}; x_e, x_\pm])^2 \right. \\ \left. + i \int_0^T dt j_+(t)x_+(t) - i \int_0^T dt j_-(t)x_-(t) \right\}. \quad (3.66)$$

Здесь мы ввели новые обозначения для функционала, фиксирующего калибровку  $\chi$  и соответствующего детерминанта Фаддеева-Попова  $J$ , а именно

$$\chi[\bar{x}; x_e, x_\pm] = \frac{1}{\|\dot{\bar{x}}\|} \left[ \int_0^\beta d\tau \partial_\tau \bar{x}_e(\tau) x_e(\tau) + \int_0^T dt \partial_t \bar{x}(t) (x_+(t) - x_-(t)) \right], \quad (3.67)$$

$$J[\bar{x}; x_e, x_\pm] = \frac{1}{\|\dot{\bar{x}}\|} \left[ \int_0^\beta d\tau \partial_\tau \bar{x}_e(\tau) \dot{x}_e(\tau) + i \int_0^T dt \partial_t^2 \bar{x}(t) (x_+(t) - x_-(t)) \right], \quad (3.68)$$

подчеркивающие их зависимость от фонового решения  $\bar{x}$ . Результат такого преобразования следующий. Подынтегральное выражение в производящем функционале, записанном в виде (3.66) имеет зависимость от  $\tau_0$  только в качестве параметра сдвига по мнимому времени перевальной решения  $\bar{x}$ . Более точно, контур комплексного времени теперь оказывается фиксированным (см. граничные условия в функциональной мере) и соответствуют контуру  $C^{\tau_0}$  с  $\tau_0 = 0$  показанному на Рис. 3.1а, или, эквивалентно, обычному контуру Швингера-Келдыша  $C$ .

### 3.2.3 Теория возмущений

Теперь давайте разработаем пертурбативную версию производящего функционала (3.66). Для этого, мы разложим подынтегральное выражение около перевальной точки  $\bar{x}^{\tau_0}$

$$x_e(\tau) = \bar{x}_e^{\tau_0}(\tau) + \eta_e(\tau), \quad x_\pm(t) = \bar{x}^{\tau_0}(t) + \eta_\pm(t), \quad (3.69)$$

и перейдём к интегрированию по возмущениям  $\eta_e, \eta_\pm$ . Здесь, как и ранее  $\bar{x}_e^{\tau_0}(\tau) = \bar{x}(-i(\tau + \tau_0))$  и  $\bar{x}^{\tau_0}(t) = \bar{x}(t - i\tau_0)$ . Для будущего удобства введём «скалярное произведение»  $\langle \bullet, \bullet \rangle$  на пространстве функций, определённых на всём контуре  $C$ , например,  $\varphi = [\varphi_e(\tau), \varphi_+(t), \varphi_-(t)]^T$ . Такие функции будут обозначаться

жирными символами. Имея две такие функции  $\varphi$ ,  $\psi$ , мы можем определить

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_0^\beta d\tau \varphi_e(\tau) \psi_e(\tau) + \int_0^T dt \varphi_+(t) \psi_+(t) + \int_0^T dt \varphi_-(t) \psi_-(t). \quad (3.70)$$

Также естественно ввести операцию  $s$  на таких функциях, домножающую их компоненты  $1$ ,  $i$ , и  $-i$ , соответственно

$$s\psi = \begin{bmatrix} \psi_e(\tau) & i\psi_+(t) & -i\psi_-(t) \end{bmatrix}^T, \quad (3.71)$$

$$\langle \varphi, s\psi \rangle = \int_0^\beta d\tau \varphi_e(\tau) \psi_e(\tau) + i \int_0^T dt \varphi_+(t) \psi_+(t) - i \int_0^T dt \varphi_-(t) \psi_-(t). \quad (3.72)$$

Отметим, что скалярное произведение двух функций, определённых на контуре  $C$  (на одну из которых подействовали операцией  $s$ ), определенных аналитическим продолжением некоторой функции аналогичным (3.55), равно обычному скалярному произведению соответствующих евклидовых частей, так как лоренцевы части сокращаются, а именно

$$\langle \varphi, s\psi \rangle = \int_0^\beta d\tau \varphi_e(\tau) \psi_e(\tau) = (\varphi_e, \psi_e), \quad \varphi = \begin{bmatrix} \varphi(-i\tau) \\ \varphi(t) \\ \varphi(t) \end{bmatrix}, \quad \psi = \begin{bmatrix} \psi(-i\tau) \\ \psi(t) \\ \psi(t) \end{bmatrix}, \quad (3.73)$$

где  $\varphi_e(\tau) = \varphi(-i\tau)$ ,  $\psi_e(\tau) = \psi(-i\tau)$ . В частности, мы имеем  $\langle \varphi, s\varphi \rangle = \|\varphi_e\|^2$ .

В терминах определённого выше скалярного произведения, функционал, фиксирующий калибровку и соответствующий детерминант Фаддева-Попова (3.67)–(3.68) могут быть переписаны как

$$\begin{aligned} \chi[\bar{x}^{\tau_0}; \bar{x}_e^{\tau_0} + \eta_e, \bar{x}^{\tau_0} + \eta_\pm] &= \int_0^\beta d\tau \eta_0^{\tau_0}(\tau) \eta_e(\tau) + i \int_0^T dt \eta_0^{\tau_0}(t) (\eta_+(t) - \eta_-(t)) \\ &= \langle \boldsymbol{\eta}_0^{\tau_0}, s\boldsymbol{\eta} \rangle \end{aligned} \quad (3.74)$$

$$\begin{aligned} J[\bar{x}^{\tau_0}; \bar{x}_e^{\tau_0} + \eta_e, \bar{x}^{\tau_0} + \eta_\pm] &= \|\dot{\bar{x}}\| \left[ 1 - \frac{1}{\|\dot{\bar{x}}\|} \left[ \int_0^\beta d\tau \partial_\tau \eta_0^{\tau_0}(\tau) \eta_e(\tau) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_0^T dt \partial_t \eta_0^{\tau_0}(t) (\eta_+(t) - \eta_-(t)) \right] \right] \\ &= \|\dot{\bar{x}}\| \left[ 1 - \frac{1}{\|\dot{\bar{x}}\|} \langle \partial_{\tau_0} \boldsymbol{\eta}_0^{\tau_0}, s\boldsymbol{\eta} \rangle \right]. \end{aligned} \quad (3.75)$$

где

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \eta_e(\tau) \\ \eta_+(t) \\ \eta_-(t) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta}_0^{\tau_0} = \begin{bmatrix} \eta_{0e}^{\tau_0}(\tau) \\ \eta_0^{\tau_0}(t) \\ \eta_0^{\tau_0}(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{\|\dot{\bar{x}}\|} \begin{bmatrix} \partial_\tau \bar{x}_e^{\tau_0}(\tau) \\ -i\partial_t \bar{x}^{\tau_0}(t) \\ -i\partial_t \bar{x}^{\tau_0}(t) \end{bmatrix}. \quad (3.76)$$

Таким образом, производящий функционал может быть записан как

$$\begin{aligned} Z[j_+, j_-] &= \frac{\|\dot{\bar{x}}\|}{\sqrt{2\pi\xi}} e^{-S_e[\bar{x}_e]} \\ &\times \int_0^\beta d\tau_0 e^{i \int_0^T dt (j_+(t) - j_-(t)) \bar{x}^{\tau_0}(t)} \int_{\substack{\eta_+(0) = \eta_e(\beta) \\ \eta_-(0) = \eta_e(0) \\ \eta_+(T) = \eta_-(T)}} \mathcal{D}\eta_e \mathcal{D}\eta_+ \mathcal{D}\eta_- \left[ 1 - \frac{1}{\|\dot{\bar{x}}\|} \langle \partial_{\tau_0} \boldsymbol{\eta}_0^{\tau_0}, s\boldsymbol{\eta} \rangle \right] \\ &\times \exp \left\{ -\mathbf{S}_\xi^{(2)}[\bar{x}^{\tau_0}; \boldsymbol{\eta}] + \langle \boldsymbol{\eta}, s\mathbf{j} \rangle - S_e^{\text{int}}[\bar{x}_e^{\tau_0}, \eta_e] + iS^{\text{int}}[\bar{x}^{\tau_0}, \eta_+] - iS^{\text{int}}[\bar{x}^{\tau_0}, \eta_-] \right\} \Big|_{j_e=0}, \end{aligned} \quad (3.77)$$

где мы снова для удобства ввели источник  $j_e$  соответствующий возмущениям  $\eta_e$ , а также трёхкомпонентный источник  $\mathbf{j} = [j_e(\tau), j_+(t), j_-(t)]^T$ . Здесь действие взаимодействие записывается как

$$\begin{aligned} S_e^{\text{int}}[\bar{x}_e^{\tau_0}, \eta_e] &= \sum_{k \geq 3} \frac{1}{k!} \int_0^\beta d\tau V^{(k)}(\bar{x}_e^{\tau_0}(\tau)) \eta_e^k(\tau), \\ S^{\text{int}}[\bar{x}^{\tau_0}, \eta_\pm] &= - \sum_{k \geq 3} \frac{1}{k!} \int_0^T dt V^{(k)}(\bar{x}^{\tau_0}(t)) \eta_\pm^k(t), \end{aligned} \quad (3.78)$$

в то время как  $\mathbf{S}_\xi^{(2)}$  есть сумма евклидоваго и лоренцева квадратичных действий вместе с соответствующим функционалом, фиксирующим калибровку. Последний, в свою очередь также может быть переписан в терминах скалярного произведения  $\langle \bullet, \bullet \rangle$ . В конце концов вводя дифференциальный оператор

$$\mathbf{K}^{\tau_0} = \begin{bmatrix} -\partial_\tau^2 + V''(\bar{x}_e^{\tau_0}) & 0 & 0 \\ 0 & \partial_t^2 + V''(\bar{x}^{\tau_0}) & 0 \\ 0 & 0 & \partial_t^2 + V''(\bar{x}^{\tau_0}) \end{bmatrix}, \quad (3.79)$$

мы можем записать

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_\xi^{(2)}[\bar{x}^{\tau_0}; \boldsymbol{\eta}] &= \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\eta}, s\mathbf{K}^{\tau_0} \boldsymbol{\eta} \rangle + \frac{1}{2\xi} \langle \boldsymbol{\eta}_0^{\tau_0}, s\boldsymbol{\eta} \rangle^2 \\ &+ \frac{1}{2} \left[ \eta_e \partial_\tau \eta_e \Big|_0^\beta + i\eta_+ \partial_t \eta_+ \Big|_0^T - i\eta_- \partial_t \eta_- \Big|_0^T \right], \end{aligned} \quad (3.80)$$

где граничные члены возникли как следствие интегрирования по частям. Чтобы вычислить интеграл, задающий производящий функционал, по теории возмущений, необходимо решить уравнение на перевальную точку квадратичного действия, которое имеет вид

$$\mathbf{K}_\xi^{\tau_0} \boldsymbol{\eta} = \mathbf{j}, \quad \mathbf{K}_\xi^{\tau_0} = \mathbf{K}^{\tau_0} + \frac{1}{\xi} \boldsymbol{\eta} \langle \boldsymbol{\eta}_0^{\tau_0}, \mathbf{s} \bullet \rangle \quad (3.81)$$

где, в отличие от (3.52), возникло второе слагаемое в левой части равенства, имеющее смысл оператора проекции на нулевую моду и являющееся результатом процедуры фиксации калибровки. Функция Грина  $\mathbf{G}_\xi^{\tau_0}$ , решающее уравнение выше как  $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{G}_\xi^{\tau_0} \mathbf{s} \mathbf{j}$ , построена в разделе 3.4. Последняя функция Грина позволяет формально проинтегрировать по возмущениям  $\eta_e$ ,  $\eta_\pm$ , и переписать производящий функционал в виде, пригодном для построения диаграммной техники, которая является одной из наших основных задач

$$\begin{aligned} Z[j_+, j_-] = & Z_{1\text{-loop}} \frac{1}{\beta} \int_0^\beta d\tau_0 e^{i \int_0^T dt (j_+(t) - j_-(t)) \bar{x}^{\tau_0}(t)} \\ & \times \exp \left\{ \frac{1}{2} \left\langle \frac{\delta}{\delta \boldsymbol{\eta}}, \mathbf{G}_\xi^{\tau_0} \frac{\delta}{\delta \boldsymbol{\eta}} \right\rangle \right\} \left[ 1 - \frac{1}{\|\dot{\bar{x}}\|} \langle \partial_{\tau_0} \boldsymbol{\eta}_0^{\tau_0}, \mathbf{s} \boldsymbol{\eta} \rangle \right] \\ & \times \exp \left\{ -S_e^{\text{int}}[\bar{x}_e^{\tau_0}, \eta_e] + i S^{\text{int}}[\bar{x}^{\tau_0}, \eta_+] - i S^{\text{int}}[\bar{x}^{\tau_0}, \eta_-] + \langle \boldsymbol{\eta}, \mathbf{s} \mathbf{j} \rangle \right\} \Big|_{\substack{j_e=0 \\ \boldsymbol{\eta}=0}} \end{aligned} \quad (3.82)$$

где  $Z_{1\text{-loop}}$  совпадает с соответствующей величиной из рассмотрения чисто евклидоваго случая (3.33), так как лоренцевы части сокращают друг друга в гауссовом интеграле по возмущениям.

### 3.3 Диаграммная техника

Для начала опишем диаграммную технику, следующую из производящего функционала корреляционных функций в мнимом времени (3.32). После объяснения основных особенностей соответствующей диаграммной техники, которая имеет сходные основные элементы в евклидовом и лоренцевом случаях, мы обобщим ее на корреляционные функции в вещественном времени (3.82).

#### 3.3.1 Евклидов случай

Прежде всего отметим, что корреляционные функции, получаемые из производящего функционала (3.32) имеют два типа вкладов, а именно, от фоно-

вого решения и от возмущений около последнего, так как коэффициент при источнике  $j$  имеет вид суммы фона  $\bar{x}^{\tau_0}$  и возмущения  $\eta$ . Данные вклады можно разделить на уровне производящего функционала, а именно переписывая производящий функционал как<sup>4</sup>

$$Z[j] = Z_{1\text{-loop}} \frac{1}{\beta} \int_0^\beta d\tau_0 e^{\int_0^\beta d\tau j(\tau) \bar{x}^{\tau_0}(\tau)} Z_{\text{pert}}^{\tau_0}[j], \quad (3.83)$$

$$Z_{\text{pert}}^{\tau_0}[j] = e^{\frac{1}{2} \int d\tau d\tau' \frac{\delta}{\delta \eta(\tau)} G_\xi^{\tau_0}(\tau, \tau') \frac{\delta}{\delta \eta(\tau')}} \times \left[ 1 - \frac{1}{\|\dot{\bar{x}}\|} \int_0^\beta d\tau \dot{\eta}_0^{\tau_0}(\tau) \eta(\tau) \right] e^{-S^{\text{int}}[\bar{x}^{\tau_0}, \eta] + \int_0^\beta d\tau j(\tau) \eta(\tau)} \Big|_{\eta=0}. \quad (3.84)$$

Подставляя представленный таким образом производящий функционал в выражение (3.23) для корреляционных функций, мы заключаем, что процесс пертурбативного вычисления корреляционных функций разбивается на три части: сначала необходимо разделить фоновую и пертурбативные части в корреляционной функции, после чего нужно вычислить пертурбативную часть, используя производящий функционал  $Z_{\text{pert}}^{\tau_0}$ , и, в конце концов, усреднить результат по параметру сдвига мнимого времени  $\tau_0$ . Для будущего удобства, введем обозначения для корреляционных функций возмущений как

$$\langle \eta(\tau_1) \dots \eta(\tau_n) \rangle^{\tau_0} = \frac{1}{Z_{\text{pert}}^{\tau_0}} \frac{\delta^n Z_{\text{pert}}^{\tau_0}[j]}{\delta j(\tau_1) \dots \delta j(\tau_n)} \Big|_{j=0}. \quad (3.85)$$

Таким образом, описанный выше алгоритм даёт следующие выражения, например для 1-, 2-, и 3-точечных корреляционных функций (3.23)

$$D_1(\tau_1) = \frac{1}{\beta} \int_0^\beta d\tau_0 \left[ \bar{x}^{\tau_0}(\tau_1) + \langle \eta(\tau_1) \rangle^{\tau_0} \right], \quad (3.86a)$$

$$D_2(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{\beta} \int_0^\beta d\tau_0 \left[ \bar{x}^{\tau_0}(\tau_1) \bar{x}^{\tau_0}(\tau_2) + \bar{x}^{\tau_0}(\tau_1) \langle \eta(\tau_2) \rangle^{\tau_0} + \bar{x}^{\tau_0}(\tau_2) \langle \eta(\tau_1) \rangle^{\tau_0} + \langle \eta(\tau_1) \eta(\tau_2) \rangle^{\tau_0} \right], \quad (3.86b)$$

$$D_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = \frac{1}{\beta} \int_0^\beta d\tau_0 \left[ \bar{x}^{\tau_0}(\tau_1) \bar{x}^{\tau_0}(\tau_2) \bar{x}^{\tau_0}(\tau_3) + \bar{x}^{\tau_0}(\tau_1) \bar{x}^{\tau_0}(\tau_2) \langle \eta(\tau_3) \rangle^{\tau_0} + \bar{x}^{\tau_0}(\tau_1) \bar{x}^{\tau_0}(\tau_3) \langle \eta(\tau_2) \rangle^{\tau_0} + \bar{x}^{\tau_0}(\tau_2) \bar{x}^{\tau_0}(\tau_3) \langle \eta(\tau_1) \rangle^{\tau_0} + \bar{x}^{\tau_0}(\tau_1) \langle \eta(\tau_2) \eta(\tau_3) \rangle^{\tau_0} + \bar{x}^{\tau_0}(\tau_2) \langle \eta(\tau_1) \eta(\tau_3) \rangle^{\tau_0} + \bar{x}^{\tau_0}(\tau_3) \langle \eta(\tau_1) \eta(\tau_2) \rangle^{\tau_0} + \langle \eta(\tau_1) \eta(\tau_2) \eta(\tau_3) \rangle^{\tau_0} \right]. \quad (3.86c)$$

---

<sup>4</sup>В этом разделе мы опускаем нижний индекс  $\epsilon$  у фонового решения  $\bar{x}^{\tau_0}$ , нулевой моды  $\eta_0^{\tau_0}$ , и т.д., подчеркивающий их евклидову природу, так, как мы делали это в разделе 3.1, и в отличие от раздела 3.2.



