ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
НАУКИ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. П.Н. ЛЕБЕДЕВА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

Корибут Анатолий Валериевич

АЛГЕБРА ДЕФОРМИРОВАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ И СПИН-ЛОКАЛЬНОСТЬ В ТЕОРИИ ВЫСШИХ СПИНОВ

Специальность 1.3.3 —
«Теоретическая физика»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
Васильев Михаил Андреевич

Москва — 2024

Оглавление

Введение

Актуальность темы. Важной проблемой современной теории фундаментальных взаимодействий является построение теории квантовой гравитации, т.е. теории, которая смогла бы описывать гравитационные явления при сверхвысоких энергиях. Энергетический масштаб, на котором вклад квантовых эффектов от гравитации становится значительным именуется планковским ($m_{Planck} \sim 10^{19}$ ГэВ), и достижим лишь в космических явлениях. Энергии достижимые современными ускорителями порядком в $\sim 10^4$ ГэВ. Получить такие энергии на ускорителях в земных условиях пока невозможно. Предполагается, что на планковском масштабе по энергиям вклад от всех взаимодействий будет одного порядка и подобные явления должны описываться некоторой единой теорией. Впервые проблема квантования гравитации обсуждалась в пионерской работе Матвея Бронштейна [1], где также предлагался способ квантования лианеризованной гравитации. В настоящий момент есть ряд претендентов на роль единой теории: теория струн, высших спинов, некоторые модели супергравитации. Не смотря на то что последняя имеет все шансы на то, чтобы оказаться квантовоконечной теорией (отсутствие расходимостей в петлях) и весьма богатый спектр, тем не менее, оказывается, что туда невозможно вложить взаимодействия стандартной модели. Хотя теория струн и лишена такой проблемы, но ее описание требует дополнительных пространственных измерений для сокращения различного рода аномалий. «Лишние» измерения необходимо правильным образом компактифицировать, способов выполнить эту компактификацию оказывается черзвычайно много, что сильно подрывает предсказательную значимость теории. Спектр теории струн содержит поля всех спинов, при этом поля $s > 2$ являются массивными, и масса этих возбуждений скорее всего имеет планковский масштаб. Последнее обстоятельство хоть и объясняет тот факт, что частицы спина выше 2 не наблюдаются в современных экспериментах по физике высоких энергий, но также дает возможность предполагать, что теория струн является спонтанно нарушенной фазой некоторой более симметричной теории, например, теории высших спинов. Спектр этой теории также содержит поля всех спинов, но при этом все поля теории безмассовы.

Несмотря на многочисленные экспериментальные подтверждения Эйнштейновской теории гравитации (общей теории относительности), например, недавнее экспериментальное подтверждение существования гравитационных волн [2], последняя не обладает удовлетворительной квантовой версией. Она является неперенормируемой, т.е. требует задания бесконечного набора физических констант, что полностью разрушает предсказательную силу такой теории. В науке уже были прецеденты того, что подобные проблемы удавалось решить путем повышения (супер)симметрии. В частности, в самой успешной на сегодняшний момент квантовой теории поля – стандантарнтой модели, проблему с расходимостями, вызванную массивными бозонами, удалось решить при реализации этих бозонов как калибровочных полей в присоединенном представлении соответствующей *дополнительной* группы симметрий. Аналогичным образом можно пополнить локальную алгебру симметрий ОТО. Оказывается, что максимальным расширением (за исключением изотопических симметрий) этой алгебры является алгебра высших спинов (определенная ниже. См. например [3]). Теории поля, в которых подобные симметрии реализованы как калибровочные симметрии, называют *калибровочными теориями высших спинов*. Наличие подобных симметрий очень сильно ограничивают теорию. Вайнбергом даже была доказана так называемая «*мягкая теорема*», которая утверждает, что в **плоском** пространстве таких теорий вовсе не существует [4]. В этой работе было показано, что законы сохранения, которые следовали бы из взаимодействия, например, с безмассовым полем спина 3 оказываются чересчур ограничительными, и единственный способ им удовлетворить – это положить константу взаимодействия равную нулю. Тем не менее, если отказаться от предположения о плоскости пространства-времени, то такую теорию можно построить [5]. Исследование в контексте повышения симметрий суперсимметричных обобщений ОТО [6],[7] привели к тому, что в младших порядках по количеству петель теория оказывается перенормируемой и даже есть указания на то, что максимальная теория супергравитации с $\mathcal{N} = 8$ может оказаться конечной во всех петлях [8—10]. Своим богатым спектром теория обязана максимальному количеству суперсимметрий, которого, как уже отмечалось выше, недостаточно, чтобы вложить туда сектор взаимодействий стандартной модели. Увеличить количество суперсимметрий в $d = 4$ можно только в рамках теорий высших спинов, поскольку в представлениях алгебры суперсимметрий неизбежно появляются поля спинов старше 2.

Интерес к теории высших спинов также возрос в контексте AdS/CFT соответствия, впервые предложеного Хуаном Малдасеной в [11] (см. также [12],[13]). Это соответствие указывает на возможную однозначную связь между наблюдаемыми в теории гравитации в $(d+1)$-мерном пространстве AdS и наблюдаемыми в некоторой конформной теории поля на границе этого пространства. В оригинальной работе исследовалась взаимосвязь IIB теории суперструн на фоне $AdS_5 \times S_5$ и максимально суперсимметричной теорией Янга-Миллса в пространстве Минковского с $d = 4$. AdS/CFT соответствие предоставляет новый инструмент для исследования, с помощью которого явления, присущие так называемому режиму сильной связи, могут быть исследованы с помощью анализа конформной теории в режиме слабой связи по теории возмущений и наоборот. В настоящий момент существует множество примеров подобного рода дуальностей, но наиболее интересной в контексте теории высших спинов является так называемая гипотеза Клебанова-Полякова [12], которая предполагает, что существует связь между взаимодействующей теорией высших спинов в пространстве AdS_4 и конформными векторными моделями в 3-х мерном пространстве. Подобные дуальности изучались, например, в [14], где впервые было проверено соответствие между трехточечными корреляторами в теории Васильева (речь об этой теории пойдет дальше) и корелляторами в свободной и критической $O(N)$ конформных теориях поля.

Поля высших спинов также представляют интерес в контексте изучения так называемых *полей непрерывного спина*. Эти поля являются представлениями типа непрерывного спина алгебры Пуанкаре, обнаруженными впервые Вигнером в классической работе [15] (см. также [16]). Поля непрерывного спина могут быть представлены как взаимодействующие скалярное, векторное и тензорные поля всех рангов. Важно, что каждое поле из этого набора появляется лишь раз. В этом контексте необходимый набор полей для описания полей непрерывного спина совпадает со спектром калибровочной теории высших спинов [5], [17]. Также было показано, что некоторые режимы теории струн имеют прямую связь с полями непрерывного спина [18]. Лагранжева формулировка для динамики полей непрерывного спина была разработана в [19], [20] для плоского пространства и в [21] для пространства $(A)dS$. Суперсимметричная версия была разработана в [22] (см. также [23]). До сих пор речь шла лишь о свободных теориях непрерывного спина, физические трудности в этих теориях сопряжены с построением взаимодействий с привычными полями конечного спина, пока известны только кубические вершины Мецаева [24]. Ожидается, что разработанный твисторный подход [25], [26] позволит построить суперсимметричное обобщение кубических вершин [24].

Можно предположить, что теория высших спинов обеспечивает естественное развитие идей квантовой теории поля, где увеличение числа (супер)симметрий приводило к улучшению квантового поведения теории. Одновременно, теория высших спинов является теорией гравитации, которая представляет интерес в контексте задач о построении теории квантовой гравитации и исследовании AdS/CFT соответствия.

Степень разработанности темы. Первые работы по теории полей высших спинов появились еще 1930-х годах [27],[28],[29]. Свободная теория безмассовых полей произвольного спина была впервые описана Фронсдалом и Фангом [30], [31], в основе этих работ лежат работы по массивным полям произвольного спина [32],[33]. Поле спина s описывалось полностью симметричным дважды бесследовым тензором ранга s, т.е.

$$\phi^{a_1 a_2 \ldots a_{s-4} mn}{}_{mn}(x) = 0. \tag{1}$$

Далее для краткости мы будем использовать следующее обозначение для симметризованных индексов, которые принимат четыре значения,

$$\phi^{a(s)} := \phi^{a_1 \ldots a_s} \tag{2}$$

Это поле подчинено уравнению

$$F^{a(s)} = \Box\phi^{a(s)}(x) - s\partial^a\partial_m\phi^{ma(s-1)}(x) + \frac{s(s-1)}{2}\partial^a\partial^a\phi^{a(s-2)m}{}_m(x) = 0. \tag{3}$$

Последнее уравнение обладает абелевой калибровочной симметрией

$$\delta\phi^{a(s)}(x) = \partial^a\xi^{a(s-1)}(x), \;\; \xi^{a(s-3)m}{}_m(x) = 0. \tag{4}$$

Здесь $\xi^{a(s-1)}$ – поизвольные бесследовые тензора ранга $s-1$. Согласно классификации Вигнера унитарных неприводимых представлений группы Пуанкаре число степеней свободы безмассового поля спина s должно быть равно двум. Такой же результат получается при подсчете числа степеней у симметричного тензора ранга s после наложения условий (1),(3),(4). Для уравнений Фронсдала также существует действие

$$S=-\frac{1}{2}\int d^4x\left(\partial_m\phi^{a(s)}\partial^m\phi_{a(s)}-\frac{s(s-1)}{2}\partial_m\phi^n{}_n{}^{a(s-2)}\partial^m\phi^k{}_{ka(s-2)}+\right.$$
$$+s(s-1)\partial^m\phi^n{}_n{}^{a(s-2)}\partial^k\phi_{kma(s-2)}-s\partial_m\phi^{ma(s-1)}\partial^n\phi_{na(s-1)}-$$
$$\left.-\frac{s(s-1)(s-2)}{4}\partial_m\phi^n{}_n{}^{ma(s-3)}\partial^p\phi_p{}^k{}_{ka(s-3)}\right). \quad (5)$$

Уравнения Фронсдала и действия были обобщены на случай пространства постоянной кривизны [34],[35].

Естественным дальнейшим шагом было построение взаимодействующей теории. Как уже было упомянуто выше, несмотря на No-Go теорему Вайнберга [4] подобную теорию удалось построить. В отличие от теории свободных полей Фронсдала, которая допускает Лагранжеву формулировку (5), теория Васильева [5],[17] сформулирована в так называемом развернутом виде [36],[37], т.е. в форме системы уравнений вида

$$\mathrm{d}_x W^\Lambda(x)=G^\Lambda(W(x)). \quad (6)$$

Здесь мульти-индекс Λ у дифференциальной формы W параметризует все поля теории (в том числе и вспомогательные). Функция G в правой части уравнения имеет вид

$$G^\Lambda(W(x))=\sum_{n=1}^{\infty}f^\Lambda{}_{\Upsilon_1\ldots\Upsilon_n}W^{\Upsilon_1}(x)\ldots W^{\Upsilon_n}(x). \quad (7)$$

Совместность уравнения (6) ($\mathrm{d}_x^2=0$) накладывает ограничения на функцию $G^\Lambda(W(x))$

$$\mathrm{d}_x^2=0 \iff G^\Upsilon(W(x))\frac{\delta G^\Lambda(W(x))}{\delta W^\Upsilon(x)}=0. \quad (8)$$

Развернутые уравнения (6) допускают калибровочную симметрию

$$\delta W^\Lambda(x)=\mathrm{d}_x\epsilon^\Lambda-\epsilon^\Upsilon\frac{\delta G^\Lambda(W(x))}{\delta W^\Upsilon(x)}, \quad (9)$$

где ϵ^{Λ} – дифференциальная форма градуировки на единицу меньше градуировки W^{Λ}.

В настоящий момент полная нелинейная система уравнений на поля высших спинов известна только в развернутом виде[1], тем не менее активно ведутся исследования по формулировке теории высших спинов и в других подходах: в [39],[40],[41],[42] исследуется взаимодействия суперсимметричной теории полей высших спинов и гипермультиплетов материи с помощью так называемого формализма гармонического суперпространства [43],[44],[45],[46]; вершины взаимодействия полей высших спинов могут быть найдены, например, из голографической прескрипции [47],[48]; имеется также формулировка на уровне действия [49] рамках так называемого билокального подхода, где нелокальными являются уже кубические вершины. В диссертации изучается развернутая формулировка динамики полей высших спинов в рамках производящей системы Васильева [5]. В отличие от метрической формулировки теории Фронсдала, теория Васильева сформулирована в так называемой тетрадной формулировке [50]. Т.е. вместо симметричных дважды бесследовых тензоров Фронсдала $\phi_{a(s)}(x)$ и всех их нетривиальных производных рассматриваются один-формы потенциалов $\mathrm{d}x^{\mu}\omega_{\mu\alpha_1\ldots\alpha_n,\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_m}(x)$ и соответствующие им ноль-формы напряженности $C_{\alpha_1\ldots\alpha_n,\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_m}(x)$. На практике оказывается удобным рассматривать не сами функции ω и C, а связанные с ними производящие функции, в которых спинорные двухкомпонентные индексы свернуты со вспомогательными $\mathfrak{sp}(4)$ спинорами $Y^A = (y^{\alpha},\bar y^{\dot\alpha})$

$$\omega(Y,x) = \sum_{n,m} \mathrm{d}x^{\mu}\omega_{\mu\alpha_1\ldots\alpha_n,\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_m}(x) y^{\alpha_1}\ldots y^{\alpha_n}\bar y^{\dot\alpha_1}\ldots\bar y^{\dot\alpha_m}; \quad m+n = 2(s-1), \tag{10}$$

$$C(Y,x) = \sum_{n,m} C_{\alpha_1\ldots\alpha_n,\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_m}(x) y^{\alpha_1}\ldots y^{\alpha_n}\bar y^{\dot\alpha_1}\ldots\bar y^{\dot\alpha_m}; \quad |m-n| = 2s. \tag{11}$$

Кроме того, для работы со вспомогательными спинорными переменными удобным оказывается язык звездочного произведения

$$f(y,\bar y) * g(y,\bar y) = \int \frac{\mathrm{d}^2u\mathrm{d}^2v}{(2\pi)^2}\frac{\mathrm{d}^2\bar u\mathrm{d}^2\bar v}{(2\pi)^2} e^{iu_{\alpha}v^{\alpha}+i\bar u_{\dot\alpha}\bar v^{\dot\alpha}} f(y+u,\bar y+\bar u)g(y+v,\bar y+\bar v). \tag{12}$$

[1]В недавней работе [38] были сформулированы необходимые и достаточные условия того, что развернутая система может быть представлена в лагранжевом виде.

Сами же динамические уравнения теории высших спинов схематически могут быть записаны в виде

$$\mathrm{d}_x\omega + \omega * \omega = \Upsilon(\omega,\omega,C) + \Upsilon(\omega,\omega,C,C) + \dots\,, \tag{13}$$

$$\mathrm{d}_x C + [\omega,C]_* = \Upsilon(\omega,C,C) + \Upsilon(\omega,C,C,C) + \dots\,. \tag{14}$$

Поскольку теория высших спинов содержит бесконечное количество полей, а количество производных в калибровочно инвариантных вершинах взаимодействия (функции Υ из (13),(14)) растет со спином [51],[52],[53][54], то теория высших спинов не является локальной в обычном смысле. Тем не менее, естественным выглядит требование того, чтобы вершина, вовлекающая поля конкретных спинов, содержала лишь конечное число производных. Данное требование в младших порядках теории возмущений эквивалентно тому, что вершина взаимодействия содержит лишь конечное число сверток между полями C по точечным или неточечным спинорным индексам. Последнее требование далее будем называть *спин-локальностью*. В старших порядках взаимосвязь между спин-локальностью и пространственновременной локальностью не так проста, но поскольку теория Васильева естественным образом формулируется именно в терминах производящих функций типа (10),(11), то в литературе [55–58] исследуют вершины взаимодействия именно на предмет спиновой локальности. Получить же сами вершины взаимодействия можно из производящей системы Васильева, в которой для получения динамических уравнений типа (13),(14) предстоит еще разрешить зависимость от дополнительных вспомогательных спинорных переменных $Z^A = (z^\alpha, \bar{z}^{\dot\alpha})$. Неудачная схема разрешений от этих вспомогательных переменных может привести к тому, что вершины взаимодействия могут не быть спин-локальными[2]. Если теория все же допускает спин-локальные вершины взаимодействия, то к ним, например, можно прийти путем нелокального переопределения полей [59], [60]. В настоящей же диссертации описан способ разрешения зависимости по вспомогательным переменным в производящей системе Васильева, который сразу приводит к спин-локальным выражениям для вершин и не требует дальшего переопределения полей.

Введенные выше поля ω и C реализуют присоедениненное и твистованоприсоединенное представления алгебры высших спинов соответственно. Эта ал-

[2]Важно отметить, что совместность системы гарантирована при любом способе разрешения от вспомогательных переменных Z

гебра является неабелевым обобщением калибровочных симметрий (4) и на линейном уровне реализуется как универсальная обертывающая от алгебры симметрий пространства-времени, отфакторизованная по соответствующим образом построенным идеалам [3]. Таким образом, алгебра высших спинов - это простая бесконечномерная алгебра Ли. В настоящей диссертации рассматривается алгебра высших спинов в 3-х измерениях, ее формальное определение имеет вид

$$\mathfrak{hs}[\lambda] = \mathcal{U}(\mathfrak{sp}(2))/\mathcal{I}_{C_2,\lambda}, \tag{15}$$

т.е. это универсальная обертывающая алгебры $\mathfrak{sp}(2)$, отфакторизованная по идеалу, порожденному квадратичным оператором Казимира. В [61] было показано, что эта алгебра может быть представлена с помощью так называемых деформированных осцилляторов.

Впервые возможность деформации канонических коммутационных соотношений

$$[y_\alpha, y_\beta] = 2i\epsilon_{\alpha\beta}, \;\; \alpha,\beta = \overline{1,2}\,, \tag{16}$$

которая бы тем не менее приводила к эквидистантному энергетическому спектру гармнонического осциллятора, изучалась Вигнером [62]. Им было обнаружено, что существует однопараметрическое семейство деформированных коммутационных соотношений. С помощью дополнительного антикоммутирующего оператора алгебра деформированных осцилляторов Вигнера может быть представлена в виде [61]

$$[y_\alpha, y_\beta] = 2i\epsilon_{\alpha\beta}(1+\nu\mathcal{K}), \;\; \{y_\alpha, \mathcal{K}\} = 0, \;\; \mathcal{K}^2 = 1. \tag{17}$$

Здесь $\nu \in \mathbb{C}$ – произвольный параметр, а $\mathcal{K}$ – так называемый оператор Клейна. $\mathsf{Aq}(2,\nu)$ – это ассоциативная алгебра, порожденная как универсальная обертывающая алгебра этих (анти)коммутационных соотношений. Общий элемент алгебры $\mathsf{Aq}(2,\nu)$ может быть записан в виде формального степенного ряда

$$f(y,\mathcal{K}) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{A=0}^{1} f_A^{\alpha_1\ldots\alpha_n} y_{\alpha_1}\ldots y_{\alpha_n}\mathcal{K}^A, \tag{18}$$

где тензора $f_A^{\alpha_1\ldots\alpha_n}$ полностью симметричны по верхним индексам. Если рассматреть только четные по y выражения, а в качетсве скобки Ли рассмотреть коммутатор по отношение к ассоциативному произведению в $\mathsf{Aq}(2,\nu)$, то получившаяся алгебра будет изоморфна $\mathfrak{hs}[\lambda]$ [61]. Здесь и далее предполагается Вейлевское упорядочение осцилляторов. В настоящей диссертации построено произведение в этой алгебре, в том числе и звездочное произведение аналогичное выражению (12).

Таким образом **целями** данной Диссертации являются:

1. Нахождение структурных констант ассоциативного умножения в алгебре деформированных осцилляторов $\mathsf{Aq}(2,\nu)$.
2. Построение обобщения звездочного произведения (12) на случай ненулевого значения параметры деформации ν.
3. Исследование обобщений применявшихся ранее способов разрешения зависимости от вспомогательных переменных Z в производящей системе Васильева
4. Получение спин-локальных вершин из производящей системы.

Для достижения поставленных целей необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Вывести рекуррентные уравнения на структурные константы ассоциативного умножения $\mathsf{Aq}(2,\nu)$.
2. Показать, что предложенные ранее выражения в [63] для умножения четных мономов, действительно решают эти уравнения. Решить уравнения на недостающие структурные константы.
3. С помощью представления Похгаммера для бета-функции Эйлера получить интегральные представления для найденных в предыдущих пунктах структурных констант.
4. Продолжить развитие техники сдвиговых гомотопий, введенных в [64], для разрешения зависимости от вспомогательных переменных Z в производящей системе Васильева.
5. С помощью техники сдвиговых гомотопий получить в явно спин-локальном виде вершины $\Upsilon^{\eta}(\omega,\omega,C)$, $\Upsilon^{\eta}(\omega,C,C)$ и $\Upsilon^{\eta\bar{\eta}}(\omega,\omega,C,C)$.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Найден полный набор структурных констант ассоциативного умножения алгебры $\mathsf{Aq}(2,\nu)$, позволяющий умножать любые формальные ряды по y.

2. Обобщение звездочного произведения на случай ненулевого значения параметра деформации ν.
3. Новые относительно [64] результаты по технике сдвиговых гомотопий, позволяющие в терминах новых операторов выписывать вершины (в частности были получены тождество треугольника и формулы звездочной перестановочности).
4. Спин-локальные выражения для вершин $\Upsilon^{\eta}(\omega,\omega,C)$, $\Upsilon^{\eta}(\omega,C,C)$ и $\Upsilon^{\eta\bar{\eta}}(\omega,\omega,C,C)$.

Научная новизна:. Все представленные в Диссертации результаты являются новыми.

Научная и практическая значимость. Научные результаты Диссертации позволили продвинуться в понимании структуры взаимодействий полей высших спинов и алгебр высших спинов. Изучаемые в работе проблемы представляют конкретный интерес как для математической физики, так и для теоретической физики фундаментальных взаимодействий. Алгебра деформированных осцилляторов проявляется в многочисленных контекстах:

1. Симметрии свободных полей в AdS_3 [65],[66],
2. Деформированные коммутационные соотношения (17) определяют вид полной нелинейной системы Васильева [5].
3. Алгебра $\mathsf{Aq}(2,\nu)$ естественным образом появляется в двумерных конформных теориях поля [63],[67],[68]
4. Алгебра деформированных осцилляторов также возникает в контексте AdS_3/CFT_2 соответствия [69],[70],[71].

Несмотря на то что структурные константы для алгебры Ли $\mathfrak{hs}[\lambda]$ и лежащего в ее основе ассоциативного произведения известны с работы [63], строгое доказательство их справедливости ранее отсутствовало и впервые было дано автором Диссертации [72]. Построение звездочного произведения в алгебре $\mathsf{Aq}(2,\nu)$, выполненное автором в [73] важно, например, в контексте голографии, предложенной в [74]. В данной работе было построено соответствие между полем в AdS_4 и конформным током на границе. Анализ такого рода дуальности для случая AdS_3/CFT_2 для массивных полей в AdS_3 до сих пор отсутствует, в основном из-за отсутствия удобной формы для произведения в алгебре $\mathsf{Aq}(2,\nu)$. Следует также заметить, что голоморфный сектор полной нелинейной калибровочной теории высших спинов тесно связан с трехмерной теорией высших спинов [75]. В этом свете изучение алгебры деформированных осцилляторов важно для анализа (анти)голоморфного сектора нелинейной системы, предложенной в [5] в случае ненулевого вакуумного значения для мастер-поля нольформ ($B_0 = \nu \neq 0$). Последнее означает, что поля теории уже будут массивными, а само значение массы выражается через ν. Массивные поля высших спинов в пространстве-времени постоянной кривизны обладают интересными свойствами: условие унитарности накладывает ограничение на значения массы, кроме того, в так называемом частично безмассовом случае появляется калибровочная симметрия [76],[77],[78] поэтому динамика массивных полей активно изучается в литературе [79],[80],[81].

Одним из важнейших результатов исследований по нелинейной теории высших спинов является появление понятия *спин-локальности*. Данное требование фиксирует допустимый функциональный класс в разрешении от вспомогательных переменных Z и оказывается весьма естественным в контексте производящей системы Васильева. В контексте голографии данное требование было оправдано в [82], где из теории высших спинов были восстановлены соответствующие конформные корелляторы без необходимости введения различного рода регуляризаций, вводимых, например, в [14]. Первоначально получить взаимодействие в спин-локальной форме удалось с помощью переопределения полей [60]. Развитая в Диссертации методика сдвиговых гомотопий позволяет получать спин-локальные вершины взаимодействий без необходимости в дополнительном переопределении полей. С помощью этой техники и ее обобщений впервые были получены вершины взаимодействий в фоно-независимом виде, некоторые из которых были ранее известны только в пространстве AdS_4 (см. например [83]).

Степень достоверности. Достоверность полученных результатов обеспечивается надежностью применяемого в Диссертации математического аппарата теоретической физики.

Методология и методы исследования. В диссертации активно применяется математический аппарат теории дифференциальных уравнений, дифференциальной геометрии, комплексной геометрии, теории алгебр Ли и ассоциативных алгебр. Найденные вершины взаимодействия полей высших спинов получены из производящей системы [5] с помощью метода сдвиговых гомотопий [64].

Апробация работы. Результаты диссертационных исследований докладывались на семинарах по квантовой теории поля ФИАН и на международных конференциях:

1. «Higher Spin Theory and Holography – HSTH-3» (Москва, 23-25 ноября 2015),
2. «Higher Spin Theory and Holography – HSTH-7» (Москва, 4-6 июня 2018).

Личный вклад. Все представленные в Диссертации результаты были получены либо лично автором, либо при его непосредственном участии.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 4 печатных изданиях, 4 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и двух приложений. Полный объём диссертации составляет 134 страницы с 1 рисунком. Диссертация не содержит таблиц. Список литературы содержит 134 наименования.

Благодарности. Я бы хотел поблагодарить своего научного руководителя Михаила Андреевича Васильева за предложенные мне научные задачи. Без его постоянной поддержки, многочисленных консульатций и ценных советов данная работа была бы невозможна. Также хочу поблагодарить своих соавторов: Гельфонд Ольгу Александровну и Диденко Вячеслава Евгеньевича, обсуждение науки с которыми многому меня научило.

Глава 1. Структурные константы $\mathsf{Aq}(2,\nu)$

1.1 Введение

Глава основана на статье [72]. Как отмечалось в введении, общий элемент алгебры $\mathsf{Aq}(2,\nu)$ может быть записан в виде формального степенного ряда

$$f(y,\mathcal{K}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{A=0}^{1} f_A^{\alpha_1 \ldots \alpha_n} y_{\alpha_1} \ldots y_{\alpha_n} \mathcal{K}^A, \tag{1.1}$$

где тензора $f_A^{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$ полностью симметричны по верхним индексам. Произведение двух общих элементов тоже должно быть представлено как формальный ряд по степеням осцилляторов, индексы которых свернуты с полностью симметричными по верхним индексам коэффициентами, т.е.

$$f(y,\mathcal{K}) * g(y,\mathcal{K}) = h(y,\mathcal{K}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{A=0}^{1} h_A^{\alpha_1 \ldots \alpha_n} y_{\alpha_1} \ldots y_{\alpha_n} \mathcal{K}^A. \tag{1.2}$$

Здесь симметризация должна быть выполнена с использованием (анти)коммутационных соотношений (17). Для вычисления правой части (1.2) нужно использовать структурные константы $\mathsf{H}(m,n,p,\nu\mathcal{K})$ для произведения мономов, найденные в [72] (часть из них, для четно-четного случая (1.23), была впервые предложена в [63])

$$\begin{aligned}
f_A^{\alpha_1 \ldots \alpha_m} y_{\alpha_1} \ldots y_{\alpha_m} \mathcal{K}^A * g_B^{\beta_1 \ldots \beta_n} y_{\beta_1} \ldots y_{\beta_n} \mathcal{K}^B = \\
= f_A^{\alpha_1 \ldots \alpha_m} y_{\alpha_1} \ldots y_{\alpha_m} * g_B^{\beta_1 \ldots \beta_n} y_{\beta_1} \ldots y_{\beta_n} (-1)^{nA} \mathcal{K}^A \mathcal{K}^B = \\
= f_A^{\alpha_1 \ldots \alpha_m} g_B^{\beta_1 \ldots \beta_n} \sum_{p=0}^{\min(m,n)} i^p \epsilon_{\alpha_1 \beta_1} \ldots \epsilon_{\alpha_p \beta_p} y_{(\alpha_1} \ldots y_{\alpha_{m-p}} y_{\beta_1} \ldots y_{\beta_{n-p})} \times \\
\times \mathsf{H}(m,n,p,\nu\mathcal{K}) (-1)^{nA} \mathcal{K}^{A+B},
\end{aligned} \tag{1.3}$$

где осцилляторы в правой части полностью симметризованы, т.е.

$$y_{(\alpha_1}\dots y_{\alpha_{m-p}}y_{\beta_1}\dots y_{\beta_{n-p})}=\frac{1}{(m+n-2p)!}(y_{\alpha_1}\dots y_{\alpha_{m-p}}y_{\beta_1}\dots y_{\beta_{n-p}}+$$
$$+\text{ \textit{все возможные перестановки}}). \quad (1.4)$$

Структурные константы зависят от четностей умножаемых мономов. Явные выражения для всех четностей приведены в следующей секции. Ниже дан краткий обзор различных подходов к изучению алгебры $\mathsf{Aq}(2,\nu)$ и ее приложений.

Алгебра $\mathsf{Aq}(2,\nu)$ играет важную роль в 2+1 мерных теориях поля, так как является алгеброй симметрии свободных полей. Рассмотрим в качестве примера развернутую версию уравнений Клейна-Гордона-Фока или Дирака в AdS_3, полученные в [65], и их операторные реализации, выведенные в [66] и [84]. Для получения последнего, к алгебре деформированных осцилляторов $\mathsf{Aq}(2,\nu)$ нужно добавить дополнительный элемент Клиффордового типа ψ[1]

$$\psi^2=1,\ \ [\psi,y_\alpha]=0,\ \ [\psi,\mathcal{K}]=0. \quad (1.5)$$

Будем обозначать произведение в этой алгебре (порожденной как универсальная обертывающая от соотношений (17) и (1.5)) символом $\circledast$, чтобы избежать путаницы с произведением в алгебре $\mathsf{Aq}(2,\nu)$. Производящая функция для скаляра, спинора и всех их потомков (производных) может быть записана в виде

$$C(y,\mathcal{K},\psi|x)=\sum_{A=0}^{1}\sum_{B=0}^{1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\lambda^{-\left[\frac{n}{2}\right]}C^{AB}_{\alpha_1\dots\alpha_n}(x)\mathcal{K}^A\psi^B y^{\alpha_1}\dots y^{\alpha_n}. \quad (1.6)$$

С помощью триады $h^{\alpha\beta}$ и спиновой связности $\omega^{\alpha\beta}$ определим связность на алгебре изометрий пространства AdS_3

$$W=\frac{1}{8i}\omega^{\alpha\beta}\left\{y_\alpha,y_\beta\right\}_\circledast+\lambda\psi\frac{1}{8i}h^{\alpha\beta}\left\{y_\alpha,y_\beta\right\}_\circledast. \quad (1.7)$$

[1]Этот элемент эффективно удваивает число осцилляторов и необходим в силу хорошо известного гомоморфизма $\mathfrak{o}(2,2)\simeq\mathfrak{o}(1,2)\oplus\mathfrak{o}(1,2)$

Операторный аналог развернутых уравнений из [65] теперь имеет вид

$$\begin{aligned} dW(y,\mathcal{K},\psi|x) &= W(y,\mathcal{K},\psi|x) \circledast W(y,\mathcal{K},\psi|x), \\ dC(y,\mathcal{K},\psi|x) &= W(y,\mathcal{K},\psi|x) \circledast C(y,\mathcal{K},\psi|x) - C(y,\mathcal{K},\psi|x) \circledast W(y,\mathcal{K},-\psi|x). \end{aligned} \tag{1.8}$$

Первое уравнене накладывает условие отсутствия кручения и AdS_3-плоскости

$$dh_{\alpha\beta} = \omega_{\alpha\gamma} h_\beta{}^\gamma + \omega_{\beta\gamma} h_\alpha{}^\gamma, \;\; d\omega_{\alpha\beta} = \omega_{\alpha\gamma}\omega_\beta{}^\gamma + \lambda^2 h_{\alpha\gamma} h_\beta{}^\gamma. \tag{1.9}$$

Второе уравнение (1.8) описывает свободные скалярные и спинорные поля, но в сравнении с системой, анализированной в [65], уравнения (1.8) описывают удвоенное число полей (из-за присутствия оператора Клейна $\mathcal{K}$). Можно спроектировать систему (1.8) на индивидуальные независимые подсистемы с помощью пары проекторов

$$\Pi_\pm = \frac{1 \pm \mathcal{K}}{2} \tag{1.10}$$

В этом случае соответствующие массы скалярных и спинорных подсистем следующие

$$M_\pm^2 = \lambda^2 \frac{\nu(\nu \mp 2)}{2}, \;\; M_\pm^2 = \lambda^2 \frac{\nu^2}{2}. \tag{1.11}$$

Уравнения (1.8), представленные в развернутой форме инвариантны относительны следующих инфинитеземальных калибровочных преобразований

$$\delta C = \varepsilon(y,\mathcal{K},\psi|x) \circledast C - C \circledast \varepsilon(y,\mathcal{K},-\psi|x), \;\; \delta W = d\varepsilon(y,\mathcal{K},\psi|x) + [\varepsilon(y,\mathcal{K},\psi|x), W]_\circledast. \tag{1.12}$$

Здесь $\varepsilon(y,\mathcal{K},\psi|x)$ – пространственная ноль-форма, играющая роль инфинитеземального параметра калибровочной симметрии. Эту ноль-форму также можно представить в следующем виде

$$\varepsilon(y,\mathcal{K},\psi|x) = \varepsilon_0(y,\mathcal{K}|x) + \psi\varepsilon_1(y,\mathcal{K}|x). \tag{1.13}$$

Функции ε_0 и ε_1 принимают значения в алгебре $\mathsf{Aq}(2,\nu)$.

(Анти)коммутационные соотношения (17) сами по себе играют важную роль в теории высших спинов, так как определяют форму полной нелинейной системы уравнений с симметрией высших спинов как калибровочной симметрией [5],[85]. Кроме того, в 2+1 измерениях нелинейная система может быть полностью переформулирована в терминах деформированных осцилляторов [84].

В контексте чисто двумерных конформных теорий поля алгебра изучалась в [63],[67] и [68]. Развитие AdS_3/CFT_2 соответствия также продемонстрировало важность алгебры деформированных осцилляторов [69],[70], [71]. В анализе AdS_3/CFT_2 соответствия важными оказываются алгебры $\mathfrak{hs}[\lambda]$ и $\mathfrak{shs}[\lambda]$. Это (супер)алгебры Ли, построенные факторизацией универсальной обертывающих алгебр $\mathcal{U}(\mathfrak{sp}(2))$ и $\mathcal{U}(\mathfrak{osp}(2|1))$ по идеалам, порожденным квадратичными операторами Казимира в алгебрах $\mathfrak{sp}(2)$ [86] и $\mathfrak{osp}(2|1)$ [68] соответственно.

$$\mathfrak{hs}[\lambda] = \mathcal{U}(\mathfrak{sp}(2))/\mathcal{I}_{C_{\mathfrak{sp}}}(\lambda), \;\; \mathfrak{shs}[\lambda] = \mathcal{U}(\mathfrak{osp}(2|1))/\mathcal{I}_{C_{\mathfrak{osp}}}(\lambda). \tag{1.14}$$

Здесь идеалы $\mathcal{I}_{C_{\mathfrak{sp}}}(\lambda)$, $\mathcal{I}_{C_{\mathfrak{osp}}}(\lambda)$ порождены соответственно центральными элементами вида

$$C_{\mathfrak{sp}} - \frac{1}{4}\left(\lambda^2 - 1\right)\mathbb{1}, \;\; C_{\mathfrak{osp}} - \frac{1}{4}\lambda\left(\lambda - 1\right)\mathbb{1}, \tag{1.15}$$

где $C_{\mathfrak{sp}}$, $C_{\mathfrak{osp}}$ – квадратичные операторы Казимира в алгебрах $\mathfrak{sp}$ и $\mathfrak{osp}$ соответственно, а $\mathbb{1}$ – единичный элемент универсальной обертывающей алгебры.

Существует еще один подход к исследованию AdS/CFT голографии, который полностью основан на развернутой формулировке, который для случая AdS_4/CFT_3 был успешно применен в [74]. Из развернутых уравнений для свободных полей типа (1.8) с помощью подходящего перерастяжения вспомогательных осцилляторных переменных[2] удается получить уравнения на конформные токи. Аналог этого исследования для AdS_3/CFT_2 массивного случая до сих пор неизвестен, частично из-за отсутствия удобной формулировки для произведения в алгебре $\mathsf{Aq}(2,\nu)$.

Впервые алгебра деформированных осцилляторов была интерпретирована как алгебра высших спинов в [61],[66]. В немного другой реализации алгебра высших спинов изучалась в [87]. Ассоциативная алгебра, лежащая в основе (супер)алгебр Ли $\mathfrak{hs}[\lambda]$ и $\mathfrak{shs}[\lambda]$, – это алгебра, $\mathsf{Aq}(2,\nu)$ ограниченная на случай лишь четных степеней в разложении по осцилляторам и неограниченная соответственно. Ассоциативное произведение, лежащее в основе алгебры $\mathfrak{hs}[\lambda]$ (структурные константы $A(m,n,p,\nu\mathcal{K})$), впервые было введено в [63]. Несмот-

[2] Две пары осцилляторов y и $\bar{y}$, коммутационные соотношения которых не деформированы, как это было сделано в работе [74], растягиваются в $\sqrt{z}$ раз, где z - это координата Пуанкаре в пространстве AdS

ря на то что алгебра ассоциативна по построению, ассоциативность Lone-Star произведения лишь предполагалась и была численно проверена на нескольких примерах, строгое доказательство впервые было дано в [72] и будет представлено ниже в данной главе. В работе [88] было получено произведение для двух элементов $\mathfrak{hs}[\lambda]$. Это произведение написано в терминах производящих функций

$$L(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \xi^{\alpha_1\tilde{\alpha}_1} \ldots \xi^{\alpha_n\tilde{\alpha}_n} y_{(\alpha_1} y_{\tilde{\alpha}_1} \ldots y_{\alpha_n} y_{\tilde{\alpha}_n)},$$
$$L(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \eta^{\alpha_1\tilde{\alpha}_1} \ldots \eta^{\alpha_n\tilde{\alpha}_n} y_{(\alpha_1} y_{\tilde{\alpha}_1} \ldots y_{\alpha_n} y_{\tilde{\alpha}_n)}, \quad (1.16)$$

где $\xi^{\alpha_1\tilde{\alpha}_1}$ и $\eta^{\alpha_1\tilde{\alpha}_1}$ – симметричные $\mathfrak{sp}(2)$ тензоры. А само произведение имеет вид

$$L(\xi) * L(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} n + \frac{3-\nu}{2} & n + \frac{1+\nu}{2} \\ & n + \frac{3}{2} \end{matrix} ; \; -\frac{1}{4}\phi \right] \frac{1}{n!} \zeta^{\alpha_1\tilde{\alpha}_1} \ldots \zeta^{\alpha_n\tilde{\alpha}_n} y_{(\alpha_1} y_{\tilde{\alpha}_1} \ldots y_{\alpha_n} y_{\tilde{\alpha}_n)}, \quad (1.17)$$

где $\zeta^{\alpha\beta} = \xi^{\alpha\beta} + \eta^{\alpha\beta} + \xi^{\alpha\gamma}\eta^{\delta\beta}\epsilon_{\gamma\delta}$ и $\phi = \xi^{\alpha_1\alpha_2}\eta^{\beta_1\beta_2}\epsilon_{\alpha_1\beta_1}\epsilon_{\alpha_2\beta_2}$. Несмотря на то что этот результат можно записать в терминах деформиованных осцилляторов, в самой работе использовалась иная реализация алгебры $\mathfrak{hs}[\lambda]$. Алгебра высших спинов $\mathfrak{shs}[\lambda]$ в контексте реализации деформированными осцилляторами рассматривалась, например, в [89]. Алгебра $\mathsf{Aq}(2,\nu)$ в отличной отдеформированных осцилляторов реализации изучалась, например, в [90].

Есть еще один метод для изучения (супер)алгебр высших спинов – так называемая факторизация проектором [3], [91], [92]. Основная идея состоит в том, чтобы рассмотреть изначально бОльшую алгебру Вейля

$$[Y^A_\alpha, Y^B_\beta] = 2i\epsilon_{\alpha\beta}\eta^{AB}, \quad (1.18)$$

где α,β – это индексы $\mathfrak{sp}(2)$, а индексы A,B – это индексы некоторой (псевдо)ортогональной алгебры в M измерениях (как в оригинальной работе [3]). Общий элемент такой алгебры может быть записан в виде

$$f(Y) = \sum_m f^{\alpha_1\ldots\alpha_m}_{A_1\ldots A_m} Y^{A_1}_{\alpha_1} \ldots Y^{A_m}_{\alpha_m}, \quad (1.19)$$

а произведения определяются как

$$f(Y)\star g(Y)=\frac{1}{(2\pi)^M}\int d^{2M}U\,d^{2M}V\;f(Y+U)g(Y+V)\exp\left\{iU_\alpha^A V_A^\alpha\right\}. \quad (1.20)$$

Здесь греческие индексы поднимаются и опускаются с помощью антисимметричной формы $\epsilon_{\alpha\beta}$, а латинские индексы тензором η^{AB}. Алгебра, определенная выше, не является простой, и можно найти проектор Δ[3], который действует тривиально на элементы, принадлежащие идеалу

$$\Delta\star a=a\star\Delta=0,\quad a\in\mathcal{I}. \quad (1.21)$$

Тогда произведение в фактор-алгебре может быть записано в форме

$$g_1\circ g_2=f_1\star f_2\star\Delta,\;\; g_i=f_i\Delta. \quad (1.22)$$

Несмотря на то что подобные выражения встречаются в статьях, их следует понимать формально. Т.е. для поиска представителей фактор-алгебры нужен какой-то другой метод, отличный от факторизации проектором, так как Δ^2 расходится (см. [88]). Уравнение на этот проектор для случая, когда фактор-алгеброй является $\mathfrak{hs}[\lambda]$ было найдено в [93]. В этой работе латинские индексы осцилляторов из (1.18) являются индексами $\mathfrak{o}(1,2)$, а идеал, по которому факторизуется алгебра, порожден квадратичным оператором Казимира алгебры $\mathfrak{sp}(2)$. Похожий подход использовался в [88], но авторы применили его к вычислению следов на алгебре.