вид

$$\longrightarrow \times \tau = -\frac{1}{\|\dot{\bar{x}}\|} \dot{\eta}_0^{\tau_0}(\tau). \quad (3.90)$$

Для большей ясности, давайте напишем явные представления для для корреляционных функций, возникающих в (3.86a)–(3.86c), в терминах диаграмм и соответствующих им интегралов. Для 1-точечной корреляционной функции возмущений мы имеет следующий диаграммный ряд<sup>5</sup>

$$\langle \eta(\tau) \rangle^{\tau_0} = \tau \bullet \longrightarrow \times + \tau \bullet \text{---} \bigcirc + \text{старшие петли}, \quad (3.91)$$

where

$$\tau \bullet \longrightarrow \times = -\frac{1}{\|\dot{\bar{x}}\|} \int_0^\beta d\tau_1 G^{\tau_0}(\tau, \tau_1) \dot{\eta}_0^{\tau_0}(\tau_1), \quad (3.92)$$

$$\tau \bullet \text{---} \bigcirc = -\frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau_1 V^{(3)}(\bar{x}^{\tau_0}(\tau_1)) G^{\tau_0}(\tau, \tau_1) G^{\tau_0}(\tau_1, \tau_1). \quad (3.93)$$

Аналогичный результат для 2-точечной функции имеет вид

$$\begin{aligned} \langle \eta(\tau) \eta(\tau') \rangle^{\tau_0} = & \tau \bullet \text{---} \bullet \tau' + \tau \bullet \text{---} \uparrow \times \tau' + \tau \bullet \text{---} \bigcirc \tau' \\ & + \tau \bullet \text{---} \bigcirc \tau' + \tau \bullet \text{---} \bigcirc \tau' + \text{старшие петли}, \end{aligned} \quad (3.94)$$

где, в частности,

$$\begin{aligned} \tau \bullet \text{---} \uparrow \times \tau' = & \frac{1}{\|\dot{\bar{x}}\|} \int_0^\beta d\tau_1 \int_0^\beta d\tau_2 V^{(3)}(\bar{x}^{\tau_0}(\tau_1)) \dot{\eta}_0^{\tau_0}(\tau_2) \\ & \times G^{\tau_0}(\tau, \tau_1) G^{\tau_0}(\tau', \tau_1) G^{\tau_0}(\tau_1, \tau_2), \end{aligned} \quad (3.95)$$

$$\tau \bullet \text{---} \bigcirc \tau' = -\frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau_1 V^{(4)}(\bar{x}^{\tau_0}(\tau_1)) G^{\tau_0}(\tau, \tau_1) G^{\tau_0}(\tau', \tau_1) G^{\tau_0}(\tau_1, \tau_1). \quad (3.96)$$

Подводя итог, отметим следующие различия нашей конструкции по сравнению со стандартными диаграммными техниками. А именно, это возникновение 1-точечной вершины (3.90), вклад от фоновых решений, а также последующее усреднение промежуточного результата по сдвигу мнимого времени, параметризующего фоновое решение (3.86a)–(3.86c).

<sup>5</sup>Мы будем формально приписывать одну дополнительную петлю диаграммам с 1-точечной вершиной (3.90), так как последняя обычно оказывается пропорциональна постоянной взаимодействия [44].

### 3.3.2 Лоренцев случай

В полной аналогии с евклидовым случаем, описанном в предыдущем разделе, мы начинаем наш вывод диаграммной техники для корреляционных функций в вещественном времени с разделения производящего функционала для на фоновую и пертурбативную части, а именно, переписем производящий функционал (3.82) как

$$Z[j_+, j_-] = Z_{1\text{-loop}} \frac{1}{\beta} \int_0^\beta d\tau_0 e^{i \int_0^T dt (j_+(t) - j_-(t)) \bar{x}^{\tau_0}(t)} Z_{\text{pert}}^{\tau_0}[j_+, j_-], \quad (3.97)$$

$$\begin{aligned} Z_{\text{pert}}^{\tau_0}[j_+, j_-] &= \exp \left\{ \frac{1}{2} \left\langle \frac{\delta}{\delta \boldsymbol{\eta}}, \mathbf{G}_\xi^{\tau_0} \frac{\delta}{\delta \boldsymbol{\eta}} \right\rangle \right\} \left[ 1 - \frac{1}{\|\dot{\bar{x}}\|} \langle \partial_{\tau_0} \boldsymbol{\eta}_0^{\tau_0}, s \boldsymbol{\eta} \rangle \right] \\ &\times \exp \left\{ -S_e^{\text{int}}[\bar{x}_e^{\tau_0}, \boldsymbol{\eta}_e] + i S^{\text{int}}[\bar{x}^{\tau_0}, \boldsymbol{\eta}_+] - i S^{\text{int}}[\bar{x}^{\tau_0}, \boldsymbol{\eta}_-] + \langle \boldsymbol{\eta}, s \mathbf{j} \rangle \right\} \Big|_{\substack{j_\pm=0 \\ \boldsymbol{\eta}=0}}. \end{aligned} \quad (3.98)$$

Введённый здесь функционал  $Z_{\text{pert}}^{\tau_0}$  позволяет определить корреляционные функции возмущений как

$$\begin{aligned} &\langle \eta_-(t_1^-) \dots \eta_-(t_m^-) \eta_+(t_1^+) \dots \eta_+(t_n^+) \rangle^{\tau_0} \\ &= \frac{i^{m-n}}{Z_{\text{pert}}^{\tau_0}} \frac{\delta^{n+m} Z_{\text{pert}}^{\tau_0}[j_+, j_-]}{\delta j_+(t_1^+) \dots \delta j_+(t_n^+) \delta j_-(t_1^-) \dots \delta j_-(t_m^-)} \Big|_{j_\pm=0}. \end{aligned} \quad (3.99)$$

Таким образом, из определения (3.35) корреляционных функций в вещественном времени мы получаем следующие выражения, например, для 1- и 2-точечных

функций, которые, в свою очередь, могут быть разных типов

$$D_{1,0}(t_1^+) = \frac{1}{\beta} \int_0^\beta d\tau_0 \left[ \bar{x}^{\tau_0}(t_1^+) + \langle \eta_+(t_1^+) \rangle^{\tau_0} \right], \quad (3.100a)$$

$$D_{0,1}(t_1^-) = \frac{1}{\beta} \int_0^\beta d\tau_0 \left[ \bar{x}^{\tau_0}(t_1^-) + \langle \eta_-(t_1^-) \rangle^{\tau_0} \right], \quad (3.100b)$$

$$D_{1,1}(t_1^+; t_1^-) = \frac{1}{\beta} \int_0^\beta d\tau_0 \left[ \bar{x}^{\tau_0}(t_1^+) \bar{x}^{\tau_0}(t_1^-) + \bar{x}^{\tau_0}(t_1^+) \langle \eta_-(t_1^-) \rangle^{\tau_0} + \bar{x}^{\tau_0}(t_1^-) \langle \eta_+(t_1^+) \rangle^{\tau_0} + \langle \eta_-(t_1^-) \eta_+(t_1^+) \rangle^{\tau_0} \right], \quad (3.100c)$$

$$D_{2,0}(t_1^+, t_2^+) = \frac{1}{\beta} \int_0^\beta d\tau_0 \left[ \bar{x}^{\tau_0}(t_1^+) \bar{x}^{\tau_0}(t_2^+) + \bar{x}^{\tau_0}(t_1^+) \langle \eta_+(t_2^+) \rangle^{\tau_0} + \bar{x}^{\tau_0}(t_2^+) \langle \eta_+(t_1^+) \rangle^{\tau_0} + \langle \eta_+(t_1^+) \eta_+(t_2^+) \rangle^{\tau_0} \right], \quad (3.100\check{c})$$

$$D_{0,2}(t_1^-, t_2^-) = \frac{1}{\beta} \int_0^\beta d\tau_0 \left[ \bar{x}^{\tau_0}(t_1^-) \bar{x}^{\tau_0}(t_2^-) + \bar{x}^{\tau_0}(t_1^-) \langle \eta_-(t_2^-) \rangle^{\tau_0} + \bar{x}^{\tau_0}(t_2^-) \langle \eta_-(t_1^-) \rangle^{\tau_0} + \langle \eta_-(t_1^-) \eta_-(t_2^-) \rangle^{\tau_0} \right]. \quad (3.100d)$$

Чтобы вычислять корреляционные функции (3.99), мы предлагаем диаграммную технику, которая следует из производящего функционала (3.98). Аналогично евклидову случаю, описанному в предыдущем разделе, используя (3.99) мы записываем корреляционные функции в следующем виде

$$\begin{aligned} \langle \eta_-(t_1^-) \dots \eta_-(t_m^-) \eta_+(t_1^+) \dots \eta_+(t_n^+) \rangle^{\tau_0} &= \exp \left\{ \frac{1}{2} \left\langle \frac{\delta}{\delta \boldsymbol{\eta}}, \mathbf{G}_\xi^{\tau_0} \frac{\delta}{\delta \boldsymbol{\eta}} \right\rangle \right\} \\ &\times \eta_-(t_1^-) \dots \eta_-(t_m^-) \eta_+(t_1^+) \dots \eta_+(t_n^+) \left[ 1 - \frac{1}{\|\dot{\bar{x}}\|} \langle \partial_{\tau_0} \boldsymbol{\eta}_0^{\tau_0}, s \boldsymbol{\eta} \rangle \right] \\ &\times \exp \left\{ -S_e^{\text{int}}[\bar{x}_e^{\tau_0}, \eta_e] + iS^{\text{int}}[\bar{x}^{\tau_0}, \eta_+] - iS^{\text{int}}[\bar{x}^{\tau_0}, \eta_-] \right\} \Big|_{\substack{\boldsymbol{\eta}=0 \\ \text{non-vacuum}}} . \end{aligned} \quad (3.101)$$

Здесь мы опускаем знаменатель и одновременно исключаем все вакуумные диаграммы в правой части. Теперь мы имеем 9 различных типов свёрток, возникающих из вариационного члена, из-за утроенного набора полей, а именно  $\eta_e$ ,  $\eta_+$ , и  $\eta_-$ . В реальности, как минимум 3 из них не являются независимыми, из-за симметрии of  $\mathbf{G}_\xi^{\tau_0}$  относительно транспонирования, т.е.

$$G_{\xi+e}^{\tau_0}(t, \tau') = G_{\xi e+}^{\tau_0}(\tau', t), \quad G_{\xi-e}^{\tau_0}(t, \tau') = G_{\xi e-}^{\tau_0}(\tau', t), \quad G_{\xi-+}^{\tau_0}(t, t') = G_{\xi+-}^{\tau_0}(t', t). \quad (3.102)$$

Мы будем обозначать диаграммные элементы, соответствующие  $\eta_e$  точечными линиями. В свою очередь, элементы, соответствующие  $\eta_+$  и  $\eta_-$  будут обозна-

чатся сплошными линиями со стрелками внутрь и наружу, соответственно. В результате, мы имеем следующие типы внутренних линий

$$\begin{aligned}
\tau \cdots \tau' &= G_{\xi ee}^{\tau_0}(\tau, \tau'), & \tau \cdots \longrightarrow \tau' &= G_{\xi e+}^{\tau_0}(\tau, \tau'), & \tau \cdots \longleftarrow \tau' &= G_{\xi e-}^{\tau_0}(\tau, \tau'), \\
t \longleftarrow \tau' &= G_{\xi +e}^{\tau_0}(t, \tau'), & t \longleftrightarrow \tau' &= G_{\xi ++}^{\tau_0}(t, \tau'), & t \longleftarrow \tau' &= G_{\xi +-}^{\tau_0}(t, \tau'), \\
t \longrightarrow \tau' &= G_{\xi -e}^{\tau_0}(t, \tau'), & t \longrightarrow \tau' &= G_{\xi -+}^{\tau_0}(t, \tau'), & t \longrightarrow \tau' &= G_{\xi --}^{\tau_0}(t, \tau').
\end{aligned} \tag{3.103}$$

Явная форма компонент  $\mathbf{G}_{\xi}^{\tau_0}$  найдена в разделе 3.4. Внешние точки равны единице

$$\longrightarrow \bullet \quad t = 1, \qquad \longleftarrow \bullet \quad t = 1. \tag{3.104}$$

Член в квадратных скобках в (3.101) приводят к 1-точечным вершинам, имеющим следующий вид

$$\cdots \times \tau = -\frac{1}{\|\dot{\bar{x}}\|} \partial_{\tau_0} \eta_{0e}^{\tau_0}(\tau), \quad \longrightarrow \times t = -\frac{i}{\|\dot{\bar{x}}\|} \partial_{\tau_0} \eta_0^{\tau_0}(t), \quad \longleftarrow \times t = +\frac{i}{\|\dot{\bar{x}}\|} \partial_{\tau_0} \eta_0^{\tau_0}(t). \tag{3.105}$$

Евклидово и лоренцевы действия взаимодействия (3.78) приводят к  $k$ -точечным вершинам

$$\begin{aligned}
\begin{matrix} 2 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \times \\ \diagdown \quad \diagup \\ k \end{matrix} \tau &= -\frac{1}{k!} V^{(k)}(\bar{x}_e^{\tau_0}(\tau)), & \begin{matrix} 2 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \times \\ \diagdown \quad \diagup \\ k \end{matrix} t &= -\frac{i}{k!} V^{(k)}(\bar{x}^{\tau_0}(t)), & \begin{matrix} 2 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \times \\ \diagdown \quad \diagup \\ k \end{matrix} t &= +\frac{i}{k!} V^{(k)}(\bar{x}^{\tau_0}(t)).
\end{aligned} \tag{3.106}$$

В качестве примера, приведём первые несколько членов диаграммного разложения для 1-точечной функции возмущений  $\langle \eta_+(t) \rangle^{\tau_0}$ , возникающей в (3.100a)–(3.100d)

$$\begin{aligned}
\langle \eta_+(t) \rangle^{\tau_0} &= t \bullet \longleftarrow \times + t \bullet \longrightarrow \times + t \bullet \cdots \times \\
&+ t \bullet \longleftarrow \bigcirc + t \bullet \longrightarrow \bigcirc + t \bullet \cdots \bigcirc + \text{старшие петли}, \tag{3.107}
\end{aligned}$$

а также соответствующие явные выражения, например, для

$$t \bullet \longleftarrow \times = +\frac{i}{\|\dot{\bar{x}}\|} \int_0^T dt_1 \partial_{\tau_0} \eta_0^{\tau_0}(t_1) G_{\xi +-}^{\tau_0}(t, t_1), \tag{3.108}$$

$$t \bullet \longrightarrow \times = -\frac{i}{\|\dot{\bar{x}}\|} \int_0^T dt_1 \partial_{\tau_0} \eta_0^{\tau_0}(t_1) G_{\xi ++}^{\tau_0}(t, t_1), \tag{3.109}$$

$$t \bullet \cdots \bigcirc = -\frac{1}{2} \int_0^{\beta} d\tau_1 V^{(3)}(\bar{x}_e^{\tau_0}(\tau_1)) G_{\xi +e}^{\tau_0}(t, \tau_1) G_{\xi ee}^{\tau_0}(\tau_1, \tau_1). \tag{3.110}$$

Выражения для 2-точечных корреляционных функций возмущений, таких как  $\langle \eta_+(t_1^+) \eta_+(t_2^+) \rangle^{\tau_0}$ , имеют уже 31 диаграмм в разложении до одной петли включительно и выглядят довольно громоздко. Существует специальная замена переменных, обычно называемая поворотом Келдыша [31; 34], использующая тот факт, что некоторые комбинации компонент функций Грина, а именно,  $G_{\xi e+}^{\tau_0} - G_{\xi e-}^{\tau_0}$  и  $G_{\xi ++}^{\tau_0} - G_{\xi +-}^{\tau_0} - G_{\xi -+}^{\tau_0} + G_{\xi --}^{\tau_0}$ , зануляются, что потенциально может сделать диаграммную технику проще. Однако, это преобразование одновременно увеличивает количество типов вершин. Соответствующая диаграммная техника описана в разделе 3.5.

### 3.4 Трёхкомпонентные функции Грина для систем с инстантонами

В Приложении В.1 мы последовательно строим функцию Грина с периодическими граничными условиями, используя подход «снизу вверх». Вместо того, чтобы делать то же самое для многокомпонентной функции Грина, явно решая уравнение (3.81), мы воспользуемся «подходом сверху вниз», т.е. предъядвим ответ и докажем его корректность.

Нам необходимо найти многокомпонентную функцию Грина<sup>6</sup>

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} G_{ee}(\tau, \tau') & G_{e+}(\tau, t') & G_{e-}(\tau, t') \\ G_{+e}(t, \tau') & G_{++}(t, t') & G_{+-}(t, t') \\ G_{-e}(t, \tau') & G_{-+}(t, t') & G_{--}(t, t') \end{bmatrix} \quad (3.111)$$

удовлетворяющую уравнению

$$s\mathbf{K}\mathbf{G} = \mathbf{I} - s\boldsymbol{\eta}_0 \langle \boldsymbol{\eta}_0, \bullet \rangle, \quad (3.112)$$

где

$$\mathbf{I} := \begin{bmatrix} \delta(\tau - \tau') & 0 & 0 \\ 0 & \delta(t - t') & 0 \\ 0 & 0 & \delta(t - t') \end{bmatrix}. \quad (3.113)$$

Функция Грина также должна удовлетворять граничным условиям (3.53) и условию калибровки

$$\langle \boldsymbol{\eta}_0, s\mathbf{G}\bullet \rangle = 0. \quad (3.114)$$

---

<sup>6</sup>Здесь и далее в этом разделе мы будем для краткости опускать верхний индекс  $\tau_0$  обозначающий сдвиг аргумента у фонового решения  $\bar{x}^{\tau_0}$ , нулевой моды  $\boldsymbol{\eta}_0^{\tau_0}$ , оператора  $\mathbf{K}^{\tau_0}$  и функции Грина  $\mathbf{G}^{\tau_0}$ .

Как только  $\mathbf{G}$  найдена, можно определить сдвинутую функцию Грина  $\mathbf{G}_\xi$

$$\mathbf{G}_\xi = \mathbf{G} + \xi \eta_0 \langle \eta_0, \bullet \rangle, \quad (3.115)$$

в терминах которой решение уравнения (3.81) записывается как

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{G}_\xi s \mathbf{j} = \mathbf{G} s \mathbf{j} + \xi \eta_0 \langle \eta_0, \mathbf{j} \rangle. \quad (3.116)$$

Опишем составные части функции искомой Грина. Основным объектом является нулевая мода  $\eta_0(z)$ , определённая в (3.56) и удовлетворяющая уравнению (3.54), которое мы продублируем здесь для удобства

$$[\partial_z^2 + V''(\bar{x})] \eta_0(z) = 0, \quad \eta_0(z) = -\frac{i}{\|\dot{\bar{x}}\|} \partial_z \bar{x}(z). \quad (3.117)$$

Второе линейно независимое решение уравнения строится как

$$\zeta_0(z) = i \eta_0(z) \int_0^z \frac{dz'}{(\eta_0(z'))^2}, \quad (3.118)$$

Отметим, что  $\eta_0(-i\tau)$  есть обычная нулевая мода евклидова уравнения движения. Будет удобно (но не обязательно) предполагать, что  $\zeta_0$  не зависит от контура, соединяющего  $z' = 0$  и  $z' = z$  (что выполняется, например когда  $\eta_0(z)$  есть мероморфная функция  $z$ ). В реальности, нам необходимо лишь существование интегралов вдоль прямых отрезков, параллельных вещественной и мнимой осям. Далее, определим функцию  $\omega(z)$ , удовлетворяющую уравнению

$$[\partial_z^2 + V''(\bar{x})] \omega(z) = -\eta_0(z), \quad (3.119)$$

которая будет необходима, чтобы заполучить  $\eta_0$  в правой части (3.112). Явное выражение для этой функции имеет вид

$$\begin{aligned} \omega(z) &= -\eta_0(z) \int_0^z dz' \frac{1}{(\eta_0(z'))^2} \int_0^{z'} dz'' (\eta_0(z''))^2 \\ &= i \zeta_0(z) \int_0^z dz' (\eta_0(z'))^2 - i \eta_0(z) \int_0^z dz' \eta_0(z') \zeta_0(z'), \end{aligned} \quad (3.120)$$

где предположения об аналитических свойствах такие же как в случае  $\zeta_0$ . Теперь введём функции двух комплексных аргументов  $z, z'$ , являющиеся прямыми

аналогами (В.21), (В.20), как

$$\begin{aligned}
\Omega(z, z') &= \omega(z)\eta_0(z') + \eta_0(z)\omega(z') \\
H(z, z') &= \alpha H_{\eta\eta}(z, z') + \beta H_{\eta\zeta}(z, z') + \gamma H_{\zeta\zeta}(z, z') \\
H_{\eta\eta}(z, z') &= \eta_0(z)\eta_0(z') \\
H_{\eta\zeta}(z, z') &= \eta_0(z)\zeta_0(z') + \zeta_0(z)\eta_0(z') \\
H_{\zeta\zeta}(z, z') &= \zeta_0(z)\zeta_0(z') \\
G_0^>(z, z') &= \frac{1}{2}(\eta_0(z)\zeta_0(z') - \zeta_0(z)\eta_0(z')) = -G_0^<(z, z')
\end{aligned} \tag{3.121}$$

где выражения для  $\alpha$ ,  $\beta$ , и  $\gamma$  совпадают с (В.32), (В.30). В терминах введённых величин, евклидова функция Грина (В.17), которую мы отождествляем с блоком  $G_{ee}$  в (3.112), имеет вид

$$\begin{aligned}
G_{ee}(\tau, \tau') &= G_0^>(-i\tau, -i\tau')\theta(\tau - \tau') + G_0^<(-i\tau, -i\tau')\theta(\tau' - \tau) \\
&\quad + \Omega(-i\tau, -i\tau') + H(-i\tau, -i\tau'). \tag{3.122}
\end{aligned}$$

Получим остальные компоненты функции Грина, используя аналитическое продолжение аргументов  $G_{ee}(\tau, \tau')$  с мнимой оси на вещественную. Возможной трудностью представляется наличие неаналитичных функций  $\theta(\tau - \tau')$ ,  $\theta(\tau' - \tau)$ . Чтобы преодолеть эту сложность, необходимо заменить разность евклидовых времён разностью натуральных параметров на контуре  $C$ . Используя такую прескрипцию, мы получаем функцию Грина как сумму трёх слагаемых

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_0 + \mathbf{\Omega} + \mathbf{H} \tag{3.123}$$

определённых как

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}_0 &= \begin{bmatrix} G_0^>(-i\tau, -i\tau')\theta(\tau - \tau') + G_0^<(-i\tau, -i\tau')\theta(\tau' - \tau) & G_0^>(-i\tau, t') & G_0^>(-i\tau, t') \\ G_0^<(t, -i\tau') & G_0^>(t, t')\theta(t - t') + G_0^<(t, t')\theta(t' - t) & G_0^<(t, t') \\ G_0^<(t, -i\tau') & G_0^>(t, t') & G_0^>(t, t')\theta(t' - t) + G_0^<(t, t')\theta(t - t') \end{bmatrix} \\
\mathbf{\Omega} &= \begin{bmatrix} \Omega(-i\tau, -i\tau') & \Omega(-i\tau, t') & \Omega(-i\tau, t') \\ \Omega(t, -i\tau') & \Omega(t, t') & \Omega(t, t') \\ \Omega(t, -i\tau') & \Omega(t, t') & \Omega(t, t') \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} H(-i\tau, -i\tau') & H(-i\tau, t') & H(-i\tau, t') \\ H(t, -i\tau') & H(t, t') & H(t, t') \\ H(t, -i\tau') & H(t, t') & H(t, t') \end{bmatrix} \tag{3.124}
\end{aligned}$$

и удовлетворяющих следующим уравнениям

$$s\mathbf{K}\mathbf{G}_0 = \mathbf{I}, \quad \mathbf{K}\mathbf{\Omega} = \eta_0\langle\eta_0, \bullet\rangle, \quad \mathbf{K}\mathbf{H} = 0, \tag{3.125}$$

которые следуют из их определения (3.121). Граничные условия (3.53) выполняются как следствие введённой прескрипции аналитического продолжения. В

то же время, калибровочное условие (3.114) должно быть проверено явно. Для этого свернём это условие с некоторой пробной функцией  $\varphi$ , а именно

$$\begin{aligned}
& \langle \eta_0, s\mathbf{G}\varphi \rangle \\
&= \int_0^\beta d\tau' \left[ \int_0^\beta d\tau \eta_{0e}(\tau) G_{ee}(\tau, \tau') + i \int_0^T dt \eta_0(t) (G_{e+}(t, \tau') - G_{e-}(t, \tau')) \right] \varphi_e(\tau') \\
&+ \int_0^T dt' \left[ \int_0^\beta d\tau \eta_{0e}(\tau) G_{e+}(\tau, t') + i \int_0^T dt \eta_0(t) (G_{++}(t, \tau') - G_{-+}(t, \tau')) \right] \varphi_+(\tau') \\
&+ \int_0^T dt' \left[ \int_0^\beta d\tau \eta_{0e}(\tau) G_{e-}(\tau, t') + i \int_0^T dt \eta_0(t) (G_{+-}(t, \tau') - G_{--}(t, \tau')) \right] \varphi_-(\tau'),
\end{aligned} \tag{3.126}$$

и покажем, что коэффициенты при независимых компонентах  $\varphi_e$ ,  $\varphi_+$ , и  $\varphi_-$  обнуляются. Первое слагаемое в первой строке в правой части зануляется как следствие калибровочного условия (B.25), второе слагаемое равно нулю тождественно, так как  $G_{e+} = G_{e-}$ . Первое слагаемое во второй строке в правой части равно  $\omega(t)$ , в то время как второе имеет вид

$$\begin{aligned}
i \int_0^T dt \eta_0(t) (G_{++}(t, \tau') - G_{-+}(t, \tau')) &= i \int_0^{t'} dt \eta_0(t) (G_0^<(t, t') - G_0^>(t, t')) \\
&= -i\zeta_0(t') \int_0^{t'} dt (\eta_0(t))^2 + i\eta_0(t') \int_0^{t'} dt \eta_0(t) \zeta_0(t).
\end{aligned} \tag{3.127}$$

Сравнивая с определением (3.120), обнаруживаем что это ни что иное как  $-\omega(t)$ , так что вторая строка зануляется. Аналогичные рассуждения приводят к заключению о равенстве нулю и третьей строки в правой части. Таким образом, предъявленная в (3.123) функция Грина  $\mathbf{G}$  действительно удовлетворяет калибровочному условию (3.114).

В заключение запишем квадратичное действие (3.80), в которое подставлено решение (3.116)

$$\mathbf{S}_\xi^{(2)}[\bar{x}; \boldsymbol{\eta}] = \frac{1}{2} \langle s\mathbf{j}, \mathbf{G}_\xi s\mathbf{j} \rangle, \tag{3.128}$$

где все граничные слагаемые равны нулю как следствие граничных условий (3.53). Отметим, что хотя наша конструкция функции Грина использует процедуру аналитического продолжения как промежуточные шаг, это всегда можно сделать явно, так что итоговый ответ уже не требует процедуры аналитического продолжения. Единственным требованием является предположение об аналитичности нулевой моды а также о том, что она имеет только простые нули.

### 3.5 Поворот Келдыша

В разделе 3.3 мы построили диаграммную технику для корреляционных функций в вещественном времени для систем с инстантонами. Такая техника является трёхкомпонентной, т.е. имеющей девять типов внутренних линий, выражающихся через компоненты полной функции Грина, три типа вершин для каждой степени разложения действия взаимодействия, а также три дополнительных одноточечных вершин, возникающих из-за меры интегрирования. Такое разнообразие диаграммных элементов делает соответствующую диаграммную технику крайне громоздкой. В то же время не все из девяти компонент функции Грина являются независимыми. Симметрия относительно транспонирования немедленно исключает три зависимых компоненты. Причинная структура функции полной функции Грина подразумевает, что еще две линейные комбинации ее компонент должны быть равны нулю. Чтобы избавиться от лишних компонент, необходимо сделать линейное преобразование в пространстве полей, называемое поворотом Келдыша [31; 34]. После такого преобразования остаётся четыре независимые компоненты функции Грина, которым соответствует также четыре типа внутренних линий. Тем не менее, как мы увидим, поворот Келдыша одновременно с уменьшением количества внутренних линий, ведёт к увеличению количества вершин.

Поворотом Келдыша называется следующая замена переменных в пространстве полей  $x_e$ ,  $x_+$ , и  $x_-$

$$x_c(t) = \frac{1}{2}(x_+(t) + x_-(t)), \quad x_q(t) = x_+(t) - x_-(t), \quad (3.129)$$

так что новыми независимыми полями теперь являются  $x_e$ ,  $x_c$ , и  $x_q$ . Поля  $x_c$  и  $x_q$  обычно называют «классическим» и «квантовым» полями, соответственно. Выразим теперь производящий функционал (3.82) в терминах нового набора полей и выведем соответствующую диаграммную технику.