1.2 Структурные константы для ассоциативной алгебры $\mathsf{Aq}\,(2,\nu)$

Общее выражение для $\mathsf{H}\,(m,n,p,\nu\mathcal{K})$ из (1.3) довольно громоздкое, и поэтому удобно разделить различные по четности мономов случаи. Окончательный результат для структурных констант $\mathsf{Aq}\,(2,\nu)$

[3] Технически оператор Δ, найденный в [3], не является проектором, так как Δ^2 расходится

Четный $\times$ *Четный*

$$A\left(m,n,p,\nu\mathcal{K}\right)=i^{p}\frac{m!n!}{\left(m-p\right)!\left(n-p\right)!p!}{}_{4}F_{3}\left[\begin{matrix}1-\frac{\nu\mathcal{K}}{2} & \frac{\nu\mathcal{K}}{2} & \frac{-p}{2} & \frac{1-p}{2}\\ \frac{1-m}{2} & \frac{1-n}{2} & \frac{m+n-2p+3}{2} & \end{matrix};1\right], \tag{1.23}$$

Нечетный $\times$ *Нечетный*

$$\begin{gathered}B\left(m+1,n+1,p,\nu\mathcal{K}\right)=A\left(m,n,p,-\nu\mathcal{K}\right)+\\ +i\left(m+n-2p+3+\nu\mathcal{K}\right)A\left(m,n,p-1,-\nu\mathcal{K}\right)+\\ +i^{2}\left(m-p+2\right)\left(n-p+2\right)\frac{m+n-2p+5+\nu\mathcal{K}}{m+n-2p+5}\frac{m+n-2p+3+\nu\mathcal{K}}{m+n-2p+3}\times\\ \times A\left(m,n,p-2,-\nu\mathcal{K}\right),\end{gathered} \tag{1.24}$$

Четный $\times$ *Нечетный*

$$\begin{gathered}C\left(m,n+1,p,\nu\mathcal{K}\right)=A\left(m,n,p,-\nu\mathcal{K}\right)+\\ +i\left(m-p+1\right)\frac{m+n-2p+3+\nu\mathcal{K}}{m+n-2p+3}A\left(m,n,p-1,-\nu\mathcal{K}\right),\end{gathered} \tag{1.25}$$

Нечетный $\times$ *Четный*

$$\begin{gathered}D\left(m+1,n,p,\nu\mathcal{K}\right)=A\left(m,n,p,\nu\mathcal{K}\right)+\\ +i\left(n-p+1\right)\frac{m+n-2p+3-\nu\mathcal{K}}{m+n-2p+3}A\left(m,n,p-1,\nu\mathcal{K}\right),\end{gathered} \tag{1.26}$$

где m,n – четные числа. Обобщенные гипергеометрические функции из правой части (1.23) определяются следующим образом

$${}_{4}F_{3}\left[\begin{matrix}a & b & c & d\\ e & f & g & \end{matrix};z\right]:=\sum_{q=0}^{\infty}\frac{\left(a\right)_{q}\left(b\right)_{q}\left(c\right)_{q}\left(d\right)_{q}}{\left(e\right)_{q}\left(f\right)_{q}\left(g\right)_{q}}\frac{z^{q}}{q!}, \tag{1.27}$$

где

$$\left(a\right)_{q}:=\frac{\Gamma\left(a+q\right)}{\Gamma\left(a\right)} \tag{1.28}$$

восходящий символ Похгаммера.

Для произвольных формальных рядов

$$f(y) = \sum_{m=0}^{\infty} f^{\alpha(m)} \underbrace{y_\alpha \dots y_\alpha}_{m}, \qquad g(y) = \sum_{n=0}^{\infty} g^{\beta(n)} \underbrace{y_\beta \dots y_\beta}_{n} \tag{1.29}$$

произведение имеет вид

$$\begin{aligned} f(y) * g(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \Bigg(& f^{\alpha(2k)} g^{\beta(2p)} \sum_{l=0}^{min(2k,2p)} (\epsilon_{\alpha\beta})^l \underbrace{\overbrace{y_\alpha \dots y_\alpha}^{2k-l} \overbrace{y_\beta \dots y_\beta}^{2p-l}}_{2k+2p-2l} A(2k,2p,l,\nu\mathcal{K}) + \\ & f^{\alpha(2k+1)} g^{\beta(2p+1)} \sum_{l=0}^{min(2k+1,2p+1)} (\epsilon_{\alpha\beta})^l \underbrace{\overbrace{y_\alpha \dots y_\alpha}^{2k+1-l} \overbrace{y_\beta \dots y_\beta}^{2p+1-l}}_{2k+2p+2-2l} B(2k+1,2p+1,l,\nu\mathcal{K}) + \\ & f^{\alpha(2k)} g^{\beta(2p+1)} \sum_{l=0}^{min(2k,2p+1)} (\epsilon_{\alpha\beta})^l \underbrace{\overbrace{y_\alpha \dots y_\alpha}^{2k-l} \overbrace{y_\beta \dots y_\beta}^{2p+1-l}}_{2k+2p+1-2l} C(2k,2p+1,l,\nu\mathcal{K}) + \\ & f^{\alpha(2k+1)} g^{\beta(2p)} \sum_{l=0}^{min(2k+1,2p)} (\epsilon_{\alpha\beta})^l \underbrace{\overbrace{y_\alpha \dots y_\alpha}^{2k+1-l} \overbrace{y_\beta \dots y_\beta}^{2p-l}}_{2k+2p+1-2l} D(2k+1,2p,l,\nu\mathcal{K}) \Bigg). \end{aligned} \tag{1.30}$$

Верность выражений (1.23,1.24,1.25,1.26) доказывается в следующих разделах с использованием ассоциативности алгебры $\mathsf{Aq}(2,\nu)$.

1.3 Условие ассоциативности

В этом разделе выводится условие ассоциативности на бозонные структурные константы (*Четный* × *Четный*). Фактически достаточно рассмотреть только этот случай из-за того, как выводятся другие структурные константы. Произведение двух мономов может быть представлено в виде:

$$f^{\alpha(m)}\overbrace{y_{(\alpha}\cdots y_{\alpha)}}^{m}*g^{\beta(n)}\overbrace{y_{(\beta}\cdots y_{\beta)}}^{n}=$$
$$=f^{\alpha(m)}g^{\beta(n)}\sum_{p=0}^{min(m,n)}(\epsilon_{\alpha\beta})^p\underbrace{\overbrace{y_{(\alpha}\cdots y_{\alpha}}^{m-p}\overbrace{y_{\beta}\cdots y_{\beta)}}^{n-p}}_{m+n-2p}A\,(m,n,p,\nu\mathcal{K})\,,\quad(1.31)$$

где $A\,(m,n,p,\nu\mathcal{K})$ – структурные константы для четно-четного случая. В этом разделе мы рассматриваем только четные мономы. Можно переписать предыдущее уравнение в немного другой форме

$$f^{\alpha(m)}\overbrace{y_{(\alpha}\cdots y_{\alpha)}}^{m}*g^{\beta(n-2)\gamma_1\gamma_2}\overbrace{y_{(\beta}\cdots y_{\beta)}}^{n-2}*y_{\gamma_1}y_{\gamma_2}=$$
$$=f^{\alpha(m)}g^{\beta(n-2)\gamma_1\gamma_2}\left(\sum_{p=0}^{min(m,n-2)}(\epsilon_{\alpha\beta})^p\underbrace{\overbrace{y_{(\alpha}\cdots y_{\alpha}}^{m-p}\overbrace{y_{\beta}\cdots y_{\beta)}}^{n-2-p}}_{m+n-2-2p}A\,(m,n-2,p,\nu\mathcal{K})\right)*y_{\gamma_1}y_{\gamma_2}.$$
$$(1.32)$$

Здесь использовалась ассоциативность произведения. Можно умножить $m\times n$ непосредственно или $m\times(n-2)\times 2$. В силу ассоциативности результат должен быть тем же. Чтобы выразить это условие в форме уравнения, нужно симметризовать осцилляторы с индексами γ_1 и γ_2. Остальные осцилляторы уже симметризованы.

$$\underbrace{\overbrace{y_{(\alpha}\cdots y_{\alpha}}^{m-p}\overbrace{y_{\beta}\cdots y_{\beta)}}^{n-2-p}}_{m+n-2-2p}y_{\gamma_1}y_{\gamma_2}=\Bigg[\overbrace{y_{(\alpha}\cdots y_{\alpha}}^{m-p}\overbrace{y_{\beta}\cdots y_{\beta}}^{n-2-p}y_{\gamma_1)}+$$
$$+\frac{2i}{2}\frac{(m+n-2p-2)}{m+n-1-2p}\xi\,\epsilon_{\alpha\gamma_1}\overbrace{y_{(\alpha}\cdots y_{\alpha}}^{m-1-p}\overbrace{y_{\beta}\cdots y_{\beta)}}^{n-2-p}(m+n-2p-1-\nu\mathcal{K})\Bigg]y_{\gamma_2}$$
$$(1.33)$$

Множитель
$$\frac{2i}{2}\frac{(m+n-2p-2)}{m+n-1-2p}\xi\,(m+n-2p-1-\nu\mathcal{K})\,,\quad(1.34)$$

содержащий $\epsilon_{\alpha\gamma_1}$,который появляется во втором слагаемом, состоит из двух частей.

Первая часть

$$\frac{2i}{2}\frac{(m+n-2p-2)}{m+n-1-2p}\left(m+n-2p-1-\nu\mathcal{K}\right) \tag{1.35}$$

это результат симметризации $m+n-2p-2$ осцилляторов с еще одним осциллятором.

$$\underbrace{y_{(\rho}\dots y_{\rho)}}_{m+n-2-2p} y_{\gamma_1}y_{\gamma_2} = \Bigg[\underbrace{y_{(\rho}\dots y_{\rho}}_{m+n-2-2p} y_{\gamma_1)} + \\ + \frac{2i}{2}\frac{(m+n-2p-2)}{m+n-1-2p}\underbrace{y_{(\rho}\dots y_{\rho)}}_{m+n-3-2p}\epsilon_{\rho\gamma_1}\left(m+n-2p-1-\nu\mathcal{K}\right)\Bigg] y_{\gamma_2}. \tag{1.36}$$

Вторая же часть, собственно ξ, носит исключительно комбинаторный характер. Она появляется из-за того, что y_β и y_{γ_1} уже симметризованы. Чтобы получить значение ξ, следует изучить симметрии исходного выражения

$$f^{\alpha_1\dots\alpha_{m-p}\mu_1\dots\mu_p} g^{\tilde{\mu}_1\dots\tilde{\mu}_p\beta_1\dots\beta_{n-2-p}\gamma_1\gamma_2}\epsilon_{\mu_1\tilde{\mu}_1}\dots\epsilon_{\mu_p\tilde{\mu}_p}\overbrace{y_{(\alpha_1}\dots y_{\alpha_{m-p}}}^{m-p}\overbrace{y_{\beta_1}\dots y_{\beta_{n-2-p})}}^{n-2-p} y_{\gamma_1}y_{\gamma_2} \tag{1.37}$$

и свертки

$$f^{\alpha_1\dots\alpha_{m-p}\mu_1\dots\mu_p} g^{\tilde{\mu}_1\dots\tilde{\mu}_p\beta_1\dots\beta_{n-2-p}\gamma_1\gamma_2}\epsilon_{\mu_1\tilde{\mu}_1}\dots\epsilon_{\mu_p\tilde{\mu}_p}\overbrace{y_{(\alpha_1}\dots y_{\alpha_{m-p}}}^{m-p}\overbrace{y_{\beta_1}\dots y_{\beta_{n-2-p})}}^{n-2-p}\ \epsilon_{\beta_1\gamma_1}\ y_{\gamma_2}. \tag{1.38}$$

Количество перестановок, которые дают ноль,

$$(n-2-p)\,\frac{(m+n-2p-3)!}{(m-p)!}. \tag{1.39}$$

Количество перестановок, которые дают ненулевые свертки,

$$\xi = \frac{(m-p)!}{(m+n-2p-2)!}\left[\frac{(m+n-2p-2)!}{(m-p)!} - (n-2-p)\,\frac{(m+n-2p-3)!}{(m-p)!}\right] = \\ = \frac{m-p}{m+n-2p-2}. \tag{1.40}$$

Необходимо повторить эту же операцию с оставшимся осциллятором y_{γ_2}. Это дает (1.32)

$$f^{\alpha(m)}g^{\beta(n)}\sum_{p=0}^{min(m,n-2)} A\left(m,n-2,p,\nu\mathcal{K}\right)\left(\epsilon_{\alpha\beta}\right)^p\left[\overbrace{y_{(\alpha}\cdots y_\alpha}^{m-p}\overbrace{y_\beta\cdots y_{\beta)}}^{n-p}+\right.$$
$$+\left(2i\right)\left(m-p\right)\epsilon_{\alpha\beta}\overbrace{y_{(\alpha}\cdots y_\alpha}^{m-p-1}\overbrace{y_\beta\cdots y_{\beta)}}^{n-p-1}+$$
$$\frac{\left(2i\right)^2}{4}\left(\epsilon_{\alpha\beta}\right)^2\left(m-p\right)\left(m-p-1\right)\times$$
$$\left.\times\frac{m+n-2p-1-\nu\mathcal{K}}{m+n-2p-1}\frac{m+n-2p-3+\nu\mathcal{K}}{m+n-2p-3}\overbrace{y_{(\alpha}\cdots y_\alpha}^{m-p-2}\overbrace{y_\beta\cdots y_{\beta)}}^{n-p-2}\right]. \tag{1.41}$$

Сравнивая (1.31) и (1.41), мы получаем набор рекуррентных уравнений на структурные константы ассоциативного умножения

$$A\left(m,n,0,\nu\mathcal{K}\right)=A\left(m,n-2,0,\nu\mathcal{K}\right), \tag{1.42}$$

$$A\left(m,n,1,\nu\mathcal{K}\right)=A\left(m,n-2,1,\nu\mathcal{K}\right)+2imA\left(m,n-2,0,\nu\mathcal{K}\right), \tag{1.43}$$

$$A\left(m,n,p,\nu\mathcal{K}\right)=A\left(m,n-2,p,\nu\mathcal{K}\right)+2i\left(m-p+1\right)A\left(m,n-2,p-1,\nu\mathcal{K}\right)+$$
$$+i^2A\left(m,n-2,p-2,\nu\mathcal{K}\right)\left(m-p+2\right)\left(m-p+1\right)\times$$
$$\times\frac{m+n-2p+3-\nu\mathcal{K}}{m+n-2p+3}\,\frac{m+n-2p+1+\nu\mathcal{K}}{m+n-2p+1}, \tag{1.44}$$

где $p=2,\ldots,n-2$,

$$A\left(m,n,n-1,\nu\mathcal{K}\right)=2i\left(m-n+2\right)A\left(m,n-2,n-2,\nu\mathcal{K}\right)+$$
$$+i^2A\left(m,n-2,n-3,\nu\mathcal{K}\right)\left(m-n+3\right)\left(m-n+2\right)\times$$
$$\times\frac{m-n+5-\nu\mathcal{K}}{m-n+5}\,\frac{m-n+3+\nu\mathcal{K}}{m-n+3}, \tag{1.45}$$

$$A\left(m,n,n,\nu\mathcal{K}\right)=i^2A\left(m,n-2,n-2,\nu\mathcal{K}\right)\left(m-n+2\right)\left(m-n+1\right)\times$$
$$\times\frac{m-n+3-\nu\mathcal{K}}{m-n+3}\,\frac{m-n+1+\nu\mathcal{K}}{m-n+1}. \tag{1.46}$$

Вместе со структурными константами $A\,(m{,}2{,}p{,}\nu\mathcal{K})$ эти уравнения (1.42-1.46) единственным образом определяют структурные константы для *Четно* $\times$ *Четного* случая в терминах $A\,(m{,}2{,}p{,}\nu\mathcal{K})$. Структурные константы для $A\,(m{,}2{,}p{,}\nu\mathcal{K})$ могут быть получены путем прямой симметризации, процедура почти такая же, как и в выводе условия ассоциативности. В приложении проверено, что стуктурные константы (1.23) действительно решают уравнения (1.42-1.46).

1.4 Нечетно × Нечетный случай

Чтобы вывести структурные константы для нечетных мономов, достаточно использовать ассоциативность и структурные константы для бозонного случая (*Четный* $\times$ *Четный*).

$$
\begin{aligned}
&f * g = f^{\alpha(m+1)} \overbrace{y_\alpha \ldots y_\alpha}^{m+1} * g^{\beta(n+1)} \overbrace{y_\beta \ldots y_\beta}^{n+1} = \\
&= f^{\alpha(m+1)} g^{\beta(n+1)} \sum_{p=0}^{min(m,n)+1} (\epsilon_{\alpha\beta})^p \underbrace{\overbrace{y_\alpha \ldots y_\alpha}^{m+1-p} \overbrace{y_\beta \ldots y_\beta}^{n+1-p}}_{m+n-2p+2} B\,(m+1{,}n+1{,}p,\nu\mathcal{K})\,,
\end{aligned}
\tag{1.47}
$$

где $m{,}n$ – четные числа.

$$
\begin{aligned}
&f^{\alpha(m+1)} \overbrace{y_\alpha \ldots y_\alpha}^{(m+1)} * g^{\beta(n+1)} \overbrace{y_\beta \ldots y_\beta}^{(n+1)} = f^{\alpha\alpha(m)} g^{\beta(n)\beta} y_\alpha * \overbrace{y_\alpha \ldots y_\alpha}^{(m)} * \overbrace{y_\beta \ldots y_\beta}^{(n)} * y_\beta = \\
&= f^{\alpha\alpha(m)} g^{\beta(n)\beta} y_\alpha \;*\; \sum_{p=0}^{min(m,n)} (\epsilon_{\alpha\beta})^p \underbrace{\overbrace{y_\alpha \ldots y_\alpha}^{m-p} \overbrace{y_\beta \ldots y_\beta}^{n-p}}_{m+n-2p} \;*\; y_\beta\; A\,(m{,}n{,}p,-\nu\mathcal{K})\,.
\end{aligned}
\tag{1.48}
$$

Теперь нужно выполнить симметризацию, вставляя соответствующие комбинаторные факторы. В силу того, что процедура такая же, как и в выводе уравнений (1.42-1.46), мы приводим только окончательный ответ

$$
\begin{aligned}
f * g = f^{\alpha(m+1)} g^{\beta(n+1)} \sum_{p=0}^{min(m,n)} \Big(& (\epsilon_{\alpha\beta})^p \, y_{\alpha(m+1-p)} y_{\beta(n+1-p)} + \\
& + i \, (\epsilon_{\alpha\beta})^{p+1} \, (m + n - 2p + 1 + \nu\mathcal{K}) \, y_{\alpha(m-p)} y_{\beta(n-p)} + \\
& + i^2 \, (\epsilon_{\alpha\beta})^{p+2} \, (m - p) \, (n - p) \times \\
\times \frac{m + n - 2p + 1 + \nu\mathcal{K}}{m + n - 2p + 1} \frac{m + n - 2p - 1 + \nu\mathcal{K}}{m + n - 2p - 1} & y_{\alpha(m-1-p)} y_{\beta(n-1-p)} \Big) A \, (m,n,p, - \nu\mathcal{K})
\end{aligned}
\tag{1.49}
$$

После сдвига индекса в суммах предыдущее выражением можно привести к виду (1.47), где $B\,(m+1,n+1,p,\nu\mathcal{K})$ в терминах бозонных структурных констант имеет вид

$$
\begin{aligned}
B \, (m + 1,n + 1,p,\nu\mathcal{K}) = & \, A \, (m,n,p, - \nu\mathcal{K}) + \\
& + i \, (m + n - 2p + 3 + \nu\mathcal{K}) \, A \, (m,n,p - 1, - \nu\mathcal{K}) + \\
& + i^2 \, (m - p + 2) \, (n - p + 2) \times \\
\times \frac{m + n - 2p + 5 + \nu\mathcal{K}}{m + n - 2p + 5} & \frac{m + n - 2p + 3 + \nu\mathcal{K}}{m + n - 2p + 3} A \, (m,n,p - 2, - \nu\mathcal{K}) \, .
\end{aligned}
\tag{1.50}
$$

1.5 Четно × Нечетный и Нечетно × Четный случаи

Так же как и в предыдущем разделе, можно вывести структурные константы для Четно × Нечетного и Нечетно × Четного случаев. После некоторых вычислений приводим лишь окончательный ответ:

Четный × Нечетный

$$
\begin{aligned}
C \, (m,n + 1,p,\nu\mathcal{K}) = & \, A \, (m,n,p, - \nu\mathcal{K}) + \\
& + i \, (m - p + 1) \, \frac{m + n - 2p + 3 + \nu\mathcal{K}}{m + n - 2p + 3} A \, (m,n,p - 1, - \nu\mathcal{K}) \, ,
\end{aligned}
\tag{1.51}
$$

Нечетный $\times$ *Четный*

$$D\,(m+1,n,p,\nu\mathcal{K}) = A\,(m,n,p,\nu\mathcal{K}) + \\ + i\,(n-p+1)\,\frac{m+n-2p+3-\nu\mathcal{K}}{m+n-2p+3}A\,(m,n,p-1,\nu\mathcal{K})\,. \quad (1.52)$$

1.6 Вывод

Среди достижений данной главы следует выделить следующее:

1. Из условия ассоциативности были получены рекуррентные уравнения, позволяющие однозначно найти структурные константы ассоциативного умножения в алгебре $\mathsf{Aq}(2\nu)$ для четных мономов. Эти уравнения позволили доказать справедливость ранее предложенных выражений. Доказательство приведено в Приложении А.
2. Были найдены структурные константы для умножения мономов произвольной четности.

Глава 2. Звездочное произведение

2.1 Введение

Глава основана на статье [73]. При отстутствии деформации ($\nu = 0$), т.е. когда осцилляторы подчиняются коммутационным соотношениям (16), произведение полиномов в вейлевском упорядочении может быть представлено в известной Мояловской форме[1]

$$f(y) *_{\text{M}} g(y) = f(y) \sum_{p=0}^{\infty} \frac{i^p}{p!} \left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial y_\alpha} \epsilon_{\alpha\beta} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial y_\beta} \right)^p g(y). \tag{2.1}$$

Ниже в данной главе выводится аналог этого соотношения на случай произвольного параметра деформации ν, т.е. произведение двух производящих функций будет схематично представлено в виде

$$f(y) * g(y) = \int d\tau_1 \, d\tau_2 \, f(\tau_1 y) \, \mathsf{Ker}_\nu \left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial y_\alpha} \epsilon_{\alpha\beta} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial y_\beta}, \tau_1, \tau_2 \right) g(\tau_2 y) \,. \tag{2.2}$$

Это произведение мы также будем называть произведением Мояла, но уже в алгебре с деформированными (анти)коммутационными соотношениями.

2.2 Структурные константы в представлении Похгаммера

Выражения для структурных констант (1.23) можно разделить на два сомножителя:

$$i^p \frac{m!n!}{(m-p)!(n-p)!p!}, \tag{2.3}$$

[1] Выражение (12) является интегральной формой произведения (2.1)

который может быть получен с помощью дифференциального оператора $\frac{i^p}{p!}\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial y_\alpha}\epsilon_{\alpha\beta}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial y_\beta}\right)^p$, действующего на мономы степенй m и n соответственно и

$$
{}_4F_3\left[\begin{matrix} 1-\frac{\nu\mathcal{K}}{2} & \frac{\nu\mathcal{K}}{2} & \frac{-p}{2} & \frac{1-p}{2} \\ \frac{1-m}{2} & \frac{1-n}{2} & \frac{m+n-2p+3}{2} & \end{matrix} ;1\right], \tag{2.4}
$$

для которого ниже получено интегральное представление, которое позволит представить произведение через структурные константы в виде (2.2).

2.2.1 Четно × четный случай

Для положительных значений a,b,c,d,e,f,g (см. (1.27)) и в случае, когда нижние аргументы ограничены верхними, гипергеометрическая функция (1.27) допускает интегральное представление через интегрального представления для бета-функции Эйлера, т.е.

$$
B(x,y) = \int_0^1 dt\, t^{x-1}(1-t)^{y-1}\ ,\ x>0\,, y>0\,. \tag{2.5}
$$

Например, если $d>g>0$ и $z\in\mathbb{R}$ можно выразить ${}_4F_3$ как интеграл от ${}_3F_2$

$$
{}_4F_3\left[\begin{matrix} a & b & c & d \\ e & f & g & \end{matrix}\middle| z\right] = \frac{\Gamma(g)}{\Gamma(d)\Gamma(g-d)}\int_0^1 dt\, t^{d-1}(1-t)^{g-d-1}{}_3F_2\left[\begin{matrix} a & b & c \\ e & f & \end{matrix}\middle| tz\right] \tag{2.6}
$$

Можно продолжить процедуру и выразить ${}_3F_2$ как интеграл от ${}_2F_1$, если есть еще одна пара из верхнего и нижнего аргументов, в которой нижний аргумент ограничен верхним.

Так как некоторые аргументы гипергеометрической функции (1.23), которые зависят от степеней умножаемых мономов, отрицательны, то стандартная формула типа (2.6) неприменима

$$
{}_4F_3\left[\begin{matrix} 1-\frac{\nu\mathcal{K}}{2} & \frac{\nu\mathcal{K}}{2} & \frac{-p}{2} & \frac{1-p}{2} \\ \underbrace{\frac{1-m}{2}}_{<0} & \underbrace{\frac{1-n}{2}}_{<0} & \frac{m+n-2p+3}{2} & \end{matrix}\middle| 1\right]. \tag{2.7}
$$

Но есть замечательное альтернативное представление для бета-функции Эйлера, так называемое представление Похгаммера [94]

$$\oint_C dz\, z^{x-1}\,(1-z)^{y-1} = \left(1-e^{2\pi i x}\right)\left(1-e^{2\pi i y}\right) B\left(x,y\right), \tag{2.8}$$

где интегрирование ведется по римановой поверхности, определяемой подынтегральным выражением, вдоль контура Рис 2.1 [2].

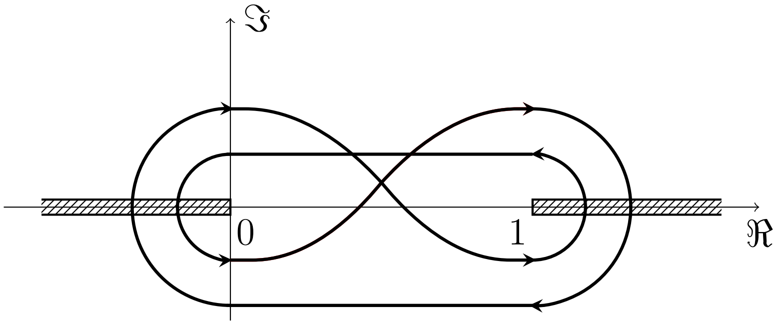

Рисунок 2.1 — Контур Похгаммера

Формула (2.8) также дает аналитическое продолжение бета-функции Эйлера во всю комплексную плоскость $(x,y \in \mathbb{C})$. Отметим, что интеграл в (2.8) хорошо определен для любых значений x и y в отличие от правой части. Действительно, пусть x некоторое нецелое число и $y = -N$ при $N \in \mathbb{N}$, в этом случае правая часть содержит неопределенность типа $0 \times \infty$. Прямое вычисление интеграла дает

$$\oint_C dz\, z^{x-1}(1-z)^{-N-1} = (-1)^{N+1}(1-e^{2\pi i x})\frac{2\pi i}{N!}\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x-N)}. \tag{2.9}$$

Этот же результат можно получить, если взять предел от правой части (2.8), т.е.

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(1-e^{2\pi i\varepsilon})(1-e^{2\pi i x})B(x,-N+\varepsilon) = (-1)^{N+1}(1-e^{2\pi i x})\frac{2\pi i}{N!}\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x-N)}. \tag{2.10}$$

Несмотря на то что последний нижний аргумент гипергеометрической функции $(\frac{m+n-2p+3}{2})$ положителен, нет верхнего аргумента, который бы удовлетворил

[2] Всякий раз, когда контур пересекает области $[1,+\infty)$ или $(-\infty,0]$, он переходит на другой лист римановой поверхности. Для рациональных значений x и y риманнова поверхность имеет конечное число листов. Для произвольных значений x или y количество листов может быть бесконечным (как для комплекснозначного логарифма log). Тем не менее, контур пересекает каждую область дважды: один раз вверх, другой раз вниз, следовательно контур замкнут на римановой поверхности для любых значений x и y.

требованиям для использования представления Эйлера (2.5). Т.е. вещественная часть верхнего аргумента должна быть ограничена $\frac{m+n-2p+3}{2}$, что не выполнено для произвольных значений ν.

Из-за фазовых факторов $(1-e^{2\pi ix})(1-e^{2\pi iy})$ в формуле (2.8) нужно будет использовать представление Похгаммера дважды. Действительно, пусть необходимо получить $\left[\left(\frac{1-m}{2}\right)_q\right]^{-1}$ (напоминание, что m четно), что по определению даётся выражением

$$\frac{1}{\left(\frac{1-m}{2}\right)_q}=\frac{\Gamma\left(\frac{1-m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-m}{2}+q\right)}. \tag{2.11}$$

Рассмотрим интеграл

$$I_1=\oint_C dz\, z^{\frac{1-m}{2}-\xi-1}(1-z)^{q+\xi-1}=-2i\sin(2\pi\xi)\frac{\Gamma\left(\frac{1-m}{2}-\xi\right)\Gamma\left(q+\xi\right)}{\Gamma\left(\frac{1-m}{2}+q\right)}. \tag{2.12}$$

Здесь ξ некоторое нецелое число, и фазовый фактор был упрощен в силу того, что m четно и q целое. Отметим, что правая часть (2.12) содержит ту же гамма-функцию в знаменателе, что и правая часть (2.11). Чтобы получить нужную гамма-функцию в числителе, рассмотрим следующий интеграл

$$I_2=\oint_C dz\, z^{\frac{1-m}{2}-1}(1-z)^{-\xi-1}=2\left(1-e^{-2\pi i\xi}\right)\frac{\Gamma\left(\frac{1-m}{2}\right)\Gamma\left(-\xi\right)}{\Gamma\left(\frac{1-m}{2}-\xi\right)} \tag{2.13}$$

Произведение интегралов (2.12) и (2.13) дает

$$I_1I_2=-4i\left(1-e^{-2\pi i\xi}\right)\sin\left(2\pi\xi\right)\Gamma\left(\xi\right)\Gamma\left(-\xi\right)\frac{\left(\xi\right)_q}{\left(\frac{1-m}{2}\right)_q}. \tag{2.14}$$

При использовании следующих тождества для гамма-функции

$$\Gamma\left(1-\xi\right)=(-\xi)\Gamma(-\xi)\ ,\ \ \Gamma\left(\xi\right)\Gamma(1-\xi)=\frac{\pi}{\sin\left(\pi\xi\right)} \tag{2.15}$$

префактор может быть упрощен, а само выражение (2.14) можно привести к виду

$$I_1I_2=-\frac{8\pi}{\xi}\sin\left(2\pi\xi\right)e^{-i\pi\xi}\frac{\left(\xi\right)_q}{\left(\frac{1-m}{2}\right)_q}. \tag{2.16}$$

Аналогично можно представить $\left[\left(\frac{1-m}{2}\right)_q\right]^{-1}$ и $\left[\left(\frac{m+n-2p+3}{2}\right)_q\right]^{-1}$, вводя дополнительные нецелочисленные параметры η и ζ соответственно. Чтобы воспроизвести структурные константы (1.23) определим следующие функции

$$\mathcal{F}_{\xi,\eta,\zeta}\left(p,\nu\mathcal{K},s_1,t_1,u_1\right) = {}_4F_3\left[\begin{matrix} 1-\frac{\nu\mathcal{K}}{2} & \frac{\nu\mathcal{K}}{2} & -\frac{p}{2} & \frac{1-p}{2} \\ \xi & \eta & \zeta & \end{matrix}\middle| (1-s_1)(1-t_1)(1-u_1)\right], \tag{2.17}$$

$$\mathcal{R}_{\xi,\eta,\zeta}(s_1,s_2,t_1,t_2,u_1,u_2) = \\ = s_1^{-\frac{1}{2}-\xi}s_2^{-\frac{1}{2}}\frac{(1-s_1)^{\xi-1}}{(1-s_2)^{\xi+1}}t_1^{-\frac{1}{2}-\eta}t_2^{-\frac{1}{2}}\frac{(1-t_1)^{\eta-1}}{(1-t_2)^{\eta+1}}u_1^{\frac{1}{2}-\zeta}u_2^{\frac{1}{2}}\frac{(1-u_1)^{\zeta-1}}{(1-u_2)^{\zeta+1}}. \tag{2.18}$$

Так же введем следующее сокращенное обозначение для интегралов

$$\int d\Gamma \equiv \oint_{C_{s_1}} ds_1 \oint_{C_{s_2}} ds_2 \oint_{C_{t_1}} dt_1 \oint_{C_{t_2}} dt_2 \oint_{C_{u_1}} du_1 \oint_{C_{u_2}} du_2, \tag{2.19}$$

Где контуры интегрирования – это контура Похгаммера (Рис. 2.1). Чтобы увидеть, как воспроизводятся структурные константы, рассмотрим следующее выражение

$$\int d\Gamma\left(\sqrt{\frac{u_1u_2}{s_1s_2}}\right)^m \mathcal{R}_{\xi,\eta,\zeta}(s_1,s_2,t_1,t_2,u_1,u_2)\frac{\mathcal{F}_{\xi,\eta,\zeta}(p,\nu\mathcal{K},s_1,t_1,u_1)}{(u_1u_2)^p}\left(\sqrt{\frac{u_1u_2}{t_1t_2}}\right)^n = \\ = \sum_{q=0}^{\infty}\frac{\left(1-\frac{\nu\mathcal{K}}{2}\right)_q\left(\frac{\nu\mathcal{K}}{2}\right)_q\left(-\frac{p}{2}\right)_q\left(\frac{1-p}{2}\right)_q}{(\xi)_q(\eta)_q(\zeta)_q\,q!}\int d\Gamma\left[s_1^{\frac{1-m}{2}-\xi-1}(1-s_1)^{q+\xi-1}\right]\times \\ \times\left[s_2^{\frac{1-m}{2}-1}(1-s_2)^{-\xi-1}\right]\left[t_1^{\frac{1-n}{2}-\eta-1}(1-t_1)^{q+\eta-1}\right]\left[t_2^{\frac{1-n}{2}-1}(1-t_2)^{-\eta-1}\right]\times \\ \times\left[u_1^{\frac{m+n-2p+3}{2}-\zeta-1}(1-u_1)^{q+\zeta-1}\right]\left[u_2^{\frac{m+n-2p+3}{2}-1}(1-u_2)^{-\zeta-1}\right] = \\ = -\frac{(8\pi)^3\sin(2\pi\xi)\sin(2\pi\eta)\sin(2\pi\zeta)}{\xi\eta\zeta e^{i\pi(\xi+\eta+\zeta)}}\times \\ \times\sum_{q=0}^{\infty}\frac{\left(1-\frac{\nu\mathcal{K}}{2}\right)_q\left(\frac{\nu\mathcal{K}}{2}\right)_q\left(-\frac{p}{2}\right)_q\left(\frac{1-p}{2}\right)_q}{(\xi)_q(\eta)_q(\zeta)_q\,q!}\frac{(\xi)_q}{\left(\frac{1-m}{2}\right)_q}\frac{(\eta)_q}{\left(\frac{1-n}{2}\right)_q}\frac{(\zeta)_q}{\left(\frac{m+n-2p+3}{2}\right)_q} = \\ = -\frac{(8\pi)^3\sin(2\pi\xi)\sin(2\pi\eta)\sin(2\pi\zeta)}{\xi\eta\zeta e^{i\pi(\xi+\eta+\zeta)}}{}_4F_3\left[\begin{matrix} 1-\frac{\nu\mathcal{K}}{2} & \frac{\nu\mathcal{K}}{2} & \frac{-p}{2} & \frac{1-p}{2} \\ \frac{1-m}{2} & \frac{1-n}{2} & \frac{m+n-2p+3}{2} & \end{matrix}\middle| 1\right]. \tag{2.20}$$

Дополнительный появившийся фактор компенсируется следующей константой

$$C_{\xi,\eta,\zeta} = -\frac{\xi\,\eta\,\zeta e^{i\pi(\xi+\eta+\zeta)}}{(8\pi)^3\sin(2\pi\xi)\sin(2\pi\eta)\sin(2\pi\zeta)}. \tag{2.21}$$

Напомним, что нецелочисленные параметры ξ,η,ζ определяют риманову поверхность, по которой ведется интегрирование.

При разложении четных функций f и g по степеням y и при выполнении интегрирование можно показать, что формула

$$f(y)*g(y) = C_{\xi,\eta,\zeta}\int d\Gamma\, f\left(\sqrt{\frac{u_1u_2}{s_1s_2}}y\right)\sum_{p=0}^{\infty}\frac{i^p}{p!(u_1u_2)^p}\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial y_\alpha}\epsilon_{\alpha\beta}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial y_\beta}\right)^p\times$$
$$\times\,\mathcal{R}_{\xi,\eta,\zeta}(s_1,s_2,t_1,t_2,u_1,u_2)g\left(\sqrt{\frac{u_1u_2}{t_1t_2}}y\right)\mathcal{F}_{\xi,\eta,\zeta}(p,\nu\mathcal{K},s_1,t_1,u_1) \tag{2.22}$$

дает тот же результат, как если бы произведение было вычислено с помощью структурных констант (1.23). Здесь обозначение $\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial y_\alpha}$ значит, что производная действует только на функцию f, а $\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial y_\beta}$ – на функцию g.

В четном случае роль оператора Клейна в разложении

$$f(y,\mathcal{K}) = f_0(y) + f_1(y)\mathcal{K} \tag{2.23}$$

тривиальна: для функций четных по y звездочное произведение является суммой произведений, т.е.

$$f(y,\mathcal{K})*g(y,\mathcal{K}) = (f_0(y)+f_1(y)\mathcal{K})*(g_0(y)+g_1(y)\mathcal{K}) =$$
$$= f_0(y)*g_0(y) + f_0(y)*g_1(y)\mathcal{K} + f_1(y)*g_0(y)\mathcal{K} + f_1(y)*g_1(y), \tag{2.24}$$

где каждое произведение может быть вычислено с помощью (2.22). Отметим, что если функции f или g нечетны, то правая часть (2.22) обращает в ноль из-за факторов, которые возникают после интегрирования по s_1 or t_1. Действительно, пусть функция f содержит в разложении моном степени $m+1$ (напомним, что m и n четные положительные числа), тогда интеграл по s_1 дает

$$\oint_{C_{s_1}} ds_1\, s_1^{\frac{1-(m+1)}{2}-\xi-1}(1-s_1)^{q+\xi-1} = (1-e^{-2\pi i\xi})(1-e^{2\pi i\xi})\frac{\Gamma\left(-\frac{m}{2}-\xi\right)\Gamma(q+\xi)}{\Gamma\left(-\frac{m}{2}+q\right)}. \tag{2.25}$$

Здесь q не произвольно, а ограничено $\frac{p}{2}$ или $\frac{p-1}{2}$ в силу структуры функции $\mathcal{F}$ (2.17). Рассматриваемый нечетный моном можно продифференцировать лишь $m+1$ раз. Следовательно максимально возможное значение q это $\frac{m}{2}$, которое соответствует полюсу в знаменателе (2.25). Значит интеграл по s_1 равен нулю. Естественно, аналогичное верно для любого нечетного монома, который может встретиться в g.

Далее мы хотим представить прозведения для оставшихся четностей в виде, схожем с выражением для произведения в четно-четном случае. Для этого мы выделяем из конечного выражения часть, которая будет получена дифференцированием $\frac{1}{p!}\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial y_\alpha}\epsilon_{\alpha\beta}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial y_\beta}\right)^p$, а затем оставшуюся часть выражения перепишем в виде, чтобы числа m и n входили только как символы Похгаммера в соответствующих степенных рядах. Для компенсации разницы относительно четно-четного случая вводятся факторы

$$s_1^{\mu_1}(1-s_1)^{\mu_2}s_2^{\mu_3}(1-s_2)^{\mu_4}t_1^{\mu_5}(1-t_1)^{\mu_6}t_2^{\mu_7}(1-t_2)^{\mu_8}u_1^{\mu_9}(1-u_1)^{\mu_{10}}u_2^{\mu_{11}}(1-u_2)^{\mu_{12}}. \quad (2.26)$$

Числа μ_i опеределены из преобразованных версий структурных констант.

2.2.2 Нечетно $\times$ нечетный случай

В этом разделе получено звездочное произведение для двух y-нечетных функций. Окончательное выражение сходно по форме с четно-четным случаем (2.22). Чтобы построить интегральное представление стуктурных констант (1.24), перепишем исходное выражение в виде

$$B(m+1,n+1,p,\nu\mathcal{K}) = \underbrace{\frac{i^p(m+1)!(n+1)!}{(m+1-p)!(n+1-p)!p!}}\Bigg[\frac{(m+1-p)(n+1-p)}{(m+1)(n+1)}\times$$
$$\times F(m,n,p,-\nu\mathcal{K}) + \frac{p(m+n-2p+3+\nu\mathcal{K})}{(m+1)(n+1)}F(m,n,p-1,-\nu\mathcal{K})+$$
$$+\frac{p(p-1)}{(m+1)(n+1)}\frac{m+n-2p+3+\nu\mathcal{K}}{m+n-2p+3}\frac{m+n-2p+5+\nu\mathcal{K}}{m+n-2p+5}F(m,n,p-2,-\nu\mathcal{K})\Bigg]. \quad (2.27)$$

Здесь подчеркнутый префактор был выделен из-за того, что в конечном выражении будет получен дифференцированием $\frac{1}{p!}\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial y_\alpha}\epsilon_{\alpha\beta}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial y_\beta}\right)^p$, и следующее сокращенное обозначение было использовано для краткости

$$F(m,n,p,\nu\mathcal{K}) = {}_4F_3\left[\begin{matrix} 1-\frac{\nu\mathcal{K}}{2} & \frac{\nu\mathcal{K}}{2} & \frac{-p}{2} & \frac{1-p}{2} \\ \frac{1-m}{2} & \frac{1-n}{2} & \frac{m+n-2p+3}{2} & \end{matrix}\middle| 1\right]. \tag{2.28}$$

Далее каждое слагаемое в квадратных скобках (2.27) будет преобразовано следующим образом.