Подстановка исходных полей в терминах возмущений над фоном (3.69) в формулу замены переменных даёт

$$x_c(t) = \bar{x}^{\tau_0}(t) + \eta_c(t), \quad x_q(t) = \eta_q(t), \quad (3.130)$$

где  $\eta_c$ ,  $\eta_q$  выражается через возмущения исходных полей точно таким же обра-

зом (3.129), как и  $x_c, x_q$ , а именно

$$\eta_c(t) = \frac{1}{2}(\eta_+(t) + \eta_-(t)), \quad \eta_q = \eta_+(t) - \eta_-(t). \quad (3.131)$$

Таким образом, вместе с возмущениями  $\eta_e$  евклидового поля, определим набор  $\tilde{\eta}$  возмущений в новом базисе

$$\tilde{\eta} = \begin{bmatrix} \eta_e(\tau) \\ \eta_c(t) \\ \eta_q(t) \end{bmatrix}, \quad (3.132)$$

который связан с исходным набором  $\eta = [\eta_e(\tau), \eta_+(t), \eta_-(t)]^T$  линейным преобразованием

$$\eta = v\tilde{\eta}, \quad v = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}. \quad (3.133)$$

Теперь перепишем вариационный оператор в (3.82) в терминах  $\tilde{\eta}$ . Получаем

$$\left\langle \frac{\delta}{\delta\eta}, \mathbf{G}_\xi^{\tau_0} \frac{\delta}{\delta\eta} \right\rangle = \left\langle \frac{\delta}{\delta\tilde{\eta}}, \tilde{\mathbf{G}}_\xi^{\tau_0} \frac{\delta}{\delta\tilde{\eta}} \right\rangle, \quad \tilde{\mathbf{G}}_\xi^{\tau_0} = v^{-1} \mathbf{G}_\xi^{\tau_0} (v^{-1})^T. \quad (3.134)$$

используя разбиение (3.115) функции Грина  $\mathbf{G}_\xi^{\tau_0}$  на два слагаемых

$$\tilde{\mathbf{G}}_\xi^{\tau_0} = \tilde{\mathbf{G}}^{\tau_0} + \xi \tilde{\eta}_0^{\tau_0} \langle \tilde{\eta}_0^{\tau_0}, \bullet \rangle, \quad \tilde{\mathbf{G}}^{\tau_0} = v^{-1} \mathbf{G}^{\tau_0} (v^{-1})^T, \quad \tilde{\eta}_0^{\tau_0} = v^{-1} \eta_0^{\tau_0} \quad (3.135)$$

мы получаем следующее выражение для первого слагаемого

$$\tilde{\mathbf{G}}^{\tau_0} = \begin{bmatrix} G_{ee}^{\tau_0}(\tau, \tau') & G_{ec}^{\tau_0}(\tau, t') & 0 \\ G_{ce}^{\tau_0}(t, \tau') & G_{cc}^{\tau_0}(t, t') & G_{cq}^{\tau_0}(t, t') \\ 0 & G_{qc}^{\tau_0}(t, t') & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.136)$$

Два нулевых недиагональных слагаемых равны  $G_{e+}^{\tau_0} - G_{e-}^{\tau_0} = 0$  и  $G_{+e}^{\tau_0} - G_{-e}^{\tau_0} = 0$ , в то время как нулевая диагональная компонента  $G_{++}^{\tau_0} - G_{+-}^{\tau_0} - G_{-+}^{\tau_0} + G_{--}^{\tau_0} = 0$ . Зануление эти их комбинаций является следствием их явных выражений (3.123), (3.124), а также причинной структуры компонент полной функции Гри-

на. Ненулевые компоненты имеют вид

$$\begin{aligned} G_{ee}(\tau, t') &= \frac{1}{2}(G_{e+}(\tau, t') + G_{e-}(\tau, t')) \\ &= G_0^>(-i\tau, t') + H(-i\tau, t') + \Omega(-i\tau, t'), \end{aligned} \quad (3.137a)$$

$$\begin{aligned} G_{ce}(t, \tau') &= \frac{1}{2}(G_{+e}(t, \tau') + G_{-e}(t, \tau')) \\ &= G_0^<(t, -i\tau') + H(t, -i\tau') + \Omega(t, -i\tau'), \end{aligned} \quad (3.137b)$$

$$\begin{aligned} G_{cq}(t, t') &= \frac{1}{2}(G_{++}(t, t') - G_{+-}(t, t') + G_{-+}(t, t') - G_{--}(t, t')) \\ &= 2G_0^>(t, t')\theta(t - t'), \end{aligned} \quad (3.137c)$$

$$\begin{aligned} G_{qc}(t, t') &= \frac{1}{2}(G_{++}(t, t') + G_{+-}(t, t') - G_{-+}(t, t') - G_{--}(t, t')) \\ &= 2G_0^<(t, t')\theta(t' - t), \end{aligned} \quad (3.137\check{c})$$

$$\begin{aligned} G_{cc}(t, t') &= \frac{1}{2}(G_{++}(t, t') + G_{+-}(t, t') + G_{-+}(t, t') + G_{--}(t, t')) \\ &= H(t, t') + \Omega(t, t'), \end{aligned} \quad (3.137d)$$

где мы для краткости опустили верхние индексы  $\tau_0$  а компоненты  $G_{ee}$  не изменилась в результате поворота Келдыша. Второе слагаемое в (3.135) не нарушает матричную структуру первого слагаемого  $\tilde{\mathbf{G}}^{\tau_0}$ , так как

$$\tilde{\boldsymbol{\eta}}_0^{\tau_0} = v^{-1}\boldsymbol{\eta}_0^{\tau_0} = \begin{bmatrix} \eta_{0e}^{\tau_0}(\tau) \\ \eta_0^{\tau_0}(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.138)$$

так что  $\tilde{\mathbf{G}}_{\xi}^{\tau_0}$  имеет такие же нулевые компоненты, как и  $\tilde{\mathbf{G}}^{\tau_0}$ .

Далее, давайте перепишем сумму лоренцевых действий взаимодействия (3.78) в терминах новых переменных. Используя формулу бинома Ньютона и соотношение (3.131) между старыми и новыми переменным, получаем

$$\begin{aligned} \tilde{S}^{\text{int}}[\bar{x}^{\tau_0}, \eta_c, \eta_q] &= S^{\text{int}}[\bar{x}^{\tau_0}, \eta_+] - S^{\text{int}}[\bar{x}^{\tau_0}, \eta_-] \\ &= - \sum_{k \geq 3} \frac{1}{k!} \int_0^T dt V^{(k)}(\bar{x}^{\tau_0}(t)) (\eta_+^k(t) - \eta_-^k(t)) \\ &= - \sum_{k \geq 3} \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \frac{1}{2^{2r}(2r+1)!(k-2r-1)!} \int_0^T dt V^{(k)}(\bar{x}^{\tau_0}(t)) \eta_q^{2r+1}(t) \eta_c^{k-2r-1}(t), \end{aligned} \quad (3.139)$$

где  $\lfloor \bullet \rfloor$  обозначает округление вниз. Таким образом, мы имеем  $\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor + 1$  различных  $k$ -точечных лоренцевых вершин взаимодействия для каждого нетриви-

ального члена суммы по  $k \geq 3$ , так что число вершин существенно увеличивается, по сравнению с соответствующими вершинами до поворота Келдыша, для  $k > 4$ . Отметим, что каждый член в сумме имеет нечётную (т.е. как минимум одну) степень квантового поля.

Нам осталось выразить слагаемые производящего функционала (3.82), содержащие скалярные произведения, а именно  $\langle \partial_{\tau_0} \boldsymbol{\eta}_0^{\tau_0}, s\boldsymbol{\eta} \rangle$  и  $\langle \mathbf{j}, s\boldsymbol{\eta} \rangle$ , в терминах новых переменных. Так как поворот Келдыша не сохраняет билинейную форму  $\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\varphi} \mapsto \langle \boldsymbol{\psi}, s\boldsymbol{\varphi} \rangle$ , существует два различных базиса, которые мы будем обозначать знаками  $\tilde{\phantom{\psi}}$  и  $\check{\phantom{\psi}}$ , соответственно

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}} = v^{-1}\boldsymbol{\psi}, \quad \check{\boldsymbol{\psi}} = \tilde{s}^{-1}v^T s \boldsymbol{\psi}, \quad (3.140)$$

где  $\tilde{s}\tilde{\boldsymbol{\psi}} = \tilde{s}[\psi_e, \psi_c, \psi_q]^T = [\psi_e, i\psi_c, i\psi_q]^T$ , так что  $\tilde{\boldsymbol{\psi}}$  и  $\check{\boldsymbol{\psi}}$  отличаются порядком квантовой и классической компонент

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}} = \begin{bmatrix} \psi_e(\tau) \\ \psi_c(t) \\ \psi_q(t) \end{bmatrix}, \quad \check{\boldsymbol{\psi}} = \tilde{s}^{-1}v^T s v \tilde{\boldsymbol{\psi}} = \begin{bmatrix} \psi_e(\tau) \\ \psi_q(t) \\ \psi_c(t) \end{bmatrix}, \quad (3.141)$$

так что скалярное произведение может быть записано в двух эквивалентных формах

$$\langle \boldsymbol{\psi}, s\boldsymbol{\varphi} \rangle = \langle \check{\boldsymbol{\psi}}, \tilde{s}\tilde{\boldsymbol{\varphi}} \rangle = \langle \tilde{\boldsymbol{\psi}}, \tilde{s}\tilde{\boldsymbol{\varphi}} \rangle = \int_0^\beta d\tau \psi_e(\tau)\varphi_e(\tau) + i \int_0^T dt [\psi_c(t)\varphi_q(t) + \psi_q(t)\varphi_c(t)].$$

Таким образом, второе слагаемое в квадратных скобках (3.82) переписывается в терминах  $\tilde{\boldsymbol{\eta}}$  как

$$\langle \partial_{\tau_0} \boldsymbol{\eta}_0^{\tau_0}, s\boldsymbol{\eta} \rangle = \langle \partial_{\tau_0} \check{\boldsymbol{\eta}}_0^{\tau_0}, \tilde{s}\tilde{\boldsymbol{\eta}} \rangle, \quad \check{\boldsymbol{\eta}}_0^{\tau_0} = \tilde{s}^{-1}v^T s \boldsymbol{\eta}_0^{\tau_0} = \begin{bmatrix} \eta_{0e}^{\tau_0}(\tau) \\ 0 \\ \eta_0^{\tau_0}(t) \end{bmatrix} \quad (3.142)$$

где  $\tilde{s}\tilde{\boldsymbol{\eta}} = [\eta_e, i\eta_c, i\eta_q]^T$ , так что 1-точечная вершина, соответствующая классическому полю, исчезает. Аналогично, можно выразить слагаемое с источником в терминах нового базиса как

$$\langle \mathbf{j}, s\boldsymbol{\eta} \rangle = \langle \check{\mathbf{j}}, \tilde{s}\tilde{\boldsymbol{\eta}} \rangle = \int_0^\beta d\tau j_e(\tau)\eta_e(\tau) + i \int_0^T dt [j_c(t)\eta_q(t) + j_q(t)\eta_c(t)], \quad (3.143)$$

где явная форма для  $\check{\mathbf{j}}$  имеет вид

$$\check{\mathbf{j}} = \tilde{s}^{-1}v^T s \mathbf{j} = \begin{bmatrix} j_e(\tau) \\ j_+(t) - j_-(t) \\ \frac{1}{2}(j_+(t) + j_-(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_e(\tau) \\ j_q(t) \\ j_c(t) \end{bmatrix}. \quad (3.144)$$

Таким образом, из (3.143) мы видим, что классический источник  $j_c$  имеет смысл источника для квантового поля  $\eta_q$ , и, наоборот  $j_q$  является источником для  $\eta_c$  (что может выглядеть немного контринтуитивно).

Объединяя все результаты вместе, перепишем производящий функционал (3.82) в терминах нового базиса как

$$\begin{aligned} \tilde{Z}[j_c, j_q] &= Z^{1\text{-loop}} \frac{1}{\beta} \int_0^\beta d\tau_0 e^{i \int_0^T dt j_q(t) \bar{x}^{\tau_0}(t)} \exp \left\{ \frac{1}{2} \left\langle \frac{\delta}{\delta \tilde{\eta}}, \tilde{\mathbf{G}}_\xi^{\tau_0} \frac{\delta}{\delta \tilde{\eta}} \right\rangle \right\} \\ &\times \left[ 1 - \frac{1}{\|\dot{\bar{x}}\|} \langle \partial_{\tau_0} \tilde{\eta}_0^{\tau_0}, \tilde{s} \tilde{\eta} \rangle \right] \exp \left\{ -S_e^{\text{int}}[\bar{x}_e^{\tau_0}, \eta_e] + i \tilde{S}^{\text{int}}[\bar{x}^{\tau_0}, \eta_c, \eta_q] + \langle \tilde{\eta}, \tilde{s} \tilde{j} \rangle \right\} \Big|_{\substack{j_e=0 \\ \tilde{\eta}=0}}, \end{aligned} \quad (3.145)$$

и определить соответствующие корреляционные функции как его вариационные производные

$$\tilde{D}_{nm}(t_1^c, \dots, t_n^c; t_1^q, \dots, t_m^q) = (-i)^{m+n} \frac{1}{\tilde{Z}} \frac{\delta^{n+m} \tilde{Z}[j_c, j_q]}{\delta j_q(t_1^c) \dots \delta j_q(t_n^c) \delta j_c(t_1^q) \dots \delta j_c(t_m^q)} \Big|_{j_q=j_c=0}, \quad (3.146)$$

которые являются линейными комбинациями корреляционных функций (3.35). Отметим, что в новом базисе квантовые поля не имеют вклада от фоновых полей. Теперь разделим производящий функционал  $\tilde{Z}$  на фоновую и пертурбативную части

$$\tilde{Z}[j_c, j_q] = Z^{1\text{-loop}} \frac{1}{\beta} \int_0^\beta d\tau_0 e^{i \int_0^T dt j_q(t) \bar{x}^{\tau_0}(t)} \tilde{Z}_{\text{pert}}^{\tau_0}[j_c, j_q], \quad (3.147)$$

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_{\text{pert}}^{\tau_0}[j_c, j_q] &= \exp \left\{ \frac{1}{2} \left\langle \frac{\delta}{\delta \tilde{\eta}}, \tilde{\mathbf{G}}_\xi^{\tau_0} \frac{\delta}{\delta \tilde{\eta}} \right\rangle \right\} \\ &\times \left[ 1 - \frac{1}{\|\dot{\bar{x}}\|} \langle \partial_{\tau_0} \tilde{\eta}_0^{\tau_0}, \tilde{s} \tilde{\eta} \rangle \right] \exp \left\{ -S_e^{\text{int}}[\bar{x}_e^{\tau_0}, \eta_e] + i \tilde{S}^{\text{int}}[\bar{x}^{\tau_0}, \eta_c, \eta_q] + \langle \tilde{\eta}, \tilde{s} \tilde{j} \rangle \right\} \Big|_{\substack{j_e=0 \\ \tilde{\eta}=0}}. \end{aligned} \quad (3.148)$$

Пертурбативная часть производящего функционала  $\tilde{Z}_{\text{pert}}^{\tau_0}$  позволяет определить корреляционные функции возмущений в новом базисе как

$$\begin{aligned} &\langle \eta_q(t_1^q) \dots \eta_q(t_m^q) \eta_c(t_1^c) \dots \eta_c(t_n^c) \rangle^{\tau_0} \\ &= \frac{(-i)^{m+n}}{\tilde{Z}_{\text{pert}}^{\tau_0}} \frac{\delta^{n+m} \tilde{Z}_{\text{pert}}^{\tau_0}[j_c, j_q]}{\delta j_q(t_1^c) \dots \delta j_q(t_n^c) \delta j_c(t_1^q) \dots \delta j_c(t_m^q)} \Big|_{j_q=j_c=0}. \end{aligned} \quad (3.149)$$

Выразим теперь корреляционные функции полей в новом базисе (3.146) в терминах фонового решения  $\bar{x}^{\tau_0}$  и корреляционных функций возмущений. Для 1-

и 2-точечных функций мы имеем следующие выражения

$$\tilde{D}_{1,0}(t_1^c) = \frac{1}{\beta} \int_0^\beta d\tau_0 \left[ \bar{x}^{\tau_0}(t_1^c) + \langle \eta_c(t_1^c) \rangle^{\tau_0} \right], \quad (3.150a)$$

$$\tilde{D}_{0,1}(t_1^q) = \frac{1}{\beta} \int_0^\beta d\tau_0 \langle \eta_q(t_1^q) \rangle^{\tau_0}, \quad (3.150b)$$

$$\tilde{D}_{1,1}(t_1^c; t_1^q) = \frac{1}{\beta} \int_0^\beta d\tau_0 \left[ \bar{x}^{\tau_0}(t_1^c) \langle \eta_q(t_1^q) \rangle^{\tau_0} + \langle \eta_c(t_1^c) \eta_q(t_1^q) \rangle^{\tau_0} \right], \quad (3.150c)$$

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{2,0}(t_1^c, t_2^c) = \frac{1}{\beta} \int_0^\beta d\tau_0 \left[ \bar{x}^{\tau_0}(t_1^c) \bar{x}^{\tau_0}(t_2^c) \right. \\ \left. + \bar{x}^{\tau_0}(t_1^c) \langle \eta_c(t_2^c) \rangle^{\tau_0} + \bar{x}^{\tau_0}(t_2^c) \langle \eta_c(t_1^c) \rangle^{\tau_0} + \langle \eta_c(t_1^c) \eta_c(t_2^c) \rangle^{\tau_0} \right], \end{aligned} \quad (3.150\check{c})$$

$$\tilde{D}_{0,2}(t_1^q, t_2^q) = \frac{1}{\beta} \int_0^\beta d\tau_0 \langle \eta_q(t_1^q) \eta_q(t_2^q) \rangle^{\tau_0}. \quad (3.150d)$$

Из операторного формализма следует, что  $\tilde{D}_{0,n}$ , и  $\tilde{D}_{0,1}$ ,  $\tilde{D}_{0,2}$ , в частности, должны зануляться.