Слагаемое пропорциональное $F(m,n,p,-\nu\mathcal{K})$

Префактор перед $F(m,n,p,-\nu\mathcal{K})$ может быть переписан в виде

$$\frac{(m+1-p)(n+1-p)}{(m+1)(n+1)} = \left(1+\frac{\frac{p}{2}}{\left(\frac{1-m}{2}-1\right)}\right)\left(1+\frac{\frac{p}{2}}{\left(\frac{1-n}{2}-1\right)}\right). \tag{2.29}$$

Используя определения гипергеометрической функции (1.27), символа Похгаммера (1.28) и тождеств на гамма-функции, далее мы преведем все рассматриваемое выражение к виду

$$\begin{aligned}\frac{(m+1-p)(n+1-p)}{(m+1)(n+1)}F(m,n,p,-\nu\mathcal{K}) = F(m,n,p,-\nu\mathcal{K})+ \\ +\frac{p}{2}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{\nu\mathcal{K}}{2}\right)_q\left(-\frac{\nu\mathcal{K}}{2}\right)_q\left(\frac{1-p}{2}\right)_q\left(-\frac{p}{2}\right)_q}{\left(\frac{1-m}{2}-1\right)_{q+1}\left(\frac{1-n}{2}\right)_q\left(\frac{m+n-2p+3}{2}\right)_q}\frac{1}{q!}+ \\ +\frac{p}{2}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{\nu\mathcal{K}}{2}\right)_q\left(\frac{-\nu\mathcal{K}}{2}\right)_q\left(\frac{1-p}{2}\right)_q\left(-\frac{p}{2}\right)_q}{\left(\frac{1-m}{2}\right)_q\left(\frac{1-n}{2}-1\right)_{q+1}\left(\frac{m+n-2p+3}{2}\right)_q}\frac{1}{q!}+ \\ +\frac{p^2}{4}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{\nu\mathcal{K}}{2}\right)_q\left(-\frac{\nu\mathcal{K}}{2}\right)_q\left(\frac{1-p}{2}\right)_q\left(-\frac{p}{2}\right)_q}{\left(\frac{1-m}{2}-1\right)_{q+1}\left(\frac{1-n}{2}-1\right)_{q+1}\left(\frac{m+n-2p+3}{2}\right)_q}\frac{1}{q!}.\end{aligned} \tag{2.30}$$

Небольшая модификация символов Похгаммера относительно четно-четного случая такая как

$$\frac{1}{\left(\frac{1-m}{2}\right)_q} \to \frac{1}{\left(\frac{1-m}{2}-1\right)_{q+1}}, \tag{2.31}$$

в интегральном представлении может быть легко компенсирована введением факторов $\frac{1-s_2}{s_2}$ для выражения выше или $\frac{1-t_2}{t_2}$ для

$$\frac{1}{\left(\frac{1-n}{2}\right)_q} \to \frac{1}{\left(\frac{1-n}{2}-1\right)_{q+1}}, \tag{2.32}$$

или обеих как в последнем слагаемом формулы (2.30).

Слагаемое пропорциональное $F(m,n,p-1,-\nu\mathcal{K})$

Аналогично, часть с $F(m,n,p-1,-\nu\mathcal{K})$ может быть представлена в виде

$$\frac{p(m+n-2p+3+\nu\mathcal{K})}{(m+1)(n+1)}F(m,n,p-1,-\nu\mathcal{K}) = \\ = \frac{\frac{p}{2}\left[\frac{m+n-2p+5}{2}-\left(1-\frac{\nu\mathcal{K}}{2}\right)\right]}{\left(\frac{1-m}{2}-1\right)\left(\frac{1-n}{2}-1\right)}F(m,n,p-1,-\nu\mathcal{K}). \tag{2.33}$$

Снова с использованием определений и тождеств (1.27),(1.28),(2.15) выражение может быть переписано в виде

$$\frac{p(m+n-2p+3+\nu\mathcal{K})}{(m+1)(n+1)}F(m,n,p-1,-\nu\mathcal{K}) = \\ = \frac{p}{2}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{\nu\mathcal{K}}{2}\right)_q\left(\frac{-\nu\mathcal{K}}{2}\right)_q\left(\frac{2-p}{2}\right)_q\left(\frac{1-p}{2}\right)_q}{\left(\frac{1-m}{2}-1\right)_{q+1}\left(\frac{1-n}{2}-1\right)_{q+1}}\frac{1}{q!}\left(\frac{1}{\left(\frac{m+n-2p+7}{2}\right)_{q-1}}- \right. \\ \left. -\left(1-\frac{\nu\mathcal{K}}{2}\right)\frac{1}{\left(\frac{m+n-2p+5}{2}\right)_q}\right). \tag{2.34}$$

Аналогично предыдущему случаю модификация символов Похгаммера типа $\frac{1}{\left(\frac{m+n-2p+7}{2}\right)_{q-1}}$ и $\frac{1}{\left(\frac{m+n-2p+5}{2}\right)_q}$ может быть копменсирована введением различных степеней $u_1,u_2,(1-u_1)$ или $(1-u_2)$.

Слагаемое пропорциональное $F(m,n,p-2,-\nu\mathcal{K})$

Поскольку процедура полностью аналогична, ниже приведена лишь цепочка преобразований

$$\frac{p(p-1)}{(m+1)(n+1)}\frac{m+n-2p+3+\nu\mathcal{K}}{m+n-2p+3}\frac{m+n-2p+5+\nu\mathcal{K}}{m+n-2p+5}F(m,n,p-2,-\nu\mathcal{K}) =$$
$$=\frac{\frac{p}{2}\frac{(p-1)}{2}\left(\frac{m+n-2p+3+\nu\mathcal{K}}{2}\right)\left(\frac{m+n-2p+5+\nu\mathcal{K}}{2}\right)}{\left(\frac{1-m}{2}-1\right)\left(\frac{1-n}{2}-1\right)\left(\frac{m+n-2p+3}{2}\right)\left(\frac{m+n-2p+5}{2}\right)}F(m,n,p-2,-\nu\mathcal{K}). \quad (2.35)$$

Далее разложим числитель

$$\frac{p(p-1)}{4}\left[\left(\frac{m+n-2p+3}{2}\right)\left(\frac{m+n-2p+5}{2}\right)+\nu\mathcal{K}\left(\frac{m+n-2p+3}{2}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\nu\mathcal{K}}{2}\left(1+\frac{\nu\mathcal{K}}{2}\right)\right]\sum_{q=0}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{\nu\mathcal{K}}{2}\right)_q\left(\frac{-\nu\mathcal{K}}{2}\right)_q\left(\frac{3-p}{2}\right)_q\left(\frac{2-p}{2}\right)_q}{\left(\frac{1-m}{2}-1\right)_{q+1}\left(\frac{1-n}{2}-1\right)_q\left(\frac{m+n-2p+3}{2}\right)_{q+2}}\frac{1}{q!}=$$
$$=\frac{p(p-1)}{4}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{\nu\mathcal{K}}{2}\right)_q\left(\frac{-\nu\mathcal{K}}{2}\right)_q\left(\frac{3-p}{2}\right)_q\left(\frac{2-p}{2}\right)_q}{\left(\frac{1-m}{2}-1\right)_{q+1}\left(\frac{1-n}{2}-1\right)_q}\frac{1}{q!}\left[\frac{1}{\left(\frac{m+n-2p+7}{2}\right)_q}+\right.$$
$$\left.+\nu\mathcal{K}\frac{1}{\left(\frac{m+n-2p+5}{2}\right)_{q+1}}+\frac{\nu\mathcal{K}}{2}\left(1+\frac{\nu\mathcal{K}}{2}\right)\frac{1}{\left(\frac{m+n-2p+3}{2}\right)_{q+2}}\right]. \quad (2.36)$$

Теперь можно выписать выражение для произведения двух нечетных функций с помощью интегралов. Для упрощения формул введем пару проекторов

$$\Pi_{\pm}\equiv\frac{1\pm\mathcal{K}}{2}. \quad (2.37)$$

С помощью этих проекторов произведение двух нечетных по y функций может быть записано в виде

$$f(y)*g(y)\Pi_\pm = C_{\xi,\eta,\zeta}\int d\Gamma\, f\left(\sqrt{\frac{u_1u_2}{s_1s_2}}y\right)\sum_{p=0}^{\infty}\frac{i^p}{p!(u_1u_2)^p}\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial y_\alpha}\epsilon_{\alpha\beta}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial y_\beta}\right)^p\times$$

$$\mathcal{R}_{\xi,\eta,\zeta}(s_1,s_2,t_1,t_2,u_1,u_2)\frac{\sqrt{s_1s_2t_1t_2}}{u_1u_2}\left\{\left[1-\frac{p}{2\xi}\left(\frac{1-s_2}{s_2}\right)\right]\left[1-\frac{p}{2\eta}\left(\frac{1-t_2}{t_2}\right)\right]\times\right.$$

$$\times\mathcal{F}_{\xi,\eta,\zeta}(p,\mp\nu,s_1,t_1,u_1)-$$

$$-\frac{p}{2\xi\eta}\left(\frac{1-s_2}{s_2}\right)\left(\frac{1-t_2}{t_2}\right)u_1u_2\left[\frac{u_2(1+\zeta)}{1-u_2}+\left(1\mp\frac{\nu}{2}\right)\right]\mathcal{F}_{\xi,\eta,\zeta}(p-1,\mp\nu,s_1,t_1,u_1)+$$

$$+\frac{p(p-1)}{4\xi\eta}\left(\frac{1-s_2}{s_2}\right)\left(\frac{1-t_2}{t_2}\right)(u_1u_2)^2\left[1\mp\frac{\nu}{\zeta}\left(\frac{1-u_2}{u_2}\right)\mp\frac{\nu(2\pm\nu)}{4(1-\zeta)\zeta}\left(\frac{1-u_2}{u_2}\right)^2\right]\times$$

$$\left.\times\mathcal{F}_{\xi,\eta,\zeta}(p-2,\mp\nu,s_1,t_1,u_1)\right\}g\left(\sqrt{\frac{u_1u_2}{t_1t_2}}y\right)\Pi_\pm. \quad (2.38)$$

Произведение без проектора может быть просто получено как сумма

$$f(y)*g(y)\Pi_+ + f(y)*g(y)\Pi_- = f(y)*g(y). \quad (2.39)$$

Заметим, что правая часть (2.38) обращается в ноль в силу интегрирований по s_1 или t_1, если какая-либо из функций f или g является четной.

2.2.3 Четно $\times$ нечетный случай

Так как преобразования структурных констант (1.25) аналогичны, то приводим лишь окончательный результат

$$C(m,n+1,p,\nu\mathcal{K}) = \frac{i^p m!(n+1)!}{(m-p)!(n+1-p)!p!}\left\{F(m,n,p,-\nu\mathcal{K})+\right.$$

$$\left.+\frac{p}{2}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{\nu\mathcal{K}}{2}\right)_q\left(-\frac{\nu\mathcal{K}}{2}\right)_q}{\left(\frac{1-m}{2}\right)_q\left(\frac{1-n}{2}-1\right)_q q!}\left[\frac{\left(\frac{1-p}{2}\right)_q\left(-\frac{p}{2}\right)_q}{\left(\frac{m+n-2p+3}{2}\right)_q}-\frac{\left(\frac{2-p}{2}\right)_q\left(\frac{1-p}{2}\right)_q}{\left(\frac{m+n-2p+5}{2}\right)_q}-\frac{\nu\mathcal{K}}{2}\frac{\left(\frac{2-p}{2}\right)_q\left(\frac{1-p}{2}\right)_q}{\left(\frac{m+n-2p+3}{2}\right)_{q+1}}\right]\right\}. \quad (2.40)$$

Звездочное произведение для четной функции f и нечетной функции g имеет вид

$$f(y)*g(y)\Pi_{\pm}=C_{\xi,\eta,\zeta}\int d\Gamma\, f\left(\sqrt{\frac{u_1u_2}{s_1s_2}}y\right)\sum_{p=0}^{\infty}\frac{i^p}{p!(u_1u_2)^p}\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial y_\alpha}\epsilon_{\alpha\beta}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial y_\beta}\right)^p\times$$
$$\mathcal{R}_{\xi,\eta,\zeta}(s_1,s_2,t_1,t_2,u_1,u_2)\sqrt{\frac{t_1t_2}{u_1u_2}}\left\{\left[1-\frac{p}{2\eta}\left(\frac{1-t_2}{t_2}\right)\right]\mathcal{F}_{\xi,\eta,\zeta}(p,\mp\nu,s_1,t_1,u_1)+\right.$$
$$\left.+\frac{p}{2\eta}\left(\frac{1-t_2}{t_2}\right)(u_1u_2)\left[1\mp\frac{\nu}{2\zeta}\left(\frac{1-u_2}{u_2}\right)\right]\mathcal{F}_{\xi,\eta,\zeta}(p-1,\mp\nu,s_1,t_1,u_1)\right\}g\left(\sqrt{\frac{u_1u_2}{t_1t_2}}y\right)\Pi_{\pm}. \tag{2.41}$$

Правая часть (2.41) обращается в ноль из-за интегрирования по s_1 или t_1, если функция f нечетна или g четна.

2.2.4 Нечетно $\times$ четный случай

Аналогично предыдущей секции приводим окончательный вид преобразованных структурных констант (1.26)

$$D(m+1,n,p,\nu\mathcal{K})=\frac{i^p(m+1)!n!}{(m+1-p)!(n-p)!p!}\left\{F(m,n,p,\nu\mathcal{K})+\right.$$
$$\left.+\frac{p}{2}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{\left(1-\frac{\nu\mathcal{K}}{2}\right)_q\left(\frac{\nu\mathcal{K}}{2}\right)_q}{\left(\frac{1-m}{2}-1\right)_q\left(\frac{1-n}{2}\right)_q q!}\left[\frac{\left(\frac{1-p}{2}\right)_q\left(-\frac{p}{2}\right)_q}{\left(\frac{m+n-2p+3}{2}\right)_q}-\frac{\left(\frac{2-p}{2}\right)_q\left(\frac{1-p}{2}\right)_q}{\left(\frac{m+n-2p+5}{2}\right)_q}+\frac{\nu\mathcal{K}}{2}\frac{\left(\frac{2-p}{2}\right)_q\left(\frac{1-p}{2}\right)_q}{\left(\frac{m+n-2p+3}{2}\right)_{q+1}}\right]\right\}. \tag{2.42}$$

Произведение для нечетной и четной функций имеет вид

$$f(y)*g(y)\Pi_\pm = C_{\xi,\eta,\zeta}\int d\Gamma\, f\left(\sqrt{\frac{u_1u_2}{s_1s_2}}y\right)\sum_{p=0}^{\infty}\frac{i^p}{p!(u_1u_2)^p}\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial y_\alpha}\epsilon_{\alpha\beta}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial y_\beta}\right)^p\times$$
$$\mathcal{R}_{\xi,\eta,\zeta}(s_1,s_2,t_1,t_2,u_1,u_2)\sqrt{\frac{s_1s_2}{u_1u_2}}\Bigg\{\left[1-\frac{p}{2\xi}\left(\frac{1-s_2}{s_2}\right)\right]\mathcal{F}_{\xi,\eta,\zeta}(p,\pm\nu,s_1,t_1,u_1)+$$
$$+\frac{p}{2\xi}\left(\frac{1-s_2}{s_2}\right)(u_1u_2)\left[1\pm\frac{\nu}{2\zeta}\left(\frac{1-u_2}{u_2}\right)\right]\mathcal{F}_{\xi,\eta,\zeta}(p-1,\pm\nu,s_1,t_1,u_1)\Bigg\}g\left(\sqrt{\frac{u_1u_2}{t_1t_2}}y\right)\Pi_\pm. \tag{2.43}$$

Правая часть (2.43) обращается в ноль из-за интегрирования по s_1 или t_1, если функция f не является нечетной или g не является четной.

2.3 Полное звездочное произведение

Произведения для различных четностей (2.22),(2.38),(2.41) и (2.43) схематично можно представить в виде

$$f(y)*g(y)\Pi_\pm =$$
$$=\int d\Gamma\, f\left(\sqrt{\frac{u_1u_2}{s_1s_2}}y\right)\mathsf{Ker}^{IJ}\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial y_\alpha}\epsilon_{\alpha\beta}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial y_\beta},s_{1,2},t_{1,2},u_{1,2}\right)g\left(\sqrt{\frac{u_1u_2}{t_1t_2}}y\right)\Pi_\pm, \tag{2.44}$$

где, например, Ker для четно-четного случая согласно (2.22) имеет вид

$$\mathsf{Ker}^{EE}\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial y_\alpha}\epsilon_{\alpha\beta}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial y_\beta},s_{1,2},t_{1,2},u_{1,2}\right) = C_{\xi,\eta,\zeta}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{i^p}{p!(u_1u_2)^p}\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial y_\alpha}\epsilon_{\alpha\beta}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial y_\beta}\right)^p\times$$
$$\times\mathcal{R}_{\xi,\eta,\zeta}(s_1,s_2,t_1,t_2,u_1,u_2)\mathcal{F}_{\xi,\eta,\zeta}(p,\nu,s_1,t_1,u_1) \tag{2.45}$$

И если умножаемые функции не удовлетворяют определенным условиям на четность, то интеграл с соответствующим ядром Ker обращается в ноль. Следовательно произведение двух функций может быть представлено интегралом с суммой ядер для всех возможных случаев, т.е. для произвольных f и g произведение имеет вид

$$
\begin{gathered}
f(y)*g(y)\Pi_{\pm}=C_{\xi,\eta,\zeta}\int d\Gamma\, f\left(\sqrt{\frac{u_1u_2}{s_1s_2}}y\right)\sum_{p=0}^{\infty}\frac{i^p}{p!(u_1u_2)^p}\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial y_\alpha}\epsilon_{\alpha\beta}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial y_\beta}\right)^p\times\\
\mathcal{R}_{\xi,\eta,\zeta}(s_1,s_2,t_1,t_2,u_1,u_2)\Bigg\{\mathcal{F}_{\xi,\eta,\zeta}(p,\pm\nu,s_1,t_1,u_1)+\\
+\sqrt{\frac{t_1t_2}{u_1u_2}}\Bigg(\left[1-\frac{p}{2\eta}\left(\frac{1-t_2}{t_2}\right)\right]\mathcal{F}_{\xi,\eta,\zeta}(p,\mp\nu,s_1,t_1,u_1)+\\
+\frac{p}{2\eta}\left(\frac{1-t_2}{t_2}\right)(u_1u_2)\left[1\mp\frac{\nu}{2\zeta}\left(\frac{1-u_2}{u_2}\right)\right]\mathcal{F}_{\xi,\eta,\zeta}(p-1,\mp\nu,s_1,t_1,u_1)\Bigg)+\\
+\sqrt{\frac{s_1s_2}{u_1u_2}}\Bigg(\left[1-\frac{p}{2\xi}\left(\frac{1-s_2}{s_2}\right)\right]\mathcal{F}_{\xi,\eta,\zeta}(p,\pm\nu,s_1,t_1,u_1)+\\
+\frac{p}{2\xi}\left(\frac{1-s_2}{s_2}\right)(u_1u_2)\left[1\pm\frac{\nu}{2\zeta}\left(\frac{1-u_2}{u_2}\right)\right]\mathcal{F}_{\xi,\eta,\zeta}(p-1,\pm\nu,s_1,t_1,u_1)\Bigg)+\\
+\frac{\sqrt{s_1s_2t_1t_2}}{u_1u_2}\Bigg(\left[1-\frac{p}{2\xi}\left(\frac{1-s_2}{s_2}\right)\right]\left[1-\frac{p}{2\eta}\left(\frac{1-t_2}{t_2}\right)\right]\mathcal{F}_{\xi,\eta,\zeta}(p,\mp\nu,s_1,t_1,u_1)-\\
-\frac{p}{2\xi\eta}\left(\frac{1-s_2}{s_2}\right)\left(\frac{1-t_2}{t_2}\right)u_1u_2\left[\frac{u_2(1+\zeta)}{1-u_2}+\left(1\mp\frac{\nu}{2}\right)\right]\mathcal{F}_{\xi,\eta,\zeta}(p-1,\mp\nu,s_1,t_1,u_1)+\\
+\frac{p(p-1)}{4\xi\eta}\left(\frac{1-s_2}{s_2}\right)\left(\frac{1-t_2}{t_2}\right)(u_1u_2)^2\left[1\mp\frac{\nu}{\zeta}\left(\frac{1-u_2}{u_2}\right)\mp\frac{\nu(2\pm\nu)}{4(1-\zeta)\zeta}\left(\frac{1-u_2}{u_2}\right)^2\right]\times\\
\times\mathcal{F}_{\xi,\eta,\zeta}(p-2,\mp\nu,s_1,t_1,u_1)\Bigg)\Bigg\}g\left(\sqrt{\frac{u_1u_2}{t_1t_2}}y\right)\Pi_{\pm}. \qquad (2.46)
\end{gathered}
$$

Здесь для краткости нецелочисленные параметры ξ,η и ζ были выбраны одинаковыми для каждого ядра, хотя это не является обязательным и может быть использовано для упрощений в некоторых случаях.

Рассмотрим случай $\nu\neq 2k,\ k\in\mathbb{Z}$. Для четно-четного и нечетно-четного случаев умножения можно выбрать параметры ξ и η в виде

$$\xi=1\mp\frac{\nu}{2},\ \ \eta=\pm\frac{\nu}{2}. \qquad (2.47)$$

Напоминаем, что чередование знаков вызвано проекторами $\Pi_{\pm}$. Этот конкретный выбор позволяет упростить $\mathcal{F}_{\xi,\eta,\zeta}(p,\pm\nu;s_1,t_1,u_1)$, определенную в (2.17), и перейти от гипергеометрической функции типа ${}_4F_3$ к ${}_2F_1$, т.е.

$$\mathcal{F}_{1\mp\frac{\nu}{2},\pm\frac{\nu}{2},\zeta}(p,\pm\nu;s_1,t_1,u_1) = {}_2F_1\left[\begin{matrix}-\frac{p}{2} & \frac{1-p}{2}\\ \zeta & \end{matrix}\middle|(1-s_1)(1-t_1)(1-u_1)\right] = \mathsf{F}_\zeta(p;s_1,t_1,u_1). \tag{2.48}$$

Для оставшихся случаев, собственно нечетно-нечетного и четно-нечетного, можно также упростить $\mathcal{F}_{\xi,\eta,\zeta}(p,\mp\nu;s_1,t_1,u_1)$ до (2.48), при этом не меняя риманову поверхность, т.е. оставляя ее такой же, как и в четно-четном и нечетно-четном случаях. Действительно, это может быть достигнуто выбором

$$\xi' = \xi - 1 = \mp\frac{\nu}{2},\ \ \eta' = 1 + \eta = 1 \pm \frac{\nu}{2}, \tag{2.49}$$

так как риманова поверхность определяется нецелой частью параметров ξ, η и ξ', η'. Для того чтобы полностью компенсировать различие, заметим, что

$$\begin{aligned} &C_{\xi',\eta',\zeta} = \frac{(\xi-1)(\eta+1)}{\xi\eta}C_{\xi,\eta,\zeta}\ , \\ &\quad\mathcal{R}_{\xi',\eta',\zeta}(s_1,s_2;t_1,t_2;u_1,u_2) = \frac{s_1(1-s_2)}{(1-s_1)}\frac{(1-t_1)}{t_1(1-t_2)}\mathcal{R}_{\xi,\eta,\zeta}(s_1,s_2;t_1,t_2;u_1,u_2). \end{aligned} \tag{2.50}$$

Для дальнейшего упрощения выражения для произведения выберем $\zeta = \mp\frac{\nu}{2}$ для ядер всех четностей. Для такого конкретного выбора параметров произведение будет иметь вид

$$f(y)*g(y)\Pi_{\pm}=C_{\xi,\eta,\zeta}\int d\Gamma\, f\left(\sqrt{\frac{u_1u_2}{s_1s_2}}y\right)\sum_{p=0}^{\infty}\frac{i^p}{p!(u_1u_2)^p}\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial y_\alpha}\epsilon_{\alpha\beta}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial y_\beta}\right)^p\times$$
$$\mathcal{R}_{\xi,\eta,\zeta}(s_1,s_2,t_1,t_2,u_1,u_2)\Bigg\{\mathsf{F}_\zeta(p;s_1,t_1,u_1)+\sqrt{\frac{s_1s_2}{u_1u_2}}\Bigg(\left[1-\frac{p}{2\xi}\left(\frac{1-s_2}{s_2}\right)\right]\mathsf{F}_\zeta(p;s_1,t_1,u_1)+$$
$$+\frac{p}{2\xi}\left(\frac{1-s_2}{s_2}\right)(u_1)\,(2u_2-1)\,\mathsf{F}_\zeta(p-1;s_1,t_1,u_1)\Bigg)+$$
$$+\frac{\xi'\eta'}{\xi\eta}\frac{s_1(1-s_2)}{(1-s_1)}\frac{(1-t_1)}{t_1(1-t_2)}\sqrt{\frac{t_1t_2}{u_1u_2}}\Bigg(\left[1-\frac{p}{2\eta'}\left(\frac{1-t_2}{t_2}\right)\right]\mathsf{F}_\zeta(p;s_1,t_1,u_1)+$$
$$+\frac{p}{2\eta'}\left(\frac{1-t_2}{t_2}\right)u_1\mathsf{F}_\zeta(p-1;s_1,t_1,u_1)\Bigg)+$$
$$+\frac{\xi'\eta'}{\xi\eta}\frac{s_1(1-s_2)}{(1-s_1)}\frac{(1-t_1)}{t_1(1-t_2)}\frac{\sqrt{s_1s_2t_1t_2}}{u_1u_2}\Bigg(\left[1-\frac{p}{2\xi'}\left(\frac{1-s_2}{s_2}\right)\right]\left[1-\frac{p}{2\eta'}\left(\frac{1-t_2}{t_2}\right)\right]\times$$
$$\times\mathsf{F}_\zeta(p;s_1,t_1,u_1)-$$
$$-\frac{p}{2\xi'\eta'}\left(\frac{1-s_2}{s_2}\right)\left(\frac{1-t_2}{t_2}\right)u_1u_2\frac{\xi}{(1-u_2)}\mathsf{F}_\zeta(p-1;s_1,t_1,u_1)+$$
$$+\frac{p(p-1)}{4\xi'\eta'}\left(\frac{1-s_2}{s_2}\right)\left(\frac{1-t_2}{t_2}\right)(u_1)^2\mathsf{F}_\zeta(p-2;s_1,t_1,u_1)\Bigg)\Bigg\}g\left(\sqrt{\frac{u_1u_2}{t_1t_2}}y\right)\Pi_{\pm}. \tag{2.51}$$

Заметим, что в сравнении с (2.46) в этой версии произведения ядро выражается в терминах одной функции, собственно $\mathsf{F}_\zeta(p;s_1,t_1,u_1)$, поэтому все четности могут рассматриваться единым образом.

2.4 Аналитическое разложение произведения по параметру деформации ν

В данной секции для простоты будем рассматривать только четно-четный случай. Как и в секции выше, выберем ξ и η в виде (2.47) для упрощения

$\mathcal{F}$-функции и оставим параметр ζ произвольным и ν-независимым. При таком выборе параметров вся ν-зависимость переходит из $\mathcal{F}$-функции в $\mathcal{R}$-функции.

В предыдущей секции на параметр деформации ν накладывалось условие не быть четным. Однако это условие может быть ослаблено. Заметим, что все интегралы вдоль контуров Похгаммера хорошо определены при любых значениях параметра деформации ν. Единственная трудность приходит из общей константы $C_{\xi,\eta,\zeta}$, которая не является аналитичной и содержит полюс первого порядка, т.е.

$$C_{1\mp\frac{\nu}{2},\pm\frac{\nu}{2},\zeta} = -\frac{1}{(8\pi)^3}\frac{1\mp\frac{\nu}{2}}{\sin\left(2\pi\left(1\mp\frac{\nu}{2}\right)\right)}\frac{\left(\pm\frac{\nu}{2}\right)}{\sin\left(2\pi\left(\pm\frac{\nu}{2}\right)\right)}\frac{\zeta e^{i\pi(1+\zeta)}}{\sin(2\pi\zeta)} = \\ = \frac{1}{(8\pi)^3}\frac{\zeta e^{i\pi\zeta}}{\sin(2\pi\zeta)}\left[\mp\frac{1}{2\pi^2\nu}+\frac{1}{4\pi^2}\mp\frac{\nu}{6}+\frac{\nu^2}{12}+\ldots\right]. \quad (2.52)$$

Этот потенциально опасный полюс сокращается, так как аналитическое разложение $\mathcal{R}$-функции начинается с первой степени по ν. Действительно, с выбором (2.47) для ξ и η, $\mathcal{R}$-функция имеет вид

$$\mathcal{R}_{1\mp\frac{\nu}{2},\pm\frac{\nu}{2},\zeta}(s_1,s_2,t_1,t_2,u_1,u_2) = s_1^{\pm\frac{\nu}{2}}(1-s_1)^{\mp\frac{\nu}{2}}(1-s_2)^{\pm\frac{\nu}{2}}\frac{s_1^{-\frac{3}{2}}s_2^{-\frac{1}{2}}}{(1-s_2)^2}\times \\ \times t_1^{\mp\frac{\nu}{2}}(1-t_1)^{\pm\frac{\nu}{2}}(1-t_2)^{\mp\frac{\nu}{2}}\frac{t_1^{-\frac{1}{2}}t_2^{-\frac{1}{2}}}{(1-t_1)(1-t_2)}u_1^{\frac{1}{2}-\zeta}u_2^{\frac{1}{2}}\frac{(1-u_1)^{\zeta-1}}{(1-u_2)^{\zeta+1}}. \quad (2.53)$$

Для дальнейшего удобства введем фунцию $r_\zeta(s_1,s_2,t_1,t_2,u_1,u_2)$, определенную следующим образом

$$r_\zeta(s_1,s_2,t_1,t_2,u_1,u_2) = \frac{s_1^{-\frac{3}{2}}s_2^{-\frac{1}{2}}}{(1-s_2)^2}\frac{t_1^{-\frac{1}{2}}t_2^{-\frac{1}{2}}u_1^{\frac{1}{2}-\zeta}u_2^{\frac{1}{2}}}{(1-t_1)(1-t_2)}\frac{(1-u_1)^{\zeta-1}}{(1-u_2)^{\zeta+1}}, \quad (2.54)$$

которая является ν-независимой частью $\mathcal{R}$-функции. Каждое слагаемое $\mathcal{R}$-функции, которое возведено в ν-ую степень, может быть записано в экспоненциальной форме

$$\mathcal{R}_{1\mp\frac{\nu}{2},\pm\frac{\nu}{2},\zeta} = r_\zeta\, e^{\pm\frac{\nu}{2}\log s_1} e^{\mp\frac{\nu}{2}\log(1-s_1)} e^{\pm\frac{\nu}{2}\log(1-s_2)} e^{\mp\frac{\nu}{2}\log t_1} e^{\pm\frac{\nu}{2}\log(1-t_1)} e^{\mp\frac{\nu}{2}\log(1-t_2)}. \tag{2.55}$$

Здесь мы опускаем аргументы для краткости. Теперь можно разложить экспоненту в степенной ряд. Чтобы показать, что это разложение начинается с первой степени, следует рассмотреть интегралы, которые возникают при вычислении звездочного произведения (2.20).

Интеграл по s_1 имеет вид

$$\begin{aligned} I_{s_1} \equiv \oint_{C_{s_1}} & e^{\pm\frac{\nu}{2}\log s_1} e^{\mp\frac{\nu}{2}\log(1-s_1)} s_1^{\frac{1-m}{2}-2}(1-s_1)^q\, ds_1 = \\ &= \oint_{C_{s_1}} \Big(\underline{1} \pm \frac{\nu}{2}\underline{\log s_1} \mp \frac{\nu}{2}\log(1-s_1) + \frac{\nu^2}{8}\underline{\log^2 s_1} + \frac{\nu^2}{8}\log^2(1-s_1) - \\ &\qquad - \frac{\nu^2}{4}\log(1-s_1)\log s_1 + \dots\Big) s_1^{\frac{1-m}{2}-2}(1-s_1)^q\, ds_1. \end{aligned} \tag{2.56}$$

Здесь подчеркнутые слагаемые обращаются в ноль после интегрирования, так как контур интегрирования может быть стянут в точку. Следовательно, вплоть до второго порядка по ν интеграл по s_1 имеет вид

$$I_{s_1} = \mp\frac{\nu}{2}\oint_{C_{s_1}} \log(1-s_1)\left[1 \mp \frac{\nu}{4}\log\frac{1-s_1}{s_1^2}\right] s_1^{\frac{1-m}{2}-2}(1-s_1)^q\, ds_1 + \dots \tag{2.57}$$

Следовательно, полюс в (2.52) сокращается!

Ниже мы приводим результаты разложений для других интегралов

$$\begin{aligned} I_{s_2} \equiv \oint_{C_{s_2}} & e^{\pm\frac{\nu}{2}\log(1-s_2)} s_2^{\frac{1-m}{2}-1}(1-s_2)^{-2}\, ds_2 = \\ &= \oint_{C_{s_2}} \left[1 \pm \frac{\nu}{2}\log(1-s_2)\right] \frac{s_2^{\frac{1-m}{2}-1}}{(1-s_2)^2}\, ds_2 + \dots, \end{aligned} \tag{2.58}$$

$$\begin{aligned} I_{t_1} \equiv \oint_{C_{t_1}} & e^{\mp\frac{\nu}{2}\log t_1} e^{\pm\frac{\nu}{2}\log(1-t_1)} t_1^{\frac{1-n}{2}-1}(1-t_1)^{q-1}\, dt_1 = \\ &= \oint_{C_{t_1}} \left[1 \mp \frac{\nu}{2}\log t_1 \pm \frac{\nu}{2}\log(1-t_1)\right] t_1^{\frac{1-n}{2}-1}(1-t_1)^{q-1}\, dt_1 + \dots \end{aligned} \tag{2.59}$$

$$I_{t_2} \equiv \oint_{C_{t_2}} e^{\mp\frac{\nu}{2}\log(1-t_2)} t_2^{\frac{1-n}{2}-1}(1-t_2)^{-1}\, dt_2 =$$

$$= \oint_{C_{t_2}} \left[1 \mp \frac{\nu}{2}\log(1-t_2)\right] \frac{t_2^{\frac{1-n}{2}-1}}{(1-t_2)}\, dt_2 + \ldots \quad (2.60)$$

Заметим, что нулевая степень по ν в (2.59) выживает только для $q = 0$. Следовательно, только первое слагаемое $\mathcal{F}$-функции дает вклад в недеформированное звездочное произведение. Несмотря на то что интегралы по u_1 и u_2 не содержат ν, тем не меняя, приведем для них выражения ниже

$$I_{u_1} \equiv \oint_{C_{u_1}} u_1^{\frac{m+n-2p+3}{2}-\zeta-1}(1-u_1)^{q+\zeta-1}\, du_1\ ,\ \ I_{u_2} \equiv \oint_{C_{u_2}} u_2^{\frac{m+n-2p+3}{2}-1}(1-u_2)^{-\zeta-1}\, du_2. \quad (2.61)$$

Вычисляя интегралы вплоть до необходимого порядка по ν для $q = 0$, мы можем показать

$$I_{s_1}I_{s_2}I_{t_1}I_{t_2}I_{u_1}I_{u_2}C_{1\mp\frac{\nu}{2},\pm\frac{\nu}{2},\zeta}\Big|_{\nu=0} = 1, \quad (2.62)$$

это означает, что нулевой порядок по ν в разложении произведения в точности совпадает с известным Мояловским произведением. Можно представить произведение двух четных функций в форме

$$f(y) * g(y)\Pi_\pm = f(y) *_{\mathbf{M}} g(y)\Pi_\pm +$$

$$+ (\mp\nu)\frac{\zeta e^{i\pi\zeta}}{2^{12}\pi^5\sin(2\pi\zeta)} \int d\Gamma\, f\left(\sqrt{\frac{u_1u_2}{s_1s_2}}y\right) \sum_{p=0}^{\infty} \frac{i^p}{p!(u_1u_2)^p}\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial y_\alpha}\epsilon_{\alpha\beta}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial y_\beta}\right)^p \times$$

$$\times\, r_\zeta(s_1,s_2,t_1,t_2,u_1,u_2)\log(1-s_1)\Bigg\{1 - \log(1-s_2) - \log\left(\frac{1-t_1}{t_1}\right) + \log(1-t_2) +$$

$$+ \frac{1}{2}\log\left(\frac{1-s_1}{s_1^2}\right)\Bigg\}\mathsf{F}_\zeta(p;s_1,t_1,u_1)\, g\left(\sqrt{\frac{u_1u_2}{t_1t_2}}y\right)\Pi_\pm + \mathcal{O}(\nu^2). \quad (2.63)$$

Здесь $f(y) *_{\mathbf{M}} g(y)$ – это обычное Мояловское произведение, определенное (2.1).

2.5 Вывод

Аналог дифференциальной формулы для Мояловского произведения (2.1) получен. Для этого понадобилось ввести 6 дополнительных интегральных параметров. Они появляются лишь в виде определенных комбинацияй в аргументах умножаемых функций, собственно как $\sqrt{\frac{u_1u_2}{s_1s_2}}$ и $\sqrt{\frac{u_1u_2}{t_1t_2}}$. Этот факт указывает на то, что, по всей видимости, существует подходящая замена переменных, которая сокращает количество интегральных параметров, и произведение может быть представлено в форме (2.2).

Несмотря на то что структурные константы для всех четностей (1.23), (1.24)-(1.26) выражаются в терминах структурных констант для четно-четного случая, вообще могло потребоваться большее число интегральных параметров из-за коэффициентов, которые зависят от n и m. Тот факт, что все структурные константы можно преставить через те же шесть интегральных параметров (2.38), (2.41), (2.43) до конца пока не изучен. Это может указывать на наличие между ними или соответствующими ядрами дополнительных соотношений, которые могут привести к упрощению результата (2.46).

Случай, когда параметр деформации ν является четным, очень выделен для алгебры $\mathsf{Aq}(2,\nu)$ и должен изучаться отдельно, так как в этом случае количество слагаемых в гипергеометрическом ряде ограничено ν. Когда ν не является четным, можно выбрать нецелочисленные параметры ξ, η и ζ таким образом, чтобы произведение можно было представить в терминах функции ${}_2F_1$ (2.51), которая является предметом для многочисленных тождеств и может привести к упрощению выражения.

Другой подход к упрощению выражения (2.46) заключается в применении интегральных тождеств на $\mathcal{F}_{\xi,\eta,\zeta}(p,\nu;s_1,t_1,u_1)$, которые следуют из ассоциативности алгебры $\mathsf{Aq}(2,\nu)$. Для получения этих тождеств можно, например, переписать условие ассоциативности на бозонные структурные константы

$$\begin{aligned}A(m,n,p,\nu\mathcal{K}) = A(m,n-2,p,) + 2i(m-p+1)A(m,n-2,p-1,\nu\mathcal{K}) + \\ + i^2(m-p+2)(m-p+1)\frac{m+n-2p+3-\nu\mathcal{K}}{m+n-2p+3}\times \\ \times\frac{m+n-2p+1+\nu\mathcal{K}}{m+n-2p+1}A(m,n-2,p-2,\nu\mathcal{K}) \quad (2.64)\end{aligned}$$

как интеграл по $d\Gamma$ (2.19). Однако это не удается сделать прямо, как для структурных констант в разделах 2.2.2, 2.2.3, 2.2.4.

Было проанализировано аналитическое разложение произведения по параметру деформации ν. Было показано, что разложение начинается с известного Мояловского произведения, и явно выписана первая поправка к нему (2.63). Предложенная процедура носит общий характер и может быть применена для вычисления поправок любого порядка. В частности, эта процедура позволяет вычислять поправки по ν в структурных константах, что является весьма сложной задачей начиная со второго порядка.

Как было замечено в введении, алгебра деформированных осцилляторов естественым образом появляется в трехмерной высокоспиновой гравитации [84]. Два основных подхода применяются для вычислений в этих теориях: реализация деформированных коммутационных соотношений удвоенным набором недеформированных осцилляторов, как в оригинальной работе [84]; или прямое применение Lone-Star произведения, как в [95]. Несмотря на то, что формула (2.46) не выглядит обнадеживающе для практического применения, она может быть полезна в вычислении произведений, когда умножаемые функции не являются формальными рядами. Возможно, она также может быть использована для доказательств общих результатов, когда явный вид умножаемых функций неизвестен. Например, ее можно попробовать применить к задаче, упоминаемой во введении (аналог AdS_4/CFT_3 голографии через развернутую формулировку [74]), где явный результат умножения не так важен, а напротив нужно максимально гибкое выражение для произведения для выполнения упомянутого ранее перерастяжения.

Глава 3. Спин-локальность вершин $\Upsilon(\omega,\omega,C)$ и $\Upsilon(\omega,C,C)$

3.1 Введение

Глава основана на статье [55]. Полная нелинейная теория взаимодействующих калибровочных полей высших спинов в настоящий момент известна лишь на уровне уравнений движения [5]. На уровне действия известны только результаты в нескольких младших порядках (см. [51],[53], [47; 48; 96—107]). На кубическом уровне константы взаимодействия не фиксируются процедурой Нётер, примерно также, как и константы взаимодействия в теории Янга-Миллса фиксируются лишь тождеством Якоби в четвером порядке. Тем не менее, в [53] константы связи были зафиксированы для 4-х мерных вершин со спинами s_1,s_2,s_3, подчиняющимися неравенствам треугольника, а в другой работе [108] эти результаты были расширены на случай произвольного спина (но в плоском пространстве). Расширение в произвольную размерность пространства-времени было получено в [48], где был использован голографический подход. Из-за отсутствия стандартного описания теории на уровне действия[1], не представляется возможным рассматривать теорию высших спинов, опираясь полностью на квантовый уровень. Тем не менее гипотеза Клебанова-Полякова о AdS/CFT голографии с участием полей высших спинов [12] (см. также [110]-[111]) указывает на квантовую совместность теории. Первый нетривиальный пример голографической дуальности высших спинов на древесном уровне для некоторых 3-х точечных корреляционных функций был представлен Giombi и Yin в [14; 112]. На квантовом уровне замечательное сокращение однопетлевой расходимости детерминанта было обнаружено в [113; 114]. Эти результаты указывают на то, что спектр полей высших спинов теории устроен таким образом, чтобы сокращать возникающую расходимость.

Разнообразие дуальностей высших спинов связывает в частности простейшую свободную $O(N)$ модель в трех измерениях с крайне нетривиальной теорией высших спинов в AdS_4. Для конкретно этой модели все граничные корреля-

[1] Топологическое действие типа AKSZ, которое бы воспроизводило полную систему нелинейных уравнений теории высших спинов, было построено в [109]. В настоящий момент до конца не ясно, может ли оно быть использовано в стандартных вычислениях квантовой теории поля.