Чтобы вычислять корреляционные функции возмущений в новом базисе (3.149), построим диаграммную технику, следующую из производящего функционала (3.148). Аналогично соответствующим корреляционным функциям в старом базисе, воспользуемся определением (3.149) чтобы записать явный вид корреляционных функций возмущений

$$\begin{aligned} \langle \eta_q(t_1^q) \dots \eta_q(t_m^q) \eta_c(t_1^c) \dots \eta_c(t_n^c) \rangle^{\tau_0} = \exp \left\{ \frac{1}{2} \left\langle \frac{\delta}{\delta \tilde{\eta}}, \tilde{\mathbf{G}}_\xi^{\tau_0} \frac{\delta}{\delta \tilde{\eta}} \right\rangle \right\} \\ \times \eta_q(t_1^q) \dots \eta_q(t_m^q) \eta_c(t_1^c) \dots \eta_c(t_n^c) \left[ 1 - \frac{1}{\|\dot{\tilde{x}}\|} \langle \partial_{\tau_0} \tilde{\boldsymbol{\eta}}^{\tau_0}, \tilde{s} \tilde{\boldsymbol{\eta}} \rangle \right] \\ \times \exp \left\{ -S_e^{\text{int}}[\bar{x}_e^{\tau_0}, \eta_e] + i \tilde{S}^{\text{int}}[\bar{x}^{\tau_0}, \eta_c, \eta_q] \right\} \Big|_{\substack{\tilde{\boldsymbol{\eta}}=0 \\ \text{non-vacuum}}} . \end{aligned} \quad (3.151)$$

где мы учли, что знаменатель в (3.149) сокращается с вакуумными диаграммами, так что мы исключили их в правой части равенства. Как мы получили, у нас есть 6 различных типов свёрток, возникающих из-за вариационного оператора, и только 4 из них являются независимыми. Мы будем обозначать диаграммные элементы, соответствующие евклидовым полям  $\eta_e$  точечными линиями, а элементы, соответствующие полям  $\eta_c$  и  $\eta_q$  — сплошными и пунктирными линиями,

соответственно. Таким образом, внутренние линии обозначаются как

$$\begin{aligned}
 \tau \cdots \tau' &= G_{\xi ee}^{\tau_0}(\tau, \tau'), & t \text{ — } t' &= G_{\xi cc}^{\tau_0}(t, t') \\
 t \text{ — } \tau' &= G_{\xi ce}^{\tau_0}(t, \tau'), & \tau \cdots t' &= G_{\xi ec}^{\tau_0}(\tau, t'), \\
 t \text{ — } t' &= G_{\xi cq}^{\tau_0}(t, t'), & t \text{ - - } t' &= G_{\xi qc}^{\tau_0}(t, t').
 \end{aligned} \tag{3.152}$$

Аналогично, внешние точки для возмущений классических и квантовых полей будем обозначать как

$$\text{—} \bullet t = 1, \quad \text{- - -} \bullet t = 1. \tag{3.153}$$

Слагаемое в квадратных скобках в (3.151) приводит к следующим одноточечным вершинам для возмущений евклидовых и квантовых полей

$$\cdots \times \tau = -\frac{1}{\|\dot{\bar{x}}\|} \partial_{\tau_0} \eta_{0e}^{\tau_0}(\tau), \quad \text{- - -} \times t = -\frac{i}{\|\dot{\bar{x}}\|} \partial_{\tau_0} \eta_0^{\tau_0}(t). \tag{3.154}$$

В конце концов, члены взаимодействия в третьей строке в (3.151) приводят к различным типам вершин. Как и ранее, разложение евклидового действия взаимодействия даёт  $k$ -точечные вершины, соответствующие самовзаимодействию возмущений евклидовых полей

$$\begin{array}{c} 2 \\ \diagup \text{---} \times \\ \diagdown \text{---} \times \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ k \end{array} = -\frac{1}{k!} V^{(k)}(\bar{x}_e^{\tau_0}(\tau)). \tag{3.155}$$

В свою очередь, выражение для действий взаимодействия (3.139) возмущений лоренцевых полей приводят к вершинам, содержащим  $2r + 1$  квантовых и  $k - 2r - 1$  классических полей возмущений для всех подходящих  $k$  и  $r$

$$\begin{array}{c} 2 \\ \diagup \text{---} \times \\ \diagdown \text{---} \times \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ k-2r-1 \end{array} = -\frac{i}{2^{2r} (2r + 1)! (k - 2r - 1)!} V^{(k)}(\bar{x}^{\tau_0}(t)). \tag{3.156}$$

В качестве примера рассмотрим диаграммные выражения для некоторых 1- и 2-точечных корреляционных функций возмущений. Для 1-точечных корреляционных функций возмущений классических полей, мы имеем следующие первые несколько членов диаграммного ряда

$$\begin{aligned}
 \langle \eta_c(t) \rangle^{\tau_0} &= t \text{ — } \times + t \text{ — } \times \\
 &+ t \text{ — } \bigcirc + t \text{ — } \bigcirc + \text{старшие петли},
 \end{aligned} \tag{3.157}$$

где, в частности, явные выражения для второй и третьей диаграмм имеют вид

$$t \bullet \text{---} \times = -\frac{1}{\|\dot{\bar{x}}\|} \int_0^\beta d\tau_1 \partial_{\tau_0} \eta_{0e}^{\tau_0}(\tau_1) G_{\xi ce}^{\tau_0}(t, \tau_1), \quad (3.158)$$

$$t \bullet \text{---} \bigcirc = -\frac{i}{2} \int_0^T dt_1 V^{(3)}(\bar{x}^{\tau_0}(t_1)) G_{\xi cq}^{\tau_0}(t, t_1) G_{\xi cc}^{\tau_0}(t_1, t_1). \quad (3.159)$$

Диаграммный ряд для 2-точечных корреляционных функций классических и квантовых полей имеет вид

$$\begin{aligned} \langle \eta_c(t) \eta_q(t') \rangle^{\tau_0} = & t \bullet \text{---} \bullet t' + t \bullet \text{---} \text{---} \times + t \bullet \text{---} \text{---} \times \\ & + t \bullet \text{---} \bigcirc \text{---} t' + t \bullet \text{---} \bigcirc \text{---} t' \\ & + t \bullet \text{---} \bigcirc \text{---} t' + t \bullet \text{---} \bigcirc \text{---} t' + \text{старшие петли}. \end{aligned} \quad (3.160)$$

Приведём явные выражения для некоторых диаграмм этого ряда

$$\begin{aligned} t \bullet \text{---} \bigcirc \text{---} t' = & -\frac{1}{2} \int_0^T dt_1 \int_0^T dt_2 V^{(3)}(\bar{x}^{\tau_0}(t_1)) V^{(3)}(\bar{x}^{\tau_0}(t_2)) \\ & \times G_{\xi cq}^{\tau_0}(t, t_1) G_{\xi cq}^{\tau_0}(t_1, t') G_{\xi cq}^{\tau_0}(t_1, t_2) G_{\xi cc}^{\tau_0}(t_2, t_2), \end{aligned} \quad (3.161)$$

$$\begin{aligned} t \bullet \text{---} \bigcirc \text{---} t' = & -\int_0^T dt_1 \int_0^T dt_2 V^{(3)}(\bar{x}^{\tau_0}(t_1)) V^{(3)}(\bar{x}^{\tau_0}(t_2)) \\ & \times G_{\xi cq}^{\tau_0}(t, t_1) G_{\xi cq}^{\tau_0}(t_1, t_2) G_{\xi cc}^{\tau_0}(t_1, t_2) G_{\xi cq}^{\tau_0}(t_2, t'). \end{aligned} \quad (3.162)$$

Отметим, что в приведённых диаграммных рядах мы исключили диаграммы, которые равны нулю тождественно, как следствие причинной структуры функций Грина, а именно  $G_{\xi cq}^{\tau_0}$  и  $G_{\xi cc}^{\tau_0}$ , которые могут быть выведены из (3.137).

Подытожим следствия поворота Келдыша (3.129) и сравним соответствующую диаграммную технику с полученной в разделе 3.3. После поворота Келдыша мы имеем 4 независимых внутренних линии, 2 одноточечных вершины, против 6 внутренних линии и 3 одноточечных вершины до поворота. Кроме того, некоторые диаграммы в новом базисе зануляются как следствие причинной

структуры функций Грина, а именно  $G_{\xi c q}^{\tau_0}(t, t') = G_{\xi q c}^{\tau_0}(t', t) = 0$  для  $t \leq t'$ . В то же время, поворот Келдыша увеличивает количество вершин, так что мы имеем  $\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor + 2$  типов  $k$ -точечных вершин вместо 3 типов  $k$ -точечных вершин до поворота Келдыша.

# Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем:

1. Построен гамильтонов формализм теории со связями в обобщённой унимодулярной гравитации, в частности, выделены связи первого и второго рода, найдены структурные функции алгебры гамильтоновых связей. Выполнен подсчёт количества физических степеней свободы модели, обнаружена дополнительная степень свободы, отсутствующая в ОТО.
2. Модель обобщённой унимодулярной гравитации применена в контексте квантовой космологии, а именно построена теория космологических возмущений, вычислен спектр скалярных возмущений, генерируемый на инфляционной стадии эволюции Вселенной дополнительной степенью свободы — скалярным гравитоном.
3. В предположении, что дополнительная степень свободы вносит основной вклад в спектр неоднородностей реликтового излучения, подобран функциональный параметр обобщённой унимодулярной гравитации из условия соответствия спектров и амплитуд космологических возмущений наблюдаемым данным.
4. Произведена ковариантизация обобщённой унимодулярной гравитации с помощью четырёх вспомогательных Штюкельберговских полей, в результате явного разрешения классических уравнений для части из них построена эквивалентная ковариантная формулировка модели в терминах специальной теории  $k$ -эссенции.
5. Для произвольных нестационарных теорий поля и смешанных начальных состояний построена теория возмущений для  $in-in$  корреляционных функций, а именно вычислен производящий функционал таких функций в терминах многокомпонентной функции Грина. Для этой функции Грина сформулирована краевая задача и решена в терминах базисных функций, удовлетворяющих классическим уравнениям движения, а также найден

специальный набор таких функций, удовлетворяющий условиям положительной/отрицательной частотности, в терминах которых функции Грина приобретают корпускулярную интерпретацию

6. В случае, когда состояние задано евклидовой матрицей плотности, установлено условие квазипериодичности Кубо-Мартина-Швингера на функции Грина и построена процедура аналитического продолжения евклидовых функций Грина в вещественное время.
7. Для систем, находящихся в термальном состоянии и допускающих эффекты туннелирования, разработана теория возмущений и соответствующая диаграммная техника Швингера-Келдыша для вычисления in-in корреляционных функций.

## Благодарности

Я хотел бы выразить свою искреннюю благодарность моему научному руководителю, Андрею Олеговичу Барвинскому за возможность работать над интересными научными задачами под его руководством. Отдельно выражаю благодарность Александру Валерьевичу Курову, Александру Викману и Дмитрию Владиславовичу Нестерову за совместную плодотворную работу над различными частями проекта по обобщённой унимодулярной гравитации.

## Список литературы

1. *Einstein A.* Spielen Gravitationsfelder im Aufbau der materiellen Elementarteilchen eine wesentliche Rolle? // Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys. ) — 1919. — Т. 1919. — С. 349—356.
2. *Langlois D.* Dark energy and modified gravity in degenerate higher-order scalar–tensor (DHOST) theories: A review // Int. J. Mod. Phys. D. — 2019. — Т. 28, № 05. — С. 1942006. — DOI: 10.1142/S0218271819420069. — arXiv: 1811.06271 [gr-qc].
3. *Starobinsky A. A.* A New Type of Isotropic Cosmological Models Without Singularity // Phys. Lett. B / под ред. I. M. Khalatnikov, V. P. Mineev. — 1980. — Т. 91. — С. 99—102. — DOI: 10.1016/0370-2693(80)90670-X.
4. *De Felice A., Tsujikawa S.*  $f(R)$  theories // Living Rev. Rel. — 2010. — Т. 13. — С. 3. — DOI: 10.12942/lrr-2010-3. — arXiv: 1002.4928 [gr-qc].
5. *Kostelecky V. A., Russell N.* Data Tables for Lorentz and CPT Violation // Rev. Mod. Phys. — 2011. — Т. 83. — С. 11—31. — DOI: 10.1103/RevModPhys.83.11. — arXiv: 0801.0287 [hep-ph].
6. *Horava P.* Quantum Gravity at a Lifshitz Point // Phys. Rev. D. — 2009. — Т. 79. — С. 084008. — DOI: 10.1103/PhysRevD.79.084008. — arXiv: 0901.3775 [hep-th].
7. *Wang A.* Hořava gravity at a Lifshitz point: A progress report // Int. J. Mod. Phys. D. — 2017. — Т. 26, № 07. — С. 1730014. — DOI: 10.1142/S0218271817300142. — arXiv: 1701.06087 [gr-qc].
8. *Barvinsky A. O.* [и др.]. Renormalization of Hořava gravity // Phys. Rev. D. — 2016. — Т. 93, № 6. — С. 064022. — DOI: 10.1103/PhysRevD.93.064022. — arXiv: 1512.02250 [hep-th].

9. *Barvinsky A. O., Herrero-Valea M., Sibiryakov S. M.* Towards the renormalization group flow of Horava gravity in  $(3 + 1)$  dimensions // Phys. Rev. D. — 2019. — T. 100, № 2. — C. 026012. — DOI: 10.1103/PhysRevD.100.026012. — arXiv: 1905.03798 [hep-th].
10. *Barvinsky A. O., Kurov A. V., Sibiryakov S. M.* Asymptotic freedom in  $(3+1)$ -dimensional projectable Hořava gravity: Connecting the ultraviolet and infrared domains // Phys. Rev. D. — 2023. — T. 108, № 12. — C. L121503. — DOI: 10.1103/PhysRevD.108.L121503. — arXiv: 2310.07841 [hep-th].
11. *Blas D., Pujolas O., Sibiryakov S.* Consistent Extension of Horava Gravity // Phys. Rev. Lett. — 2010. — T. 104. — C. 181302. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.104.181302. — arXiv: 0909.3525 [hep-th].
12. *Dam H. van, Veltman M. J. G.* Massive and massless Yang-Mills and gravitational fields // Nucl. Phys. B. — 1970. — T. 22. — C. 397–411. — DOI: 10.1016/0550-3213(70)90416-5.
13. *Zakharov V. I.* Linearized gravitation theory and the graviton mass // JETP Lett. — 1970. — T. 12. — C. 312.
14. *Rubakov V. A.* Lorentz-violating graviton masses: Getting around ghosts, low strong coupling scale and VDVZ discontinuity. — 2004. — Июль. — arXiv: hep-th/0407104.
15. *Dubovsky S. L.* Phases of massive gravity // JHEP. — 2004. — T. 10. — C. 076. — DOI: 10.1088/1126-6708/2004/10/076. — arXiv: hep-th/0409124.
16. *Unruh W. G.* A Unimodular Theory of Canonical Quantum Gravity // Phys. Rev. D. — 1989. — T. 40. — C. 1048. — DOI: 10.1103/PhysRevD.40.1048.
17. *Henneaux M., Teitelboim C.* The Cosmological Constant and General Covariance // Phys. Lett. B. — 1989. — T. 222. — C. 195–199. — DOI: 10.1016/0370-2693(89)91251-3.
18. *Kuchar K. V.* Does an unspecified cosmological constant solve the problem of time in quantum gravity? // Phys. Rev. D. — 1991. — T. 43. — C. 3332–3344. — DOI: 10.1103/PhysRevD.43.3332.
19. *Henneaux M., Teitelboim C.* Quantization of gauge systems. — Princeton university press, 1992.