торы в синглетном секторе известны [14; 115; 116], и действие в объеме может быть восстановлено порядок за порядком. Эта программа была инициирована в [105] и в дальнейшем развита в [47] и [48]. Было показано, что получающееся локальное действие для теории высших спинов в кубическом приближении совместно со структурными константами алгебры высших спинов [117]. Как этот метод следует применять к высшим порядкам взаимодействия, пока не до конца ясно, так как ожидается, что на четвертичном уровне взаимодействие может оказаться нелокальным [47]. Стоит все же отметить, что метод голографической реконструкции систематически опирается на отбрасывание граничных слагаемых, а эта процедура требует строгого определения нелокального класса. Грубо говоря, объемные слагаемые могут быть представлены как граничные и наоборот, если можно использовать нелокальные операторы типа $\frac{1}{\partial}$. Это обстоятельство делает вопрос о локальности в теории высших спинов чрезвычайно важным.

Один из подходов к изучению (не)локальностей в теории высших спинов основан на анализе голографических амлитуд Меллина [118], [47], [119]. Несмотря на определенные трудности в определении амплитуд Меллина для корреляторов свободных теорий недавно был получен обнадеживающий результат [120], который выделяет расходимости определенного вида в четвертичной вершине скалярного взаимодействия.

В этой главе проблема (не)локальности рассматривается с точки зрения объемной (bulk) калибровочной теории высших спинов без аппеляции к голографии. В частности, пертурбативный анализ нелинейных уравнений теории высших спинов в 4-х измерениях позволил получить ограничения, связанные с локальностью, на простейшие вершины взаимодействия полей высших спинов. Другими словами, из производящей системы [5] были восстановлены вершины взаимодействия, которые схематично выглядят следующим образом

$$\mathrm{d}_x\omega = -\omega * \omega + \Upsilon(\omega,\omega,C) + \Upsilon(\omega,\omega,C,C) + \dots\,, \tag{3.1}$$

$$\mathrm{d}_x C = -[\omega,C]_* + \Upsilon(\omega,C,C) + \dots\,, \tag{3.2}$$

где $\omega(Y;K|x)$ и $C(Y;K|x)$ – поля высших спинов, которые кроме зависимости от координат пространства-времени x также содержат зависимость от вспомогательных спинорных переменных Y и внешних операторов Клейна K. При получении динамических уравнений из производящей системы неизбежно приходится сталкиваться с когомологической проблемой выбора представителя в спинорном пространстве, которая может повлечь за собой изменения формы вершин Υ и как следствие их (не)локальное поведение. Произвол в выборе когомологического представителя, наследуемый из производящей системы, ожидаем и естественен: данный произвол связан с калибровочными преобразования и переопределениями полей. В идеале хотелось бы иметь процедуру пертурбативного разложения, которая позволяла бы не учитывать когомологический произвол, но в то же время, чтобы вершины взаимодействия Υ оставались внутри правильного локального класса. Построение такой теории возмущений крайне нетривиальная задача. В частности, наиболее естественный подход, основанный на так называемой *стандартной гомотопии* (см. например [121]), приводит к нелокальным препятствиям уже со второго порядка [14] (см. также [122]). В работе [59; 83] было показано, что с точностью до локального произвола существует единственное переопределение полей, которое не нарушает факторизацию уравнений по голоморфности и приводит к локальному выражению для вершины на AdS фоне. Совпадение этой вершины с предсказаниями из AdS/CFT голографии было показано в [123],[82],[124].

Чтобы распространить результаты [59; 83] на старшие порядки теории возмущений, нужно разработать пертурбативный подход отличный от стандартного. В работе [64] было показано, что подход, основанный на так называмой *сдвиговой гомотопии*, позволяет уменьшить степень нелокальности как следствие теоремы о Пфаффовой локальности, доказанной в той же работе. В данной главе будут изучены другие отностельно [64] свойства операторов сдвиговой гомотопии. В частности, они будут применены к вычислению пертурбативных поправок, и с их помощью будут воспроизведены ранее известные результаты [59], полученные принципиально другим способом.

Сдвиговая гомотопия отличается от подхода с использованием стандартной гомотопии в двух ключевых местах. Во-первых, операторы сдвиговой гомотопии включают в себя сдвиги аргументов динамических полей. Количество возникающих таким образом произвольных параметров растет с порядком теории возмущений. Во-вторых, рассматривается произвольное пространство, в качестве вакуумного решения, а не только AdS. Новая техника позволяет проводить вычисления для общего потенциала теории высших спинов ω, восстанавливая порядок за порядком зависимость по напряженностям C. С этой точки зрения простейшей кубической вершиной является $\Upsilon(\omega,\omega,C)$. В текущей главе мы ограничимся вершинами $\Upsilon(\omega,\omega,C)$ и $\Upsilon(\omega,C,C)$ и покажем, как свободные параметры гомотопических операторов позволяют их представить в локальной форме. Подчеркнем, что предлагаемый подход лишен различного рода расходимостей, регуляризаций и не требует какого-либо дополнительного переопределения полей для достижения локальности вершин взаимодействия: произвол в выборе полевых переменных закодирован в свободных параметрах гомотопических операторов.

Хотелось бы также отметить, что смысл самого понятия «локальность», которое используется в тексте, может отличаться от канонического понятия пространственно-временной локальности. То, что в настоящей главе понимается как (не)локальность, относится к спинорному пространству, а не к пространству-времени, т.е. к производным по спинорным переменным, а не к производным по пространству-времени. Эти два понятия связаны в развернутом подходе через некоторое однозначное отображение, которое в общем случае может оказаться нелинейным и содержать бесконечное число производных. В данной главе мы ограничимся понятием спиновой локальности, а не пространственно-временной (см. также обсуждение в [64]). На рассматриваемом уровне теории возмущений оба понятия являются эквивалентными. Основные достижения данной главы состоят в следующем:

1. Получены новые полезные свойства операторов сдвиговых гомотопий, введенных в [64]. Замечательным свойством этих операторов является явное взаимодействие со звездочным произведением. Данное свойство основано на специфическом выборе последнего. Аналога подобного свойства для стандартной гомотопии не существует, так как оно предполагает существование операторов, которые нельзя описать в рамках стандартной гомотопии.
2. Несмотря на то что вершина $\Upsilon(\omega,\omega,C)$ является локальной в любой пертурбативной схеме, будет показано, что параметры гомотопических операторов могут быть выбраны таким образом, чтобы вершина обладала свойством ультра-локальности. Т.е, чтобы вершина вообще не зависела от (анти)голоморфных вспомогательных спинорных переменных полей, которые могли бы быть в полях C. Это свойство является есте-

ственным обобщением теоремы о массовой оболочке [125], полученной для AdS фона. Стандартная гомотопия попадает в класс гомотопических операторов, которые обеспечивают свойство ультра-локальности для вершины $\Upsilon(\omega,\omega,C)$.

3. Используя результат [64], согласно которому стандартная гомотопия не удовлетворяет условию теоремы о Пфаффовой локальности в секторе ноль-форм уравнений теории высших спинов, мы получили вершину $\Upsilon(\omega,C,C)$. Показано, что такие и только такие параметры гомотопических операторов, которые предсказаны теоремой о Пфаффовой локальности [64], приводят к локальным выражениям для $\Upsilon(\omega,C,C)$, обобщая результат [59], полученный для AdS фона.
4. Несмотря на то что допустимые параметры гомотопических операторов приводят к локальным выражениям для вершин с точностью до локальных переопределений полей, было найдено однопараметрическое семейство гомотопических операторов, которые вопроизводят идентинчные вершины $\Upsilon(\omega,C,C)$ и $\Upsilon(\omega,\omega,C)$.

Часть вершин более высокого порядка рассмотрена в следующей главе. В работе [56] было показано свойство ультра-локальности (анти)голоморфных вершин $\Upsilon(\omega,\omega,C,C)$, реализующееся при подходящем выборе гомотопических параметров. Полученные вершины согласуются с результатом [83], где было показано, что на AdS фоне путем переопределения полей можно добиться равенства (анти)голоморфных вершин нулю.

Глава устроена следующим образом. В разделе 3.2 схематично описана проблема локальности и дан обзор нелинейной системы уравнений полей высших спинов и их пертурбативного разложения. В разделе 3.3 введены операторы сдвиговых гомотопий и получены их важные свойства. В разделе 3.4 развита теория возмущений, основанная на сдвиговых гомотопиях, которая позволяет получать вершины взаимодействия полей высших спинов из производящей системы. Далее в разделе 3.4.2 дан краткий обзор теоремы о Пфаффовой локальности и ее применения к вершинам для получения последних в локальной форме. В разделе 3.4.3 явно вычислены вершины $\Upsilon(\omega, C,C)$. В разделе 3.5 обсуждаются гомотопические параметры, которые дают различного рода локальные эффекты в данном порядке теории возмущений, и в 3.5.3 показано, что такие значения параметров приводят к локальному переопределению полей (обсждение влияния переопределения полей на вершины старших порядков приводится в следующей главе). Заключение приведено в разделе 3.6.

3.2 Уравнения высших спинов и локальность

В данном разделе будут кратко упомянуты основные аспекты уравнений теории высших спинов. За подробностями отсылаем читателя к [121]. В рамках тетрадного подхода динамика полей высших спинов описывается один-формой $\omega(y,\bar{y};K|x)$ и ноль-формой $C(y,\bar{y};K|x)$, которые являются производящими функциями для динамическихполей их производных от коммутирующих $\mathfrak{sp}(4)$ спиноров $Y_A=(y_\alpha,\bar{y}_{\dot\alpha})$, $\alpha,\dot\alpha=1,2$. Алгебра высших спинов в четрых измерениях является обертывающей алгеброй соотношений

$$[y_\alpha,y_\beta]_*=2i\epsilon_{\alpha\beta}\,,\qquad [\bar{y}_{\dot\alpha},\bar{y}_{\dot\beta}]_*=2i\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\,,\qquad [y_\alpha,\bar{y}_{\dot\beta}]_*=0\,. \tag{3.3}$$

Ассоциативное умножение в этой алгебре может быть удобно реализовано с помощью зведочного произведения

$$f(y,\bar{y})*g(y,\bar{y})=f(y,\bar{y})e^{i\epsilon^{\alpha\beta}\overleftarrow{\partial}_\alpha\overrightarrow{\partial}_\beta+i\epsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\overleftarrow{\partial}_{\dot\alpha}\overrightarrow{\partial}_{\dot\beta}}g(y,\bar{y})\,, \tag{3.4}$$

где $\epsilon_{\alpha\beta}$ и $\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}$ две $\mathfrak{sp}(2)$ инвариантные формы, а скобка Ли реализуется как коммутатор по отношению к этому ассоциативному произведению. Поля ω и C принадлежат разным представлениям алгебры высших спинов, отличающимся разной зависимостью от внешнего оператора Клейна $K=(k,\bar{k})$. В частности, поле спина s закодировано в полях ω_s и C_s, где ω_s порождает конечно-мерный модуль алгебры высших спинов в отличие от C_s, размерность которого является бесконечной. Другими словами, поле конкретного спина s содержится в полиномах поля ω и в неограниченных по степеням вспомогательных переменных компонентах поля C. Компоненты поля $C(y,\bar{y};K|x)$ устроены таким образом, что туда входит обобщенный на произвольный спин тензор Вейля и все его нетривиальные пространственно-временные производные.

Зависимость от внешних операторов Клейна K будет уточнена ниже, схематически динамические уравнения имеют вид (3.1), (3.2). Их правые части, назовем их взаимодейтствием полей высших спинов, диктуются алгеброй высших спинов (первые слагаемые в (3.1) и (3.2)) и ее деформациями, которые приводят к вершинам $\Upsilon(\omega, C \dots C)$ в секторе ноль-форм и $\Upsilon(\omega,\omega, C \dots C)$ в секторе один-форм. Форма этих вершин с точностью до переопределения полей в принципе может быть определена из условия совместности $\mathrm{d}_x^2 = 0$. На практике же оказывается, что подобного рода анализ становится сильно сложным с ростом порядка C [125; 126].

Какими бы не были эти вершины, они порождаются симметрией высших спинов, реализованной звездочным произведением. Нелокальность последнего является источником потенциальных нелокальностей теории. Действительно, звездочное произведение (3.4) – это нелокальная операция, так как она перемешивает различные производные умножаемых функций. Тем не менее, вершины, содержащие звездочное произведение, могут быть локальными. В качестве примера рассмотрим вершину $\omega * \omega$. Напомним, что для заданного спина s соответствующее ω_s – это полином (степени $2(s-1)$ [121]) по Y. Произведение $\omega_{s_1} * \omega_{s_2}$ также будет полиномом и как следствие будет локальным выражением. Другая кубическая вершина, входящая в (3.2) $[\omega, C]_*$, также будет локальной в силу тех же аргументов. Несмотря на то что $C_s(y,\bar{y}|x)$ не является полиномом, произведение $C_{s_1} * \omega_{s_2}$ содержит лишь конечное число производных, как следует из (3.4). Аналогичные рассуждения приводят к выводу, что простейшая кубическая вершина $\Upsilon(\omega,\omega, C)$ также является локальной. На этом список явно локальных вершин заканчивается. Те, что содержат более одного поля C, являются потенциально нелокальными. Это обстоятельство поднимает вопрос о классе функций, к которому должны принадлежать вершины теории высших спинов. На данном этапе не исключены две потенциально возможные ситуации: либо все вершины Υ являются спин-локальными для заданного набора спинов, входящих в вершину, либо некоторые из вершин содержат бесконечное число производных. Чтобы понять структуру вершин теории высших спинов, ниже будет продемонстрировано как они могут быть систематически получены из производящей системы.

3.2.1 Производящая система уравнений

Динамические уравнения теории высших спинов (3.1), (3.2) воспроизводятся порядок за порядком (количеству полей C в выражениях для вершин) из следующей производящей системы [5]

$$\mathrm{d}_x W + W * W = 0\,, \tag{3.5}$$
$$\mathrm{d}_x S + W * S + S * W = 0\,, \tag{3.6}$$
$$\mathrm{d}_x B + [W,B]_* = 0\,, \tag{3.7}$$
$$S * S = i(\theta^A\theta_A + \eta B * \gamma + \bar\eta B * \bar\gamma)\,, \tag{3.8}$$
$$[S,B]_* = 0\,. \tag{3.9}$$

Здесь $W(Z,Y;K|x)$ – это один-форма, которая в итоге кодирует один-форму высших спинов $\omega(Y;K|x)$ в уравнениях (3.1), (3.2) (см. [5]). Один-форма W зависит от вспомогательных переменных Y_A и дополнительных спинорных переменных $Z_A = (z_\alpha, \bar z_{\dot\alpha})$. Вместе с Y они расширяют спинорное пространство и обобщается звездочное произведение

$$(f * g)(Z,Y) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int dUdV f(Z+U,Y+U)g(Z-V,Y+V)e^{iU_AV^A}\,. \tag{3.10}$$

Для Z-независимых функций произведение (3.10) сводится к (3.4). С помощью (3.10) легко воспроизводятся следующие коммутационные соотношения

$$[Y_A,Y_B]_* = -[Z_A,Z_B]_* = 2i\epsilon_{AB}\,, \qquad [Y_A,Z_B]_* = 0\,. \tag{3.11}$$

Поля W, S и B также зависят от пары внешних операторов Клейна $K = (k,\bar k)$, которые подчиняются соотношениям

$$\{k,y_\alpha\} = \{k,z_\alpha\} = 0\,, \qquad [k,\bar y_{\dot\alpha}] = [k,\bar z_{\dot\alpha}] = 0\,, \qquad k^2 = 1\,. \tag{3.12}$$

Аналогично для $\bar k$. Другими словами, $(\bar k)k$ антикоммутируют со спинорными (анти)голоморфными переменными. Свойство $k^2 = \bar k^2 = 1$ означает, что зависимость полей от внешних операторов Клейна может быть максимум билинейной, например, $W(Z,Y;K|x) = \sum_{m,n=0,1} W^{m,n}(Z,Y|x)k^m\bar k^n$. Такая зависимость разбивает спектр возможных полей высших спинов на динамические и топологические [121]. Физический сектор выделен соотношением

$$W(Z,Y;K|x) = W(Z,Y;-K|x)\,. \tag{3.13}$$

$B(Z,Y;K|x)$ – это ноль-форма, ответственная за динамику поля C в уравнениях (3.1), (3.2). B зависит от операторов внешних Клейна k и $\bar{k}$ так, что динамическая часть подчиняется соотношению

$$B(Z,Y;K|x) = -B(Z,Y;-K|x)\,. \tag{3.14}$$

В систему уравнений (3.5)-(3.9) входит еще одно поле, $S(Z,Y;K|x)$. Это поле несет исключительно вспомогательный характер и выражается через поля C. В отличие от W, S – это один-форма в дополнительном направлении, порожденном антикоммутирующими дифференциалами $\theta_A = (\theta_\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}})$, которая при этом является ноль-формой относительно пространства-времени

$$S = \theta^\alpha S_\alpha + \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \bar{S}_{\dot{\alpha}}\,, \qquad \{\theta_A,\theta_B\} = \{\theta_A,\mathrm{d}_x\} = 0\,. \tag{3.15}$$

(Анти)коммутационные соотношения дифференциалов с внешним оператором Клейна согласно прескрипции (3.12) даются следующими соотношениями

$$\{\theta_\alpha,k\} = \{\bar{\theta}_{\dot{\alpha}},\bar{k}\} = 0\,, \qquad [\theta_\alpha,\bar{k}] = [\bar{\theta}_{\dot{\alpha}},k] = 0\,. \tag{3.16}$$

В заключение в динамическом секторе теории зависимость поля S от внешних опереторов Клейна совпадает с (3.13)

$$S(Z,Y;K|x) = S(Z,Y;-K|x)\,. \tag{3.17}$$

Уравнение (3.8) содержит центральные элементы

$$\gamma = e^{iz_\alpha y^\alpha} k\theta^\alpha\theta_\alpha\,, \qquad \bar{\gamma} = e^{i\bar{z}_{\dot{\alpha}}\bar{y}^{\dot{\alpha}}} \bar{k}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}, \tag{3.18}$$

которые коммутируют с любым элементом вида $f(Z,Y;K;\theta;dx)$. Это может быть проверено с испольванием (3.10)

$$e^{iz_\alpha y^\alpha} * f(z,\bar{z},y,\bar{y}) = f(-z,\bar{z},-y,\bar{y}) * e^{iz_\alpha y^\alpha}\,, \tag{3.19}$$

аналогично для $e^{i\bar{z}_{\dot\alpha}\bar{y}^{\dot\alpha}}$. Также понадобится тривиальное свойство $\theta^3 = \bar{\theta}^3 = 0$, которое выполнено в силу двухкомпонентности индексов. Наконец, η и $\bar{\eta}$ единственные свободные фазовые параметры ($\eta\bar{\eta} = 1$) уравнений (3.5)-(3.9). В общем случае они нарушают четность взаимодействия высших спинов, если только не выполнено $\eta = 1$ или $\eta = i$. В этих случаях теории называют A– и B–моделями соответственно [111].

3.2.2 Пертурбативное разложение: гомотопический трюк и переопределение полей

Чтобы увидеть, как система (3.5)-(3.9) воспроизводит (3.1), (3.2) начнем пертурбативное разложение. Вакуум теории высших спинов можно выбрать в виде

$$B_0 = 0\,, \tag{3.20}$$
$$S_0 = \theta^A Z_A\,, \tag{3.21}$$
$$W_0 = \Omega = \frac{i}{4}(\omega_{\alpha\beta}y^\alpha y^\beta + \bar{\omega}_{\dot\alpha\dot\beta}\bar{y}^{\dot\alpha}\bar{y}^{\dot\beta} + 2e_{\alpha\dot\alpha}y^\alpha\bar{y}^{\dot\alpha})\,. \tag{3.22}$$

Легко заметить, что (3.5)-(3.9) выполнены, если $\omega_{\alpha\beta}$, $\bar{\omega}_{\dot\alpha\dot\beta}$ и $e_{\alpha\dot\alpha}$ являются AdS_4 связностью, которая удовлетворяет соответствующему структурному уравнению Картана. Ненулевой вакуум поля S создает шаблон для восстановления Z-зависимости полей. Например, в первом порядке имеем

$$[S_0, B_1]_* + [S_1, B_0]_* = 0\,. \tag{3.23}$$

Используя (3.10), мы получим

$$[S_0, f(Z,Y;K)]_* = -2i\theta^A \frac{\partial}{\partial Z^A} f = -2i\mathrm{d}_Z f\,, \tag{3.24}$$

где d_Z – дифференциал де Рама по переменным Z, откуда следует, что B_1 не зависит от Z

$$B_1 = C(Y;K)\,. \tag{3.25}$$

Это и есть та ноль-форма C, которая появляется в уравнениях (3.1), (3.2). Подчеркнем, что она может быть идентифицирована с d_Z когомологической частью поля B.

S_1 должно быть выражено в терминах поля C. Чтобы найти это выражение, рассмотрим уравнение (3.8), из которого получаем

$$-2i\mathrm{d}_Z S_1 = i\eta C * \gamma + i\bar{\eta} C * \bar{\gamma}\,. \tag{3.26}$$

Это типичное дифференциальное уравнение, которое определяет Z-зависимость полей высших спинов. Слагаемые в правой части приходят из уже известных вкладов младших порядков. Произвол в решении таких уравнений состоит в калибровочном преобразовании и переопределении полей.

Естественный способ решить уравнение

$$\mathrm{d}_Z f(Z;Y;\theta) = J(Z;Y;\theta) \tag{3.27}$$

с $\mathrm{d}_Z J = 0$ заключается в так называемом гомотопическом трюке. Простейший выбор гомотопического оператора для внешнего дифференциала d_Z – это

$$\partial = (Z^A + Q^A)\frac{\partial}{\partial\theta^A} \tag{3.28}$$

с условием

$$\frac{\partial Q^B}{\partial Z^A} = 0\,. \tag{3.29}$$

Очевидно, что выполнено свойство $\partial^2 = 0$ (Мы также считаем, что Q не зависит от θ). Заметим, что Q^A может быть оператором. Имеем

$$N := \mathrm{d}_Z\partial + \partial\mathrm{d}_Z = \theta^A\frac{\partial}{\partial\theta^A} + (Z^A + Q^A)\frac{\partial}{\partial Z^A}\,. \tag{3.30}$$

Вводя почти обратный оператор (ядро оператора N ненулевое)

$$N^* g\,(Z;Y;\theta) := \int\limits_0^1 dt\frac{1}{t}g\,(tZ - (1-t)Q;Y;t\theta)\,, \qquad g(-Q;Y;0) = 0 \tag{3.31}$$

и резольвенту

$$\triangle_Q := \partial N^* \,, \qquad \triangle_Q\, g(Z;Y;\theta) = (Z^A + Q^A)\frac{\partial}{\partial \theta^A}\int\limits_0^1 dt \frac{1}{t} g\left(tZ - (1-t)Q;Y;t\theta\right)\,, \tag{3.32}$$

мы получаем разложение единицы

$$\{\mathrm{d}_Z, \triangle_Q\} = 1 - h_Q\,, \tag{3.33}$$

где h_Q – это проектор на когомологии оператора d_Z.

$$h_Q f(Z,\theta) = f(-Q,0)\,. \tag{3.34}$$

Разложение единицы позволяет выписать частное решение (3.27) в форме

$$f_Q(J) = \triangle_Q\, J \tag{3.35}$$

при условии, что $h_Q J = 0$. Последнее условие всегда выполнено, так как выражение $J(Z;Y;\theta)$ в (3.27) как минимум линейно по θ^A. Общее решение для (3.27), следовательно, имеет вид

$$f(Z;Y;\theta) = f_Q(J)(Z;Y;\theta) + h(Y) + \mathrm{d}_Z \epsilon(Z;Y;\theta)\,, \tag{3.36}$$

где $h(Y)$ – это d_Z-когомология, а последнее слагаемое является d_Z-точным. Очевидно, что решения (3.35) с различными гомотопическими параметрами Q_1 и Q_2 могут отличаться на решение однородного уравнения:

$$f_{Q_1}(J) - f_{Q_2}(J) = h_{1,2}(Y) + \mathrm{d}_Z \epsilon_{1,2}(Z;Y;\theta) \tag{3.37}$$

с некоторыми $h_{1,2}(Y)$ и $\epsilon_{1,2}(Z;Y;\theta)$. (Явные выражения для $h_{1,2}(Y)$ и $\epsilon_{1,2}(Z;Y;\theta)$ следуют из уравнения (3.56).) В практических вычислениях добавление когомологических слагаемых $h_{1,2}(Y)$, которые зависят от динамических полей теории, означает (нелинейное) переопределение полей. Это происходит потому, что поля $C(Y;K)$ и $\omega(Y;K)$ являются d_Z–когомологиями. Следовательно, выбор гомотопии в (3.35) влечет за собой выбор соответствующих полевых переменных. Слагаемое $\mathrm{d}_Z \epsilon_{1,2}(Z;Y;\theta)$ отвечает за выбор калибровки.

Выбор $Q=0$ соответсвует стандартному гомотопическому оператору, использованному в [5]. Как будет показано ниже, гомотопические операторы с ненулевым сдвигом Q играют важную роль в старших порядках.

Двигаясь дальше, разрешаем уравнение (3.26) стандартной гомотопией и переходим к (3.6), которое определяет Z-зависимость поля W_1

$$-2i\mathrm{d}_Z W_1 + D_\Omega S_1 = 0\,,\qquad W_1 = \omega(Y;K|x) + \frac{1}{2i}\,\triangle_0\,D_\Omega S_1\,,\tag{3.38}$$

где $D_\Omega S_1 := \mathrm{d}_x S_1 + [\Omega, S_1]_*$ ковариантная производная с плоской AdS_4 связностью (3.22). Здесь $\omega(Y;K|x)$ – это один-форма, которая является потенциалом полей выших спинов и появляется в уравнениях (3.1), (3.2). Чтобы в первом порядке найти (3.2), нужно подставить B_1 в (3.7)

$$\mathrm{d}_x C = -[\Omega{,}C]_*\,.\tag{3.39}$$

Первый порядок (3.1) получается из подстановки (3.38) в (3.5)

$$\mathrm{d}_x\omega = -\{\Omega,\omega\} + \frac{i}{4}D_\Omega\,\triangle_0\,D_\Omega\,\triangle_0\,(\eta C*\gamma + \bar\eta C*\bar\gamma)\,.\tag{3.40}$$

Таким образом находится линейный вклад в $\Upsilon(\omega{,}\omega, C)$, который при $\omega=\Omega$ имеет форму [121]

$$\Upsilon(\Omega{,}\Omega, C) = \frac{i}{4}D_\Omega\,\triangle_0\,D_\Omega\,\triangle_0\,(\eta C*\gamma + \bar\eta C*\bar\gamma) = \tag{3.41}$$
$$= \frac{i}{4}\Big(\eta\bar H^{\dot\alpha\dot\alpha}\partial^2_{\dot\alpha}\bar C(0,\bar y;k,\bar k|x)\bar k + \bar\eta H^{\alpha\alpha}\partial^2_{\alpha}C(y,0;k,\bar k|x)k\Big)\,.$$

Уравнения (3.39) и (3.40) являются тетрадной формулировкой уравнений Фронсдала в AdS_4 [34],[35]. Взаимодействия старших порядков могут быть получены из производящей системы аналогичным способом. Получающиеся таким образом вершины в (3.1), (3.2) будут явно ковариантными относительно преобразований высших спинов. Систематический анализ ряда теории возмущений, основанный на стандартной гомотопии, был развит в [127] (см. также [128]).

Уравнения (3.5)-(3.9) содержат константы связи η и $\bar\eta$. Разрешая производящую систему, мы получим поправки к свободным уравнениям в уточненном виде относительно (3.1),(3.2)

$$\mathrm{d}_x\omega + \omega * \omega = \Upsilon^{\eta}(\omega,\omega,C) + \Upsilon^{\bar\eta}(\omega,\omega,C) + \\ + \Upsilon^{\eta\eta}(\omega,\omega,C,C) + \Upsilon^{\bar\eta\bar\eta}(\omega,\omega,C,C) + \Upsilon^{\eta\bar\eta}(\omega,\omega,C,C) + \ldots\,, \quad (3.42)$$

$$\mathrm{d}_x C + [\omega,C]_* = \Upsilon^{\eta}(\omega,C,C) + \Upsilon^{\bar\eta}(\omega,C,C) + \\ + \Upsilon^{\eta\eta}(\omega,C,C,C) + \Upsilon^{\bar\eta\bar\eta}(\omega,C,C,C) + \Upsilon^{\eta\bar\eta}(\omega,C,C,C) + \ldots \quad (3.43)$$

Вершины взаимодействия, появляющиеся в правых частях (3.42), (3.43), можно разделить на три типа: голоморфные, антиголоморфные и вершины смешанного типа. В выражениях для голоморфных вершин свертки по точечным (антиголоморфным) индексам производящих функций для потенциалов и напряженностей полей высших спинов устроены тривиально, т.е. реализованы звездочным произведением по переменным $\bar y$

$$F(\bar y)\bar{*}G(\bar y) = F(\bar y)e^{i\epsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\overleftarrow{\partial}_{\dot\alpha}\overrightarrow{\partial}_{\dot\beta}}G(\bar y)\,. \quad (3.44)$$

Аналогичным образом выглядят антиголоморфные вершины, для которых через звездочное произведение

$$F(y)*G(y) = F(y)e^{i\epsilon^{\alpha\beta}\overleftarrow{\partial}_{\alpha}\overrightarrow{\partial}_{\beta}}G(y)\,. \quad (3.45)$$

устроены свертки по неточечным (голоморфным) индексам для потенциалов и напряженностей. Несмотря на то, что параметры η и $\bar\eta$ комплексно сопряжены друг другу, что необходимо для совместности уравнений (3.5)-(3.9), при разрешении уравнений производящей системы удобно рассматривать параметры η и $\bar\eta$ как независимые. Таким образом, голоморфными и антиголоморфными будут вершины, пропорциональные только какой-то степени η или $\bar\eta$ соответственно. В связи с этим младшие вершины смешанного сектора в литературе [56] иногда называют вершинами, пропорциональными $\eta\bar\eta$.

Оказывается, что применение стандартной гомотопии для получения вершины $\Upsilon(\Omega, C,C)$ приводит к бесконечному хвосту производных, что несовместимо с требованием локальности. В статье [14] впервые было замечено, что граничные корреляционные функции, которые соответствуют такой вершине, расходятся. Позже в работе [59] было показано, что существует переопределение полей, которое уважает (анти)голоморфную факторизацию и в то же время делает эту вершину локальной и совместной с голографическим пределом [82; 123].

Рассмотрение более широкого класса гомотопических операторов для пертурбативного разложения дает надежду на построение спин-локальных или минимально-нелокальных взаимодействий высших спинов. Далее проводится разработка некоторых технических элементов предлагаемой программы.

3.3 Операторы гомотопии и звездочное произведение

3.3.1 Сдвиговые гомотопии

В этом разделе анализируются свойства сдвиговых резольвент $\triangle_Q$ (3.32). Начнем со свойств, которые не чувствительны к числу значений индексов переменных Z^A,Y^A, θ^A.

Общие соотношения

Операторы $\triangle_P$ и $\triangle_Q$ антикоммутируют

$$\triangle_P\triangle_Q = -\triangle_Q\triangle_P \ . \tag{3.46}$$

Действительно, в силу (3.32) верно

$$\triangle_P\triangle_Q\, f\,(Z;Y;\theta) = \int_0^1 \mathrm{d}\tau \int_0^1 \mathrm{d}t\, t(Z^B+P^B)(\tau(Z^A+P^A)-P^A+Q^A)\times \tag{3.47}$$
$$f_{AB}\,(t\tau Z - t(1-\tau)P-(1-t)Q;Y;\tau t\theta)\ ,$$

где
$$f_{AB}\left(Z;Y;\theta\right) := \frac{\partial^2}{\partial\theta^A\partial\theta^B} f\left(Z;Y;\theta\right) . \tag{3.48}$$
Используя
$$\left(Z^B+P^B\right)\left(\tau\left(Z^A+P^A\right)-P^A+Q^A\right) f_{AB} = \left(Z^B+P^B\right)\left(Z^A+Q^A\right) f_{AB} \tag{3.49}$$
так как $f_{AB} = -f_{BA}$ и выполняя замену переменных интегрирования
$$\tau_3 = \tau t\,, \qquad \tau_2 = 1-t\,, \qquad \tau_1 = 1-\tau_2-\tau_3\,,$$
перепишем выражение (3.47) в виде
$$\triangle_P\triangle_Q\, f\left(Z;Y;\theta\right) = \int_{[0,1]^3} \mathrm{d}^3\tau\, \delta(1-\tau_1-\tau_2-\tau_3)(Z^B+P^B)(Z^A+Q^A) f_{AB}\left(\tau_3 Z - \tau_1 P - \tau_2 Q; Y; \tau\right. \tag{3.50}$$
что делает свойство (3.46) очевидным.

Формула (3.50) естественным образом обобщается на последовательное применение операторов
$$\triangle_{Q_n}\,\ldots\,\triangle_{Q_1}\, f\left(Z;Y;\theta\right) = \int_{[0,1]^{n+1}} \mathrm{d}^{n+1}\tau\,\delta\Big(1-\sum_{j=1}^{n+1}\tau_j\Big)\prod_{j=1}^{n}\Big(Z^{A_j}+Q_j^{A_j}\Big)\,\times \tag{3.51}$$
$$\times f_{A_n\ldots A_1}\left(\tau_{n+1}Z-\sum_{j=1}^{n}\tau_j Q_j; Y; \tau_{n+1}\theta\right)\,,$$
где
$$f_{A_n\ldots A_1} = \frac{\partial}{\partial\theta^{A_n}}\ldots\frac{\partial}{\partial\theta^{A_1}} f\left(Z;Y;\theta\right) .$$
Также отметим, что в силу (3.34) справедливо выражение
$$h_P\,\triangle_{Q_n}\,\ldots\,\triangle_{Q_1}\, f\left(Z;Y;\theta\right) = \int_{[0,1]^{n+1}} \mathrm{d}^{n+1}\tau\,\delta\Big(1-\sum_{j=1}^{n+1}\tau_j\Big)\prod_{j=1}^{n}\Big(-P^{A_j}+Q_j^{A_j}\Big)\,\times$$
$$\times\, f_{A_n\ldots A_1}\left(-\tau_{n+1}P-\sum_{j=1}^{n}\tau_j Q_j; Y; 0\right)\,, \tag{3.52}$$

которое означает, что выражение $h_P \vartriangle_{Q_n} \dots \vartriangle_{Q_1}$ также является полностью антисимметричным по индексам P, Q_j. В частности, верно

$$h_P \vartriangle_Q = -h_Q \vartriangle_P , \tag{3.53}$$

и, как следствие,

$$h_P \vartriangle_P = 0 . \tag{3.54}$$

Другие полезные соотношения могут быть записаны в виде

$$h_P h_Q = h_Q , \qquad \vartriangle_P h_Q = 0 \tag{3.55}$$

и также соотношение, которое является следствием разложения единицы (3.33)

$$\vartriangle_B - \vartriangle_A = [\mathrm{d}_Z, \vartriangle_A \vartriangle_B] + h_A \vartriangle_B \ . \tag{3.56}$$

В общем случае при решении (3.27) нет необходимости требовать использование конкретного сдвига Q в резольвенте $\vartriangle_Q$. Соответствующим образом нормированная линейная комбинация также дает решение (3.27). Можно взять интеграл по сдвиговым параметрам

$$\vartriangle(\rho) := \int dQ \rho(Q) \vartriangle_Q \tag{3.57}$$

с нормировочным условием

$$\int dQ \rho(Q) = 1 . \tag{3.58}$$

Двухкомпонентные соотношения

В этом подразделе значения индексов у переменных Z_A,Y_A,θ^A ограничены до двух

$$\left(Z_A,Y_A,\theta^A\right) \longrightarrow (z_\alpha,y_\alpha,\theta^\alpha) \ . \tag{3.59}$$

Соответствующие сдвиги будут обозначаться строчными буквами латинского алфавита. В этом случае формулы (3.51), (3.52) дают

$$\begin{aligned} &\triangle_b\triangle_a\, f(z,y)\theta^\beta\theta_\beta = \\ &= 2\int_{[0,1]^3} d^3\tau\,\delta(1-\tau_1-\tau_2-\tau_3)(z+b)_\gamma(z+a)^\gamma f(\tau_1 z-\tau_3 b-\tau_2 a,y)\,, \end{aligned} \tag{3.60}$$

$$h_c\,\triangle_b\triangle_a\, f(z,y)\theta^\beta\theta_\beta = 2\int_{[0,1]^3} d^3\tau\,\delta(1-\tau_1-\tau_2-\tau_3)(b-c)_\gamma(a-c)^\gamma f(-\tau_1 c-\tau_3 b-\tau_2 a,y)\,. \tag{3.61}$$

Из (3.61) в частности следует что

$$h_{(\mu+1)q_2-\mu q_1}\,\triangle_{q_2}\triangle_{q_1} = 0\,, \qquad \forall\mu\in\mathbb{C}\,. \tag{3.62}$$

Применяя (3.60), (3.61) к γ, получим

$$\triangle_b\triangle_a\,\gamma = 2\int_{[0,1]^3} d^3\tau\,\delta(1-\tau_1-\tau_2-\tau_3)(z+b)_\gamma(z+a)^\gamma e^{i(\tau_1 z-\tau_2 a-\tau_3 b)_\alpha y^\alpha}k\,, \tag{3.63}$$

$$h_c\,\triangle_b\triangle_a\,\gamma = 2\int_{[0,1]^3} d^3\tau\,\delta(1-\tau_1-\tau_2-\tau_3)(b-c)_\gamma(a-c)^\gamma e^{-i(\tau_1 c+\tau_2 a+\tau_3 b)_\alpha y^\alpha}k\,. \tag{3.64}$$

Заметим, что в соответствии с (3.46) префактор в (3.63) антисимметричен по a,b, в то время как экспонента полностью симметрична. Аналогично, правая часть (3.64) полностью антисимметрична по a,b,c. Также из (3.64) следует, что

$$h_{a+\alpha y}\,\triangle_{b+\alpha y}\triangle_{c+\alpha y}\,\gamma = h_a\,\triangle_b\triangle_c\,\gamma\,, \qquad \forall\alpha\in\mathbb{C}\,. \tag{3.65}$$

Отметим, что любой гомотопический оператор, содержащий сдвиг на y, никак не влияет на вид экспоненты после применения к γ. Действительно, из (3.18) и (3.32) следует

$$\triangle_{q+\alpha y}\,\gamma = 2(z^\beta+q^\beta+\alpha y^\beta)\theta_\beta\int_0^1 dt t e^{i(tz_\alpha-(1-t)q_\alpha)y^\alpha}k, \tag{3.66}$$

откуда видно, что параметр α пропадает из экспоненты, но остается в префакторе. Данное свойство означает, что сдвиги по y в операторах гомотопии не влияют на локальнось в порядке, где они впервые применены. Отметим, тем не менее, что локальное переопределение полей в конкретном порядке по

C может повлиять на вершины высших порядков в смысле их потенциальной (не)локальности.

Наконец, нам нужны соотношения, которые бы показывали, что вершины (3.1) и (3.2), полученные из производящей системы (3.5)-(3.9), являются явно z–независимыми. Этот факт является следствием совместности уравнений (3.5)-(3.9). Механизм, который отвечает за исчезнование z-зависимости, скрыт в разложении единицы (3.33), которое позволяет показать, что некоторые комбинации гомотопических операторов являются явно z–независимыми. В частности, важным соотношением такого типа является

$$(\triangle_d - \triangle_c)(\triangle_a - \triangle_b)\gamma = (h_d - h_c)\ \triangle_a \triangle_b\ \gamma\,, \tag{3.67}$$

которое справедливо для любых гомотопических параметров a,b,c,d. Оно может быть доказано следующим образом. Сначала используем (3.56) наряду с $\mathrm{d}_z\gamma = 0$, $h_a\gamma = 0$, $h_a\ \triangle_b\ \gamma = 0$, получаем $(\triangle_a - \triangle_b)\gamma = \mathrm{d}_z\ \triangle_b\triangle_a\ \gamma$. Далее переносим d_z через $(\triangle_d - \triangle_c)$ с помощью разложения единицы (3.33), используем тот факт, что $\triangle_a\triangle_b\triangle_c\ \gamma = 0\ \forall a,b,c$, и получаем (3.67).

Уравнение (3.67) в частности означает, что левая часть является z-независимой. Отметим также, что разложение единицы (3.33) включает в себя интегрирование по частям, что делает прямое доказательство (3.67) весьма нетривиальным. В качестве простого следствия (3.67)при $d = a$ получим

$$(\triangle_c\triangle_b - \triangle_c\triangle_a + \triangle_b\triangle_a)\gamma = h_c\ \triangle_b\triangle_a\ \gamma\,. \tag{3.68}$$

Также применяя h_d к обеим частям и используя (3.55), получим

$$h_d\ \triangle_c\triangle_b\ \gamma - h_d\ \triangle_c\triangle_a\ \gamma + h_d\ \triangle_b\triangle_a\ \gamma = h_c\ \triangle_b\triangle_a\ \gamma\,. \tag{3.69}$$

Выражение (3.69) является проявлением так называемого *тождества треугольника* из [129], которое играло важную роль на ранних этапах анализа нелинейных поправок во взаимодействии высших спинов [125; 126; 130]. Даный анализ выполнялся с помощью так называемой *функции треугольника*

$$\Delta(a_1,a_2,a_3) := \int_{[0,1]^3} d^3\tau\, \delta(1-\tau_1-\tau_2-\tau_3)(a_{1\alpha}a_2^\alpha + a_{2\alpha}a_3^\alpha - a_{1\alpha}a_3^\alpha)\, \delta^2\Big(\sum_{i=1}^{3}\tau_i a_i\Big) \tag{3.70}$$

которая подчиняется равенству треугольника

$$\Delta(a,b,c) + \Delta(c,d,a) = \Delta(a,b,d) + \Delta(b,c,d)\,. \tag{3.71}$$

При сравнении (3.70) с (3.64) видно, что $h_c\ \triangle_b\triangle_a\ \gamma$ – это Фурье-преобразование от $\Delta(a,b,c)$

$$(h_c\ \triangle_b\triangle_a\ \gamma)(y)\ = 2\int d^2u\Delta(c+u,b+u,a+u)e^{iu_\alpha y^\alpha}\,k\,, \tag{3.72}$$

где очевидно, что (3.69) – это следствие (3.71). Отметим также, что тождество (3.65) сразу же следует из (3.72) после замены переменных интегрирования $u_\beta \to u_\beta + \alpha y_\beta$.