20. *Barvinsky A. O., Kamenshchik A. Y.* Darkness without dark matter and energy – generalized unimodular gravity // *Phys. Lett. B.* — 2017. — Т. 774. — С. 59–63. — DOI: 10.1016/j.physletb.2017.09.045. — arXiv: 1705.09470 [gr-qc].
21. *Barvinsky A. O.* [и др.]. Dynamics of the generalized unimodular gravity theory // *Phys. Rev. D.* — 2019. — Т. 100, № 2. — С. 023542. — DOI: 10.1103/PhysRevD.100.023542. — arXiv: 1903.09897 [hep-th].
22. *Barvinsky A. O., Kolganov N.* Inflation in generalized unimodular gravity // *Phys. Rev. D.* — 2019. — Т. 100, № 12. — С. 123510. — DOI: 10.1103/PhysRevD.100.123510. — arXiv: 1908.05697 [gr-qc].
23. *Barvinsky A. O., Kolganov N., Vikman A.* Generalized unimodular gravity as a new form of  $k$ -essence // *Phys. Rev. D.* — 2021. — Т. 103, № 6. — С. 064035. — DOI: 10.1103/PhysRevD.103.064035. — arXiv: 2011.06521 [gr-qc].
24. *Aghanim N.* [и др.]. Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters // *Astron. Astrophys.* — 2020. — Т. 641. — A6. — DOI: 10.1051/0004-6361/201833910. — arXiv: 1807.06209 [astro-ph.CO]. — [Erratum: *Astron. Astrophys.* 652, C4 (2021)].
25. *Mukhanov V. F., Feldman H. A., Brandenberger R. H.* Theory of cosmological perturbations. Part 1. Classical perturbations. Part 2. Quantum theory of perturbations. Part 3. Extensions // *Phys. Rept.* — 1992. — Т. 215. — С. 203–333. — DOI: 10.1016/0370-1573(92)90044-Z.
26. *Mukhanov V.* *Physical Foundations of Cosmology.* — Oxford : Cambridge University Press, 2005. — ISBN 978-0-521-56398-7. — DOI: 10.1017/CB09780511790553.
27. *Ballesteros G., Comelli D., Pilo L.* Massive and modified gravity as self-gravitating media // *Phys. Rev. D.* — 2016. — Т. 94, № 12. — С. 124023. — DOI: 10.1103/PhysRevD.94.124023. — arXiv: 1603.02956 [hep-th].
28. *Armendariz-Picon C., Damour T., Mukhanov V. F.*  $k$  - inflation // *Phys. Lett. B.* — 1999. — Т. 458. — С. 209–218. — DOI: 10.1016/S0370-2693(99)00603-6. — arXiv: hep-th/9904075.

29. *Garriga J., Mukhanov V. F.* Perturbations in k-inflation // Phys. Lett. B. — 1999. — T. 458. — C. 219—225. — DOI: 10.1016/S0370-2693(99)00602-4. — arXiv: hep-th/9904176.
30. *Schwinger J. S.* Brownian motion of a quantum oscillator // J. Math. Phys. — 1961. — T. 2. — C. 407—432. — DOI: 10.1063/1.1703727.
31. *Keldysh L. V.* Diagram technique for nonequilibrium processes // Zh. Eksp. Teor. Fiz. — 1964. — T. 47. — C. 1515—1527.
32. *Kubo R.* Statistical mechanical theory of irreversible processes. 1. General theory and simple applications in magnetic and conduction problems // J. Phys. Soc. Jap. — 1957. — T. 12. — C. 570—586. — DOI: 10.1143/JPSJ.12.570.
33. *Martin P. C., Schwinger J. S.* Theory of many particle systems. 1. // Phys. Rev. / под ред. К. А. Milton. — 1959. — T. 115. — C. 1342—1373. — DOI: 10.1103/PhysRev.115.1342.
34. *Arseev P. I.* On the nonequilibrium diagram technique: derivation, some features and applications // Phys. Usp. — 2015. — T. 58, № 12. — C. 1159—1205. — DOI: 10.3367/UFNe.0185.201512b.1271. — URL: <https://ufn.ru/en/articles/2015/12/b/>.
35. *Hartle J. B., Hawking S. W.* Wave Function of the Universe // Phys. Rev. D / под ред. L.-Z. Fang, R. Ruffini. — 1983. — T. 28. — C. 2960—2975. — DOI: 10.1103/PhysRevD.28.2960.
36. *Halliwell J. J., Hawking S. W.* The Origin of Structure in the Universe // Phys. Rev. D / под ред. L.-Z. Fang, R. Ruffini. — 1985. — T. 31. — C. 1777. — DOI: 10.1103/PhysRevD.31.1777.
37. *Laflamme R.* The Euclidean Vacuum: Justification From Quantum Cosmology // Phys. Lett. B. — 1987. — T. 198. — C. 156—160. — DOI: 10.1016/0370-2693(87)91488-2.
38. *Barvinsky A. O.* Why there is something rather than nothing (out of everything)? // Phys. Rev. Lett. — 2007. — T. 99. — C. 071301. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.99.071301. — arXiv: 0704.0083 [hep-th].

39. *Baym G., Mermin N. D.* Determination of thermodynamic Green's functions // Journal of Mathematical Physics. — 1961. — Т. 2, № 2. — С. 232—234. — DOI: 10.1063/1.1703704.
40. *Evans T. S.* N point finite temperature expectation values at real times // Nucl. Phys. B. — 1992. — Т. 374. — С. 340—370. — DOI: 10.1016/0550-3213(92)90357-H.
41. *Tripolt R.-A.* [и др.]. Numerical analytic continuation of Euclidean data // Comput. Phys. Commun. — 2019. — Т. 237. — С. 129—142. — DOI: 10.1016/j.cpc.2018.11.012. — arXiv: 1801.10348 [hep-ph].
42. *Kolganov N.* Real-time diagram technique for instantonic systems // JHEP. — 2023. — Т. 10. — С. 103. — DOI: 10.1007/JHEP10(2023)103. — arXiv: 2211.05746 [hep-th].
43. *Polyakov A. M.* Quark Confinement and Topology of Gauge Groups // Nucl. Phys. B. — 1977. — Т. 120. — С. 429—458. — DOI: 10.1016/0550-3213(77)90086-4.
44. *Lowe M., Stone M.* A TWO LOOP CALCULATION ABOUT A QUANTUM MECHANICAL INSTANTON // Nucl. Phys. B. — 1978. — Т. 136. — С. 177—188. — DOI: 10.1016/0550-3213(78)90021-4.
45. *Barvinsky A. O., Kolganov N.* Nonequilibrium Schwinger-Keldysh formalism for density matrix states: analytic properties and implications in cosmology // Phys. Rev. D. — 2024. — Т. 109, вып. 2. — С. 025004. — DOI: 10.1103/PhysRevD.109.025004. — arXiv: 2309.03687 [hep-th].
46. *Gibbons G. W., Hawking S. W.* Action Integrals and Partition Functions in Quantum Gravity // Phys. Rev. D. — 1977. — Т. 15. — С. 2752—2756. — DOI: 10.1103/PhysRevD.15.2752.
47. *Arnowitz R. L., Deser S., Misner C. W.* Dynamical Structure and Definition of Energy in General Relativity // Phys. Rev. — 1959. — Т. 116. — С. 1322—1330. — DOI: 10.1103/PhysRev.116.1322.
48. *Garriga J.* [и др.]. Canonical quantization of cosmological perturbations in the one-bubble open universe // Nucl. Phys. B. — 1998. — Т. 513. — С. 343—374. — DOI: 10.1016/S0550-3213(97)00780-3. — arXiv: astro-ph/9706229. — [Erratum: Nucl.Phys.B 551, 511–511 (1999)].

49. *Bardeen J. M.* Gauge Invariant Cosmological Perturbations // Phys. Rev. D. — 1980. — T. 22. — C. 1882—1905. — DOI: 10.1103/PhysRevD.22.1882.
50. *Afshordi N., Chung D. J. H., Geshnizjani G.* Cuscuton: A Causal Field Theory with an Infinite Speed of Sound // Phys. Rev. D. — 2007. — T. 75. — C. 083513. — DOI: 10.1103/PhysRevD.75.083513. — arXiv: hep-th/0609150.
51. *Elder B.* [и др.]. Positive energy theorem for  $P(X, \phi)$  theories // Phys. Rev. D. — 2015. — T. 91, № 6. — C. 064002. — DOI: 10.1103/PhysRevD.91.064002. — arXiv: 1405.7696 [hep-th].
52. *Konstantinov O., Perel V.* A diagram technique for evaluating transport quantities // SOVIET PHYSICS JETP-USSR. — 1961. — T. 12, № 1. — C. 142—149.
53. *Kadanoff L. P., Baym G.* Quantum statistical mechanics: Green's function methods in equilibrium and nonequilibrium problems. — CRC Press, 2018.
54. *Dubovsky S.* [и др.]. Null energy condition and superluminal propagation // JHEP. — 2006. — T. 03. — C. 025. — DOI: 10.1088/1126-6708/2006/03/025. — arXiv: hep-th/0512260.
55. *Ballesteros G., Bellazzini B.* Effective perfect fluids in cosmology // JCAP. — 2013. — T. 04. — C. 001. — DOI: 10.1088/1475-7516/2013/04/001. — arXiv: 1210.1561 [hep-th].
56. *Endlich S., Nicolis A., Wang J.* Solid Inflation // JCAP. — 2013. — T. 10. — C. 011. — DOI: 10.1088/1475-7516/2013/10/011. — arXiv: 1210.0569 [hep-th].

# Приложение А

## Приложения к главе 1

### А.1 Отщепление полей Штюкельберга для семейства (1.162)

Здесь мы рассматриваем второй класс модифицированных теорий гравитации (1.153) с  $SO(3)$ -инвариантным тензором, имеющим вид тензора энергии-импульса идеальной жидкости. Соответствующая функция  $U(g^{\mu\nu})$ , задающая связь, имеет специальную зависимость от метрики (1.166), которая принимает вид (1.162) после применения процедуры ковариантизации (1.154). Мы предполагаем, что эта связь может быть разрешена относительно  $Z$  как  $Z = Q(b)$ , поэтому полагаем  $U = Q(b) - Z$  в (1.153). Таким образом, действие соответствующей модели принимает вид

$$S[g_{\mu\nu}, \Lambda, \phi^A] = S_{\text{EH}}[g_{\mu\nu}] + \int d^4x \sqrt{-g} \Lambda (Q(b) - Z), \quad (\text{A.1})$$

где  $Z = \sqrt{-\det C^{AB}}$  и  $b = \sqrt{\det C^{ab}}$ , как и ранее. Соответствующий тензор энергии-импульса имеет вид

$$T_{\mu\nu} = \Lambda [(Q - b Q_b) g_{\mu\nu} - b Q_b u_\mu u_\nu], \quad (\text{A.2})$$

$$u^\mu = \frac{1}{3! \sqrt{-g} b} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{abc} \partial_\nu \phi^a \partial_\rho \phi^b \partial_\sigma \phi^c, \quad (\text{A.3})$$

где  $Q_b = \partial_b Q$ . Таким образом, в отличие от случая теории  $k$ -эссенции, соответствующая идеальная жидкость имеет ненулевую завихрённость, (см. [54]). Её гидродинамические параметры имеют вид

$$p = \Lambda (Q - b Q_b) = w\rho, \quad w = -1 + \frac{b Q_b}{Q}. \quad (\text{A.4})$$

Как и в случае (1.168), соответствующем обобщённой унимодулярной гравитации, часть полей Штюкельберга отщепляются от динамики системы. Дей-

ствительно, тензор энергии-импульса (А.4) не зависит от временного поля Штюкельберга  $\phi^0$ , так что  $\phi^0$  не входит в уравнения Эйнштейна. Как было показано в разделе 1.4, уравнения полей Штюкельберга не вносят новой динамики в полевые уравнения и следуют из уравнений Эйнштейна. Единственное место, куда входит временное поле Штюкельберга, это связь  $Z = Q(b)$ , которая выражает временное поле в терминах пространственных. В этом смысле,  $\phi^0$  отщепляется от динамики теории.

В данном случае, имеется прямой аналог закона сохранения (1.174). Проецируя закон ковариантного сохранения тензора энергии-импульса  $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$ , имеющего явный вид (А.4), на вектор сопутствующей скорости  $u^\nu$ , получаем

$$u^\nu \nabla^\mu T_{\mu\nu} = Q(b) u^\mu \partial_\mu \Lambda = 0. \quad (\text{А.5})$$

Это равенство предполагает, что  $\Lambda = L(\phi)$ , является некоторой функцией только пространственных полей  $\phi \equiv (\phi^1, \phi^2, \phi^3)$ , так как  $u^\mu \partial_\mu \phi^a = 0$ . Таким образом, мы можем переписать уравнения движения для пространственных полей Штюкельберга как

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta \phi^a} = \left( \frac{\partial}{\partial \phi^a} - \nabla_\mu \frac{\partial}{\partial (\nabla_\mu \phi^a)} \right) L(\phi) Q(b) = 0, \quad (\text{А.6})$$

в то время как тензор энергии-импульса принимает вид

$$T_{\mu\nu} = L(\phi) [(Q(b) - b Q_b(b)) g_{\mu\nu} - b Q_b(b) u_\mu u_\nu]. \quad (\text{А.7})$$

Эти полевые уравнения и тензор энергии-импульса могут быть сгенерированы следующей скалярной теорией поля, минимально взаимодействующей с общей гравитацией Эйнштейна

$$S_{\text{pf}}[g_{\mu\nu}, \phi^a] = S_{\text{EH}}[g_{\mu\nu}] + \int d^4x \sqrt{-g} L(\phi) Q(b). \quad (\text{А.8})$$

Как и в случае обобщённой унимодулярной гравитации (1.168), неизвестная функция  $L(\phi)$ , определяющая эквивалентное ковариантное действие, определяется из полного набора уравнений движения, а именно уравнений Эйнштейна с тензором энергии-импульса (А.7). Это можно сделать явно, например, на однородном фоне, однако в общем случае процедура получения  $L(\phi)$  технически сложна.

К сожалению, в случае фридмановского фона процедура не приводит к интересному результату, так как единственным выбором полей  $\phi^a$  совместимых

с однородностью фона, как и ранее является выбор  $\phi^a = x^a = x^i$ . Тогда на фридмановском фоне (1.179) мы имеем  $Z = \dot{\phi}/\mathcal{N}a^3$  и  $b = 1/a^3$ , так что действие (A.1) принимает вид

$$S[a, \mathcal{N}, \phi, \Lambda] = -3 \int dt \mathcal{N} a^3 \frac{\dot{a}^2}{\mathcal{N}^2 a^2} + \int dt \Lambda (\mathcal{N} a^3 Q(b) - \dot{\phi}). \quad (\text{A.9})$$

Вариация по  $\phi$  приводит к постоянному во времени множителю Лагранжа  $\Lambda$ , значение которого определяется из начальных условий. Пространственная однородность фона также предполагает, что  $\Lambda$  является также и пространственной постоянной, т.е.  $L(\phi) = \Lambda = \text{const}$ . Космологические приложения таких моделей хорошо изучены [55]. В частности, они приводят к генерации первичных спектров, согласующихся с наблюдаемыми данными реликтового излучения [56].

Однородный фон, нетривиально задеиствующий связь  $U = Q(b) - Z = 0$  соответствует метрике с ненулевыми функциями сдвига, т.е.  $ds^2 = -\mathcal{N}^2(t) dt^2 + a^2(t) \delta_{ij} dx^i dx^j + 2\mathcal{N}_i(t) dx^i dt$ . Эти функции сдвига играют роль динамически инертных полей  $\phi^i = x^i$  и раскрывают принципиальное отличие связи (1.166) от (1.165). В отличие от (1.165), связь (1.166) неявно выражает функцию хода не только в терминах пространственной метрики  $\gamma_{ij}$  но и в терминах  $\mathcal{N}_i$ ,  $\mathcal{N} = N(\gamma_{ij}, \mathcal{N}_i)$ . В ковариантизованном виде это очевидно из выражений, соответствующих фридмановскому анзацу с  $\phi^i = x^i$

$$Z = \frac{\dot{\phi}}{\mathcal{N}a^3}, \quad b = \frac{1}{a^3} \sqrt{1 - \frac{\delta^{ij} \mathcal{N}_i \mathcal{N}_j}{a^2 \mathcal{N}^2}}, \quad (\text{A.10})$$

Таким образом, получаем, что связь  $Q(b) - Z = 0$  приводит к дополнительной зависимости  $\mathcal{N}$  от  $\mathcal{N}_i$ .