3.3.2 Соотношения звездочной перестановочности

Одна из технических трудностей в теории возмущений для взаимодействия полей высших спинов, связанная со стандартной гомотопией, – это постоянное взаимодействие с несвязанными на первый взгляд операциями: звездочного произведения и гомотопического интегрирования. Это взаимодействие скрывает алгебраические структуры и мешает построению функционального класса, который бы уважал обе операции. Замечательно, что сдвиговые гомотопии подчиняются соотношениям, которые связывают эти две операции, как будет показано ниже. Эти свойства не основаны на конкретной размерности переменных z,y,θ и носят общий характер в этом смысле. По этой причине мы не будем рассматривать правый сектор с точечными спинорами, так как его рассмотрение полностью аналогично.

Операторы сдвиговых гомотопий подчиняются замечательному соотношению *звездочной перестановочности* с z-независимым элементами звездочной алгебры. Рассмотрим действие гомотопического оператора на звездочное произведение $C(y;k)*\phi(z,y;k;\theta)$. С помощью (3.10) и (3.32) можно проверить, что выполнено

$$\triangle_{q+\alpha y}\,(C(y;k)*\phi(z,y;k;\theta)) = C(y;k)*\,\triangle_{q+(1-\alpha)p+\alpha y}\,\phi(z,y;k;\theta)\,, \tag{3.73}$$

где q – это y-независимый параметр, а α – произвольное число. Также вводим обозначение

$$p_\alpha C(y;k) \equiv C(y;k)p_\alpha := -i\frac{\partial}{\partial y^\alpha}(C_1(y) + C_2(y)k)\,, \tag{3.74}$$

где $C(y;k) = C_1(y) + C_2(y)k$. Отметим, что p действует только на аргумент z-независимой функции, которой в нашем случае является поле C. Заметим, что не имеет значения, с какой стороны расположен оператор p. Z-независимость поля C существенна для того, чтобы было выполнено (3.73). Отметим, что несмотря на то, что поле $C = C(y;k)$ зависит от k, оператор p_α определяется таким образом, чтобы было выполнено $[p_\alpha,k] = 0$, и следовательно он не был чувствителен к такого рода зависимости. Согласно данному определению его действие на C может записано как слева, так и справа (3.74).

Несмотря на то, что прямая проверка (3.73) с использованием (3.10) и (3.32) не вызывает трудностей, при выполнении этой проверки нужно обратить внимание на определенные сокращения в вычислении звездочного произведения, которые приходят одновременно из экспоненты и предэкспоненты. Эти сокращения, на первый взгляд, могут показаться совпадением, но тем не менее тождество (3.73) не так уж и удивительно, так как может быть рассмотрено с другой точки зрения. Предположим, что нужно решить уравнение

$$\mathrm{d}_z f = C(y;k) * \phi(z,y;k;\theta) \tag{3.75}$$

с d_Z-замкнутым $\phi(z,y;k;\theta)$. С одной стороны, можно применить (3.32) с некоторым параметром a, который дает $f = \triangle_a\ (C(y;k) * \phi(z,y;k;\theta))$. С другой стороны, так как $C(y;k)$ является z-независимой функцией, она коммутирует с d_z, и можно решить уравнение (3.75) в форме $f = C(y;k) * \triangle_b\ \phi(z,y;k;\theta)$ с некоторым другим параметром b. Таким образом данное рассуждение предполагает, что параметры a и b должны быть связаны. Явное соотношение дается формулой (3.73). Приведенное рассуждение показывает важность того, что $C(y;k)$ должно быть z-независимым для выполнения (3.73).

Аналогично можно показать, что

$$\begin{aligned} \triangle_{q+\alpha y}\ (\phi(z,y;\theta) * k^\nu * C(y;k)) &= \triangle_{q+(-1)^\nu(1+\alpha)p+\alpha y}\ \big(\phi(z,y;\theta) * k^\nu\big) * C(y;k) \\ &= \triangle_{q+(-1)^\nu(1+\alpha)p+\alpha y}\ \big(\phi(z,y;\theta)\big) * k^\nu * C(y;k)\,. \end{aligned} \tag{3.76}$$

Заметим, что дополнительный знаковый фактор $(-1)^\nu$ возникает из-за определения (3.74) оператора p как производной по полному аргументу $C(y;k)$.

Так как любая пертурбативная поправка зависит от звездочного произведения Z-независимых полей $\omega(Y;K)$ и $C(Y;K)$, любой пертурбативный результат может быть сведен к форме, когда операторы гомотопий действуют только на центральные два-формы γ и $\bar{\gamma}$ (3.18), с использованием соотношений звездочной перестановочности. Так как γ является центральным элементом, можно вычислить произведение $C* \triangle_q \gamma \to \triangle_{q'} \gamma * C$ с использованием, например (3.73). Заметим, что γ линейно по k (аналогично для $\bar{\gamma}$), это приводит к следующему полезному правилу

$$\triangle_{\tilde{q}} \gamma * C(y;k) = C(y;k) * \triangle_{\tilde{q}+2p} \gamma \,, \qquad \tilde{q} = q + \alpha y \,. \tag{3.77}$$

Формула (3.77) будет постоянно использоваться в дальнейшем для анализа вершин высших спинов.

Аналогично, путем прямого вычисления можно убедиться в справедливости следующих полезных соотношений с y-независимым q:

$$h_{q+\alpha y}(C(y;k) * \phi(z,y;k;\theta)) = C(y;k) * h_{q+(1-\alpha)p+\alpha y}\phi(z,y;k;\theta) \,, \tag{3.78}$$

$$h_{q+\alpha y}(\phi(z,y;\theta) * k^\nu * C(y;k)) = h_{q+(-1)^\nu(1+\alpha)p+\alpha y}\big(\phi(z,y;\theta) * k^\nu\big) * C(y;k) \,. \tag{3.79}$$

Следует отметить, что приведенные здесь результаты существенно опираются на конкретную форму звездочного произведения (3.10). Важным следствием проделанного анализа является класс гомотопических операторов с параметрами Q (3.28), линейных по производным P_A Z-независимых полей $C(Y;K)$ и $\omega(Y;K)$ и/или по Y-переменным, являющимися очевидно Z-независимымыи (3.29). Данный класс является закмнутым относительно звездочного умножения в смысле соотношений звездочной перестановочности. Это класс *линейных сдвиговых гомотопий*, который оказывается наиболее подходящим для пертурбативного анализа уравнений теории высших спинов.

3.4 Вершины младших порядков

Переход от одного гомотопического оператора к другому меняет не только выбор калибровки в Z-пространстве (*т.е.*, d_Z-точные слагаемые), но также и когомологического представителя, как видно из формулы (3.37). Последнее отражает различный выбор полевых переменных. Следовательно, правильный выбор гомотопических операторов может прямо привести к локальному результату без необходимости вводить дополнительные переопределения полей. Ниже будет продемонстрировано, как это работает на практике.

С использованием обобщенных резольвент (3.32) можно отойти от подхода стандартной гомотопии и пересмотреть пертурбативную схему, применяемую к уравнениям (3.5)-(3.9). Напомним, что в рамках подхода стандартной гомотопии в качестве вакуумного решения (3.20)-(3.22) рассматривается пространство AdS. Тождества (3.73) и (3.76) позволяют развить теорию возмущений, которая вопроизводит вершины (3.1), (3.2) как разложение по полям C в духе [125], но уже для произвольной один-формы высших спинов $\omega(Y;K)$.

3.4.1 Вершины $\Upsilon(\omega,\omega,C)$

В первом порядке над AdS-фоном известно, что подход стандартной гомотопии воспроизводит канонические результаты (3.41), которые **связывают** тензоры Вейля полей высших спинов с производными потенциалов высших спинов. С помощью формализма сдвиговых гомотопий пертурбативный анализ можно проделать для произвольной связности ω и тем самым воспроизвести вершины $\Upsilon(\omega,\omega,C)$. Начнем с уравнения (3.26), из которого получим

$$S_1 = -\frac{\eta}{2} \triangle_0 \, (C * \gamma) + c.c. = -\frac{\eta}{2} C * \triangle_p \, \gamma + c.c. \tag{3.80}$$

Здесь было использовано соотношение (3.73). Напомним, что индекс p означает дифференцирование (3.74). Из (3.6) получим

$$W_1 = \frac{1}{2i} \triangle_0 \left(\mathrm{d}_x S_1 + \omega * S_1 + S_1 * \omega \right) + c.c. \,. \tag{3.81}$$

Подставляя сюда (3.80) и используя

$$\mathrm{d}_x C + [\omega , C]_* = 0 \tag{3.82}$$

и (3.76) получим

$$W_1 = -\frac{\eta}{4i} \left(C * \omega * \, \triangle_{p+t} \triangle_{p+2t} \, \gamma - \omega * C * \, \triangle_{p+t} \triangle_p \, \gamma \right) + c.c. \,, \tag{3.83}$$

где t_α действует на ω

$$t_\alpha \omega(Y;K) := -i \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \omega(Y;K) \,. \tag{3.84}$$

Чтобы получить $\Upsilon(\omega,\omega,C)$, остается подставить (3.83) в (3.5). После некоторых упрощений с помощью тождеств (3.68) и (3.54) уравнение (3.5) приобретает вид

$$\mathrm{d}_x \omega + \omega * \omega = \frac{\eta}{4i} (\omega * \omega * C * X_{\omega\omega C} + C * \omega * \omega * X_{C\omega\omega} + \omega * C * \omega * X_{\omega C \omega}) + c.c. \,, \tag{3.85}$$

где

$$X_{\omega\omega C} = h_{p+t_1+t_2} \, \triangle_p \triangle_{p+t_2} \, \gamma \,, \tag{3.86}$$

$$X_{C\omega\omega} = h_{p+t_1+t_2} \, \triangle_{p+t_1+2t_2} \triangle_{p+2t_1+2t_2} \, \gamma \,, \tag{3.87}$$

$$X_{\omega C\omega} = -h_{p+t_1+t_2} \, \triangle_{p+t_1+2t_2} \triangle_{p+t_2} \, \gamma - h_{p+t_1+2t_2} \, \triangle_{p+2t_2} \triangle_{p+t_2} \, \gamma \,. \tag{3.88}$$

Выполняем интегрирование по переменным звездочного произведения в правой части (3.85) и с использованием (3.64) находим

$$\Upsilon(\omega,\omega,C) = \Upsilon_{\omega\omega C} + \Upsilon_{C\omega\omega} + \Upsilon_{\omega C\omega} \,, \tag{3.89}$$

где

$$\Upsilon_{\omega\omega C}=\frac{\eta}{2i}\int_{[0,1]^3}d^3\tau\delta(1-\tau_1-\tau_2-\tau_3)e^{i(1-\tau_3)\partial_1^\alpha\partial_{2\alpha}} \tag{3.90}$$
$$\partial^\alpha\omega((1-\tau_1)y,\bar{y})\,\bar{*}\,\partial_\alpha\omega(\tau_2 y,\bar{y})\,\bar{*}\,C(-i\tau_1\partial_1-i(1-\tau_2)\partial_2,\bar{y};K)k\,,$$

$$\Upsilon_{C\omega\omega}=\frac{\eta}{2i}\int_{[0,1]^3}d^3\tau\delta(1-\tau_1-\tau_2-\tau_3)e^{i(1-\tau_3)\partial_1^\alpha\partial_{2\alpha}} \tag{3.91}$$
$$C(i\tau_1\partial_2+i(1-\tau_2)\partial_1,\bar{y};K)\,\bar{*}\,\partial^\alpha\omega(\tau_2 y,\bar{y})\,\bar{*}\,\partial_\alpha\omega(-(1-\tau_1)y,\bar{y})k\,,$$

$$\Upsilon_{\omega C\omega}=\frac{\eta}{2i}\int_{[0,1]^3}d^3\tau\delta(1-\tau_1-\tau_2-\tau_3)e^{i(1-\tau_3)\partial_1^\alpha\partial_{2\alpha}} \tag{3.92}$$
$$\partial^\alpha\omega(\tau_1 y,\bar{y})\,\bar{*}\,C(i(1-\tau_2)\partial_2-i(1-\tau_1)\partial_1,\bar{y};K)\,\bar{*}\,\partial_\alpha\omega(-(1-\tau_2)y,\bar{y})k+$$
$$+\frac{\eta}{2i}\int_{[0,1]^3}d^3\tau\delta(1-\tau_1-\tau_2-\tau_3)e^{-i\tau_2\partial_1^\alpha\partial_{2\alpha}}$$
$$\partial^\alpha\omega((1-\tau_1)y,\bar{y})\,\bar{*}\,C(-i\tau_1\partial_1+i\tau_3\partial_2,\bar{y};K)\,\bar{*}\,\partial_\alpha\omega(-(1-\tau_3)y,\bar{y})k\,.$$

Здесь символ $\bar{*}$ обозначает звездочное произведение по оставшимся антиголоморфным переменным $\bar{y}$, а $\partial_{1\alpha}$ и $\partial_{2\alpha}$ – это операторы дифференцирования первого и второго полей ω в выражении соответсвенно, считая слева направо. Заметим, что система уравнений (3.5)-(3.9) остается совместной и в том случае, когда все мастер-поля принимают значения в некоторой ассоциативной алгебре [130]. В этом смысле целесообразно разделять выражения с различным порядком полей ω и C, поскольку при проверке совместности выражения с конкретным расположением полей ω и C являются замкнутыми. Замечательным свойством полученных вершин является то, что они содержат лишь производные $C(0,\bar{y};K)$, т.е. зависимость по голоморфным переменным y в $C(y,\bar{y};K)$ пропадает. Данное свойство не случайно, а является следствием теоремы о Пфаффовой локальности, о которой пойдет речь в следующей секции. На AdS фоне, где $\omega=\Omega$ (3.22), вершины даются выражением (3.41) и содержат $\partial\partial C(0,\bar{y};K)$. Уравнения (3.90)-(3.92) обобщают это свойство на кубический порядок (или четвертичный в лагранжевой номенклатуре). Вершину, которая содержит не более чем конечное число производных поля C в $y=0$, будем называть *ультра-локальной*. Несмотря на то что локальность вершин $\Upsilon(\omega,\omega,C)$ гарантируется в любой пертурбативной схеме, тот факт, что эти вершины обладают свойством ультралокальности, является чрезвычайно важным для анализа вершин в старших порядках.

3.4.2 Классы функций и теорема о Пфаффовой локальности

Как уже было отмечено, на уровне $O(C^2)$ стандартная гомотопия приводит к нелокальностям для вершин, начиная с вершины $\Upsilon(\Omega, C,C)$. Нелокальность проявляется как результат применения стандартной гомотопии для реконструкции z-зависимости поля B из системы (3.9) и его последующей подставновке в физический сектор уравнений (3.7). Данная процедура приводит к тому, что вершина $\Upsilon(\omega,C,C)$ оказывается нелокальной даже на AdS фоне, т.е. при $\omega = \Omega$. Причина этого явления заключается в следующем. Предположим, что будем восстанавливать z-зависимость полей W и S всюду с использованием стандартной гомотопии. Это приводит к тому, что звездочные произведения $S * S$, $W * W$, $W * S$, $S * W$ принадлежат к одному и тому же классу функций (так называемому четному классу), найденному в [64], который будет определен ниже. Одновременно, если z-зависимость для поля B также находить с применением стандартной гомотопии, то звездочные произведения $W{*}B$, $B{*}W$, $B{*}S$, $S * B$ принадлежат всё тому же классу функций, в то время как произведение $B * \gamma$ принадлежит уже другому классу (нечетному). Другими словами, умножение на внутренний оператор Клейна $e^{iz_\alpha y^\alpha}$ (см. (3.18)) выводит выражение из привычного (четного) класса функций. Способ преодолеть это препятствие заключается в применении другого гомотопического оператора (3.32) для нахождения z-зависимости поля B. Последнее оказывается возможным и ведет к совместным классам функций, определенным для ноль- и один-форм. Тот факт, что z-зависимость один-форм воспроизводится стандартной гомотопией, строго ограничивает выбор гомопических операторов, применяемых для ноль-форм. Для систем высших спинов, содержащих дифференциальные формы высших рангов как в [131], ожидается, что гомотопические операторы в теории возмущений будут обладать $\mathbb{Z}_2$-градуировкой по отношению к рангу дифференциальной формы. Условия на гомотопические операторы в секторе ноль-форм диктуются теоремой о Пфаффовой локальности, сформулированной и доказанной в [64].

Ниже мы приведем краткое описание структурной леммы и собственно самой теоремы о Пфаффовой локальности, которая предписывает классы гомотопий для ноль- и один-форм в голоморфном секторе уравнений высших спинов (3.5)-(3.9). Замечательно, что для этих классов гомотопий теорема о Пфаффовой локальности уменьшает степень нелокальности, делая все рассматриваемые в этой главе вершины локальными. Ниже продемонстрируем только логику на примере стандартной гомотопии, отсылая читателя за подробносятим к [64].

Далее ограничимся лишь голоморфным сектором. Оказывается, что удобно работать с полями, рассматривая их разложения в ряд Тейлора $\omega(y) = \omega(0)e^{y^\alpha\partial_\alpha}$ и $C(y) = C(0)e^{y^\alpha\partial_\alpha}$. Здесь и далее в разделе производная ∂^i_α по отношению к $i^{\text{му}}$ аргументу действует слева и коммутирует с внешним оператором Клейна k. Звездочное произведение (3.4) двух полей будет содержать фактор

$$e^{y^\alpha\partial_{1\alpha}} * e^{y^\alpha\partial_{2\alpha}} = e^{y^\alpha(\partial_{1\alpha}+\partial_{2\alpha})-i\partial_1^\alpha\partial_{2\alpha}}, \tag{3.93}$$

который потенциально может привести к нелокальностям типа $e^{-i\partial_1^\alpha\partial_{2\alpha}}$. В дополнение к звездочному произведению, уравнения (3.5)-(3.9) содержат внутренний оператор Клейна $e^{iz_\alpha y^\alpha}$. Процедура пертурбативного разложения также включает в себя действие гомотопических операторов (3.32), которое вовлекает как y, так и ∂. Вместе все эти процедуры предполагают следующую форму вклада для, например, $O(C^n)$ пертурбативного разложения

$$\int\cdots\int_{[0,1]^n} dt^n C(0)\dots C(0)e^{i(Tz_\alpha y^\alpha-iA^j\partial_j^\alpha z_\alpha-iB^j\partial_j^\alpha y_\alpha-\frac{1}{2}P^{ij}\partial_i^\alpha\partial_{\alpha j})}, \tag{3.94}$$

где T, A^i, B^i и P^{ij} зависят от n гомотопических интегральных параметров $t_1,\dots,t_n$. Звездочное произведение двух таких вкладов порядков n и n' соответственно будет иметь вид

$$e^{iTz_\alpha y^\alpha+A^j\partial_j^\alpha z_\alpha+B^j\partial_j^\alpha y_\alpha-\frac{i}{2}P^{ij}\partial_i^\alpha\partial_{\alpha j}} * e^{iT'z_\alpha y^\alpha+A^{i'}\partial_{i'}^\alpha z^\alpha+B^{i'}\partial_{i'}^\alpha y_\alpha-\frac{i}{2}P^{i'j'}\partial_{i'}^\alpha\partial_{\alpha j'}} = \tag{3.95}$$

$$e^{i(T\circ T')z_\alpha y^\alpha+A^{i''}\partial_{i''}^\alpha z_\alpha+B^{i''}\partial_{i''}^\alpha y_\alpha-\frac{i}{2}P^{i''j''}\partial_{i''}^\alpha\partial_{\alpha j''}}, \tag{3.96}$$

где

$$T \circ T' = T + T' - 2TT' \,, \tag{3.97}$$
$$A^{i''} = (1-T')A^{i} + (1-T)A^{i'} + TB^{i'} - T'B^{i} \,, \tag{3.98}$$
$$B^{i''} = (1-T')B^{i} + (1-T)B^{i'} + TA^{i'} - T'A^{i} \,, \tag{3.99}$$
$$P^{i''j''} = P^{ij} + P^{i'j'} + (A^{i}+B^{i})(A^{j'}-B^{j'}) - (A^{j}-B^{j})(A^{i'}+B^{i'}) \,. \tag{3.100}$$

Здесь индексы i'', j'' принимают $n + n'$ значений. В формулах (3.98)-(3.100) $i = i''$ для $i'' = 1, \ldots, n$ и все слагаемые, содержащие нештрихованные индексы, равны нулю для диапазона $i'' = n+1, \ldots, n+n'$; при $i'' = n+1, \ldots n+n'$ значения штрихованных индексов выражаются как $i' = i'' - n$, а все слагаемые со штрихованными индексами при $i'' = 1, \ldots, n$ равны нулю (аналогично для j''). Удивительным свойством звездочного произведения (3.10), которое следует из (3.97)-(3.100), является следующее. Предположим, что всюду в пертурбативном разложении z-заивисимость восстанавливалась с использованием оператора стандартной гомотопии, как показано в [64], коэффициенты T, A, B и P при этом удовлетворяют [2]

$$\sum (-)^{j} A^{j} = -T \,, \tag{3.101}$$
$$\sum (-)^{j} B^{j} = 0 \,, \tag{3.102}$$
$$\sum (-)^{i} P^{ij} = B^{j} \,. \tag{3.103}$$

Функции (3.94) с коэффициентами, удовлетворяющими (3.101)-(3.103), принадлежат четному классу относительно классификации, введенной в теореме о Пфаффовой локальности. Чередование знаков $(-)^{j}$ появляется из-за присутствия внешнего оператора Клейна k в γ (3.18). Данное свойство инвариантно относительно звездочного произведения (3.10). Например, если поле S в некотором порядке S^{i} и поле $S^{i'}$ удовлетворяют (3.101)-(3.103), тогда этим же соотношениям удовлетворяет и произведение $S^{i''} = S^{i} * S^{i'}$. Сохранение функционального класса (3.101)-(3.103) относительно звездочного умножения (3.10) (см. (3.97)-(3.100)) является содержанием *структурной леммы* [64].

[2] Из (3.102) следует, что $B_i = 0$, если i принимает только одно значение. Следовательно, все в полном согласии с разделом 3.4.1. Свойство ультра-локальности для вершин линейных по C на этом языке можно интерпретировать как приндлежность к правильному функциональному классу.

Если посмотреть на уравнение (3.8) видно, что оно содержит слагаемое $S*S$, которое принадлежит (3.101)-(3.103), если при разрешении z-зависимости использовалась стандартная гомотопия. Другой вклад в (3.8) – это $B*\gamma$. Если B разрешено с помощью стандратной гомотопии, то произведение $B*\gamma$ уже не принадлежит классу (3.101)-(3.103). Последнее очевидно, так как умножение на внутренний оператор Клейна эффективно меняет местами z и y. Однако оказывается, что существует правильная сдвиговая гомотопия, которая возвращает выражение $B*\gamma$ в класс (3.101)-(3.103). Действительно, чтобы $B*\gamma$ уважало класс (3.101)-(3.103)

$$e^{iTz_\alpha y^\alpha + A^i\partial_i^\alpha z_\alpha + B^i\partial_i^\alpha y_\alpha + \frac{i}{2}P^{ij}\partial_i^\alpha\partial_{\alpha j}} * e^{iz_\alpha y^\alpha} = e^{i(1-T)z_\alpha y^\alpha - A^i\partial_i^\alpha y_\alpha - B^i\partial_i^\alpha z_\alpha + \frac{i}{2}P^{ij}\partial_i^\alpha\partial_{\alpha j}} \tag{3.104}$$

должны быть наложены следующие ограничения

$$\sum(-)^j A^j = 0\,, \tag{3.105}$$

$$\sum(-)^j B^j = 1-T\,, \tag{3.106}$$

$$\sum(-)^i P^{ij} = -A^j. \tag{3.107}$$

Функции (3.94), коэффициенты которых удовлетворяют (3.105)-(3.107), называют нечетными по отношению к классификации теоремы о Пфаффовой локальности. Уравнения (3.105)-(3.107) накладывают сильное ограничение на поле B. Так как поле $B^{i''}$ получается действием гомотопии на выражение $S^i*B^{i'}$, где два поля принадлежат к различным классам (3.101)-(3.103) и (3.105)-(3.107), тот факт, что $B^{i''}$ остается в (3.105)-(3.107), крайне нетривиален и требует специфического гомотопического оператора. Рассмотрим максимально общий линейный анзац для сдвига, опуская слагаемые, содержащие сдвиги на y (локальные эффекты), чтобы проанализировать, возможно ли его совместить со свойствами (3.101)-(3.103)

$$z_\alpha \to z_\alpha - i\sum v^{i''}\partial_{\alpha i''}\,, \tag{3.108}$$

где $v^{i''}$ – некоторые числа. Вычислим звездочное произведение S^i и $B^{i'}$ и применим гомотопию (3.108) к полученному результату, после чего получим следующие коэффициенты в B''

$$A^{i''} = T''\big((1-T')A^i + (1-T)A^{i'} + TB^{i'} - T'B^i\big)\,, \tag{3.109}$$
$$B^{i''} = (1-T')B^i + (1-T)B^{i'} + TA^{i'} - T'A^i + (1-T'')(T\circ T')v^{i''}\,, \tag{3.110}$$
$$P^{i''j''} = P^{ij} + P^{i'j'} + (A^i + B^i)(A^{j'} - B^{j'}) - (A^j - B^j)(A^{i'} + B^{i'}) - \tag{3.111}$$
$$-\,\frac{1-T''}{T''}(A^{i''}v^{j''} - A^{j''}v^{i''})\,,$$

где T, T' и T'' гомотопические интегральные переменные, входящие в S, B' и B'' соответственно. Штрихованные, дважды штрихованные и нештрихованные индексы следует понимать в смысле пояснения после (3.100). Предпоположим теперь, что штрихованные и дважды-штрихованные поля принадлежат (3.105)-(3.107) и (3.101)-(3.103) соответственно и, следуя [64], получим

$$\sum(-)^{j''}v^{j''} = 1\,. \tag{3.112}$$

Следовательно, гомотопическая прескрипция, применяемая к один-формам (S и W), требует модификации (3.112) для ноль-форм B, чтобы сохранить функциональный класс (3.101)-(3.103) для один-форм и (3.105)-(3.107) для ноль-форм. Соотношение на параметры гомотопических сдвиговых параметров (3.112), выполнение которого влечет за собой уменьшение степени нелокальности, если мастер-поля принадлежат функциональным классам (3.101)-(3.103) и (3.105)-(3.107), является содержанием *теоремы о Пфаффовой локальности.* Короткое объяснение этого феномена заключается в присутствии внутренного оператора Клейна, который содержится в выражении для γ и который приходит исключительно с полем B, влияя таким образом на пертурбативное разложение. Привносимый им эффект компенсируется соответствующей сдвиговой гомотопией. То, что подобный механизм вообще работает, связан со специальной формой звездочного произведения (3.10).

Другой важный факт, показанный в [64], заключается в том, что структурная лемма и следовательно теорема о Пфаффовой локальности уважают дифференциал де Рама d_x, который может нетривиально взаимодействовать со сдвиговыми гомотопиями. Было доказано, что сдвиговые гомотопии, подчиняющиеся условиям, продиктованным теоремой о Пфаффовой локальности, уменьшают степень нелокальности как следствие леммы о Z-доминировании, .

Во втором порядке $O(CC)$ количество свободных параметров в (3.108) для нахождения поля B равно двум. Условие (3.112) уменьшает их количество до однопараметрического семейства

$$v_2 - v_1 = 1\,. \tag{3.113}$$

Вклад в кубическую вершину $\Upsilon(\omega, C,C)$, основанный на гомотопическом сдвиге (3.113), оказывается локальным, обобщая известную кубическую вершину $\Upsilon(\Omega, C,C)$ в пространстве AdS_4 [59]. Кроме того, однопараметрический произвол (3.113) оказывается фиктивным, так как окончательный ответ его не содержит, как будет показано в разделе 3.4.3. Далее мы проанализируем вершины типа $O(C^2)$ более подробно.

3.4.3 Вершины $\Upsilon(\omega,C,C)$

Начнем с того, что схематически покажем, как (3.112) приводит к правильному локальному выражению для вершины $\Upsilon(\Omega, C,C)$. Чтобы разрешить z-зависимость B во втором порядке, мы берем S_1 (3.80), даваемое выражением

$$S_1 = \theta^\alpha S_{1\alpha} + c.c. \qquad S_{1\alpha} = \eta \int_0^1 dt t z_\alpha C(-tz, \bar{y}; K) e^{itz_\alpha y^\alpha} k. \tag{3.114}$$

Из (3.9) получим

$$[S_0, B_2] + [S_1, B_1] = 0 \quad \Rightarrow \quad 2i\theta^\alpha \frac{\partial}{\partial z^\alpha} B_2 = S_1 * C - C * S_1\,, \tag{3.115}$$

что приводит к

$$2i\frac{\partial}{\partial z^\alpha} B_2 = A_\alpha - B_\alpha\,, \tag{3.116}$$

где

$$A_\alpha = \eta \int_0^1 t(z_\alpha - i\partial_{2\alpha}) e^{it(z_\alpha - i\partial_{2\alpha})(y^\alpha - i\partial_2^\alpha) - t(z^\alpha - i\partial_2^\alpha)\partial_{1\alpha} - y^\alpha \partial_{2\alpha}} C(0,\bar{y};K) \bar{*} C(0,\bar{y};K)k\,, \tag{3.117}$$

$$B_\alpha = \eta \int_0^1 t(z_\alpha + i\partial_{1\alpha}) e^{it(z_\alpha - i\partial_{1\alpha})(y^\alpha + i\partial_1^\alpha) + y^\alpha \partial_{1\alpha} + t(i\partial_1^\alpha - z^\alpha)\partial_{2\alpha}} C(0,\bar{y};K) \bar{*} C(0,\bar{y};K)k\,. \tag{3.118}$$

Для краткости мы будем игнорировать $\bar{\eta}$ слагаемые, а символ $\bar{*}$ как и раньше будет обозначать зведочное произведение по отношению к оставшимся антиголоморфным переменным $\bar{y}^{\dot{\alpha}}$. Теперь мы можем найти поле B_2, используя сдвиговую гомотопию

$$2iB_2 = \triangle_q \left(\theta^\alpha (A_\alpha - B_\alpha)\right), \qquad q = v_1 p_1 + v_2 p_2\,, \tag{3.119}$$

где v_1 и v_2 – это некоторые числа. Накладывая условие (3.113) после несложных преобразований, включающих интегрирование по частям, получим выражение

$$B_2 = B_{2\eta}^{loc} - \frac{\eta}{2} \int_0^1 dt\, C\left(ty,\bar{y};K\right) \bar{*}\, C\left((t-1)\,y,\bar{y};K\right) k\,, \tag{3.120}$$

где

$$B_{2\eta}^{loc} = \frac{\eta}{2} \int_{[0,1]^3} d^3\tau \left(\delta'(X) - iz_\alpha y^\alpha \delta(X)\right) e^{\tau_3 z_\alpha(\partial_2^\alpha + \partial_1^\alpha) + i\tau_3 \partial_{1\alpha}\partial_2^\alpha + i\tau_3 z_\alpha y^\alpha - y^\alpha(\tau_2 \partial_{2\alpha} - \tau_1 \partial_{1\alpha})} \times$$
$$\times\, C(0,\bar{y};K) \bar{*} C(0,\bar{y};K)k\,, \tag{3.121}$$

$$X = 1 - \tau_1 - \tau_2 - \tau_3\,, \tag{3.122}$$

которое оказалось независимым от оставшегося параметра $v_1 + v_2$. Здесь поле $B_{2\eta}^{loc}$ совпадает с найденным в [59],[60] , которое, как известно, воспроизводит правильный локальный ответ для вершины $\Upsilon(\Omega,C,C)$ на AdS фоне. Подчеркнем, что в данном подходе не нужно прибегать к дополнительному переопределению полей благодаря правильному выбору гомотопического оператора, который сразу приводит к локальному результату. Получившееся поле B_2 отличается от $B_{2\eta}^{loc}$ на локальное слагаемое, которое не содержит сверток по голоморфным индексам между полями C.

После этого упражнения приступим к более систематическому анализу вершины $\Upsilon(\omega,C,C)$. Мы хотим получить (3.2) с точностью до слагаемых квадратичных по C. Чтобы получить необходимое выражение, решим (3.9) с точностью до второго порядка. Из (3.115) и (3.80) получим, опуская слагаемые с $\bar{\eta}$,

$$-2i\mathrm{d}_z B_2 = -\frac{\eta}{2} C * C * \triangle_{p_2}\gamma + \frac{\eta}{2} C * \triangle_{p_1}\gamma * C = -\frac{\eta}{2} C * C * (\triangle_{p_2} - \triangle_{p_1+2p_2})\gamma\,. \tag{3.123}$$

Здесь операторы p_1 и p_2 дифференцируют первое и второе поле C соответственно, если смотреть слева направо. Решение этого уравнения в терминах сдвиговой гомотопии (3.32) имеет вид

$$B_2 := B_2^q = \frac{\eta}{4i} C * C * \triangle_q (\triangle_{p_2} - \triangle_{p_1+2p_2})\gamma\,. \tag{3.124}$$

Анализ произвола, связанный с различными сдвигами на y, которые могут содержаться в q, оставим до раздела 3.5 и выберем q в виде (3.119) (заметим, что разница в положении $\triangle_q$ в (3.119) и (3.124) эквивалентна переопределению сдвигов $v_i \to v_i + 1$ и, как показано ниже, не влияет на окончательный ответ).

Используя (3.56) и (3.33) и тот факт, что $\triangle_a \triangle_b \triangle_c\, \gamma = 0\ \forall a,b,c$, получим (3.124) в виде

$$B_2^q = \frac{\eta}{4i} C * C * (1 - h_q)\, \triangle_{p_1+2p_2} \triangle_{p_2}\, \gamma\,. \tag{3.125}$$

Благодаря (3.62) для q (3.119)

$$h_q\, \triangle_{p_1+2p_2} \triangle_{p_2}\, \gamma = 0 \tag{3.126}$$

если $v_2 - v_1 = 1$, что как раз и является требованием теоремы о Пфаффовой локальности. Следовательно, в этом случае окончательный ответ не зависит от оставшегося произвола в $v_{1,2}$, и ответ для поля B_2 может быть записан в виде

$$B_2 = \frac{\eta}{4i} C * C * \triangle_{p_1+2p_2} \triangle_{p_2}\, \gamma\,. \tag{3.127}$$

В следующем разделе будет показано, что эти параметры влияют на окончательный ответ в присутствии сдвигов на y и добавляют различного рода локальные слагаемые. В соответствии с теоремой о Пфаффовой локальности [64] поле B_2 (3.127) должно приводить к локальной вершине. Проанализуем это более детально, оставляя коэффициенты v_1 и v_2 пока произвольными.

Из (3.7) для нужного порядка теории возмущений имеем уравнение

$$\mathrm{d}_x C + [\omega,C]_* + \mathrm{d}_x B_2 + [\omega, B_2]_* + [W_1, C]_* = 0\,. \tag{3.128}$$

Подставляя сюда $B_2 = B_2^q$ (3.124) и W_1 из (3.83), после простых преобразований с использованием (3.77) и (3.67) получим

$$\mathrm{d}_x C + [\omega,C]_* = \Upsilon_{\omega CC} + \Upsilon_{CC\omega} + \Upsilon_{C\omega C} + c.c.\,, \tag{3.129}$$

где

$$\Upsilon_{\omega CC} = \frac{\eta}{4i}\omega{*}C{*}C{*}X_{\omega CC}, \quad \Upsilon_{CC\omega} = \frac{\eta}{4i}C{*}C{*}\omega{*}X_{CC\omega}\,,$$
$$\Upsilon_{C\omega C} = \frac{\eta}{4i}C{*}\omega{*}C{*}X_{C\omega C}\,, \tag{3.130}$$

$$X_{\omega CC} = h_{v_1p_1+v_2p_2}\ \triangle_{p_1+2p_2}\triangle_{p_1+2p_2+t}\ \gamma - (h_{v_1p_1+v_2p_2} - h_{v_1p_1+v_1t+v_2p_2})\ \triangle_{p_2}\triangle_{p_1+2p_2+t}\ \gamma\,, \tag{3.131}$$

$$X_{CC\omega} = h_{v_1p_1+v_2p_2+2t}\ \triangle_{p_2+2t}\triangle_{p_1+2p_2+2t}\ \gamma - (h_{v_1p_1+v_2p_2+v_2t} - h_{p_2+2t})\ \triangle_{p_2+t}\triangle_{p_1+2p_2+2t}\ \gamma\,, \tag{3.132}$$

$$X_{C\omega C} = (h_{p_2+t} - h_{v_1p_1+v_1t+v_2p_2})\,\triangle_{p_2}\triangle_{p_1+2p_2+t}\ \gamma +$$
$$+\ (h_{p_1+2p_2+t} - h_{v_1p_1+v_2p_2+v_2t})\,\triangle_{p_1+2p_2+2t}\triangle_{p_2+t}\ \gamma\,. \tag{3.133}$$

Чтобы увидеть является ли правая часть (3.129) локальной, рассмотрим типичное выражение из правой части

$$C * C * h_{a_1p_1+a_2p_2}\ \triangle_{b_1p_1+b_2p_2}\triangle_{c_1p_1+c_2p_2}\ \gamma\,, \tag{3.134}$$

где $a_{1,2}$, $b_{1,2}$ и $c_{1,2}$ некоторые числа. Мы пренебрегаем факторами ω и соответствующими операторами дифференцирования $t = -i\partial^\omega$ в индексах гомотопических операторов, так как это не влияет на локальность из-за того, что поля

ω полиномиальны по y для заданого спина. Далее, само произведение $C * C$ содержит нелокальность

$$C * C \sim e^{ip_1^\alpha p_{2\alpha}} \tag{3.135}$$

которая должна быть скомпенсирована действием оператора гомотопии (3.134). Вычислим звездочное произведение в (3.134), используя (3.63) и обращая внимание только на потенциально нелокальные вклады, получим

$$(C \bar{*} C)\, e^{i(1-(a_2-a_1)\tau_1-(b_2-b_1)\tau_2-(c_2-c_1)\tau_3)p_1^\alpha p_{2\alpha}}\,. \tag{3.136}$$

Из-за интегрирования по симплексу (3.63) $\tau_1+\tau_2+\tau_3=1$ экспонента, содержащая $p_1^\alpha p_{2\alpha}$, пропадает, если

$$a_2-a_1=b_2-b_1=c_2-c_1=1\,. \tag{3.137}$$

Подчеркнем, что оставшееся звездочное произведние $C\bar{*}C \sim e^{i\bar{p}_1{}^\alpha \bar{p}_{2\alpha}}$ ни в коем случае не означает нелокальность. Действительно, так как вершина $O(CC)$ локальна по голоморфной части, вклад от антиголоморфного сектора автоматически обрывается при ограничении на конкретные спины s_1,s_2,s_3.

Легко увидеть, что все структуры (3.131)-(3.133) удовлетворяют условию локальности (3.137), если условие (3.113) выполнено, т.е. гомотопические операторы для B берутся из класса функций (3.112), предписанного для нольформ. Этот результат ожидаем, так как совпадает с предсказанием теоремы о Пфаффовой локальности [64]. Пфаффовая матрица производных должна быть вырождена для определенного класса гомотопий. Будучи матрицей 2×2 для слагаемых билинейных по C, вырожденность эквивалентна равенству нулю.

Локальные структуры (3.131)-(3.133) независимы от оставшегося параметра (3.113). Эта независимость позволяет записать выражения в форме

$$X_{\omega CC} = h_{p_2}\ \triangle_{p_1+2p_2}\triangle_{p_1+2p_2+t}\ \gamma\,, \tag{3.138}$$

$$X_{CC\omega} = h_{p_2+2t}\ \triangle_{p_2+t}\triangle_{p_1+2p_2+2t}\ \gamma\,, \tag{3.139}$$

$$X_{C\omega C} = (h_{p_1+2p_2+2t} - h_{p_2})\ \triangle_{p_2+t}\triangle_{p_1+2p_2+t}\ \gamma\,. \tag{3.140}$$

Последнее очень легко увидеть, положив $v_2=1$, $v_1=0$. Отметим, что вершины $\Upsilon(\omega, C, C)$ устроены из структур типа $h_a\ \triangle_b\triangle_c\ \gamma$, связанных с функцией треугольника (3.70) через (3.72).

Вычисление выражений $\Upsilon(\omega, C,C) = \Upsilon_{\omega CC} + \Upsilon_{CC\omega} + \Upsilon_{C\omega C}$ (3.130) , которые входят в (3.2), довольно прямолинейно с использованием (3.64). Окончательный результат дается выражениями

$$\Upsilon_{\omega CC} =\frac{\eta}{2i}\int_{[0,1]^3} d^3\tau\delta(1-\tau_1-\tau_2-\tau_3)(\partial_1^\alpha+\partial_2^\alpha)\partial_\alpha^\omega \tag{3.141}$$
$$\omega((1-\tau_3)y,\bar{y})\,\bar{*}\,C(\tau_1 y-i(1-\tau_2)\partial^\omega,\bar{y};K)\,\bar{*}\,C(-(1-\tau_1)y+i\tau_2\partial^\omega,\bar{y},K)k\,,$$
$$\Upsilon_{CC\omega} =\frac{\eta}{2i}\int_{[0,1]^3} d^3\tau\delta(1-\tau_1-\tau_2-\tau_3)(\partial_1^\alpha+\partial_2^\alpha)\partial_\alpha^\omega \tag{3.142}$$
$$C((1-\tau_3)y+i(1-\tau_1)\partial^\omega,\bar{y};K)\,\bar{*}\,C(-\tau_3 y+i(1-\tau_1)\partial^\omega,\bar{y},K)\,\bar{*}\,\omega(-(1-\tau_2)y,\bar{y})$$
$$\Upsilon_{C\omega C} =\frac{\eta}{2i}\int_{[0,1]^3} d^3\tau\delta(1-\tau_1-\tau_2-\tau_3)(\partial_1^\alpha+\partial_2^\alpha)\partial_\alpha^\omega \tag{3.143}$$
$$\Big\{C((1-\tau_3)y+i(1-\tau_2)\partial^\omega,\bar{y};K)\,\bar{*}\,\omega(\tau_1 y,\bar{y})\,\bar{*}\,C(-\tau_3 y-i\tau_2\partial^\omega,\bar{y};K)$$
$$-\,C(\tau_2 y+i\tau_3\partial^\omega,\bar{y};K)\,\bar{*}\,\omega(-\tau_1 y,\bar{y})\,\bar{*}\,C(-(1-\tau_2)y-i(1-\tau_3)\partial^\omega,\bar{y};K)\Big\}k\,,$$

где $\partial_{1,2}$ дифференцируют поля C. Результат обобщает вершину $\Upsilon(\Omega, C, C)$, полученную в [59], которая остается локальной. Ослабление условия (3.112) делает соответствующую вершину нелокальной.

3.5 Y-зависимые сдвиги и локальный произвол

Теория возмущений, основанная на обобщенных резольвентах (сдвиговых гомотопиях) (3.32), способна воспроизводить простейшие локальные вершины (3.90)-(3.92) и (3.141)-(3.143). В этом анализе параметры сдвигов q_i в операторах $\triangle_{q_i}$ были линейными комбинациями производных ∂_i, действующих на поля C и ω. Свобода в выборе соответствующих коэффициентов оказывается ограниченной требованием, накладываемым теоремой о Пфаффовой локальности, которая диктует параметры сдвигов в операторах гомотопий (3.108). В общем случае, однако, можно добавить сдвиги по y в q_i, как, например, в формуле (3.66). Эффект, производимый такого рода сдвигами, носит исключительно локальный характер. Действительно, благодаря формулам star-exchange (3.73) и (3.76), разрешающие операторы (3.32) могут быть переставлены таким образом, чтобы они действовали только на γ. Как следствие, вклад от сдвигов на y находится исключительно в предэкспоненте (3.66). Следует подчеркнуть однако, что произвол в локальном переопределении полей может повлиять на (не)локальность вершин в высших порядках. Следовательно, хотелось бы иметь возможность контролировать локальные y-сдвиги в (3.32) с целью их дальнейшего применения в старших порядках.

3.5.1 Однородные y-сдвиги в вершинах $\Upsilon(\omega,\omega,C)$

В нашем анализе было показано, что используемый ранее подход, основанный на стандартной гомотопии, примененной в (3.80) и (3.83), не только воспроизводит центральную теорему о массовой оболочке в канонической форме, но также приводит к свойству ультра-локальности (3.90)-(3.92). Замечательно, что существует одно-параметрическое расширение стандартной гомотопии, которое тем не менее оставляет вершины (3.90)-(3.92) в прежней форме.

Показать подобное можно аналогично (3.80) и (3.81), если взять во внимание (3.73) и востанавить z-зависимость полей S_1 и W_1 в следующей форме

$$S_1 = -\frac{\eta}{2} \vartriangle_{\alpha(p+y)} (C * \gamma) + c.c. = -\frac{\eta}{2} C* \vartriangle_{p+\alpha y} \gamma + c.c. \,, \tag{3.144}$$

$$\begin{aligned} W_1 = & \ \frac{1}{2i} \vartriangle_{\alpha(p+y)} (\mathrm{d}_x S_1 + \omega * S_1 + S_1 * \omega) + c.c. \\ = & -\frac{\eta}{4i} (C * \omega * \vartriangle_{p+t+\alpha y} \vartriangle_{p+2t+\alpha y} \gamma - \omega * C * \vartriangle_{p+t+\alpha y} \vartriangle_{p+\alpha y} \gamma) + c.c. \,. \end{aligned} \tag{3.145}$$

Гомотопические операторы, которые содержат одни и те же сдвиги по y (α в (3.144) и (3.145)), будем называть *сдвинутыми однородно*. Тот факт, что (3.144) и (3.145) все еще воспроизводят (3.90)-(3.92), является следствием разложения единицы (3.65), которое гарантирует, что (3.86)-(3.88) остаются прежними, несмотря на то что операторы гомотопий содержат однородные сдвиги по y. Случай $\alpha = 0$ соответствует стандартной гомотопии в (3.144), (3.145) воспроизводит (3.80) и (3.83). Подчеркнем, что при неоднородных сдвигах, скажем, α_1 в S_1 и α_2 в W_1, получившиеся вершины $\Upsilon(\omega,\omega,C)$ будут иметь форму отличную от (3.90)-(3.92). Последнее повлечет за собой отличную от (3.41) форму свободных уравнений, что недопустимо! Соответственно, выражения (3.144) и

(3.145) предоставляют собой однопараметрическое семейство гомотопических операторов, которые воспроизводят центральную теорему о массовой оболочке в неизменной форме (3.41) наряду с ее дополнением $\Upsilon(\omega,\omega,C)$ (3.90)-(3.92). Заметим, что сдвиги на Y, будучи однородными или нет, не влияют на класс гомотопий (3.112), предписанный теоремой о Пфаффовой локальности [64].

3.5.2 Однородные y-сдвиги и вершины $\Upsilon(\omega,C,C)$

Рассмотрим теперь вклады второго порядка в секторе ноль-форм. Разрешим z-зависимость в поле B, используя α-модифицированые однородные гомотопии. Аналогично сектору один-форм мы прямо обобщаем (3.127) однородными y-сдвигами. Выбирая подходящим образом сдвиговые гомотопии из (3.144) и (3.115), получим

$$B_2 = \frac{\eta}{4i} C * C * \triangle_{p_1+2p_2+\alpha y} \triangle_{p_2+\alpha y}\, \gamma\,. \tag{3.146}$$

Несмотря на то, что полученное таким образом поле B_2 отличается от (3.127) при $\alpha \neq 0$, уравнения (3.129) остаются неизменными в силу тождества (3.65), воспроизводя те же вершины (3.141)-(3.143), что и при $\alpha = 0$.

Свойство, что вершины $\Upsilon(\omega,\omega,C)$ и $\Upsilon(\omega,C,C)$, воспроизводимые однородно сдвинутыми по y гомотопиями, совпадают с таковыми в отсутствии сдвигов по y, может быть нарушено для вершин старших порядков, которые приводят к дополнительным локальным эффектам. В то же время, неоднородные сдвиги дают ненулевые локальные эффекты уже в младших порядках. Этому анализу посвящены последующие разделы.

3.5.3 Неоднородные y-сдвиги поля B_2

В предыдущем разделе было показано, как сдвиговые гомотопии приводят к выражению для B_2, которое отличается от полученного в [59], [60] на Z-независимый локальный член в (3.120). С добавлением y сдвига в индекс гомотопического оператора возможно получить дополнительное локальное слагаемое. Собственно, начиная с общего выражения для B_2

$$B_2 = \frac{i\eta}{4} C * C * \, \triangle_{\tilde{q}} \, (\triangle_{p_1+2p_2} - \triangle_{p_2})\gamma \,, \tag{3.147}$$

мы определим индекс $\tilde{q}$ в виде

$$\tilde{q} = q + \alpha y \,, \qquad q = v_1 p_1 + v_2 p_2. \tag{3.148}$$

Коэффициенты перед p_1 и p_2 (напомним, что определение p дается в (3.74)) выбраны таким образом, чтобы удовлетворять условиям теоремы о Пфаффовой локальности (3.113), в то время как α произвольно.

Чтобы продолжить, используем (3.63), откуда следует

$$\begin{aligned}\triangle_{b+\alpha y}\triangle_a \, \gamma = 2\int_{[0,1]^3} d^3\tau \, \delta(1-\tau_1-\tau_2-\tau_3)(z+b+\alpha y)_\gamma (a-b-\alpha y)^\gamma e^{i(\tau_1 z - \tau_2 a - \tau_3 b)_\alpha y^\alpha} k \\ = \triangle_b \triangle_a \, \gamma + 2\int_{[0,1]^3} d^3\tau \, \delta(1-\tau_1-\tau_2-\tau_3)(z+a)_\gamma(-\alpha y)^\gamma e^{i(\tau_1 z - \tau_2 a - \tau_3 b)_\alpha y^\alpha} k \\ = \triangle_b \triangle_a \, \gamma + 2i\alpha \int_{[0,1]^3} d^3\tau \, \delta(1-\tau_1-\tau_2-\tau_3) \left(\frac{\partial}{\partial \tau_1} - \frac{\partial}{\partial \tau_2}\right) e^{i(\tau_1 z - \tau_2 a - \tau_3 b)_\alpha y^\alpha} k.\end{aligned} \tag{3.149}$$

Интегрирование по частям приводит к

$$\begin{aligned}\triangle_{b+\alpha y}\triangle_a \, \gamma = &\triangle_b \triangle_a \, \gamma - \\ &- 2i\alpha \int_{[0,1]^3} d^3\tau \, \delta(1-\tau_1-\tau_2-\tau_3) \left(\delta(\tau_1) - \delta(\tau_2)\right) e^{i(\tau_1 z - \tau_2 a - \tau_3 b)_\alpha y^\alpha} k.\end{aligned} \tag{3.150}$$

Следовательно, в силу (3.150) из (3.124) следует, что для $\tilde{q}$ вида (3.148) верно

$$\begin{aligned}B_2^{\tilde{q}} = &\frac{i\eta}{4} C * C * \, \triangle_{q+\alpha y} \, (\triangle_{p_1+2p_2} - \triangle_{p_2})\gamma = \\ = B_2^q + &\frac{\eta\alpha}{2} C * C * \int_{[0,1]^2} d^2\tau \, \delta(1-\tau_2-\tau_3) \left(e^{i(-\tau_2(p_1+2p_2)-\tau_3 q)_\alpha y^\alpha} - e^{i(-\tau_2 p_2 - \tau_3 q)_\alpha y^\alpha}\right) k\end{aligned} \tag{3.151}$$

Как и ожидалось, сдвиг по y в $\triangle_{q+\alpha y}$ не влияет на экспоненты и как следствие на (не)локальность. Как было упомянуто в разделе 3.4.3, α–независимая часть B_2^q дает выражение для B_2 из [59],[60] с дополнительным локальным слагаемым.

Выбирая подходящим образом q и α, можно далее упростить форму дополнительного слагаемого из правой части (3.120). Два наиболее интересных варианта приведены ниже

$$q = p_1 + 2p_2, \;\; \alpha = -1\,, \tag{3.152}$$

$$q = p_2, \;\; \alpha = 1\,. \tag{3.153}$$

В случае (3.152) α-зависимые слагаемые из (3.151) могут быть записаны в следующем виде

$$-\frac{\eta}{2} C * C * \int_{[0,1]^2} d^2\tau\, \delta(1-\tau_2-\tau_3)\Big(e^{-y^\alpha(\partial_1+2\partial_2)_\alpha} - \\ - e^{-y^\alpha \partial_{2\alpha} - \tau_3 y^\alpha(\partial_1+\partial_2)_\alpha}\Big) k. \tag{3.154}$$

Прямое вычисление этого выражения дает

$$-\frac{\eta}{2} C\,(0,\bar{y};K)\,\bar{*}\,C\,(-y,\bar{y};K)\,k + \frac{\eta}{2}\int_0^1 dt\, C\,(ty,\bar{y};K)\,\bar{*}\,C\,((t-1)\,y,\bar{y};K)\,k, \tag{3.155}$$

которое в силу (3.120) можно представить в виде

$$\frac{i\eta}{4} C * C * \triangle_{p_1+2p_2-y}\,(\triangle_{p_1+2p_2} - \triangle_{p_2})\,\gamma = B_{2\eta}^{loc} - \frac{\eta}{2} C\,(0,\bar{y};K)\,\bar{*}\,C\,(-y,\bar{y};K)\,k. \tag{3.156}$$

Аналогично, в случае (3.153) выражение для B_2 может быть записано в форме

$$\frac{i\eta}{4} C * C * \triangle_{p_2+y}\,(\triangle_{p_1+2p_2} - \triangle_{p_2})\,\gamma = B_{2\eta}^{loc} - \frac{\eta}{2} C\,(y,\bar{y};K)\,\bar{*}\,C\,(0,\bar{y};K)\,k. \tag{3.157}$$

Естественный выбор для B_2, который уважает симметрию по отношению к изменению порядка умножения, имеет вид

$$B_2 = \frac{i\eta}{8} C * C * (\triangle_{p_1+2p_2-y} + \triangle_{p_2+y})\,(\triangle_{p_1+2p_2} - \triangle_{p_2})\,\gamma = \\ = B_{2\eta}^{loc} - \frac{\eta}{4} C\,(0,\bar{y};K)\,\bar{*}k\,C\,(y,\bar{y};K) - \frac{\eta}{4} C\,(y,\bar{y};K)\,\bar{*}k\,C\,(0,\bar{y};K)\,. \tag{3.158}$$

Используя анзац сдвиговых гомотопий, мы не смогли воспроизвести $B_{2\eta}^{loc}$ без дополнительных локальных слагаемых. Тем не менее, слагаемые в правых частях (3.156) и (3.157) дают вклад в динамические уравнения в квази ультралокальной форме, т.е. в виде, когда аргумент одного из полей C равен нулю и количество сверток по голоморфным индексам между полями C не более, чем конечно.

Так же отметим, что хотя в присутствии сдвигов по y конечный результат зависит от $v_1 + v_2$, данный произвол приводит лишь к локальным эффектам.

3.6 Заключение

Важная проблема, которая ставилась в [64] и в текущей главе, заключается в разработке технических средств, которые позволили бы сформулировать теорию высших спинов и ее обобщение, предложенное в [132], на минимально нелокальном уровне. Основной инструмент заключается в применении сдвиговых гомотопий, которые позволяют уменьшить степень нелокальности вершин высших спинов в соответствии с теоремой о Пфаффовой локальности [64] (см. также раздел 3.4.2). В этой главе данный подход был применен к анализу некоторых вершин теории высших спинов, демонстрируя то, что применение гомотопических операторов из правильного класса, определенного в [64], прямо приводит к правильным локальным ответам [59; 132] без необходимости в дополнительном переопеределении полей, которое быдо сделано в этих работах.

В текущей главе был разработан пертурбативный подход к уравнениям высших спинов (3.5)-(3.9), основанный на сдвиговых резольвентах (3.32) Δ_q, обобщающих стандартные гомотопические операторы Δ_0, впервые введенные в [5], которые, как известно, приводят к нелокальностям [14] (см. также [122]). Параметром q в аргументах операторов может быть любой z-независимый спинор (оператор). Предложенные гомотопические операторы сильно упрощают анализ уравнений теории высших спинов в силу замечетельных соотношений звездочной перестановочности (3.73), (3.76), найденных в этой работе. Данные соотношения связывают воедино на первый взгляд никак не связанные операции звездочного умножения и гомотопического интегрирования. Они также позволяют свести анализ уравнений высших спинов к анализу структур, построенных из комбинаций резольвент $\triangle_{a_i}$, действующих на центральный элемент γ (3.18), и их возможных звездочных произведений. Хотя в высших порядках эти структуры становятся все более и более сложными и имеют схематический вид $\triangle_a\triangle_b\,\gamma * \triangle_c\triangle_d\,\gamma$, $\triangle_a\,(\triangle_b\,\gamma * \triangle_c\,\gamma)$, *и т.д.*, они остаются единственными структурами, которые следует анализировать[3]. Последнее приводит к значительному упрощению пертурбативного анализа. Произвол в выборе сдвигов гомотопических операторов связан с выбором калибровки и переопределением динамических полей и следовательно тесно связан с проблемой локальности. Одним из результатов настоящей главы является то, что ограничения, накладываемые теоремой о Пфаффовой локальности, на возможные сдвиги операторов гомотопии, так или иначе приводят к вершинам $\Upsilon(\omega,\omega,C)$ и $\Upsilon(\omega,C,C)$, которые являются ультра-локальными и локальными соответственно для произвольной связности высших спинов ω. Полученные результаты можно суммировать следующим образом.

1. Одним из главных результатов настоящей главы являются star-exchange формулы (3.73), (3.76), которые связывают сдвиговые гомотопии и звездочное произведение. Полученные соотношения в сильной мере основаны на конкретном виде звездочного произведения (3.10). Последнее дает возможность менять порядок вычисления звездочного произведения и применения гомотопий, и как следствие перестраивает сам механизм теории возмущений. В новой постановке анализ сводится к анализу гомотопических операторов и их действия на центральные элементы γ и $\bar{\gamma}$. Последнее в частности позволяет проводить анализ вершин теории высших спинов над произвольным фоном.
2. Используя понятие сдвиговых гомотопий [64], мы изучили простейшие вершины высших спинов: $\Upsilon(\omega,\omega,C)$ и $\Upsilon(\omega,C,C)$. В ходе исследования был модифицирован стандартный пертурбативных подход, который основывался на разложении над AdS фоном. Модифицированный подход позволил напрямую получить вершины (3.1), (3.2). С этой точки зрения полученные вершины представляют собой кубическое дополнение к цен-

[3] Строго говоря, это не совсем верно для слагаемых, которые приходят после применения оператора де Рама d_x к динамическим полям ω и C в младших порядках, которые содержат когомологические проекторы h_Q (3.34), как в (3.129), (3.130), (3.138)-(3.140). Обработка такого рода вкладов требует обобщение предложенной в настоящей главе техники

тральной теореме о массовой оболочке (3.41) и к четвертичной вершине $\Upsilon(\Omega_{AdS},C,C)$. В ходе анализа пространства гопотопических параметров было явно показано, что набор, который выдает локальные вершины, совпадает с тем, что предсказывает теорема о Пфаффовой локальности.

3. Также была затронута проблема локального переопределения полей. В рамках подхода, предписанного сдвиговыми гомотопиями Δ_q, существует два типа параметров, определяющих q. Один из них – это сдвиг на производную по полному аргументу полей C и ω, а второй – это просто y. Последний сильным образом влияет на структуру локальной части окончательных динамических уравнений. Было показано, что в соответствии с теоремой о Пфаффовой локальности существует семейство сдвиговых параметров, которые приводят к локальным динамическим уравнениям. С другой стороны, сдвиги $q \sim y$ в низших порядках теории возмущений ответственны лишь за локальные эффекты и не ограничены требованием локальности. Тем не менее, контроль над локальными сдвигами является очень важным, так как он может повлиять на (не)локальность в более высоких порядках.
4. Было найдено однопараметрическое семейство гомотопических операторов, совместных с допустимым классом функций [64]. Несмотря на то что сам вид мастер-полей высших спинов зависел от конкретного выбора параметров, динамические уравнения, которые из них следовали, оказывались теми же. В частности, это семейство уважает центральную теорему о массовой оболочке. Несмотря на то, что вершины в рассматриваемом порядке оказываются идентичными при различном выборе параметров из рассматриваемого семейства, нет оснований полагать, что вершины старших порядков также не будут чувствительны к этому произволу.

Заметим, что анализ, проведенный в настоящей главе, относился к голоморфному сектору уравнений высших спинов (в данном порядке антиголоморфный сектор может быть вопроизведен аналогично). Т.е. разработанный подход в текущем виде может быть применен к анализу уравнений высших спинов в 3-х измерениях [133].

Большое количество проблем осталось за пределами настоящей главы. В частности, были рассмотрены лишь простейшие вершины, продиктованные деформацией алгебры высших спинов. Соответствующие вершины оказались (ультра) локальными. Среди них есть те, что билинейны по полям C, но вершина того же порядка $\Upsilon(\omega,\omega, C,C)$ не была проанализирована. Часть этой вершины, пропорциональная $\eta\bar{\eta}$, изучена в следующей главе, где показано, что она также является локальной. Эта вершина несмотря на ее кажущуюся простоту является важной для локальности теории высших спинов, так как содержит структуры, типинчные для вершин старших порядков. Собственно, в отличие от рассмотренных в настоящей главе вершин она будет содержать выражения типа $\Delta\Delta\ \gamma * \bar{\Delta}\bar{\Delta}\bar{\gamma}$. В работе [56] было показано, что (анти)голоморнфная часть этой вершины является ультра-локальной. Редукция найденных в работе (анти)голоморфных вершин на фон AdS обращает их в ноль, последнее полностью согласуется с результатами работы [83].

Другой важной проверкой на (не)локальность является вершина $\Upsilon(\omega, C,C,C)$. В рамках порядка теории возмущений, который рассматривался в настоящей главе, понятия пространственно-временной и спин-локальности были экваивалентными. В высших порядках эти понятия начинают существенно разниться. Вершина $\Upsilon(\omega, C,C,C)$ в этом контексте представляет особый интерес в свете работы [47], где ее AdS редукция была проанализирована голографически для четвертичной скалярной вершины. Интересно то, что ее представление в терминах пространственно- временных производных нелокально, но нелокальность должна иметь весьма определенную форму [120]. В недавней работе [57] было показано, что (анти)голоморфная часть рассматриваемой вершины является спин-локальной, в другой недавней работе [58] было получено явное выражение для одной из этих вершин.

Важная текущая проблема теории высших спинов заключается в выяснении того, в какой степени теория (не)локальна. В случае ее нелокальности следует разработать подходящую замену самому понятию локальности (минимальная нелокальность), *т.е.* подходящий функциональный класс, который бы уважал физические предсказания корреляторов полей высших спинов, чернодырных решений, зарядов, *т.д.*. Систематическое изучение этих понятий было инициировано в [64] и работе [55], которая легла в основу данной главы.

Глава 4. Спин-локальность вершин $\Upsilon^{\eta\bar{\eta}}(\omega,\omega,C,C)$

Глава основана на статье [56]. В предыдущей главе были получены (анти)голоморфные вершины взаимодействия в младшем порядке теории возмущений. Из производящих уравнений (3.5)-(3.9) систематически могут быть получены (анти)голоморфные вершины сколько угодно высокого порядка. Все полученные выражения, так же как и (3.90)-(3.92), (3.141)-(3.143), обладают факторизованным видом: в выражениях для голоморфных вершин по антиголоморфным (точечным) индексам будут свертки, реализованные звездочным произведением по переменным $\bar{y}$ и наоборот. Уже на примере вершин, полученных в предыдущей главе, можно легко убедиться в том, что для совместности необходимо, чтобы были нетривиальными вершины смешанного сектора, т.е. вершины, в которых у производящих функций для потенциалов и напряженности нетривиальным образом сворачиваются как точечные, так и неточечные (голоморфные и антиголоморфные) индексы. Эти выражения также могут быть систематически получены из производящей системы. Получению такого типа вершин в секторе один-форм в младшем порядке теории возмущений посвящена настоящая глава. Сперва будут явно предъявлены выражения для вершины смешанного сектора во втором порядке по полям C, затем будет продемонстрировано, как эти вершины были получены из производящей системы (3.5)-(3.9) путем обобщения гомотопической техники, введенной в предыдущей главе. Обозначения для гомотопических операторов наследуются из предыдущей главы.

Несмотря на то, что в приведенных вершинах нет разницы с точки зрения (не)локальности, при выборе различных мастер полей B_2 из (3.120) или (3.121) конкретный выбор носит исключительно важный характер для (не)локальности (анти)голоморфных вершин $\Upsilon^{\eta\eta}(\omega,\omega,C,C)$ и $\Upsilon^{\bar{\eta}\bar{\eta}}(\omega,\omega,C,C)$ [56]. Совместность же уравнений требует, чтобы этот выбор был един при вычислении (анти)голоморфных и смешанных вершин.

4.1 Вершины смешанного сектора в один-формах $\Upsilon^{\eta\bar\eta}(\omega,\omega,C,C)$

Используя обозначения (3.74) и (3.84), применяемые в предыдущей главе, вершины второго порядка смешанного сектора в один-формах можно представить в виде

$$\Upsilon^{\eta\bar\eta}(\omega,\omega,C,C) = \Upsilon^{\eta\bar\eta}_{\omega\omega CC} + \Upsilon^{\eta\bar\eta}_{\omega C\omega C} + \Upsilon^{\eta\bar\eta}_{C\omega\omega C} + \Upsilon^{\eta\bar\eta}_{\omega CC\omega} + \Upsilon^{\eta\bar\eta}_{C\omega C\omega} + \Upsilon^{\eta\bar\eta}_{CC\omega\omega}\,, \qquad (4.1)$$

где

$$\Upsilon^{\eta\bar\eta}_{\omega\omega CC} = -\frac{\eta\bar\eta}{16}\omega * \omega * C * C * h_{p_2}\ \triangle_{p_1+2p_2}\triangle_{p_1+2p_2+t_2}\ \gamma * \bar h_{\bar p_2}\bar\triangle_{\bar p_1+\bar p_2+\bar t_1+\bar t_2}\bar\triangle_{\bar p_1+\bar p_2+\bar t_2}\bar\gamma +$$
$$+ \delta\Upsilon^{\eta\bar\eta}_{\omega\omega CC} + h.c.\,, \qquad (4.2)$$

$$\Upsilon^{\eta\bar\eta}_{C\omega\omega C} = \frac{\eta\bar\eta}{16} C * \omega * \omega * C *$$
$$\Big[\frac{1}{2} h_{p_1+2p_2+t_1+t_2}\ \triangle_{p_1+2p_2+t_1+2t_2}\triangle_{p_1+2p_2+2t_1+2t_2}\ \gamma *$$
$$* \bar h_{\bar p_1+2\bar p_2+\bar t_1+\bar t_2}\bar\triangle_{\bar p_1+2\bar p_2+\bar t_1+2\bar t_2}\bar\triangle_{\bar p_1+2\bar p_2+2\bar t_1+2\bar t_2}\bar\gamma +$$
$$- h_{p_1+2p_2+t_1+t_2}\ \triangle_{p_1+2p_2+t_1+2t_2}\triangle_{p_1+2p_2+2t_1+2t_2}\ \gamma * \bar h_{\bar p_1+\bar p_2+\bar t_1+\bar t_2}\bar\triangle_{\bar p_1+2\bar p_2+2\bar t_1+2\bar t_2}\bar\triangle_{\bar p_2}\bar\gamma +$$
$$+ \big(h_{p_2} - h_{p_1+2p_2+t_1+2t_2}\big)\ \triangle_{p_2+t_2}\triangle_{p_1+2p_2+t_1+t_2}\ \gamma *$$
$$* \bar h_{\bar p_1+\bar p_2+\bar t_1+\bar t_2}\bar\triangle_{\bar p_1+2\bar p_2+\bar t_1+2\bar t_2}\bar\triangle_{\bar p_1+2\bar p_2+2\bar t_1+2\bar t_2}\bar\gamma\Big] + h.c.\,, \qquad (4.3)$$

$$\Upsilon^{\eta\bar{\eta}}_{\omega C\omega C} = \frac{\eta\bar{\eta}}{16}\omega * C * \omega * C*$$

$$\Big[\big(h_{p_2} - h_{p_1+2p_2+t_1+2t_2}\big)\ \triangle_{p_2+t_2}\triangle_{p_1+2p_2+t_1+t_2}\ \gamma * \bar{h}_{\bar{p}_1+\bar{p}_2+\bar{t}_1+\bar{t}_2}\bar{\triangle}_{\bar{p}_2}\bar{\triangle}_{\bar{p}_1+2\bar{p}_2+\bar{t}_1+2\bar{t}_2}\bar{\gamma}+$$

$$- h_{p_1+2p_2+t_1+2t_2}\ \triangle_{p_2+t_2}\triangle_{p_1+2p_2+t_2}\ \gamma * \bar{h}_{\bar{p}_1+\bar{p}_2+\bar{t}_1+\bar{t}_2}\bar{\triangle}_{\bar{p}_2+\bar{t}_2}\bar{\triangle}_{\bar{p}_2}\bar{\gamma}+$$

$$+ \big(h_{p_2} - h_{p_1+2p_2+2t_2}\big)\ \triangle_{p_2+t_2}\triangle_{p_1+2p_2+t_2}\ \gamma * \big(\bar{h}_{\bar{p}_1+\bar{p}_2+\bar{t}_1+\bar{t}_2} - \bar{h}_{\bar{p}_1+2\bar{p}_2+2\bar{t}_2}\big)\bar{\triangle}_{\bar{p}_1+\bar{p}_2+\bar{t}_2}\bar{\triangle}_{\bar{p}_2}\bar{\gamma}+$$

$$- \frac{1}{2}h_{p_1+2p_2+t_1+t_2}\ \triangle_{p_1+2p_2+t_1+2t_2}\triangle_{p_2}\ \gamma * \bar{h}_{\bar{p}_1+2\bar{p}_2+\bar{t}_1+\bar{t}_2}\bar{\triangle}_{\bar{p}_1+2\bar{p}_2+\bar{t}_1+2\bar{t}_2}\bar{\triangle}_{\bar{p}_2}\bar{\gamma}+$$

$$+ \frac{1}{2}h_{p_1+2p_2+t_2}\ \triangle_{p_1+2p_2+2t_2}\triangle_{p_2}\ \gamma * \bar{h}_{\bar{p}_1+2\bar{p}_2+\bar{t}_2}\bar{\triangle}_{\bar{p}_1+2\bar{p}_2+2\bar{t}_2}\bar{\triangle}_{\bar{p}_2}\bar{\gamma}+$$

$$+ \frac{1}{2}h_{p_1+2p_2+t_1+2t_2}\ \triangle_{p_2+t_2}\triangle_{p_2}\ \gamma * \bar{h}_{\bar{p}_1+2\bar{p}_2+\bar{t}_1+2\bar{t}_2}\bar{\triangle}_{\bar{p}_2+\bar{t}_2}\bar{\triangle}_{\bar{p}_2}\bar{\gamma}+$$

$$- \frac{1}{2}h_{p_1+2p_2+2t_2}\ \triangle_{p_2+t_2}\triangle_{p_2}\ \gamma * \bar{h}_{\bar{p}_1+2\bar{p}_2+2\bar{t}_2}\bar{\triangle}_{\bar{p}_2+\bar{t}_2}\bar{\triangle}_{\bar{p}_2}\bar{\gamma}\Big] + h.c.\,, \quad (4.4)$$

$$\Upsilon^{\eta\bar{\eta}}_{\omega CC\omega} = \frac{\eta\bar{\eta}}{16}\omega *\ C * C * \omega*$$

$$\Big[\frac{1}{2}h_{p_2}\ \triangle_{p_2+2t_2}\triangle_{p_1+2p_2+2t_2}\ \gamma * \bar{h}_{\bar{p}_2+\bar{t}_2}\bar{\triangle}_{\bar{p}_2+2\bar{t}_2}\bar{\triangle}_{\bar{p}_1+2\bar{p}_2+\bar{t}_1+2\bar{t}_2}\bar{\gamma}+$$

$$- \frac{1}{2}h_{p_1+2p_2+2t_2}\ \triangle_{p_2+t_2}\triangle_{p_2+2t_2}\ \gamma * \bar{h}_{\bar{p}_1+2\bar{p}_2+2\bar{t}_2}\bar{\triangle}_{\bar{p}_2+\bar{t}_2}\bar{\triangle}_{\bar{p}_2+2\bar{t}_2}\bar{\gamma}+$$

$$+ h_{p_2+2t_2}\ \triangle_{p_2+t_2}\triangle_{p_1+2p_2+t_1+2t_2}\ \gamma * \bar{h}_{\bar{p}_1+2\bar{p}_2+\bar{t}_1+2\bar{t}_2}\bar{\triangle}_{\bar{p}_2+\bar{t}_2}\bar{\triangle}_{\bar{p}_1+\bar{p}_2+\bar{t}_1+\bar{t}_2}\bar{\gamma}+$$

$$+ h_{p_2+2t_2}\ \triangle_{p_2+t_2}\triangle_{p_1+2p_2+2t_2}\ \gamma * \big(\bar{h}_{\bar{p}_1+\bar{p}_2+\bar{t}_2} - \bar{h}_{\bar{p}_2+\bar{t}_2}\big)\bar{\triangle}_{\bar{p}_1+\bar{p}_2+\bar{t}_1+\bar{t}_2}\bar{\triangle}_{\bar{p}_1+2\bar{p}_2+2\bar{t}_2}\bar{\gamma}+$$

$$+ h_{p_2+2t_2}\ \triangle_{p_1+2p_2+2t_2}\triangle_{p_1+2p_2+t_1+2t_2}\ \gamma * \big(\bar{h}_{\bar{p}_1+\bar{p}_2+\bar{t}_1+2\bar{t}_2} - \bar{h}_{\bar{p}_2+\bar{t}_2}\big)\bar{\triangle}_{\bar{p}_1+\bar{p}_2+\bar{t}_1+\bar{t}_2}\bar{\triangle}_{\bar{p}_2+2\bar{t}_2}\bar{\gamma}\Big]+$$

$$+ \delta\Upsilon^{\eta\bar{\eta}}_{\omega CC\omega} + h.c.\,, \quad (4.5)$$

$$\Upsilon^{\eta\bar{\eta}}_{C\omega C\omega} = \frac{\eta\bar{\eta}}{16}C * \omega * C * \omega*$$

$$\Big[\big(h_{p_1+2p_2+2t_1+2t_2} - h_{p_2+2t_2}\big)\ \triangle_{p_2+t_1+2t_2}\triangle_{p_1+2p_2+t_1+2t_2}\ \gamma*$$

$$* \bar{h}_{\bar{p}_1+\bar{p}_2+\bar{t}_1+2\bar{t}_2}\bar{\triangle}_{\bar{p}_1+\bar{p}_2+\bar{t}_1+\bar{t}_2}\bar{\triangle}_{\bar{p}_1+2\bar{p}_2+2\bar{t}_1+2\bar{t}_2}\bar{\gamma}+$$

$$- h_{p_2+2t_2}\ \triangle_{p_2+t_2}\triangle_{p_1+2p_2+t_1+2t_2}\ \gamma * \bar{h}_{\bar{p}_1+\bar{p}_2+\bar{t}_1+\bar{t}_2}\bar{\triangle}_{\bar{p}_1+2\bar{p}_2+\bar{t}_1+2\bar{t}_2}\bar{\triangle}_{\bar{p}_1+2\bar{p}_2+2\bar{t}_1+2\bar{t}_2}\bar{\gamma}\Big] + h.c.\,, \quad (4.6)$$

$$\Upsilon^{\eta\bar\eta}_{CC\omega\omega} = \frac{\eta\bar\eta}{16} C * C * \omega * \omega *$$
$$h_{p_2+2t_1+2t_2}\ \Delta_{p_2+t_1+2t_2}\Delta_{p_1+2p_2+2t_1+2t_2}\ \gamma * \bar h_{\bar p_1+\bar p_2+\bar t_1+2\bar t_2}\bar\Delta_{\bar p_1+2\bar p_2+2\bar t_1+2\bar t_2}\bar\Delta_{\bar p_1+\bar p_2+\bar t_1+\bar t_2}\bar\gamma +$$
$$+\,\delta\Upsilon^{\eta\bar\eta}_{CC\omega\omega} + h.c.\,. \quad (4.7)$$

Здесь слагаемые $\delta\Upsilon^{\eta\bar\eta}$

$$\delta\Upsilon^{\eta\bar\eta}_{\omega\omega CC} =$$
$$= \frac{i\eta\bar\eta}{8}\int_0^1 \mathrm{d}\tau\, e^{i(t_1+t_2)^\alpha(\tau p_1+(\tau-1)p_2-t_1)}\omega(y,\bar y)\bar*\omega(y,\bar y)\bar*C(\tau y,\bar y)\bar*C((\tau-1)y,\bar y)k*$$
$$* \,\bar h_{\bar p_1+\bar p_2+\bar t_1+\bar t_2}\bar\Delta_{\bar p_1+\bar p_2+\bar t_2}\bar\Delta_{\bar p_1+\bar p_2}\bar\gamma\,, \quad (4.8)$$

$$\delta\Upsilon^{\eta\bar\eta}_{\omega C C\omega} =$$
$$= \frac{i\eta\bar\eta}{8}\int_0^1 \mathrm{d}\tau\, e^{i(t_1+t_2)^\alpha(\tau p_1+(\tau-1)p_2+t_1)_\alpha}\omega(y,\bar y)\bar*C(\tau y,\bar y)\bar*C((\tau-1)y,\bar y)\bar*\omega(-y,\bar y)k*$$
$$* \,(\bar h_{\bar p_1+\bar p_2+\bar t_1+\bar t_2} - \bar h_{\bar p_1+\bar p_2+2\bar t_2})\bar\Delta_{\bar p_1+\bar p_2+\bar t_1+2\bar t_2}\bar\Delta_{\bar p_1+\bar p_2+\bar t_2}\bar\gamma\,, \quad (4.9)$$

$$\delta\Upsilon^{\eta\bar\eta}_{CC\omega\omega} =$$
$$= \frac{i\eta\bar\eta}{8}\int_0^1 \mathrm{d}\tau\, e^{i(t_1+t_2)^\alpha(\tau p_1+(\tau-1)p_2-t_1)}C(\tau y,\bar y)\bar*C((\tau-1)y,\bar y)\bar*\omega(-y,\bar y)\bar*\omega(-y,\bar y)k*$$
$$* \,\bar h_{\bar p_1+\bar p_2+\bar t_1+\bar t_2}\bar\Delta_{\bar p_1+\bar p_2+2\bar t_1+2\bar t_2}\bar\Delta_{\bar p_1+\bar p_2+\bar t_1+2\bar t_2}\bar\gamma \quad (4.10)$$

появляются из-за специального локального и z-независимого переопределения поля B, которое подобрано таким образом, чтобы свести к минимуму число сверток по производным в вершинах младших порядков. Само переопределение приведено в главе 3 (3.121).

Используя тот факт, что $f(y) * \bar f(\bar y) = f(y)\bar f(\bar y)$ для любых $f(y)$ и $\bar f(\bar y)$, и, следовательно,

$$h_a\ \Delta_b\Delta_c\ \gamma * \bar h_{\bar a}\bar\Delta_{\bar b}\bar\Delta_{\bar c}\bar\gamma = h_a\ \Delta_b\Delta_c\ \gamma\, \bar h_{\bar a}\bar\Delta_{\bar b}\bar\Delta_{\bar c}\bar\gamma, \quad (4.11)$$

легко видеть, что получившиеся пропорциональные $\eta\bar\eta$ вершины не содержат сверток по спинорным индексам ноль-форм C либо в голоморфном, либо в антиголоморфном секторах (или в обоих). Последнее является следствием того факта, продемонстрированного в предыдущей главе, что выражение вида

$$C * C * h_{a_1 p_1 + a_2 p_2} \, \triangle_{b_1 p_1 + b_2 p_2} \triangle_{c_1 p_1 + c_2 p_2} \, \gamma \tag{4.12}$$

является локальным, если

$$a_2 - a_1 = b_2 - b_1 = c_2 - c_1 = 1 \,. \tag{4.13}$$

Как видно из (4.2)-(4.7), каждое слагаемое удовлетворяет этим условиям.

4.2 Получение вершин смешанного сектора

Стратегия получения вершин $\Upsilon^{\eta\bar\eta}$ заключается в следующем. Сперва решаются уравнения для S_2 и W_2, которые зависят от B_2 (3.127). Имея выражения для W_1 и W_2, вычисляем вершины смешаного типа $\Upsilon^{\eta\bar\eta}$ через (3.85) и (3.129). Таким образом получаем результат, который не учитывает локальное переопеределение (4.61). Этот локальный сдвиг приводит к изменениям $W_2 \to W_2 + \delta W_2$ в голоморфном и смешанном секторах и следовательно к изменению $\Upsilon^{\eta\bar\eta} \to \Upsilon^{\eta\bar\eta} + \delta\Upsilon^{\eta\bar\eta}$. Подобные изменения легко учитываются, если δW_2 решаются с помощью стандартной гомотопии $\triangle_0$. Выбор $\triangle_0$ обусловлен исключительно простотой, так как для локального переопределения полей любая гомотопия приведет к локальным вкладам в окончательную вершину. В силу факта

$$\mathrm{d}_x \, \triangle_0 + \triangle_0 \, \mathrm{d}_x = 0 \tag{4.14}$$

это обстоятельство позволяет извлечь соответствующую поправку к вершинам $\delta\Upsilon^{\eta\bar\eta}$ в виде

$$\delta\Upsilon^{\eta\bar\eta} = -h_0\{\omega, \delta W_2\}_* \,. \tag{4.15}$$

Так как второй порядок в $\eta\bar\eta$-секторе приходит из произведений голоморфных на антиголоморфные вклады первых порядков, нет смысла использовать предельную стягивающую гомотопию, введеную впервые в [56] (Подробности приведены Приложении Б).

Смешанная стягивающая гомотопия

Чтобы вычислить $\Upsilon^{\eta\bar\eta}$, необходимо разрешить уравнения типа (3.27) с правой частью, содержащей один-форму пропороциональную θ^α и $\bar\theta^{\dot\alpha}$ или два-формы пропорциональные $\theta^\alpha\bar\theta^{\dot\alpha}$. Существует несколько подходов, которые могут быть применены для решения проблемы. Один из них заключается в применении тотальной гомотопии Δ^{tot} по отношению к $Z^A = (z^\alpha,\bar z^{\dot\alpha})$ и $\Theta^A = (\theta^\alpha,\bar\theta^{\dot\alpha})$, а не только к голоморфным или антиголоморфным переменным, как это делалось ранеее. Другой подход заключается в использовании спектральной последовательности по отношению к сдвиговым гомотопиям Δ_q (3.32), $\bar\Delta_{\bar q}$ и когомологическим проекторам h_q и $\bar h_{\bar q}$, введенным в предыдущей главе

$$h_q J(z,y;\theta) = J(-q,y;0)\,. \tag{4.16}$$

Это означает, что начиная, например, с голоморфного сектора без зависимости от $\bar\theta_\alpha$ можно восстановить $\theta^p\bar\theta^{\bar p}$-формы, решая уравнения

$$\mathrm{d}_z f^{p,\bar p} = g^{p+1,\bar p} - \mathrm{d}_{\bar z} f^{p+1,\bar p-1} \tag{4.17}$$

с помощью некоторых Δ_q, шаг за шагом повышая $\bar p$ вплоть до последнего шага по антиголоморфному сектору с уравнением

$$\mathrm{d}_{\bar z} f^{0,\bar p-1} = g^{0,\bar p}, \tag{4.18}$$

которое следует решить с помощью $\bar\Delta_{\bar q}$ с некоторым сдвигом $\bar q$.

Оба подхода являются неудобными по той или иной причине. Тотальная гомотопия Δ_{tot} не сохраняет структуры, которые предписывает теорема о Пфаффовой локальности в отдельности по отношению к голоморфным и антиголоморфным переменным. Подход спектральной последовательности (4.18) рассматривает голоморфные и антиголоморфные сектора ассиметрично.

Оказывается, что удобнее использовать смешанный голоморфно-антиголоморфно симметричный оператор

$$\tilde\Delta_{q\bar q} := \frac{1}{2}(\Delta_q + \bar\Delta_{\bar q})\,. \tag{4.19}$$

Используя формулы предыдущей главы, получим

$$\{\mathrm{d}_Z, \bar{\Delta}_{q\bar{q}}\} = 1 - \tilde{h}_{q\bar{q}}\,, \tag{4.20}$$

где

$$\tilde{h}_{q\bar{q}} := \frac{1}{2}(h_q + \bar{h}_{\bar{q}})\,. \tag{4.21}$$

Здесь гомотопические операторы $\bar{\Delta}_{\bar{q}}$ и соответствующие им когомологические проекторы $\bar{h}_{\bar{q}}$ могут быть получены из Δ_q (3.32) и h_q (4.16) заменой $z \to \bar{z}$, $q \to \bar{q}$.

Как следует из его определения, $\tilde{h}_{q\bar{q}}$ не является проектором на когомологии оператора d_Z. Тем не менее, уравнения такого типа (3.27) могут быть решены с помощью (4.20), если правая часть аннигилируется $\tilde{h}_{q\bar{q}}$. Как будет видно далее, для выполнения этого условия следует должным образом выбрать индексы q и $\bar{q}$ у гомотопических операторов.

Далее в вычислениях мы будем использовать формулы из предыдущей главы (3.33), (3.56), (3.67),(3.68).