## Приложение Б

### Приложения к главе 2

#### Б.1 Обращение некоторых матриц

Пусть необходимо обратить следующую квадратную матрицу

$$M_1 = I - P_{\pm}A, \quad M_2 = I - AP_{\pm}, \quad (\text{Б.1})$$

где

$$P_{\pm} = I \pm X, \quad X = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{Б.2})$$

а матрица  $A$  удовлетворяет свойству

$$XAX = A^*. \quad (\text{Б.3})$$

В терминах блочного представления матрицы  $A$  это означает, что  $A$  имеет следующий вид

$$A = \begin{bmatrix} B & C \\ C^* & B^* \end{bmatrix}. \quad (\text{Б.4})$$

Далее, формально разложим (Б.1) в ряд Тейлора

$$(M_1)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (P_{\pm}A)^n, \quad (M_2)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (AP_{\pm})^n. \quad (\text{Б.5})$$

Замечая, что  $(P_{\pm}A)^n = P_{\pm}(A + A^*)^{n-1}A$ ,  $(AP_{\pm})^n = A(A + A^*)^{n-1}P_{\pm}$ , немедленно получаем формулы для обратных матриц

$$(M_1)^{-1} = I + \sum_{n=0}^{\infty} P_{\pm}(A + A^*)^n A = I + P_{\pm}(I - A - A^*)^{-1}A, \quad (\text{Б.6})$$

$$(M_2)^{-1} = I + A \sum_{n=0}^{\infty} (A + A^*)^n P_{\pm} = I + A(I - A - A^*)^{-1}P_{\pm}. \quad (\text{Б.7})$$

## Вывод уравнения (2.149)

Чтобы получить выражение (2.150) для функции Грина  $\mathbf{G}(t, t')$  достаточно вывести соотношение (2.148) для её составляющей  $\mathbf{v}_+(t)(i\Delta_{-+})^{-1}\mathbf{v}_-^T(t')$ . Для этого необходимо явно записать  $\mathbf{v}_-^T$ , подставляя (2.146) в (2.145) что даёт

$$\mathbf{v}_-^T(t') = (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}) \frac{1}{\sqrt{2\boldsymbol{\omega}_{\text{re}}}} \mathbf{v}^\dagger(t') + (\boldsymbol{\omega}^* - \boldsymbol{\Omega}) \frac{1}{\sqrt{2\boldsymbol{\omega}_{\text{re}}}} \mathbf{v}^T(t'). \quad (\text{Б.8})$$

Далее, прибавляя и вычитая выражение  $[-\mathbf{X}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}\mathbf{X}](2\boldsymbol{\omega}_{\text{re}})^{-1/2}\mathbf{v}^\dagger(t')$  мы искусственно выделяем выражение, присутствующее в квадратных скобках в (2.147), в результате чего мы получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_-^T(t') = & \left[ (\mathbf{I} - \mathbf{X})\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{I} + \mathbf{X}) \right] \frac{1}{\sqrt{2\boldsymbol{\omega}_{\text{re}}}} \mathbf{v}^\dagger(t') \\ & + (\boldsymbol{\omega}^* - \boldsymbol{\Omega}) \frac{1}{\sqrt{2\boldsymbol{\omega}_{\text{re}}}} \mathbf{v}_+^T(t'), \end{aligned} \quad (\text{Б.9})$$

где базисная функция  $\mathbf{v}^T$  была дополнено до базисной функции  $\mathbf{v}_+^T$  согласно определению последней (2.144). Отметим, что матрицы  $\boldsymbol{\omega}_{\text{re}}$  и  $\mathbf{X}$  коммутируют друг с другом. Далее, пользуясь тем, что  $\mathbf{X}\boldsymbol{\omega}\mathbf{X} = \boldsymbol{\omega}^*$  перепишем разность  $\boldsymbol{\omega}^* - \boldsymbol{\Omega}$ , снова выделяя выражение в квадратных скобках в (2.147)

$$\boldsymbol{\omega}^* - \boldsymbol{\Omega} = (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega})\mathbf{X} - \left[ (\mathbf{I} - \mathbf{X})\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{I} + \mathbf{X}) \right] \mathbf{X}. \quad (\text{Б.10})$$

В результате, базисная функция  $\mathbf{v}_-^T$  переписывается в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_-^T(t') = & \left[ (\mathbf{I} - \mathbf{X})\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{I} + \mathbf{X}) \right] \frac{1}{\sqrt{2\boldsymbol{\omega}_{\text{re}}}} (\mathbf{v}^\dagger(t') - \mathbf{X}\mathbf{v}_+^T(t')) \\ & + (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}) \frac{1}{\sqrt{2\boldsymbol{\omega}_{\text{re}}}} \mathbf{v}_+^T(t'). \end{aligned} \quad (\text{Б.11})$$

Подстановка в  $\mathbf{v}_+(t)(i\Delta_{-+})^{-1}\mathbf{v}_-^T(t')$  даёт

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_+(t)(i\Delta_{-+})^{-1}\mathbf{v}_-^T(t') = & \mathbf{v}_+(t)\mathbf{v}^\dagger(t') - \mathbf{v}_+(t)\mathbf{X}\mathbf{v}_+^T(t') \\ & + \mathbf{v}_+(t)\sqrt{2\boldsymbol{\omega}_{\text{re}}}\left[ (\mathbf{I} - \mathbf{X})\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{I} + \mathbf{X}) \right]^{-1} (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega})\mathbf{X} \frac{1}{\sqrt{2\boldsymbol{\omega}_{\text{re}}}} \mathbf{v}_+^T(t'). \end{aligned} \quad (\text{Б.12})$$

Выражение в квадратных скобках может быть переписано как

$$\begin{aligned} (\mathbf{I} - \mathbf{X})\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{I} + \mathbf{X}) = & (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega})\mathbf{X} \frac{1}{\sqrt{2\boldsymbol{\omega}_{\text{re}}}} \\ & \times \left[ \mathbf{I} + \mathbf{X} - \sqrt{2\boldsymbol{\omega}_{\text{re}}}\mathbf{X}(\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega})^{-1}\mathbf{X}\sqrt{2\boldsymbol{\omega}_{\text{re}}} \right] \sqrt{2\boldsymbol{\omega}_{\text{re}}}. \end{aligned} \quad (\text{Б.13})$$

где мы использовали, что матрицы  $\boldsymbol{\omega}_{\text{re}}$  и  $\mathbf{X}$  коммутируют, и  $\mathbf{X}^2 = \mathbf{I}$ . Подставляя это выражение в (Б.12) мы получаем требуемый результат (2.148) с матрицей  $\boldsymbol{\nu}$  заданной в (2.149).

## Б.2 Вывод некоторых уравнений

### Вывод уравнения (2.189)

Цель этого Приложения двояка. Прежде всего, мы выведем простой вид (2.154) матрицы  $\mathbf{G}(0, 0)$ , демонстрирующий, что евклидова функция Грина (2.184)

$$G_E(\tau, \tau') = G_D(\tau, \tau') + i \mathbf{w}_E^T(\tau) \mathbf{G}(0, 0) \mathbf{w}_E(\tau') \quad (\text{Б.14})$$

действительно не зависит от лоренцевых величин. Далее, мы выразим производящий функционал (2.184) в терминах функции Грина задачи Неймана, используя соотношения (2.66), (2.67) и, таким образом, выведем альтернативную форму периодической функции Грина (2.189).

Запишем явный вид матрицы  $i\mathbf{G}(0, 0)$  следующий из определения (2.139) и (2.147)

$$i\mathbf{G}(0, 0) = (\mathbf{I} + \mathbf{X}) \left[ (\mathbf{I} - \mathbf{X}) \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega} (\mathbf{I} + \mathbf{X}) \right]^{-1}. \quad (\text{Б.15})$$

Далее, прибавим и вычтем  $\boldsymbol{\Omega}^*$  внутри квадратных скобок и вынесем множитель  $\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\Omega}^* = 2\boldsymbol{\Omega}_{\text{re}}$  за скобки. Получаем

$$i\mathbf{G}(0, 0) = \frac{\mathbf{I} + \mathbf{X}}{2\boldsymbol{\Omega}_{\text{re}}} \left[ \mathbf{I} - (\mathbf{I} - \mathbf{X}) \mathbf{A} \right]^{-1}, \quad \mathbf{A} := (\boldsymbol{\Omega}^* - \boldsymbol{\omega})(\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\Omega}^*)^{-1}, \quad (\text{Б.16})$$

где мы использовали, что  $\mathbf{X}\boldsymbol{\Omega}^*\mathbf{X} = \boldsymbol{\Omega}$  и  $\mathbf{X}^2 = \mathbf{I}$ . Отметим, что «отношение» двух матриц в полученном выражении является однозначно определённым, так как  $\mathbf{I} + \mathbf{X}$  и  $\boldsymbol{\Omega}$  коммутируют друг с другом. Теперь, выражение в квадратных скобках может быть обращён с помощью (Б.6). Результат обращения есть  $\mathbf{I}$  плюс второе слагаемое, имеющее  $\mathbf{I} - \mathbf{X}$  в качестве левого сомножителя. Замечая что  $(\mathbf{I} + \mathbf{X})(\mathbf{I} - \mathbf{X}) = 0$ , мы заключаем что остаётся только первое слагаемое  $\mathbf{I}$  так что результат имеет вид

$$i\mathbf{G}(0, 0) = \frac{\mathbf{I} + \mathbf{X}}{2\boldsymbol{\Omega}_{\text{re}}}. \quad (\text{Б.17})$$

Таким образом, мы видим, что евклидова функция Грина (Б.14) действительно не зависит от каких-либо лоренцевых объектов (в частности, от  $\boldsymbol{\omega}$ ).

Перепишем теперь евклидову функцию Грина (Б.14) следующую из производящего функционала (2.184) в другой форме, а именно, выразим функцию Грина задачи Дирахле в терминах функции Грина задачи Неймана, удовлетворяющей граничным условиям  $(W_E + \omega)G_N(\beta, \tau') = (W_E - \omega^*)G_N(0, \tau') = 0$ , где матрица  $\omega$  та же, что и в (2.141). Для этого используем соотношения (2.67) и (2.66) с подстановкой  $\omega \mapsto -i\omega$  соответствующей переходу к евклидовым уравнениям. Применяя эти соотношения вместе с (Б.17) к евклидовой функции Грина (Б.14), получаем

$$G_E(\tau, \tau') = G_N(\tau, \tau') + \mathbf{g}_N^T(\tau) \left[ (\omega + \Omega) \frac{\mathbf{I} + \mathbf{X}}{2\Omega_{\text{re}}} (\omega + \Omega) - (\omega + \Omega) \right] \mathbf{g}_N(\tau'). \quad (\text{Б.18})$$

Оказывается, что это выражение может быть существенно упрощено, и напрямую связано с матрицей  $\nu$ , определённой в (2.149). Чтобы показать это, перепишем  $\nu$ , определяя матрицу

$$\mathbf{B}^{-1} := \sqrt{2\omega_{\text{re}}} \mathbf{X} (\omega + \Omega)^{-1} \mathbf{X} \sqrt{2\omega_{\text{re}}} \quad (\text{Б.19})$$

и выражая её через выражение в квадратных скобках в (2.149). Таким образом, получаем

$$\nu + \mathbf{X} = - \left[ \mathbf{I} - \mathbf{B}(\mathbf{I} + \mathbf{X}) \right]^{-1} \mathbf{B}, \quad (\text{Б.20})$$

где мы перенесли матрицу  $\mathbf{X}$  в левую часть для будущего удобства. Теперь, явно обратим выражение в квадратных скобках, используя (Б.7). После простых преобразований, получаем

$$\nu + \mathbf{X} = \mathbf{X} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\text{re}}}} \left[ (\omega + \Omega) \frac{\mathbf{I} + \mathbf{X}}{2\Omega_{\text{re}}} (\omega + \Omega) - (\omega + \Omega) \right] \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\text{re}}}} \mathbf{X}. \quad (\text{Б.21})$$

Далее, сравнивая с (Б.18) получаем

$$G_E(\tau, \tau') = G_N(\tau, \tau') + \mathbf{g}_N^T(\tau) \sqrt{2\omega_{\text{re}}} (\nu^* + \mathbf{X}) \sqrt{2\omega_{\text{re}}} \mathbf{g}_N(\tau'), \quad (\text{Б.22})$$

где мы использовали свойство  $\mathbf{X}\nu\mathbf{X} = \nu^*$ .

### Б.3 Свойства гауссовых матриц плотности

Пусть задана гауссова матрица плотности (2.123), которую мы выпишем здесь для удобства

$$\rho(\varphi_+, \varphi_-) = \frac{1}{Z} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \varphi^T \Omega \varphi + \mathbf{j}^T \varphi \right\}, \quad \varphi = \begin{bmatrix} \varphi_+ \\ \varphi_- \end{bmatrix} \quad (\text{Б.23})$$

где

$$\mathbf{j} = \begin{bmatrix} j \\ j^* \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} R & S \\ S^* & R^* \end{bmatrix}, \quad R = R^T, \quad S = S^\dagger. \quad (\text{Б.24})$$

Исследуем следующие её свойства

1. нормируемость, т.е. конечность  $\text{tr } \hat{\rho}$ ,
2. ограниченность, т.е. конечность  $\|\hat{\rho}|\psi\rangle\|$  для всех нормируемых состояний  $|\psi\rangle$ ,
3. положительная определённость, т.е. положительность собственных значений  $\hat{\rho}$ .

Нормируемость есть условие существованию интеграла

$$\text{tr } \hat{\rho} = \int d\varphi \rho(\varphi, \varphi) = [\det(R + S + R^* + S^*)]^{-1/2}, \quad (\text{Б.25})$$

что эквивалентно положительной определённости вещественной части суммы  $R + S$ . Ограниченность  $\hat{\rho}$  эквивалентна существованию матрицы  $\hat{\rho}^2$ , что в координатном представлении пропорциональна  $\langle \varphi_1 | \hat{\rho}^2 | \varphi_2 \rangle \propto [\det(R + R^*)]^{-1/2}$ , так что необходимо потребовать положительную определённость матрицы  $R$ .

Положительная определённость требует отдельного внимания, а именно, анализа собственных значений и векторов  $\hat{\rho}$ . Мы сосредоточимся на случае, для которого  $R$  и  $S$  являются вещественными, а  $\mathbf{j} = 0$ . Все результаты будут верны также и для ненулевого источника  $\mathbf{j}$  но их вывод является более громоздким. Мы будем предполагать, что нормируемость и ограниченность матрицы плотности выполнены, т.е. матрицы  $R$  и  $R + S$  являются положительно определёнными. Рассмотрим матричный элемент  $\langle \varphi | \hat{\rho} | \alpha \rangle$ , где  $|\alpha\rangle$  есть когерентное состояние, определённое в (2.114). Используя разбиение единицы в координатном представлении, получаем

$$\begin{aligned} \langle \varphi | \hat{\rho} | \alpha \rangle &= \int d\varphi' \rho(\varphi, \varphi') \langle \varphi' | \alpha \rangle \\ &= \frac{1}{Z} \exp \left[ -\frac{1}{2} \varphi^T (R - S(R + \omega)^{-1} S) \varphi \right. \\ &\quad \left. - \alpha^T \sqrt{2\omega} (R + \omega)^{-1} S \varphi - \frac{1}{2} \alpha^T (I - \sqrt{2\omega} (R + S)^{-1} \sqrt{2\omega}) \alpha \right]. \end{aligned} \quad (\text{Б.26})$$

Теперь давайте предположим, что матрицы  $R - S$  является положительно определённой, т.е. может быть сделан выбор (2.170) матрицы  $\omega$ . После некоторых

тождественных преобразований матричный элемент может быть переписан как

$$\langle \varphi | \hat{\rho} | \alpha \rangle = \frac{1}{Z} \exp \left[ -\frac{1}{2} \varphi^T \omega \varphi + \alpha^T \frac{\nu}{\nu + I} \sqrt{2\omega} \varphi - \frac{1}{2} \alpha^T \left( \frac{\nu}{\nu + I} \right)^2 \alpha \right], \quad (\text{Б.27})$$

где матрица  $\nu$  определена в терминах  $R$  и  $S$  в (2.171). Сравнивая правую часть с (2.114) получаем, что

$$\hat{\rho} | \alpha \rangle = \left| \frac{\nu}{\nu + I} \alpha \right\rangle. \quad (\text{Б.28})$$

Вычисляя производные левой и правой частей по  $\alpha$ , затем подставляя  $\alpha = 0$ , и сравнивая (2.117), заключаем, что собственные значения  $\hat{\rho}$  являются произвольными произведениями собственных значений матрицы  $\frac{\nu}{\nu + I}$ . Таким образом, последняя матрица обязана быть положительно определённой если наложить условие положительной определённости на  $\hat{\rho}$ . Используя выражение (2.171) для  $\nu$ , находим, что положительная определённость выполняется для отрицательно определённой матрицы  $\sigma$  и, следовательно, положительно определённой матрицы  $S = R^{1/2} \sigma R^{1/2}$ .