4.2.1 Нахождение полей S_2 и W_2

Уравнения для S_2, следующие из (3.8), в смешанном секторе имеют вид

$$\mathrm{d}_Z S_2\big|_{\eta\bar{\eta}} = \frac{i}{2}\big(i\bar{\eta}B_2^{\eta} * \bar{\gamma} + i\eta B_2^{\bar{\eta}} * \gamma - S_1^{\bar{\eta}} * S_1^{\eta} - S_1^{\eta} * S_1^{\bar{\eta}}\big) \tag{4.22}$$

с S_1 (3.80) и B_2 (3.127). Используя формулы звездочной перестановочности (3.77),(3.78), (3.79), уравнения для S_2 в $\eta\bar{\eta}$ секторе могут быть приведены к форме

$$\mathrm{d}_Z S_2\big|_{\eta\bar{\eta}} = -\frac{i\eta\bar{\eta}}{8} C * C * \Big[\ \Delta_{p_2}\Delta_{p_1+2p_2}\,\gamma * \bar{\gamma} + \bar{\Delta}_{\bar{p}_2}\bar{\Delta}_{\bar{p}_1+2\bar{p}_2}\bar{\gamma} * \gamma + \\ + \Delta_{p_1+2p_2}\,\gamma * \bar{\Delta}_{\bar{p}_2}\bar{\gamma} - \Delta_{p_2}\,\gamma * \bar{\Delta}_{\bar{p}_1+2\bar{p}_2}\bar{\gamma}\Big]\,. \tag{4.23}$$

Согласно [64] правая часть (4.23) является полностью нечетной по отношению к классификации теоремы о Пфаффовой локальности, т.е. является нечетной по отношению как к голоморфным, так и антиголоморфным переменным. Следовательно, подходящий выбор для q и $\bar{q}$ – это нечетные сдвиги, подчиняющиеся (3.112) и сопряженному условию, соответственно. Замечательно, что правая часть уравнения (4.23) аннигилируется $\tilde{h}_{q'\bar{q}'}$ если

$$q' = -\mu p_2 - (1+\mu)p_1\,, \qquad \bar{q}' = -\bar{\mu}\bar{p}_2 - (1+\bar{\mu})\bar{p}_1\,, \qquad \forall \mu, \bar{\mu} \in \mathbb{C}\,. \tag{4.24}$$

Последнее выполнено в силу формулы (3.62), которая справедлива для любого μ. Также справедливо следующее соотношение звездочной перестановочности (3.77)

$$\tilde{h}_{q'\bar{q}'} C * C * (\ldots) = C * C * \tilde{h}_{(q'+p_1+p_2)(\bar{q}'+\bar{p}_1+\bar{p}_2)}(\ldots)\,. \tag{4.25}$$

Очевидно, что q' и $\bar{q}'$ (4.24) являются нечетными по отношению к классификации теоремы о Пфаффовой локальности. Следовательно, можно решить (4.23), используя $\tilde{\Delta}_{q'\bar{q}'}$ с любыми μ и $\bar{\mu}$. Само решение будет иметь вид

$$\begin{aligned} S_2\big|^{\mu\bar{\mu}}_{\eta\bar{\eta}} = -\frac{i\eta\bar{\eta}}{16} C*C*\big[\Delta_{(1-\mu)p_2-\mu p_1} + \bar{\Delta}_{(1-\bar{\mu})\bar{p}_2-\bar{\mu}\bar{p}_1}\big]\Big[\, \Delta_{p_2}\Delta_{p_1+2p_2}\ \gamma*\bar{\gamma} + \bar{\Delta}_{\bar{p}_2}\bar{\Delta}_{\bar{p}_1+2\bar{p}_2}\bar{\gamma}*\gamma + \\ + \Delta_{p_1+2p_2}\ \gamma * \bar{\Delta}_{\bar{p}_2}\bar{\gamma} - \Delta_{p_2}\ \gamma * \bar{\Delta}_{\bar{p}_1+2\bar{p}_2}\bar{\gamma}\Big]\,. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Положим $\mu = \bar{\mu} = -1$, так как при этом выборе формулы упрощаются. Это приводит к

$$S_2\big|_{\eta\bar{\eta}} = -\frac{i\eta\bar{\eta}}{8} C * C * \Big[\, \Delta_{p_2}\Delta_{p_1+2p_2}\ \gamma * \bar{\Delta}_{\bar{p}_1+2\bar{p}_2}\bar{\gamma} + \Delta_{p_1+2p_2}\ \gamma * \bar{\Delta}_{\bar{p}_2}\bar{\Delta}_{\bar{p}_1+2\bar{p}_2}\bar{\gamma}\Big]. \tag{4.27}$$

Уравнение для W_2, следующее из (3.8), в смешанном секторе имеет вид

$$\mathrm{d}_Z W_2^{\eta\bar{\eta}} = -\frac{i}{2}(\mathrm{d}_x S_1 + \mathrm{d}_x S_2 + W_1 * S_1 + S_1 * W_1 + \omega * S_2 + S_2 * \omega)\big|_{\eta\bar{\eta}}\,. \tag{4.28}$$

$W_2^{\eta\bar{\eta}}$ содержит три типа слагаемых

$$W_2^{\eta\bar{\eta}} = W^{\eta\bar{\eta}}_{2\,\omega CC} + W^{\eta\bar{\eta}}_{2\,C\omega C} + W^{\eta\bar{\eta}}_{2\,CC\omega}\,, \tag{4.29}$$

где нижний индекс, как и в главе 3, означает порядок полей ω и C. Из (4.28) следует

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}_Z W^{\eta\bar\eta}_{2\,\omega CC} = \frac{\eta\bar\eta}{16}\omega * C * C * \Big[&\underbrace{h_{p_2}\ \triangle_{p_1+2p_2}\triangle_{p_1+2p_2+t}\ \gamma * \bar\triangle_{\bar p_1+\bar p_2+\bar t}\bar\gamma}_{\mathrm{d}_x S_1} + \\
&+ \underbrace{\triangle_{p_2}\triangle_{p_1+2p_2+t}\ \gamma * \bar\triangle_{\bar p_1+2\bar p_2+\bar t}\bar\gamma}_{\mathrm{d}_x S_2} + \underbrace{\triangle_{p_1+2p_2+t}\triangle_{p_1+2p_2}\ \gamma * \bar\triangle_{\bar p_2}\bar\gamma}_{W_{1\,\omega C}*S_1} - \\
&- \underbrace{\triangle_{p_2}\triangle_{p_1+2p_2}\ \gamma * \bar\triangle_{\bar p_1+2\bar p_2}\bar\gamma}_{\omega * S_2}\Big] + h.c., \qquad (4.30)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}_Z W^{\eta\bar\eta}_{2\,C\omega C} = \frac{\eta\bar\eta}{16}C * \omega * C * \Big[&\underbrace{(h_{p_1+2p_2+2t} - h_{p_2})\ \triangle_{p_2+t}\triangle_{p_1+2p_2+t}\ \gamma * \bar\triangle_{\bar p_1+\bar p_2+\bar t}\bar\gamma}_{\mathrm{d}_x S_1} + \\
&\underbrace{-\ \triangle_{p_2}\triangle_{p_1+t+2p_2}\ \gamma * \bar\triangle_{\bar p_1+2\bar p_2+\bar t}\bar\gamma + \triangle_{p_2+t}\triangle_{p_1+2p_2+2t}\ \gamma * \bar\triangle_{\bar p_1+2\bar p_2+2\bar t}\bar\gamma}_{\mathrm{d}_x S_2} + \\
&\underbrace{-\ \triangle_{p_1+2p_2+t}\triangle_{p_1+2p_2+2t}\ \gamma * \bar\triangle_{\bar p_2}\bar\gamma}_{W_{1\,C\omega}*S_1} - \underbrace{\triangle_{p_2+t}\triangle_{p_2}\ \gamma * \bar\triangle_{\bar p_1+2\bar p_2+2\bar t}\bar\gamma}_{S_1 * W_{1\,\omega C}}\Big] + h.c., \qquad (4.31)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}_Z W^{\eta\bar\eta}_{2\,CC\omega} = \frac{\eta\bar\eta}{16}C * C * \omega * \Big[&\underbrace{h_{p_2+2t}\ \triangle_{p_2+t}\triangle_{p_1+2p_2+2t}\ \gamma * \bar\triangle_{\bar p_1+\bar p_2+\bar t}\bar\gamma}_{\mathrm{d}_x S_1} + \\
&\underbrace{-\ \triangle_{p_2+t}\triangle_{p_1+2p_2+2t}\ \gamma * \bar\triangle_{\bar p_1+2\bar p_2+2\bar t}\bar\gamma}_{\mathrm{d}_x S_2} + \underbrace{\triangle_{p_2+t}\triangle_{p_2+2t}\ \gamma * \bar\triangle_{\bar p_1+2\bar p_2+2\bar t}\bar\gamma}_{S_1 * W_{1\,C\omega}} + \\
&\underbrace{+\ \triangle_{p_2+2t}\triangle_{p_1+2p_2+2t}\ \gamma * \bar\triangle_{\bar p_1+2\bar p_2+2\bar t}\bar\gamma}_{S_2 * \omega}\Big] + h.c.\,. \qquad (4.32)
\end{aligned}
$$

Обозначение $\underbrace{P}_{Q}$ определяет часть P, приходящую из Q.

Заметим, что все слагаемые, имеющие форму $\triangle_a\triangle_b\ (\gamma) * \bar\triangle_c\bar\triangle_d(\bar\gamma)$ в (4.30)-(4.32), которые являются нечетными по отношению к классификации, введенной в теореме о Пфаффовой локальности, по голоморфным переменным, являются четными по антиголоморфным и наоборот. Отсюда следует, что для любых q^U ,$\bar q^U$

$$\tilde h_{q^U \bar q^U}\mathrm{d}_Z W^{\eta\bar\eta}_{2\,U} \neq 0\,, \qquad U = \{CC\omega,\, \omega CC,\, C\omega C\}. \qquad (4.33)$$

Однако можно показать, что уравнения (4.30)-(4.32) могут быть эквивалентно представлены в виде

$$\mathrm{d}_Z W^{\eta\bar\eta}_{2\,U} = \mathrm{d}_Z F_U + G_U\,, \tag{4.34}$$

где все G_U являются нечетными по отношению к теореме о Пфаффовой локальности, и существуют такие сдвиги q_U и $\bar q_U$, что

$$\tilde h_{q_U \bar q_U} G_U = 0. \tag{4.35}$$

Следовательно, (4.34) решается с помощью

$$W^{\eta\bar\eta}_{2\,U} = F^U + \tilde\Delta_{q_U \bar q_U} G^U. \tag{4.36}$$

Рассмотрим сперва $W^{\eta\bar\eta}_{2\,\omega CC}$ (4.30). Из уравнения (3.67) для любого $\bar q$ следует

$$\begin{gathered}h_{p_2}\ \triangle_{p_1+2p_2}\triangle_{p_1+2p_2+t}\ \gamma * \bar\triangle_{\bar p_1+\bar p_2+\bar t}\bar\gamma = \\ \mathrm{d}_Z\big(h_{p_2}\ \triangle_{p_1+2p_2}\triangle_{p_1+2p_2+t}\ \gamma * \bar\triangle_{\bar q}\bar\triangle_{\bar p_1+\bar p_2+\bar t}\bar\gamma\big) + h_{p_2}\ \triangle_{p_1+2p_2}\triangle_{p_1+2p_2+t}\ \gamma * \bar\triangle_{\bar q}\bar\gamma.\end{gathered} \tag{4.37}$$

Обозначаем

$$\begin{aligned} F_{q,\bar q\ \omega CC} &= \frac{\eta\bar\eta}{16}\omega * C * C * h_{p_2}\ \triangle_{p_1+2p_2}\triangle_{p_1+2p_2+t}\ \gamma * \bar\triangle_{\bar q}\bar\triangle_{\bar p_1+\bar p_2+\bar t}\bar\gamma + h.c.\,, \qquad (4.38)\\ G_{q,\bar q\ \omega CC} &= \mathrm{d}_Z W^{\eta\bar\eta}_{2\,\omega CC} - \mathrm{d}_Z F_{q,\bar q\ \omega CC}. \end{aligned}$$

Нужно найти такие Q,$\bar Q$ и q,$\bar q$, что

$$\tilde h_{Q-p_1-p_2-t,\bar Q-\bar p_1-\bar p_2-\bar t} G_{q,\bar q\ \omega CC} = 0\,. \tag{4.39}$$

Как следствие (3.78), это уравнение в частности требует

$$\begin{aligned}\Big[& h_{p_2}\ \triangle_{p_1+2p_2}\triangle_{p_1+2p_2+t}\ \gamma * \bar\triangle_{\bar q}\bar\gamma + \\ &+ h_Q\ \triangle_{p_2}\triangle_{p_1+2p_2+t}\ \gamma * \bar\triangle_{\bar p_1+2\bar p_2+\bar t}\bar\gamma + h_Q\ \triangle_{p_1+2p_2+t}\triangle_{p_1+2p_2}\ \gamma * \bar\triangle_{\bar p_2}\bar\gamma - \\ &- h_Q\ \triangle_{p_2}\triangle_{p_1+2p_2}\ \gamma * \bar\triangle_{\bar p_1+2\bar p_2}\bar\gamma\Big] = 0\,.\end{aligned} \tag{4.40}$$

У этого уравнения существует три очевидных решения

$$\{Q=p_1+2p_2+t\,,\ \bar q=\bar p_1+2\bar p_2\}\,,\quad \{Q=p_1+2p_2\,,\bar q=\bar p_1+2\bar p_2+\bar t\}\,,\quad \{Q=p_2\,,\ \bar q=\bar p_2\}\,. \tag{4.41}$$

Выбирая для простоты $Q=q=p_2\,,\ \bar q=\bar Q=\bar p_2$ в силу уравнения (3.67) получим

$$F_{p_2,\bar p_2\omega CC}=\frac{\eta\bar\eta}{16}\omega*C*C*h_{p_2}\ \triangle_{p_1+2p_2}\triangle_{p_1+2p_2+t}\ \gamma*\bar\triangle_{\bar p_2}\bar\triangle_{\bar p_1+\bar p_2+\bar t}\bar\gamma+h.c.\,,$$

$$\tilde h_{-p_1-t,-\bar p_1-\bar t}G_{p_2,\bar p_2\omega CC}=0\,. \tag{4.42}$$

Следовательно в силу (4.36) получаем

$$W^{\eta\bar\eta}_{2\,\omega CC}=-\frac{\eta\bar\eta}{16}\omega*C*C*\Big[h_{p_2}\ \triangle_{p_1+2p_2}\triangle_{p_1+2p_2+t}\ \gamma*\bar\triangle_{\bar p_2}\bar\triangle_{\bar p_1+\bar p_2+\bar t}\bar\gamma+$$
$$+\frac12\ \triangle_{p_2}\triangle_{p_1+2p_2+t}\ \gamma*\bar\triangle_{\bar p_2}\bar\triangle_{\bar p_1+2\bar p_2+\bar t}\bar\gamma+\frac12\ \triangle_{p_2}\triangle_{p_1+2p_2}\ \gamma*\bar\triangle_{\bar p_1+2\bar p_2}\bar\triangle_{\bar p_2}\bar\gamma\Big]+h.c., \tag{4.43}$$

которое решает уравнение (4.30).

Рассмотрение (4.31) проводится аналогично. Выбирая

$$\begin{aligned} F_{q,\bar q\ C\omega C} &= \frac{\eta\bar\eta}{16}C*\omega*C*\big[(h_{p_1+2p_2+2t}-h_{p_2})\ \triangle_{p_2+t}\triangle_{p_1+2p_2+t}\ \gamma*\bar\triangle_{\bar q}\bar\triangle_{\bar p_1+\bar p_2+\bar t}\bar\gamma\big]+h.c.(4\\ G_{q,\bar q\ C\omega C} &= \mathrm{d}_Z W^{\eta\bar\eta}_{2\,C\omega C}-\mathrm{d}_Z F_{q,\bar q\ C\omega C}\end{aligned}$$

легко видеть, что уравнение

$$\tilde h_{Q-p_1-p_2-t,\bar Q-\bar p_1-\bar p_2-\bar t}G_{q,\bar q\ C\omega C}=0 \tag{4.45}$$

допускает решения $q=p_1+2p_2+2t$, $\bar q=\bar p_1+2\bar p_2+2\bar t$, $Q=p_1+2p_2+t$, $\bar Q=\bar p_1+2\bar p_2+\bar t$. Соответствующее решение (4.31) в форме (4.36) имеет вид

$$W^{\eta\bar\eta}_{2\,C\omega C}=-\frac{\eta\bar\eta}{16}C*\omega*C*\Big[(h_{p_1+2p_2+2t}-h_{p_2})\ \triangle_{p_2+t}\triangle_{p_1+2p_2+t}\ \gamma*\bar\triangle_{p_1+2p_2+2t}\bar\triangle_{p_1+p_2+t}\bar\gamma+$$
$$-\frac12\ \triangle_{p_2}\triangle_{p_1+2p_2+t}\ \gamma*\bar\triangle_{\bar p_1+2\bar p_2+2\bar t}\bar\triangle_{\bar p_1+2\bar p_2+\bar t}\bar\gamma-\frac12\ \triangle_{p_1+2p_2+t}\triangle_{p_1+2p_2+2t}\ \gamma*\bar\triangle_{\bar p_1+2\bar p_2+2\bar t}\bar\triangle_{\bar p_2}\bar\gamma+$$
$$+\frac12 h_{p_1+2p_2+t}\ \triangle_{p_1+2p_2+2t}\triangle_{p_2}\ \gamma*\bar\triangle_{\bar p_1+2\bar p_2+t}\bar\triangle_{\bar p_1+2\bar p_2+2\bar t}\bar\gamma\Big]+h.c.\,. \tag{4.46}$$

Окончательно из (4.32) следует

$$\mathrm{d}_Z W^{\eta\bar\eta}_{2\,CC\omega} = -\frac{\eta\bar\eta}{16} C{*}C{*}\omega{*}\mathrm{d}_Z\big(h_{p_2+t}\ \triangle_{p_2+2t}\triangle_{p_1+2p_2+2t}\ \gamma{*}\bar\triangle_{\bar p_1+2\bar p_2+2\bar t}\bar\triangle_{\bar p_1+\bar p_2+\bar t}\bar\gamma\big) + h.c.\,. \tag{4.47}$$

Следовательно,

$$W^{\eta\bar\eta}_{2\,CC\omega} = \frac{\eta\bar\eta}{16} C*C*\omega*h_{p_2+t}\ \triangle_{p_2+2t}\triangle_{p_1+2p_2+2t}\ \gamma*\bar\triangle_{p_1+2p_2+2t}\bar\triangle_{p_1+p_2+t}\bar\gamma + h.c. \tag{4.48}$$

решает (4.32).

Далее уместны следующие комментарии. Выбор $\mu = \bar\mu = -1$ гомотопических параметров $\frac{1}{2}\big[\triangle_{(1-\mu)p_2-\mu p_1} + \bar\triangle_{(1-\bar\mu)\bar p_2-\bar\mu\bar p_1}\big]$ в (4.26) приводит к ассиметричному результату $W_2^{\eta\bar\eta}$, как видно из факта того, что $W^{\eta\bar\eta}_{2\,CC\omega}$ (4.48) имеет более простой вид, чем $W^{\eta\bar\eta}_{2\,\omega CC}$ (4.43). Как показано ниже, другой выбор для констант μ,$\bar\mu$ приводит к существенно другим формулам для компонент соответствующих вершин $\Upsilon^{\eta\bar\eta}(\omega,\omega,C,C)$.

Выбор $\mu = \bar\mu = 0$ в (4.26) дает

$$S_2 = -\frac{i\eta\bar\eta}{8} C*C*\Big[\triangle_{p_2}\gamma*\bar\triangle_{\bar p_2}\bar\triangle_{\bar p_1+2\bar p_2}\bar\gamma + \triangle_{p_2}\ \triangle_{p_1+2p_2}\ \gamma*\bar\triangle_{\bar p_2}\bar\gamma\Big]\,, \tag{4.49}$$

приводя к упрощениям $W^{\eta\bar\eta}_{2\,\omega CC}$ и усложнению $W^{\eta\bar\eta}_{2\,CC\omega}$. Чтобы получить $W_2^{\eta\bar\eta}$ и как следствие $\Upsilon^{\eta\bar\eta}(\omega,\omega,C,C)$ симметричными по отношению к перестановкам полей C и ω, можно взять усредненную сумму $\mu = 0\,,\ \bar\mu = -1$

$$\begin{aligned} S_2^{\eta\bar\eta} = -\frac{i\eta\bar\eta}{16} C*C*\Big[\ &\triangle_{p_2}\triangle_{p_1+2p_2}\ \gamma*\bar\triangle_{\bar p_1+2\bar p_2}\bar\gamma + \triangle_{p_2}\gamma*\bar\triangle_{\bar p_2}\bar\triangle_{\bar p_1+2\bar p_2}\bar\gamma + \\ &+ \triangle_{p_1+2p_2}\ \gamma*\bar\triangle_{\bar p_2}\bar\triangle_{\bar p_1+2\bar p_2}\bar\gamma + \triangle_{p_2}\ \triangle_{p_1+2p_2}\ \gamma*\bar\triangle_{\bar p_2}\bar\gamma\Big]\,. \end{aligned} \tag{4.50}$$

Заметим, что все получившиеся вершины $\Upsilon^{\eta\bar\eta}$ будут локальными.

4.2.2 Получение вершин $\Upsilon^{\eta\bar\eta}(\omega,\omega,C,C)$

Из уравнения (3.5) получим

$$\Upsilon^{\eta\bar\eta}(\omega,\omega,C,C) = -\big(\mathrm{d}_x W_1 + W_1*W_1 + \mathrm{d}_x W_2 + \omega*W_2 + W_2*\omega\big)\big|_{\eta\bar\eta}. \tag{4.51}$$

Подставляя полученные ранее выражения для W_1 и W_2 в правую часть уравнения (4.51), можно вычислить $\eta\bar\eta$ вершины в этом порядке теории возмущений.

Процедура устроена следующим образом. Так как правая часть (4.51) по построению $z,\bar z$–независима, то можно применить любой проектор $h_q\bar h_{\bar q}$ (q и $\bar q$, которые не обязательно комплексно сопряжены).

В качестве примера рассмотрим вершину $\Upsilon^{\eta\bar\eta}_{C\omega C\omega}$. Уравнение (4.51) дает

$$\Upsilon_{C\omega C\omega} = -\big(\mathrm{d}_x W_{2C\omega\underline{C}} + \mathrm{d}_x W_{2C\underline{C}\omega} + \mathrm{d}_x W_{2\underline{C}C\omega} + \mathrm{d}_x W_{1\,C\underline{\omega}} + \mathrm{d}_x W_{1\,\underline{C}\omega}\big)\big|_{C\omega C\omega} + \\ - W_{1\,C\omega} * W_{1\,C\omega} - W_{2C\omega C} * \omega\,, \qquad (4.52)$$

где подчеркивание обозначает поля, на которые действует дифференциал d_x. В частности, используя формулу (4.48) для $W^{\eta\bar\eta}_{2\,CC\omega}$, получим (сопряженные члены опущены для краткости)

$$\mathrm{d}_x W^{\eta\bar\eta}_{2\,C\underline{C}\omega} =: -\frac{\eta\bar\eta}{16} C * (\mathrm{d}_x C) * \omega * h_{p_2+2t}\ \Delta_{p_2+t}\Delta_{p_1+2p_2+2t}\ \gamma * \bar\Delta_{p_1+2p_2+2t}\bar\Delta_{p_1+p_2+t}\bar\gamma\,,$$

откуда в силу (3.129) следует

$$\mathrm{d}_x W_2^{\eta\bar\eta}{}_{C\underline{C}\omega} = \frac{\eta\bar\eta}{16} C * \underbrace{\omega * C} * \omega * h_{p_2+t_1+2t_2}\ \Delta_{p_2+t_1+t_2}\Delta_{p_1+2p_2+2t_1+2t_2}\ \gamma * \\ \bar\Delta_{\bar p_1+2\bar p_2+2\bar t_1+2\bar t_2}\bar\Delta_{\bar p_1+\bar p_2+\bar t_1+\bar t_2}\bar\gamma\,. \qquad (4.53)$$

Обозначение $\underbrace{\omega * C}$ показывает, какое конкретно слагаемое пришло из дифференцирования C и связанную с ним замену гомотопических индексов $t \to t_2$ и $p_1 \to p_1 + t_1$ в согласии с (3.85),(3.129).

Аналогично из (4.46), (4.48) и (3.83) в силу (3.85),(3.129) получим

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_x W^{\eta\bar\eta}_{2\,C\omega\underline{C}} = & -\frac{\eta\bar\eta}{16} C * \omega * \underbrace{C * \omega} * \Big[\left(h_{p_1+2p_2+2t_1+2t_2} - h_{p_2+t_2}\right) \triangle_{p_2+t_1+t_2} \triangle_{p_1+2p_2+t_1+2t_2}\ \gamma * \\
& * \bar\triangle_{\bar p_1+2\bar p_2+2\bar t_1+2\bar t_2} \bar\triangle_{\bar p_1+\bar p_2+\bar t_1+\bar t_2} \bar\gamma + \qquad (4.54)\\
& -\frac{1}{2}\ \triangle_{p_2+t_2} \triangle_{p_1+2p_2+t_1+2t_2}\ \gamma * \bar\triangle_{\bar p_1+2\bar p_2+2\bar t_1+2\bar t_2} \bar\triangle_{\bar p_1+2\bar p_2+\bar t_1+2\bar t_2} \bar\gamma + \\
& -\frac{1}{2}\ \triangle_{p_1+2p_2+t_1+2t_2} \triangle_{p_1+2p_2+2t_1+2t_2}\ \gamma * \bar\triangle_{\bar p_1+2\bar p_2+2\bar t_1+2\bar t_2} \bar\triangle_{\bar p_2+\bar t_2} \bar\gamma + \\
& +\frac{1}{2} h_{p_1+2p_2+t_1+2t_2}\ \triangle_{p_1+2p_2+2t_1+2t_2} \triangle_{p_2+t_2}\ \gamma * \bar\triangle_{\bar p_1+2\bar p_2+\bar t_1+2\bar t_2} \bar\triangle_{\bar p_1+2\bar p_2+2\bar t_1+2\bar t_2} \bar\gamma \Big] , \\
\mathrm{d}_x W^{\eta\bar\eta}_{2\,\underline{C}C\overline{\overline{\omega}}} = & \ \frac{\eta\bar\eta}{16} \underbrace{C * \omega} * C * \omega * \Big[h_{p_2+2t_2}\ \triangle_{p_2+t_2} \triangle_{p_1+2p_2+t_1+2t_2}\ \gamma * \qquad (4.55)\\
& * \bar\triangle_{\bar p_1+2\bar p_2+\bar t_1+2\bar t_2} \bar\triangle_{\bar p_1+\bar p_2+\bar t_1+\bar t_2} \bar\gamma \Big],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_x W^{\eta}_{1\,C\underline{\omega}} = & \ \frac{\eta\bar\eta}{16} C * \underbrace{\omega * C * \omega} * \Big[\Big(h_{p_2+t_1+t_2}\ \triangle_{p_2+t_1+2t_2} \triangle_{p_2+t_2}\ \gamma + \qquad (4.56)\\
& + h_{p_2+t_1+2t_2}\ \triangle_{p_2+2t_2} \triangle_{p_2+t_2}\ \gamma \Big) * \\
& * \bar\triangle_{\bar p_1+\bar p_2+\bar t_1+\bar t_2} \bar\triangle_{\bar p_1+2\bar p_2+2\bar t_1+2\bar t_2} \bar\gamma \Big] , \\
\mathrm{d}_x W^{\eta}_{1\,\underline{C}\omega} = & \ \frac{\eta\bar\eta}{16} \underbrace{C * \omega * C} * \omega * \Big[\big(h_{p_1+2p_2+2t_1+2t_2} - \qquad (4.57)\\
& - h_{p_2+2t_2} \big)\ \triangle_{p_2+t_1+2t_2} \triangle_{p_1+2p_2+t_1+2t_2}\ \gamma * \\
& * \bar\triangle_{\bar p_1+\bar p_2+\bar t_1+\bar t_2} \bar\triangle_{\bar p_1+\bar p_2+\bar t_1+2\bar t_2} \bar\gamma \Big] .
\end{aligned}$$

Используя star-exchange формулу (3.77) из (3.83) и (4.46), получим

$$\begin{aligned}
W^{\eta}_{1\,C\omega} * W^{\bar\eta}_{1\,C\omega} = & \ \frac{\eta\bar\eta}{16} C * \omega * C * \omega * \Big[\ \triangle_{p_1+2p_2+t_1+2t_2} \triangle_{p_1+2p_2+2t_1+2t_2}\ \gamma * \qquad (4.58)\\
& * \bar\triangle_{\bar p_2+\bar t_2} \bar\triangle_{\bar p_2+2\bar t_2} \bar\gamma \Big] , \\
W^{\eta\bar\eta}_{2\,C\omega C} * \omega = & \ \frac{\eta\bar\eta}{16} C * \omega * C * \omega * \Big[\left(h_{p_1+2p_2+2t_1+2t_2} - h_{p_2+2t_2} \right) \times \qquad (4.59)\\
& \triangle_{p_2+t_1+2t_2} \triangle_{p_1+2p_2+t_1+2t_2}\ \gamma * \bar\triangle_{\bar p_1+2\bar p_2+2\bar t_1+2\bar t_2} \bar\triangle_{\bar p_1+\bar p_2+\bar t_1+2\bar t_2} \bar\gamma + \\
& -\frac{1}{2}\ \triangle_{p_2+2t_2} \triangle_{p_1+2p_2+t_1+2t_2}\ \gamma * \bar\triangle_{\bar p_1+2\bar p_2+2\bar t_1+2\bar t_2} \bar\triangle_{\bar p_1+2\bar p_2+\bar t_1+2\bar t_2} \bar\gamma + \\
& -\frac{1}{2}\ \triangle_{p_1+2p_2+t_1+2t_2} \triangle_{p_1+2p_2+2t_1+2t_2}\ \gamma * \bar\triangle_{\bar p_1+2\bar p_2+2\bar t_1+2\bar t_2} \bar\triangle_{\bar p_2+2\bar t_2} \bar\gamma + \\
& +\frac{1}{2} h_{p_1+2p_2+t_1+2t_2}\ \triangle_{p_1+2p_2+2t_1+2t_2} \triangle_{p_2+2t_2}\ \gamma * \\
& * \bar\triangle_{\bar p_1+2\bar p_2+\bar t_1+2\bar t_2} \bar\triangle_{\bar p_1+2\bar p_2+2\bar t_1+2\bar t_2} \bar\gamma \Big] .
\end{aligned}$$

Подстановка выражений (4.53)-(4.59) в (4.52) и применение когомологических проекторов

$$h_{p_1+2p_2+2t_1+2t_2}\bar{h}_{\bar{p}_1+2\bar{p}_2+2\bar{t}_1+2\bar{t}_2} \tag{4.60}$$

дает $\Upsilon^{\eta\bar{\eta}}_{C\omega C\omega}$ (4.6).

Аналогичным образом в силу (3.83), (4.43)-(4.48) и с учитом (3.85),(3.129) получаются оставшиеся вершины из (4.51). В приведении их к форме (4.2)-(4.7) полезным оказывается тождество (3.69).

На текущий момент вершины были вычислены с использованием (3.127). Теперь для того чтобы учесть локальное переопределение полей

$$\delta B_2 = \frac{\eta}{2}\int_0^1 dt\, C\left(ty,\bar{y};K\right) \bar{*}\, C\left(\left(t-1\right)y,\bar{y};K\right)k, \tag{4.61}$$

необходимо к ним добавить (4.15). Чтобы это сделать, вычислим δS_2, используя (4.22), и в конечном счете вычислим δW_2, используя (4.28), с помощью сдвиговой гомотопии $\triangle_0$

$$\delta S_2 = -\frac{1}{2}\,\triangle_0\left(\bar{\eta}\,\delta B_2^{\eta} * \bar{\gamma} + \eta\,\delta B_2^{\bar{\eta}} * \gamma\right), \tag{4.62}$$

$$\delta W_2 = -\frac{i}{2}\,\triangle_0\left(\omega * \delta S_2 + \delta S_2 * \omega\right)\Big|_{\eta\bar{\eta}}, \tag{4.63}$$

где δB_2 явно дается выражением (4.61). Подставляя (4.63) в (4.15), в конце концов получаем $\delta\Upsilon^{\eta\bar{\eta}}$ в форме (4.8)-(4.10).

4.3 Вывод

В данной главе был проанализирован смешанный сектор уравнений на один-формы. Вершины были получены из производящей системы (3.5)-(3.9) с помощью техники, обобщающей сдвиговые операторы гомотопий из Главы 3. Несмотря на то что новые операторы $\triangle_{q\bar{q}}$ не удовлетворяют разложению единицы (3.33) в привычном смысле, т.е. операторы $h_{q\bar{q}}$ из (4.20) не являются проекторами на d_Z-когомологии, соответсвующие уравнения удалось решить. Причина заключается в том, что поля младших порядков, входящих в соответствующие уравнения, были разрешены правильными по четности операторами сдвиговых гомотопий в смысле теоремы о Пфаффовой локальности. Последнее не только дало возможноть решить необходимые уравнения, т.е. найти такие параметры сдвигов q и $\bar{q}$, чтобы проектор $h_{q\bar{q}}$ аннигилировал правую часть, но также позволило найти мастер поля более высоких порядков в Z-доминированной форме. В силу леммы о Z-доминирование такие мастер поля неизбежно должны приводить к спин-локальным вершинам взаимодействия, что и было получено (см. (4.2)-(4.7)).

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Были найдены все структурные константы ассоциативного умножения в алгебре $\mathsf{Aq}(2,\nu)$. С их помощью могут перемножены любые формальные ряды. Из условия ассоциативности были выведены рекуррентные однозначно определяющие структурные константы для четно-четного случая. С помощью этих уравнений была показана справедливость предложенных ранее частных выражений.
2. Построено обобщение произведения Мояла на случай отличного от ноля значения параметра деформации. Полученная формула основана на интегральном представлении Похгаммера для бета-функции Эйлера. Сформулированное таким образом произведение потенциально может быть применено к функциями, выходящим за рамки класса формальных рядов. С помощью полученной формулы была проанализирована аналитическая структура произведения по параметру деформации в малдших порядках Также была предложена техника пертурбативого разложения структурных констант по параметру деформации.
3. Получены важные соотношения звездочной перестановочности, связывающие звездочное произведение и операторы сдвиговых гомотопий. Эти соотношения позволяют свести анализ локальности теории возмущений в младших порядках к анализу структур типа $\triangle\triangle\ \gamma$, $\triangle\triangle\ \gamma{*}\bar{\triangle}\bar{\triangle}\bar{\gamma}$, ... В этих структурах изучение (не)локальности сводится к анализу индексов в операторах сдвиговых гомотопий и соответствующих им когомологическим проекторам.
4. С помощью сдвиговых гомотопий над произвольным фоном были получены вершины $\Upsilon(\omega,\omega,C)$ и $\Upsilon(\omega,C,C)$, которые являются ультра-локальными и спин-локальными соответственно. Благодаря правильному выбору сдвиговых параметров у гомотопических операторов никакого переопределения полей не понадобилось.
5. Модернизируя технику сдвиговых гомотопий, из производящей системы были получены вершины смешанного сектора $\Upsilon^{\eta\bar{\eta}}(\omega,\omega,C,C)$, которые также являются спин-локальными.

Список литературы

[1] Matvei P Bronstein. “Quantentheorie schwacher gravitationsfelder”. В: *Phys. Z. Sowjetunion* 9.2-3 (1936), с. 140—157.

[2] B. P. Abbott и др. “Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger”. В: *Phys. Rev. Lett.* 116.6 (2016), с. 061102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.116.061102. arXiv: 1602.03837 [gr-qc].

[3] M.A. Vasiliev. “Higher spin superalgebras in any dimension and their representations”. В: *JHEP* 12 (2004), с. 046. DOI: 10.1088/1126-6708/2004/12/046. arXiv: hep-th/0404124.

[4] Steven Weinberg. “Photons and Gravitons in S-Matrix Theory: Derivation of Charge Conservation and Equality of Gravitational and Inertial Mass”. В: *Phys. Rev.* 135 (1964), B1049—B1056. DOI: 10.1103/PhysRev.135.B1049.

[5] Mikhail A. Vasiliev. “More on equations of motion for interacting massless fields of all spins in (3+1)-dimensions”. В: *Phys. Lett. B* 285 (1992), с. 225—234. DOI: 10.1016/0370-2693(92)91457-K.

[6] Daniel Z. Freedman, P. van Nieuwenhuizen и S. Ferrara. “Progress Toward a Theory of Supergravity”. В: *Phys. Rev. D* 13 (1976), с. 3214—3218. DOI: 10.1103/PhysRevD.13.3214.

[7] P. Van Nieuwenhuizen. “Supergravity”. В: *Phys. Rept.* 68 (1981), с. 189—398. DOI: 10.1016/0370-1573(81)90157-5.

[8] Z. Bern и др. “Unexpected Cancellations in Gravity Theories”. В: *Phys. Rev. D* 77 (2008), с. 025010. DOI: 10.1103/PhysRevD.77.025010. arXiv: 0707.1035 [hep-th].

[9] Zvi Bern и др. “Ultraviolet Properties of $\mathcal{N} = 8$ Supergravity at Five Loops”. В: *Phys. Rev. D* 98.8 (2018), с. 086021. DOI: 10.1103/PhysRevD.98.086021. arXiv: 1804.09311 [hep-th].

[10] Niklas Beisert и др. “E7(7) constraints on counterterms in N=8 supergravity”. В: *Phys. Lett. B* 694 (2011), с. 265—271. DOI: 10.1016/j.physletb.2010.09.069. arXiv: 1009.1643 [hep-th].

[11] Juan Martin Maldacena. "The Large N limit of superconformal field theories and supergravity". В: *Adv. Theor. Math. Phys.* 2 (1998), с. 231—252. DOI: 10.1023/A:1026654312961. arXiv: hep-th/9711200.

[12] I. R. Klebanov и A. M. Polyakov. "AdS dual of the critical O(N) vector model". В: *Phys. Lett. B* 550 (2002), с. 213—219. DOI: 10.1016/S0370-2693(02)02980-5. arXiv: hep-th/0210114.

[13] Edward Witten. "Anti-de Sitter space and holography". В: *Adv. Theor. Math. Phys.* 2 (1998), с. 253—291. DOI: 10.4310/ATMP.1998.v2.n2.a2. arXiv: hep-th/9802150.

[14] Simone Giombi и Xi Yin. "Higher Spin Gauge Theory and Holography: The Three-Point Functions". В: *JHEP* 09 (2010), с. 115. DOI: 10.1007/JHEP09(2010)115. arXiv: 0912.3462 [hep-th].

[15] Eugene P. Wigner. "On Unitary Representations of the Inhomogeneous Lorentz Group". В: *Annals Math.* 40 (1939). Под ред. Y. S. Kim и W. W. Zachary, с. 149—204. DOI: 10.2307/1968551.

[16] V. Bargmann и Eugene P. Wigner. "Group Theoretical Discussion of Relativistic Wave Equations". В: *Proc. Nat. Acad. Sci.* 34 (1948), с. 211. DOI: 10.1073/pnas.34.5.211.

[17] Mikhail A. Vasiliev. "Consistent equation for interacting gauge fields of all spins in (3+1)- dimensions". В: *Phys. Lett. B* 243 (1990), с. 378—382. DOI: 10.1016/0370-2693(90)91400-6.

[18] G. K. Savvidy. "Tensionless strings: Physical Fock space and higher spin fields". В: *Int. J. Mod. Phys. A* 19 (2004), с. 3171—3194. DOI: 10.1142/S0217751X04018312. arXiv: hep-th/0310085.

[19] Philip Schuster и Natalia Toro. "Continuous-spin particle field theory with helicity correspondence". В: *Phys. Rev. D* 91 (2015), с. 025023. DOI: 10.1103/PhysRevD.91.025023. arXiv: 1404.0675 [hep-th].

[20] X. Bekaert, M. Najafizadeh и M. R. Setare. "A gauge field theory of fermionic Continuous-Spin Particles". В: *Phys. Lett. B* 760 (2016), с. 320—323. DOI: 10.1016/j.physletb.2016.07.005. arXiv: 1506.00973 [hep-th].

[21] R. R. Metsaev. “Continuous spin gauge field in (A)dS space”. В: *Phys. Lett. B* 767 (2017), с. 458—464. DOI: 10.1016/j.physletb.2017.02.027. arXiv: 1610.00657 [hep-th].

[22] I. L. Buchbinder и др. “On the off-shell superfield Lagrangian formulation of 4D, N=1 supersymmetric infinite spin theory”. В: *Phys. Lett. B* 829 (2022), с. 137139. DOI: 10.1016/j.physletb.2022.137139. arXiv: 2203.12904 [hep-th].

[23] I. L. Buchbinder и др. “Towards Lagrangian construction for infinite half-integer spin field”. В: *Nucl. Phys. B* 958 (2020), с. 115114. DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2020.115114. arXiv: 2005.07085 [hep-th].

[24] R. R. Metsaev. “Cubic interaction vertices for massive/massless continuous-spin fields and arbitrary spin fields”. В: *JHEP* 12 (2018), с. 055. DOI: 10.1007/JHEP12(2018)055. arXiv: 1809.09075 [hep-th].

[25] I. L. Buchbinder и др. “Model of massless relativistic particle with continuous spin and its twistorial description”. В: *JHEP* 07 (2018), с. 031. DOI: 10.1007/JHEP07(2018)031. arXiv: 1805.09706 [hep-th].

[26] I. L. Buchbinder, S. Fedoruk и A. P. Isaev. “Twistorial and space-time descriptions of massless infinite spin (super) particles and fields”. В: *Nucl. Phys. B* 945 (2019), с. 114660. DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2019.114660. arXiv: 1903.07947 [hep-th].

[27] Ettore Majorana. “Relativistic theory of particles with arbitrary intrinsic angular momentum”. В: *Nuovo Cim.* 9 (1932), с. 335—344. DOI: 10.1007/BF02959557.

[28] Paul Adrien Maurice Dirac. “Relativistic wave equations”. В: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A-Mathematical and Physical Sciences* 155.886 (1936), с. 447—459.

[29] M. Fierz и W. Pauli. “On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field”. В: *Proc. Roy. Soc. Lond. A* 173 (1939), с. 211—232. DOI: 10.1098/rspa.1939.0140.

[30] Christian Fronsdal. “Massless Fields with Integer Spin”. В: *Phys. Rev. D* 18 (1978), с. 3624. DOI: 10.1103/PhysRevD.18.3624.

[31] J. Fang и C. Fronsdal. “Massless Fields with Half Integral Spin”. В: *Phys. Rev. D* 18 (1978), с. 3630. DOI: 10.1103/PhysRevD.18.3630.