В итоге, мы обнаружили, что гауссова матрица плотности (2.123) является нормируемой, если вещественная часть суммы  $R + S$  положительно определена. Матрица плотности является ограниченной, если вещественная часть матрицы  $R$  положительно определена. Если дополнительно потребовать, что матрицы  $R$  и  $S$  вещественна, а разность  $R - S$  положительно определена, что мотивировано наличием корпускулярной интерпретации, описанной 2.2.5, получаем, что матрица плотности положительно определена, если  $S$  отрицательно определена.

## Приложение В

### Приложения к главе 3

#### В.1 Евклидовы функции Грина и нулевые моды

В этом приложении мы рассмотрим одномерную систему, допускающую периодическое движение. Мы сосредоточимся на линейных возмущениях на фоне периодического движения и построим соответствующую им функцию Грина, разрешая возникающую при этом проблему нулевой моды.

Пусть квантовомеханическая теория задана евклидовым действием

$$S[x] = \int_0^\beta d\tau \left[ \frac{\dot{x}^2}{2} + V(x) \right] \quad (\text{В.1})$$

где потенциал  $V$  имеет локальные минимумы. Ввиду наличия последних уравнения движения

$$\ddot{x} - V'(x) = 0 \quad (\text{В.2})$$

имеют периодические решения  $\bar{x}(\tau)$ , т.е. такие что

$$\bar{x}(0) = \bar{x}(\beta), \quad \dot{\bar{x}}(0) = \dot{\bar{x}}(\beta), \quad (\text{В.3})$$

где  $\beta$  обозначает период. Рассмотрим возмущение  $\eta$  около решения  $\bar{x}$ . Возмущение удовлетворяет линейному уравнению

$$[-\partial_\tau^2 + V''(\bar{x}(\tau))] \eta(\tau) = 0. \quad (\text{В.4})$$

Вычисляя производную от уравнения (В.2) вычисленного на решении  $\bar{x}$  получаем

$$[-\partial_\tau^2 + V''(\bar{x}(\tau))] \dot{\bar{x}}(\tau) = 0, \quad (\text{В.5})$$

так что  $\eta_0 \propto \dot{\bar{x}}$  есть решение уравнений движения (В.4) для возмущений. Кроме того, благодаря периодичности граничных условий (В.3) мы получаем, что

мода  $\eta_0$  также периодична, так что она является нулевой модой оператора  $K$ , определяющего уравнения движения для возмущений (В.4)

$$(K\eta_0)(\tau) = \int_0^\beta d\tau' K(\tau, \tau')\eta_0(\tau') = 0, \quad K(\tau, \tau') = [-\partial_\tau^2 + V''(\bar{x}(\tau))]\delta(\tau - \tau'). \quad (\text{В.6})$$

Определим нормированную нулевую моду как

$$\eta_0(\tau) = \frac{1}{\|\dot{\bar{x}}\|} \dot{\bar{x}}(\tau), \quad \|\dot{\bar{x}}\|^2 = \int_0^\beta d\tau (\dot{\bar{x}}(\tau))^2. \quad (\text{В.7})$$

Чтобы построить функцию Грина оператора  $K$ , найдём второе линейно независимое решение  $\zeta_0$  уравнения (В.4), которое может быть получен из условия постоянства гамильтониана

$$W[\eta_0, \zeta_0] = \eta_0 \partial_\tau \zeta_0 - \zeta_0 \partial_\tau \eta_0 = 1, \quad (\text{В.8})$$

так что

$$\zeta_0(\tau) = \eta_0(\tau) \int_0^\tau \frac{d\tau'}{(\eta_0(\tau'))^2}. \quad (\text{В.9})$$

Отметим, что для того чтобы  $\zeta_0$  была конечной, нулевая мода  $\eta_0$  должна иметь только простые нули.

В то время как нулевая мода  $\eta_0$  является периодичной, второе решение  $\zeta_0$  в общем случае периодическим не является. Тем не менее, непериодичность последней может быть охарактеризована количественно следующим образом. А именно, так как сдвинутое решение  $\zeta_0(\tau + \beta)$  также является решением того же уравнения, оно обязано быть линейной комбинацией  $\eta_0(\tau)$  и  $\zeta_0(\tau)$

$$\zeta_0(\tau + \beta) = \zeta_0(\tau) + \Delta \eta_0(\tau), \quad (\text{В.10})$$

где  $\Delta$  есть некоторая константа, называемая монодромией, а единичный коэффициент перед  $\zeta_0$  объясняется следующим образом. Предполагая, что  $\zeta_0(\tau + \beta) = \tilde{\Delta} \zeta_0(\tau) + \Delta \eta_0(\tau)$ , получаем

$$\begin{aligned} W[\eta_0(\tau), \zeta_0(\tau)] &= W[\eta_0(\tau + \beta), \zeta_0(\tau + \beta)] \\ &= W[\eta_0(\tau), \zeta_0(\tau + \beta)] = \tilde{\Delta} W[\eta_0(\tau), \zeta_0(\tau)], \end{aligned} \quad (\text{В.11})$$

где мы использовали постоянность  $W$ , периодичность  $\eta_0$ , и зануление  $W[\eta_0, \eta_0]$ . Так как  $W[\eta_0, \zeta_0] = 1 \neq 0$ , получаем что  $\tilde{\Delta} = 1$ .

## Вычитание нулевой моды

Рассмотрим неоднородную версию уравнения на возмущение с источником  $j$  в правой части

$$[-\partial_\tau^2 + V''(\bar{x}(\tau))]\eta(\tau) = j(\tau), \quad (\text{B.12})$$

с периодическими граничными условиями

$$\eta(0) = \eta(\beta), \quad \partial_\tau \eta(0) = \partial_\tau \eta(\beta). \quad (\text{B.13})$$

Домножая обе части равенства на нулевую моду  $\eta_0$  и интегрируя по периоду от 0 до  $\beta$ , получаем

$$\begin{aligned} 0 &= \|\dot{\bar{x}}\| \int_0^\beta d\tau [-\partial_\tau^2 \eta(\tau) + V''(\bar{x}(\tau))\eta(\tau) - j(\tau)] \eta_0(\tau) \\ &= \int_0^\beta d\tau [\ddot{\bar{x}}(\tau) - V'(\bar{x}(\tau))]\partial_\tau \eta(\tau) + [-\dot{\bar{x}}(\tau)\partial_\tau \eta(\tau) + V'(\bar{x}(\tau))\eta(\tau)] \Big|_0^\beta \\ &\quad - \int_0^\beta d\tau j(\tau) \eta_0(\tau). \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Первое слагаемое в правой части зануляется как следствие фоновых уравнений движения (B.2), второе слагаемое равно нулю из-за периодичности  $\eta$  и  $\bar{x}$ , так что источник  $j$  должен быть ортогонален нулевой моде

$$\int_0^\beta d\tau j(\tau) \eta_0(\tau) = 0. \quad (\text{B.15})$$

Таким образом, функция Грина для задачи (B.12), (B.13) должна удовлетворять уравнению

$$[-\partial_\tau^2 + V''(\bar{x})]G(\tau, \tau') = \delta(\tau - \tau') - \eta_0(\tau)\eta_0(\tau') \quad (\text{B.16})$$

с вычтенной нулевой модой.

Будем искать функцию Грина в следующем виде

$$G(\tau, \tau') = G_0(\tau, \tau') + \Omega(\tau, \tau') + \alpha H_{\eta\eta}(\tau, \tau') + \beta H_{\eta\zeta}(\tau, \tau') + \gamma H_{\zeta\zeta}(\tau, \tau') \quad (\text{B.17})$$

где  $\alpha, \beta, \gamma$  есть константы, которые должны быть найдены из граничных условий, а  $G_0(\tau, \tau')$  обозначает вспомогательную функцию Грина, удовлетворяющую уравнению

$$[-\partial_\tau^2 + V''(\bar{x})]G_0(\tau, \tau') = \delta(\tau - \tau') \quad (\text{B.18})$$

и имеющую явный вид

$$G_0(\tau, \tau') = G_0^>(\tau, \tau') \theta(\tau - \tau') + G_0^<(\tau, \tau') \theta(\tau' - \tau), \quad (\text{B.19})$$

$$G_0^>(\tau, \tau') = \frac{1}{2}(\eta_0(\tau)\zeta_0(\tau') - \zeta_0(\tau)\eta_0(\tau')) = -G_0^<(\tau, \tau') \quad (\text{B.20})$$

а остальные функции, входящие в определение  $G(\tau, \tau')$  заданы как

$$\begin{aligned} \Omega(\tau, \tau') &= \omega(\tau)\eta_0(\tau') + \eta_0(\tau)\omega(\tau'), \\ H_{\eta\eta}(\tau, \tau') &= \eta_0(\tau)\eta_0(\tau'), \\ H_{\eta\zeta}(\tau, \tau') &= \zeta_0(\tau)\eta_0(\tau') + \eta_0(\tau)\zeta_0(\tau'), \\ H_{\zeta\zeta}(\tau, \tau') &= \zeta_0(\tau)\zeta_0(\tau'). \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

Здесь функция  $\omega(\tau)$  определяется следующим образом. Подстановка (B.17) в (B.16) даёт следующее уравнение на  $\omega(\tau)$

$$[-\partial_\tau^2 + V''(\bar{x})]\omega(\tau) = -\eta_0(\tau) \quad (\text{B.22})$$

Домножим это уравнение на  $\eta_0$  и вычтем из равенства  $\omega(\tau)[- \partial_\tau^2 + V''(\bar{x})]\eta_0(\tau) = 0$ , откуда получим следующее уравнение на  $\omega(\tau)$

$$\frac{d}{d\tau}W[\eta_0, \omega] = (\eta_0(\tau))^2 \quad \leftrightarrow \quad \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\omega(\tau)}{\eta_0(\tau)}\right) = \int_0^\tau d\tau' (\eta_0(\tau'))^2, \quad (\text{B.23})$$

интегрирование которого даёт

$$\begin{aligned} \omega(\tau) &= \eta_0(\tau) \int_0^\tau d\tau' \frac{1}{(\eta_0(\tau'))^2} \int_0^{\tau'} d\tau'' (\eta_0(\tau''))^2 \\ &= \zeta_0(\tau) \int_0^\tau d\tau' (\eta_0(\tau'))^2 - \eta_0(\tau) \int_0^\tau d\tau' \eta_0(\tau')\zeta_0(\tau'), \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

где во втором равенстве мы применили интегрирование по частям.

Как было сказано выше, константы  $\alpha, \beta, \gamma$  анзаца (B.17) должны быть определены из граничных условий. Однако, существует дополнительная свобода, так как функция Грина в (B.16) может быть сдвинута на слагаемое, пропорциональное нулевой моде, а именно  $\eta_0(\tau)\eta_0(\tau')$ , с произвольным коэффициентом. Таким образом, необходимо наложить «калибровочное условие» которое мы выбираем следующим образом

$$\int_0^\beta dt \eta_0(\tau) G(\tau, \tau') = 0. \quad (\text{B.25})$$

## Периодические граничные условия

Чтобы найти неизвестные константы в (В.17), наложим периодические граничные условия

$$G(\tau + \beta, \tau') = G(\tau), \quad \partial_\tau G(\tau + \beta, \tau') = \partial_\tau G(\tau). \quad (\text{В.26})$$

Чтобы найти явные выражения для коэффициентов, исследуем как преобразуются отдельные слагаемые в анзаце (В.17) при сдвиге первого аргумента на период. Для каждой функции  $F(\tau)$  определим действие на неё операции монодромии  $\hat{\Delta}F$  как

$$\hat{\Delta}F(\tau) = F(\tau + \beta) - F(\tau). \quad (\text{В.27})$$

Действуя этой операцией на слагаемые в (В.17), получаем

$$\begin{aligned} \hat{\Delta}G_0(\tau, \tau') &= -2\zeta_0(\tau)\eta_0(\tau') + H_{\eta\zeta}(\tau, \tau') - \frac{\Delta}{2}H_{\eta\eta}(\tau, \tau'), \\ \hat{\Delta}\Omega(\tau, \tau') &= \zeta_0(\tau)\eta_0(\tau') + (\Delta - (\eta_0, \zeta_0))H_{\eta\eta}(\tau, \tau'), \\ \hat{\Delta}H_{\eta\eta}(\tau, \tau') &= 0, \\ \hat{\Delta}H_{\eta\zeta}(\tau, \tau') &= \Delta H_{\eta\eta}(\tau, \tau'), \\ \hat{\Delta}H_{\zeta\zeta}(\tau, \tau') &= \Delta H_{\eta\zeta}(\tau, \tau') - \Delta \zeta_0(\tau)\eta_0(\tau'), \end{aligned} \quad (\text{В.28})$$

где  $(\bullet, \bullet)$  есть скалярное произведение

$$(\eta_0, \zeta_0) = \int_0^\beta d\tau \eta_0(\tau)\zeta_0(\tau). \quad (\text{В.29})$$

Подставляя полученные монодромии в условие периодичности  $\hat{\Delta}G(\tau, \tau') = 0$ , находим значения для  $\beta, \gamma$

$$\beta = \frac{1}{\Delta}(\eta_0, \zeta_0) - \frac{1}{2}, \quad \gamma = -\frac{1}{\Delta}. \quad (\text{В.30})$$

Коэффициент  $\alpha$  должен быть зафиксирован из калибровочного условия (В.25). Соответствующие интегралы для отдельных слагаемых в  $G$  имеют вид

$$\begin{aligned}
\int_0^\beta d\tau \eta_0(\tau) G_0(\tau, \tau') &= \frac{1}{2} \zeta_0(\tau') - \frac{1}{2} (\eta_0, \zeta_0) \eta_0(\tau') - \omega(\tau'), \\
\int_0^\beta d\tau \eta_0(\tau) \Omega(\tau, \tau') &= (\eta_0, \omega) \eta_0(\tau') + \omega(\tau'), \\
\int_0^\beta d\tau \eta_0(\tau) H_{\eta\eta}(\tau, \tau') &= \eta_0(\tau'), \\
\int_0^\beta d\tau \eta_0(\tau) H_{\eta\zeta}(\tau, \tau') &= \zeta_0(\tau') + (\eta_0, \zeta_0) \eta_0(\tau'), \\
\int_0^\beta d\tau \eta_0(\tau) H_{\zeta\zeta}(\tau, \tau') &= (\eta_0, \zeta_0) \zeta_0(\tau'),
\end{aligned} \tag{В.31}$$

так что подстановка в (В.25) вместе с найденными (В.30) даёт выражение для  $\alpha$

$$\alpha = (\eta_0, \zeta_0) - (\eta_0, \omega) - \frac{1}{\Delta} (\eta_0, \zeta_0)^2. \tag{В.32}$$

Чтобы решить регуляризованную версию (3.19) уравнения (В.16), которое мы запишем здесь ещё раз для удобства

$$[-\partial_\tau^2 + V''(\bar{x})] G_\xi(\tau, \tau') + \frac{1}{\xi} \eta_0(\tau) \int_0^\beta d\tau'' \eta_0(\tau'') G_\xi(\tau'', \tau') = \delta(\tau - \tau'), \tag{В.33}$$

необходимо сдвинуть  $G$  на оператор проекции на нулевую моду  $\eta_0$  (помноженный на коэффициент  $\xi$ ), который отсутствовал в  $G$ , т.е.<sup>1</sup>

$$G_\xi(\tau, \tau') = G(\tau, \tau') + \xi \eta_0(\tau) \eta_0(\tau'). \tag{В.34}$$

---

<sup>1</sup>Не следует путать  $G_0$  и  $G_{\xi=0}$ .