[32] L. P. S. Singh и C. R. Hagen. “Lagrangian formulation for arbitrary spin. 1. The boson case”. В: *Phys. Rev. D* 9 (1974), с. 898—909. DOI: 10.1103/PhysRevD.9.898.

[33] L. P. S. Singh и C. R. Hagen. “Lagrangian formulation for arbitrary spin. 2. The fermion case”. В: *Phys. Rev. D* 9 (1974), с. 910—920. DOI: 10.1103/PhysRevD.9.910.

[34] Christian Fronsdal. “Singletons and Massless, Integral Spin Fields on de Sitter Space (Elementary Particles in a Curved Space. 7.” В: *Phys. Rev. D* 20 (1979), с. 848—856. DOI: 10.1103/PhysRevD.20.848.

[35] J. Fang и C. Fronsdal. “Massless, Half Integer Spin Fields in De Sitter Space”. В: *Phys. Rev. D* 22 (1980), с. 1361. DOI: 10.1103/PhysRevD.22.1361.

[36] Mikhail A. Vasiliev. “Equations of Motion of Interacting Massless Fields of All Spins as a Free Differential Algebra”. В: *Phys. Lett. B* 209 (1988), с. 491—497. DOI: 10.1016/0370-2693(88)91179-3.

[37] Mikhail A. Vasiliev. “Consistent Equations for Interacting Massless Fields of All Spins in the First Order in Curvatures”. В: *Annals Phys.* 190 (1989), с. 59—106. DOI: 10.1016/0003-4916(89)90261-3.

[38] A. A. Tarusov и M. A. Vasiliev. “On the variational principle in the unfolded dynamics”. В: *Phys. Lett. B* 825 (2022), с. 136882. DOI: 10.1016/j.physletb.2022.136882. arXiv: 2111.12691 [hep-th].

[39] Evgeny Ivanov. “Higher Spins in Harmonic Superspace”. В: июнь 2023. arXiv: 2306.10401 [hep-th].

[40] Ioseph Buchbinder, Evgeny Ivanov и Nikita Zaigraev. “Off-shell cubic hypermultiplet couplings to $\mathcal{N} = 2$ higher spin gauge superfields”. В: *JHEP* 05 (2022), с. 104. DOI: 10.1007/JHEP05(2022)104. arXiv: 2202.08196 [hep-th].

[41] Ioseph Buchbinder, Evgeny Ivanov и Nikita Zaigraev. “Unconstrained $\mathcal{N} = 2$ Higher-Spin Gauge Superfields and Their Hypermultiplet Couplings”. В: *Phys. Part. Nucl. Lett.* 20.3 (2023), с. 300—305. DOI: 10.1134/S1547477123030172. arXiv: 2211.09501 [hep-th].

[42] Ioseph Buchbinder, Evgeny Ivanov и Nikita Zaigraev. “$\mathcal{N} = 2$ higher spins: superfield equations of motion, the hypermultiplet supercurrents, and the component structure”. B: *JHEP* 03 (2023), c. 036. DOI: 10.1007/JHEP03(2023)036. arXiv: 2212.14114 [hep-th].

[43] A. Galperin и др. “Unconstrained N=2 Matter, Yang-Mills and Supergravity Theories in Harmonic Superspace”. B: *Class. Quant. Grav.* 1 (1984). [Erratum: Class.Quant.Grav. 2, 127 (1985)], c. 469—498. DOI: 10.1088/0264-9381/1/5/004.

[44] A. Galperin и др. “Unconstrained Off-Shell N=3 Supersymmetric Yang-Mills Theory”. B: *Class. Quant. Grav.* 2 (1985), c. 155. DOI: 10.1088/0264-9381/2/2/009.

[45] A. Galperin и др. “Harmonic Supergraphs. Green Functions”. B: *Class. Quant. Grav.* 2 (1985), c. 601. DOI: 10.1088/0264-9381/2/5/004.

[46] A. Galperin и др. “Harmonic Supergraphs. Feynman Rules and Examples”. B: *Class. Quant. Grav.* 2 (1985), c. 617. DOI: 10.1088/0264-9381/2/5/005.

[47] Xavier Bekaert и др. “Quartic AdS Interactions in Higher-Spin Gravity from Conformal Field Theory”. B: *JHEP* 11 (2015), c. 149. DOI: 10.1007/JHEP11(2015)149. arXiv: 1508.04292 [hep-th].

[48] Charlotte Sleight и Massimo Taronna. “Higher Spin Interactions from Conformal Field Theory: The Complete Cubic Couplings”. B: *Phys. Rev. Lett.* 116.18 (2016), c. 181602. DOI: 10.1103/PhysRevLett.116.181602. arXiv: 1603.00022 [hep-th].

[49] Sumit R. Das и Antal Jevicki. “Large N collective fields and holography”. B: *Phys. Rev. D* 68 (2003), c. 044011. DOI: 10.1103/PhysRevD.68.044011. arXiv: hep-th/0304093.

[50] Mikhail A. Vasiliev. “’GAUGE’ FORM OF DESCRIPTION OF MASSLESS FIELDS WITH ARBITRARY SPIN. (IN RUSSIAN)”. B: *Yad. Fiz.* 32 (1980), c. 855—861.

[51] Anders K. H. Bengtsson, Ingemar Bengtsson и Lars Brink. “Cubic Interaction Terms for Arbitrary Spin”. B: *Nucl. Phys. B* 227 (1983), c. 31—40. DOI: 10.1016/0550-3213(83)90140-2.

[52] Frits A. Berends, G. J. H. Burgers и H. Van Dam. “ON SPIN THREE SELFINTERACTIONS”. В: *Z. Phys. C* 24 (1984), с. 247—254. DOI: 10.1007/BF01410362.

[53] E. S. Fradkin и Mikhail A. Vasiliev. “On the Gravitational Interaction of Massless Higher Spin Fields”. В: *Phys. Lett. B* 189 (1987), с. 89—95. DOI: 10.1016/0370-2693(87)91275-5.

[54] E. S. Fradkin и R. R. Metsaev. “A Cubic interaction of totally symmetric massless representations of the Lorentz group in arbitrary dimensions”. В: *Class. Quant. Grav.* 8 (1991), с. L89—L94. DOI: 10.1088/0264-9381/8/4/004.

[55] V. E. Didenko и др. “Homotopy Properties and Lower-Order Vertices in Higher-Spin Equations”. В: *J. Phys. A* 51.46 (2018), с. 465202. DOI: 10.1088/1751-8121/aae5e1. arXiv: 1807.00001 [hep-th].

[56] V. E. Didenko и др. “Limiting Shifted Homotopy in Higher-Spin Theory and Spin-Locality”. В: *JHEP* 12 (2019), с. 086. DOI: 10.1007/JHEP12(2019)086. arXiv: 1909.04876 [hep-th].

[57] V. E. Didenko и др. “Spin-locality of η^2 and $\overline{\eta}^2$ quartic higher- spin vertices”. В: *JHEP* 12 (2020), с. 184. DOI: 10.1007/JHEP12(2020)184. arXiv: 2009.02811 [hep-th].

[58] O. A. Gelfond и A. V. Korybut. “Manifest form of the spin-local higher-spin vertex $\Upsilon^{\eta\eta}_{\omega CCC}$”. В: *Eur. Phys. J. C* 81.7 (2021), с. 605. DOI: 10.1140/epjc/s10052-021-09401-4. arXiv: 2101.01683 [hep-th].

[59] M. A. Vasiliev. “Current Interactions and Holography from the 0-Form Sector of Nonlinear Higher-Spin Equations”. В: *JHEP* 10 (2017), с. 111. DOI: 10.1007/JHEP10(2017)111. arXiv: 1605.02662 [hep-th].

[60] M. A. Vasiliev. “On the Local Frame in Nonlinear Higher-Spin Equations”. В: *JHEP* 01 (2018), с. 062. DOI: 10.1007/JHEP01(2018)062. arXiv: 1707.03735 [hep-th].

[61] Mikhail A Vasiliev. “Higher spin algebras and quantization on the sphere and hyperboloid”. В: *International Journal of Modern Physics A* 6.07 (1991), с. 1115—1135.

[62] Eugene P Wigner. “Do the equations of motion determine the quantum mechanical commutation relations?” В: *Physical Review* 77.5 (1950), с. 711.

[63] C. N. Pope, L. J. Romans и X. Shen. “*W*(infinity) and the Racah-wigner Algebra”. В: *Nucl. Phys.* B339 (1990), с. 191—221. DOI: 10.1016/0550-3213(90)90539-P.

[64] O. A. Gelfond и M. A. Vasiliev. “Homotopy Operators and Locality Theorems in Higher-Spin Equations”. В: *Phys. Lett. B* 786 (2018), с. 180—188. DOI: 10.1016/j.physletb.2018.09.038. arXiv: 1805.11941 [hep-th].

[65] Mikhail A. Vasiliev. “Unfolded representation for relativistic equations in (2+1) anti-De Sitter space”. В: *Class. Quant. Grav.* 11 (1994), с. 649—664. DOI: 10.1088/0264-9381/11/3/015.

[66] Mikhail A. Vasiliev. “Quantization on sphere and high spin superalgebras”. В: *JETP Lett.* 50 (1989). [Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.50,344(1989)], с. 374—377.

[67] E Bergshoeff, M Vasiliev и Bernard de Wit. “The super-W(λ) algebra”. В: *Physics Letters B* 256.2 (1991), с. 199—205.

[68] E. Bergshoeff, B. de Wit и Mikhail A. Vasiliev. “The Structure of the superW(infinity) (lambda) algebra”. В: *Nucl. Phys.* B366 (1991), с. 315—346. DOI: 10.1016/0550-3213(91)90005-I.

[69] Matthias R. Gaberdiel и Rajesh Gopakumar. “Minimal Model Holography”. В: *J. Phys.* A46 (2013), с. 214002. DOI: 10.1088/1751-8113/46/21/214002. arXiv: 1207.6697 [hep-th].

[70] Changhyun Ahn, Dong-gyu Kim и Man Hea Kim. “The $\mathcal{N} = 4$ Coset Model and the Higher Spin Algebra”. В: *Int. J. Mod. Phys. A* 35.11n12 (2020), с. 2050046. DOI: 10.1142/S0217751X20500463. arXiv: 1910.02183 [hep-th].

[71] Changhyun Ahn и Man Hea Kim. “The $\mathcal{N} = 4$ higher spin algebra for generic μ parameter”. В: *JHEP* 02 (2021), с. 123. DOI: 10.1007/JHEP02(2021)123. arXiv: 2009.04852 [hep-th].

[72] A. V. Korybut. “Covariant structure constants for a deformed oscillator algebra”. В: *Theor. Math. Phys.* 193.1 (2017), с. 1409—1419. DOI: 10.1134/S0040577917100014. arXiv: 1409.8634 [hep-th].

[73] Anatoly Korybut. “Star product for deformed oscillator algebra Aq (2,ν)”. В: *J. Phys. A* 54.50 (2021), с. 505202. DOI: 10.1088/1751-8121/ac367e. arXiv: 2006.01622 [hep-th].

[74] Mikhail A. Vasiliev. "Holography, Unfolding and Higher-Spin Theory". В: *J. Phys. A* 46 (2013), с. 214013. DOI: 10.1088/1751-8113/46/21/214013. arXiv: 1203.5554 [hep-th].

[75] S. F. Prokushkin и Mikhail A. Vasiliev. "Higher spin gauge interactions for massive matter fields in 3-D AdS space-time". В: *Nucl. Phys. B* 545 (1999), с. 385. DOI: 10.1016/S0550-3213(98)00839-6. arXiv: hep-th/9806236.

[76] Stanley Deser и A. Waldron. "Partial masslessness of higher spins in (A)dS". В: *Nucl. Phys. B* 607 (2001), с. 577—604. DOI: 10.1016/S0550-3213(01)00212-7. arXiv: hep-th/0103198.

[77] Stanley Deser и A. Waldron. "Gauge invariances and phases of massive higher spins in (A)dS". В: *Phys. Rev. Lett.* 87 (2001), с. 031601. DOI: 10.1103/PhysRevLett.87.031601. arXiv: hep-th/0102166.

[78] Atsushi Higuchi. "Forbidden Mass Range for Spin-2 Field Theory in De Sitter Space-time". В: *Nucl. Phys. B* 282 (1987), с. 397—436. DOI: 10.1016/0550-3213(87)90691-2.

[79] Yu. M. Zinoviev. "On massive high spin particles in AdS". В: (авг. 2001). arXiv: hep-th/0108192.

[80] Yu. M. Zinoviev. "Frame-like gauge invariant formulation for massive high spin particles". В: *Nucl. Phys. B* 808 (2009), с. 185—204. DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2008.09.020. arXiv: 0808.1778 [hep-th].

[81] M. V. Khabarov и Yu. M. Zinoviev. "On massive higher spins in d = 3". В: *JHEP* 04 (2022), с. 055. DOI: 10.1007/JHEP04(2022)055. arXiv: 2201.09491 [hep-th].

[82] V. E. Didenko и M. A. Vasiliev. "Test of the local form of higher-spin equations via AdS / CFT". В: *Phys. Lett. B* 775 (2017), с. 352—360. DOI: 10.1016/j.physletb.2017.09.091. arXiv: 1705.03440 [hep-th].

[83] O. A. Gelfond и M. A. Vasiliev. "Current Interactions from the One-Form Sector of Nonlinear Higher-Spin Equations". В: *Nucl. Phys. B* 931 (2018), с. 383—417. DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2018.04.017. arXiv: 1706.03718 [hep-th].

[84] S. F. Prokushkin и Mikhail A. Vasiliev. "Higher spin gauge interactions for massive matter fields in 3-D AdS space-time". В: *Nucl. Phys.* B545 (1999), с. 385. DOI: 10.1016/S0550-3213(98)00839-6. arXiv: hep-th/9806236 [hep-th].

[85] M. A. Vasiliev. "Nonlinear equations for symmetric massless higher spin fields in (A)dS(d)". В: *Phys. Lett.* B567 (2003), с. 139—151. DOI: 10.1016/S0370-2693(03)00872-4. arXiv: hep-th/0304049 [hep-th].

[86] Boris Lvovich Feigin. "The Lie algebras $\mathfrak{gl}(\lambda)$ and cohomologies of Lie algebras of differential operators". В: *Russian Mathematical Surveys* 43.2 (1988), с. 169.

[87] E. Bergshoeff, M. P. Blencowe и K. S. Stelle. "Area Preserving Diffeomorphisms and Higher Spin Algebra". В: *Commun. Math. Phys.* 128 (1990), с. 213. DOI: 10.1007/BF02108779.

[88] Euihun Joung и Karapet Mkrtchyan. "Notes on higher-spin algebras: minimal representations and structure constants". В: *JHEP* 05 (2014), с. 103. DOI: 10.1007/JHEP05(2014)103. arXiv: 1401.7977 [hep-th].

[89] Thomas Basile, Nicolas Boulanger и Fabien Buisseret. "Structure constants of shs[λ] : the deformed-oscillator point of view". В: *J. Phys. A* 51.2 (2018), с. 025201. DOI: 10.1088/1751-8121/aa9af6. arXiv: 1604.04510 [hep-th].

[90] E. S. Fradkin и V. Ya. Linetsky. "Supersymmetric Racah basis, family of infinite dimensional superalgebras, SU(infinity + 1|infinity) and related 2-D models". В: *Mod. Phys. Lett.* A6 (1991), с. 617—633. DOI: 10.1142/S0217732391000646.

[91] K.B. Alkalaev и M.A. Vasiliev. "N=1 supersymmetric theory of higher spin gauge fields in AdS(5) at the cubic level". В: *Nucl. Phys. B* 655 (2003), с. 57—92. DOI: 10.1016/S0550-3213(03)00061-0. arXiv: hep-th/0206068.

[92] M.A. Vasiliev. "Cubic interactions of bosonic higher spin gauge fields in AdS_5". В: *Nucl. Phys. B* 616 (2001). [Erratum: Nucl.Phys.B 652, 407–407 (2003)], с. 106—162. DOI: 10.1016/S0550-3213(01)00433-3. arXiv: hep-th/0106200.

[93] K.B. Alkalaev. “Global and local properties of AdS_2 higher spin gravity”. B: *JHEP* 10 (2014), c. 122. DOI: 10.1007/JHEP10(2014)122. arXiv: 1404.5330 [hep-th].

[94] Leo Pochhammer. “Zur theorie der Euler’schen integrale”. B: *Mathematische Annalen* 35.4 (1890), c. 495—526.

[95] Martin Ammon, Per Kraus и Eric Perlmutter. “Scalar fields and three-point functions in D=3 higher spin gravity”. B: *JHEP* 07 (2012), c. 113. DOI: 10.1007/JHEP07(2012)113. arXiv: 1111.3926 [hep-th].

[96] Frits A. Berends, G. J. H. Burgers и H. van Dam. “On the Theoretical Problems in Constructing Interactions Involving Higher Spin Massless Particles”. B: *Nucl. Phys. B* 260 (1985), c. 295—322. DOI: 10.1016/0550-3213(85)90074-4.

[97] R. R. Metsaev. “Generating function for cubic interaction vertices of higher spin fields in any dimension”. B: *Mod. Phys. Lett. A* 8 (1993), c. 2413—2426. DOI: 10.1142/S0217732393003706.

[98] R. R. Metsaev. “Cubic interaction vertices of massive and massless higher spin fields”. B: *Nucl. Phys. B* 759 (2006), c. 147—201. DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2006.10.002. arXiv: hep-th/0512342.

[99] Ruben Manvelyan, Karapet Mkrtchyan и Werner Ruhl. “General trilinear interaction for arbitrary even higher spin gauge fields”. B: *Nucl. Phys. B* 836 (2010), c. 204—221. DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2010.04.019. arXiv: 1003.2877 [hep-th].

[100] A. Fotopoulos и Mirian Tsulaia. “On the Tensionless Limit of String theory, Off - Shell Higher Spin Interaction Vertices and BCFW Recursion Relations”. B: *JHEP* 11 (2010), c. 086. DOI: 10.1007/JHEP11(2010)086. arXiv: 1009.0727 [hep-th].

[101] Ruben Manvelyan, Karapet Mkrtchyan и Werner Ruehl. “A Generating function for the cubic interactions of higher spin fields”. B: *Phys. Lett. B* 696 (2011), c. 410—415. DOI: 10.1016/j.physletb.2010.12.049. arXiv: 1009.1054 [hep-th].

[102] M. A. Vasiliev. “Cubic Vertices for Symmetric Higher-Spin Gauge Fields in $(A)dS_d$”. B: *Nucl. Phys. B* 862 (2012), с. 341—408. DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2012.04.012. arXiv: 1108.5921 [hep-th].

[103] Euihun Joung, Luca Lopez и Massimo Taronna. “On the cubic interactions of massive and partially-massless higher spins in (A)dS”. B: *JHEP* 07 (2012), с. 041. DOI: 10.1007/JHEP07(2012)041. arXiv: 1203.6578 [hep-th].

[104] R. R. Metsaev. “Cubic interaction vertices for fermionic and bosonic arbitrary spin fields”. B: *Nucl. Phys. B* 859 (2012), с. 13—69. DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2012.01.022. arXiv: 0712.3526 [hep-th].

[105] Anastasios C. Petkou. “Evaluating the AdS dual of the critical O(N) vector model”. B: *JHEP* 03 (2003), с. 049. DOI: 10.1088/1126-6708/2003/03/049. arXiv: hep-th/0302063.

[106] Charlotte Sleight и Massimo Taronna. “Higher-Spin Gauge Theories and Bulk Locality”. B: *Phys. Rev. Lett.* 121.17 (2018), с. 171604. DOI: 10.1103/PhysRevLett.121.171604. arXiv: 1704.07859 [hep-th].

[107] Dario Francia, Gabriele Lo Monaco и Karapet Mkrtchyan. “Cubic interactions of Maxwell-like higher spins”. B: *JHEP* 04 (2017), с. 068. DOI: 10.1007/JHEP04(2017)068. arXiv: 1611.00292 [hep-th].

[108] R. R. Metsaev. “Generating function for cubic interaction vertices of higher spin fields in any dimension”. B: *Mod. Phys. Lett. A* 8 (1993), с. 2413—2426. DOI: 10.1142/S0217732393003706.

[109] Nicolas Boulanger и Per Sundell. “An action principle for Vasiliev’s four-dimensional higher-spin gravity”. B: *J. Phys. A* 44 (2011), с. 495402. DOI: 10.1088/1751-8113/44/49/495402. arXiv: 1102.2219 [hep-th].

[110] E. Sezgin и P. Sundell. “Massless higher spins and holography”. B: *Nucl. Phys. B* 644 (2002). [Erratum: Nucl.Phys.B 660, 403–403 (2003)], с. 303—370. DOI: 10.1016/S0550-3213(02)00739-3. arXiv: hep-th/0205131.

[111] E. Sezgin и P. Sundell. “Holography in 4D (super) higher spin theories and a test via cubic scalar couplings”. B: *JHEP* 07 (2005), с. 044. DOI: 10.1088/1126-6708/2005/07/044. arXiv: hep-th/0305040.

[112] Simone Giombi и Xi Yin. “Higher Spins in AdS and Twistorial Holography”. В: *JHEP* 04 (2011), с. 086. DOI: 10.1007/JHEP04(2011)086. arXiv: 1004.3736 [hep-th].

[113] Simone Giombi и Igor R. Klebanov. “One Loop Tests of Higher Spin AdS/CFT”. В: *JHEP* 12 (2013), с. 068. DOI: 10.1007/JHEP12(2013)068. arXiv: 1308.2337 [hep-th].

[114] Matteo Beccaria и Arkady A. Tseytlin. “Higher spins in AdS_5 at one loop: vacuum energy, boundary conformal anomalies and AdS/CFT”. В: *JHEP* 11 (2014), с. 114. DOI: 10.1007/JHEP11(2014)114. arXiv: 1410.3273 [hep-th].

[115] V. E. Didenko и E. D. Skvortsov. “Exact higher-spin symmetry in CFT: all correlators in unbroken Vasiliev theory”. В: *JHEP* 04 (2013), с. 158. DOI: 10.1007/JHEP04(2013)158. arXiv: 1210.7963 [hep-th].

[116] O. A. Gelfond и M. A. Vasiliev. “Operator algebra of free conformal currents via twistors”. В: *Nucl. Phys. B* 876 (2013), с. 871—917. DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2013.09.001. arXiv: 1301.3123 [hep-th].

[117] Charlotte Sleight и Massimo Taronna. “Higher-Spin Algebras, Holography and Flat Space”. В: *JHEP* 02 (2017), с. 095. DOI: 10.1007/JHEP02(2017)095. arXiv: 1609.00991 [hep-th].

[118] Joao Penedones. “Writing CFT correlation functions as AdS scattering amplitudes”. В: *JHEP* 03 (2011), с. 025. DOI: 10.1007/JHEP03(2011)025. arXiv: 1011.1485 [hep-th].

[119] Leonardo Rastelli и Xinan Zhou. “How to Succeed at Holographic Correlators Without Really Trying”. В: *JHEP* 04 (2018), с. 014. DOI: 10.1007/JHEP04(2018)014. arXiv: 1710.05923 [hep-th].

[120] Dmitry Ponomarev. “A Note on (Non)-Locality in Holographic Higher Spin Theories”. В: *Universe* 4.1 (2018), с. 2. DOI: 10.3390/universe4010002. arXiv: 1710.00403 [hep-th].

[121] Mikhail A. Vasiliev. “Higher spin gauge theories: Star product and AdS space”. В: (окт. 1999). Под ред. Mikhail A. Shifman, с. 533—610. DOI: 10.1142/9789812793850_0030. arXiv: hep-th/9910096.

[122] Nicolas Boulanger и др. “Higher spin interactions in four-dimensions: Vasiliev versus Fronsdal”. В: *J. Phys. A* 49.9 (2016), с. 095402. DOI: 10.1088/1751-8113/49/9/095402. arXiv: 1508.04139 [hep-th].

[123] Ergin Sezgin, Evgeny D. Skvortsov и Yaodong Zhu. “Chern-Simons Matter Theories and Higher Spin Gravity”. В: *JHEP* 07 (2017), с. 133. DOI: 10.1007/JHEP07(2017)133. arXiv: 1705.03197 [hep-th].

[124] Nikita Misuna. “On current contribution to Fronsdal equations”. В: *Phys. Lett. B* 778 (2018), с. 71—78. DOI: 10.1016/j.physletb.2018.01.019. arXiv: 1706.04605 [hep-th].

[125] Mikhail A. Vasiliev. “Consistent Equations for Interacting Massless Fields of All Spins in the First Order in Curvatures”. В: *Annals Phys.* 190 (1989), с. 59—106. DOI: 10.1016/0003-4916(89)90261-3.

[126] Mikhail A. Vasiliev. “Dynamics of Massless Higher Spins in the Second Order in Curvatures”. В: *Phys. Lett. B* 238 (1990), с. 305—314. DOI: 10.1016/0370-2693(90)91740-3.

[127] V. E. Didenko, N. G. Misuna и M. A. Vasiliev. “Perturbative analysis in higher-spin theories”. В: *JHEP* 07 (2016), с. 146. DOI: 10.1007/JHEP07(2016)146. arXiv: 1512.04405 [hep-th].

[128] E. Sezgin и P. Sundell. “Analysis of higher spin field equations in four-dimensions”. В: *JHEP* 07 (2002), с. 055. DOI: 10.1088/1126-6708/2002/07/055. arXiv: hep-th/0205132.

[129] Mikhail A. Vasiliev. “Triangle Identity and Free Differential Algebra of Massless Higher Spins”. В: *Nucl. Phys. B* 324 (1989), с. 503—522. DOI: 10.1016/0550-3213(89)90477-X.

[130] Mikhail A. Vasiliev. “Consistent equation for interacting gauge fields of all spins in (3+1)- dimensions”. В: *Phys. Lett. B* 243 (1990), с. 378—382. DOI: 10.1016/0370-2693(90)91400-6.

[131] M. A. Vasiliev. “Invariant Functionals in Higher-Spin Theory”. В: *Nucl. Phys. B* 916 (2017), с. 219—253. DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2017.01.001. arXiv: 1504.07289 [hep-th].

[132] M. A. Vasiliev. “From Coxeter Higher-Spin Theories to Strings and Tensor Models”. В: *JHEP* 08 (2018), с. 051. DOI: 10.1007/JHEP08(2018)051. arXiv: 1804.06520 [hep-th].

[133] A. V. Korybut и др. “Disentanglement of topological and dynamical fields in 3d higher-spin theory within shifted homotopy approach”. В: *Phys. Lett. B* 838 (2023), с. 137718. DOI: 10.1016/j.physletb.2023.137718. arXiv: 2211.15778 [hep-th].

[134] Lucy Joan Slater. *Generalized Hypergeometric Functions*. Cambridge University Press, 1966.

Список рисунков

Приложение А

Проверка ассоциативности бозонных структурных констант Aq(2,ν)

Ассоциативное произведение в [63] было дано в так называемом конформном базисе

$$V_m^{s-1} \equiv (-1)^{s-m}\frac{(s+m)!}{(2s)!}\underbrace{[J_-,\dots[J_-,[J_-,}_{s-m} J_+^s]]]. \tag{A.1}$$

Подставляя в предыдущее выражение явную реализации генераторов $\mathfrak{sp}(2)$ можно убедиться, что

$$V_m^{s-1} \sim \underbrace{y_{(+}\dots y_+\overbrace{y_-\dots y_{-)}}^{s-m}}_{2s}. \tag{A.2}$$

Lone-Star произведение определяется следующим образом

$$V_m^s * V_n^t = \frac{1}{2}\sum_{u=1}^{s+t-1} g_u^{st}\,(m,n,\lambda)\,V_{m+n}^{s+t-u}, \tag{A.3}$$

где

$$g_u^{st}\,(m,n,\lambda) = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{u-2}}{2\,(u-1)!}\,{}_4F_3\left[\begin{matrix}\frac{1}{2}+\lambda & \frac{1}{2}-\lambda & \frac{2-u}{2} & \frac{1-u}{2}\\ \frac{3-2s}{2} & \frac{3-2t}{2} & \frac{1}{2}+s+t-u & \end{matrix};1\right]\times$$
$$\times\sum_{k=0}^{u-1}(-1)^k\binom{u-1}{k}(s-1-m)_{u-1-k}\,(s-1-m)_k\,(t-1+n)_k\,(t-1-n)_{u-1-k}\,, \tag{A.4}$$

В [63] ассоциативность Lone-Star произведения только предполагалась, здесь она будет явно проверена. Чтобы получить ковариантное выражение из (A.3) нужно перемножить вектора старшего и младшего веса, в этом случае все свертки с $\epsilon_{\alpha\beta}$ ненулевые. После сдвижки индексов и подставляя $\nu = 1-2\lambda$ получим выражение для (1.23). Затем нужно подставить его в условие ассоциативности (1.42-1.46). Так как факториальный фактор перед гипергеометрической функцией в (1.23) дает все необходимые нули, то можно рассматривать только (1.44). Обозначим для краткости

$$ {}_4F_3\left[\begin{matrix} 1-\frac{\nu\mathcal{K}}{2} & \frac{\nu\mathcal{K}}{2} & \frac{-p}{2} & \frac{1-p}{2} \\ \frac{1-m}{2} & \frac{1-n}{2} & \frac{m+n-2p+3}{2} & \end{matrix};1\right] = F\left(m,n,p,\nu\mathcal{K}\right) \tag{A.5} $$

Тождество, которому оно должно удовлетворять

$$ \begin{aligned} \frac{n!}{(n-p)!p!}F\left(m,n,p,\nu\mathcal{K}\right) &= \frac{(n-2)!}{(n-p-2)!p!}F\left(m,n-2,p,\nu\mathcal{K}\right) + \\ &+ 2\frac{(n-2)!}{(n-p-1)!\,(p-1)!}F\left(m,n-2,p-1,\nu\mathcal{K}\right) + \frac{(n-2)!}{(n-p)!\,(p-2)!}\times \\ &\times \frac{m+n-2p+3-\nu\mathcal{K}}{m+n-2p+3}\,\frac{m+n-2p+1+\nu\mathcal{K}}{m+n-2p+1}F\left(m,n-2,p-2,\nu\mathcal{K}\right). \end{aligned} \tag{A.6} $$

Лучше рассматривать гипергеометрии из правой части по отдельности.

Первое слагаемое $F\left(m,n-2,p,\nu\mathcal{K}\right)$

Согласно определению его можно представить в виде ряда

$$ \begin{aligned} F\left(m,n-2,p,\nu\mathcal{K}\right) &= {}_4F_3\left[\begin{matrix} 1-\frac{\nu\mathcal{K}}{2} & \frac{\nu\mathcal{K}}{2} & \frac{-p}{2} & \frac{1-p}{2} \\ \frac{1-m}{2} & \frac{1-n}{2}+1 & \frac{m+n-2p+3}{2}-1 & \end{matrix};1\right] = \\ &= \sum_{q=0}^{\infty}\frac{\left(1-\frac{\nu\mathcal{K}}{2}\right)_q\left(\frac{\nu\mathcal{K}}{2}\right)_q\left(\frac{1-p}{2}\right)_q\left(-\frac{p}{2}\right)_q}{\left(\frac{1-m}{2}\right)_q\left(\frac{1-n}{2}+1\right)_q\left(\frac{m+n-2p+3}{2}-1\right)_q q!}. \end{aligned} \tag{A.7} $$

Выполняя преобразование символов Похгаммера получаем новое выражение для $F\left(m,n-2,p,\nu\mathcal{K}\right)$

$$F\left(m,n-2,p,\nu\mathcal{K}\right)=\frac{m+2n-2p}{m+n-2p+1}{}_4F_3\left[\begin{matrix}1-\frac{\nu\mathcal{K}}{2} & \frac{\nu\mathcal{K}}{2} & \frac{-p}{2} & \frac{1-p}{2}\\ \frac{1-m}{2} & \frac{1-n}{2}+1 & \frac{m+n-2p+3}{2} & \end{matrix};1\right]-$$
$$-\frac{n-1}{m+n-2p+1}{}_4F_3\left[\begin{matrix}1-\frac{\nu\mathcal{K}}{2} & \frac{\nu\mathcal{K}}{2} & \frac{-p}{2} & \frac{1-p}{2}\\ \frac{1-m}{2} & \frac{1-n}{2} & \frac{m+n-2p+3}{2} & \end{matrix};1\right]. \quad \text{(A.8)}$$

Второй член является гипергеометрией из левой части условия ассоциативности (1.44).

Третье слагаемое $F\left(m,n-2,p-2,\nu\mathcal{K}\right)$

Здесь мы используем тот факт, что гипергеометрическая функция ${}_4F_3\left(1\right)$ Заальшутсовская и выполняем преобразование. Больше информации об обрывающихся Заальшутсовских рядах можно найти в [134]. Пусть $p=2N$, нечетный случай может быть рассмотрен аналогично.

$$F\left(m,n-2,p-2,\nu\mathcal{K}\right)={}_4F_3\left[\begin{matrix}1-\frac{\nu\mathcal{K}}{2} & \frac{\nu\mathcal{K}}{2} & 1-\frac{p}{2} & 1+\frac{1-p}{2}\\ \frac{1-m}{2} & \frac{1-n}{2}+1 & \frac{m+n-2p+3}{2}+1 & \end{matrix};1\right]=$$
$$=\frac{\left(\frac{p-m}{2}-1\right)_{N-1}}{\left(\frac{1-m}{2}\right)_{N-1}}\frac{\left(\frac{p-n}{2}\right)_{N-1}}{\left(\frac{1-n}{2}+1\right)_{N-1}}\times$$
$$\times{}_4F_3\left[\begin{matrix}1+\frac{m+n-2p+1+\nu\mathcal{K}}{2} & 1+\frac{m+n-2p+3-\nu\mathcal{K}}{2} & 1-\frac{p}{2} & 1+\frac{1-p}{2}\\ \frac{m}{2}-p+3 & \frac{n}{2}-p+2 & \frac{m+n-2p+3}{2}+1 & \end{matrix};1\right]. \quad \text{(A.9)}$$

Нужно выделить ряд, который совпадает с гипергеометрией из левой части уравнения ассоциативности(1.44). После простых упражнений со сдвижкой индексов в сумме и преобразовании символов Похгаммера (как в первом слагаемом) получаем новое выражение для третьего слагаемого

$$F\left(m,n-2,p-2,\nu\mathcal{K}\right)=\frac{\left(\frac{p-m}{2}-1\right)_{N-1}}{\left(\frac{1-m}{2}\right)_{N-1}}\frac{\left(\frac{p-n}{2}\right)_{N-1}}{\left(\frac{1-n}{2}+1\right)_{N-1}}\times$$
$$\times\frac{\left(\frac{m+n-2p+3}{2}\right)\left(\frac{m}{2}-p+2\right)\left(\frac{n}{2}-p+1\right)}{\left(\frac{m+n-2p+3-\nu\mathcal{K}}{2}\right)\left(\frac{m+n-2p+1+\nu\mathcal{K}}{2}\right)\left(\frac{1-p}{2}\right)\left(\frac{-p}{2}\right)}\times$$
$$\left(\frac{m}{2}-p+1\right)\left({}_4F_3\left[\begin{matrix}\frac{m+n-2p+1+\nu\mathcal{K}}{2} & \frac{m+n-2p+3-\nu\mathcal{K}}{2} & -\frac{p}{2} & \frac{1-p}{2}\\ \frac{m}{2}-p+1 & \frac{n}{2}-p+1 & \frac{m+n-2p+3}{2} & \end{matrix};1\right]-\right.$$
$$\left.-{}_4F_3\left[\begin{matrix}\frac{m+n-2p+1+\nu\mathcal{K}}{2} & \frac{m+n-2p+3-\nu\mathcal{K}}{2} & -\frac{p}{2} & \frac{1-p}{2}\\ \frac{m}{2}-p+2 & \frac{n}{2}-p+1 & \frac{m+n-2p+3}{2} & \end{matrix};1\right]\right). \quad (A.10)$$

Второе слагаемое $F\left(m,n-2,p-1,\nu\mathcal{K}\right)$

Удобно рассмотреть второе слагаемое в конце. После преобразований 1-го и 3-го слагаемых получились гипергеометрии из левой части (1.44) и некоторые дополнительные члены. Разделим второе слагаемое на два

$$F\left(m,n-2,p-1,\nu\mathcal{K}\right)=A\ F\left(m,n-2,p-1,\nu\mathcal{K}\right)+B\ F\left(m,n-2,p-1,\nu\mathcal{K}\right),$$
$$A+B=1. \quad (A.11)$$

A-слагаемое преобразуем как первую гипергеометрию, B-слагаемое как третью. Константы A и B выбираются так, чтобы сократить дополнительные члены из 1-го и 3-го слагаемых.

Преобразованное A - слагаемое имеет вид:

$$F\left(m,n-2,p-1,\nu\mathcal{K}\right)=\frac{n-1}{p}{}_4F_3\left[\begin{matrix}1-\frac{\nu\mathcal{K}}{2} & \frac{\nu\mathcal{K}}{2} & \frac{-p}{2} & \frac{1-p}{2}\\ \frac{1-m}{2} & \frac{1-n}{2} & \frac{m+n-2p+3}{2} & \end{matrix};1\right]-$$
$$-\frac{(n-p-1)}{p}{}_4F_3\left[\begin{matrix}1-\frac{\nu\mathcal{K}}{2} & \frac{\nu\mathcal{K}}{2} & \frac{-p}{2} & \frac{1-p}{2}\\ \frac{1-m}{2} & \frac{1-n}{2}+1 & \frac{m+n-2p+3}{2} & \end{matrix};1\right]. \quad (A.12)$$

Преобразованное B-слагаемое имеет вид:

$$F\left(m{,}n-2{,}p-1{,}\nu\mathcal{K}\right)=\frac{\left(\frac{p-m}{2}\right)_N}{\left(\frac{1-m}{2}\right)_N}\frac{\left(\frac{p-n}{2}\right)_N}{\left(\frac{1-n}{2}\right)_N}\frac{n-1}{(n-p)\,p}\times$$
$$\times\left(\frac{\left(\frac{m-p+1}{2}\right)(m-p+2)}{\frac{m}{2}-p+1}{}_4F_3\left[\begin{matrix}\frac{m+n-2p+1+\nu\mathcal{K}}{2} & \frac{m+n-2p+3-\nu\mathcal{K}}{2} & -\frac{p}{2} & \frac{1-p}{2}\\ \frac{m}{2}-p+2 & \frac{n}{2}-p+1 & \frac{m+n-2p+3}{2} & \end{matrix};1\right]-\right.$$
$$\left.-\left(m-p+1\right){}_4F_3\left[\begin{matrix}\frac{m+n-2p+1+\nu\mathcal{K}}{2} & \frac{m+n-2p+3-\nu\mathcal{K}}{2} & -\frac{p}{2} & \frac{1-p}{2}\\ \frac{m}{2}-p+1 & \frac{n}{2}-p+1 & \frac{m+n-2p+3}{2} & \end{matrix};1\right]\right). \quad \text{(A.13)}$$

Значения A и B, при которых дополнительные слагаемые сокращаются

$$A=\frac{m+2n-2p}{m+n-2p+1},\quad B=1-\frac{m+2n-2p}{m+n-2p+1}. \quad \text{(A.14)}$$

Подставляя все три слагаемых в условие ассоциативности (1.44), видно, что оно не нарушено.

Приложение Б

Связь резольвент $\triangle_{q,\beta}$ и $\triangle_q$

Введеный в [56] оператор предельной сдвиговой гомотопии, обобщающий резольвенту введенную в главе 3, определяется как

$$\triangle_{q,\beta}\, J := \int \frac{\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{(2\pi)^2} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau}(z+q-v)^\alpha \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} J(\tau z-(1-\tau)(q-v), y+\beta u; \tau\theta) e^{iu_\alpha v^\alpha}\,, \tag{Б.1}$$

где q – это y- и z-независимый спинор. q может быть оператором, действующим на поля C и ω как в Главе 3. Заметим, что при $\beta = 0$ предельная сдвиговая гомотопия совпадает с (3.32) для y-независимого сдвига q, а при $\beta \neq 0$ соответствует сдвигу на y (после интегрирования по частям видно, что v эффективно дифференцирует u).

Резольвента (Б.1) удовлетворяют стандартному набору свойств, представленных в главе 3 для резольвенты с $\beta = 0$. Во-первых, эти операторы антикоммутируют

$$\triangle_{q_1,\beta_1}\triangle_{q_2,\beta_2} = -\,\triangle_{q_2,\beta_2}\triangle_{q_1,\beta_1} \tag{Б.2}$$

и удовлетворяют разложению единицы

$$\{\mathrm{d}_z, \triangle_{q,\beta}\} = 1 - h_{q,\beta}\,, \tag{Б.3}$$

где когомологический проектор $h_{q,\beta}$ на z,θ-независимую часть дается выражением

$$h_{q,\beta} J(z,y;\theta) = \int \frac{\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v}{(2\pi)^2}\, e^{iu_\alpha v^\alpha} J(-q+v, y+\beta u; 0)\,. \tag{Б.4}$$

Из предыдущей формулы в частности следует

$$h_{q,\,\beta}\,\triangle_{q,\,\beta} = 0\,. \tag{Б.5}$$

Разложение единицы (Б.3) позволяет решать уравнения типа (3.27).

Доказательство соотношения (Б.3) аналогично доказательству приведенному в главе 3. Рассмотрим

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{d}_z \, \triangle_{q,\beta} + \triangle_{q,\beta} \, \mathrm{d}_z) J(z,y;\theta) = && (\text{Б.6})\\
&= \int \frac{\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{(2\pi)^2} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau} \Big(\theta^\alpha \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} + (z+q-v)^\alpha \theta^\beta \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} \frac{\partial}{\partial z^\beta} + \\
&+ (z+q-v)^\alpha \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} \theta^\beta \frac{\partial}{\partial z^\beta} \Big) J(\tau z - (1-\tau)(q-v), y+\beta u; \tau\theta) e^{iu_\alpha v^\alpha} = \\
&= \int \frac{\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{(2\pi)^2} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau} \Big(\theta^\alpha \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} + (z+q-v)^\alpha \frac{\partial}{\partial (z+q-v)^\alpha} \Big) \times && (\text{Б.7})\\
&\times J(\tau z - (1-\tau)(q-v), y+\beta u; \tau\theta) e^{iu_\alpha v^\alpha} = \\
&= \int \frac{\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{(2\pi)^2} \int_0^1 \mathrm{d}\tau \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} J(\tau z - (1-\tau)(q-v), y+\beta u; \tau\theta) e^{iu_\alpha v^\alpha} = \\
&= J(z,y;\theta) - \int \frac{\mathrm{d}u \, \mathrm{d}v}{(2\pi)^2} e^{iu_\alpha v^\alpha} J(-q+v, y+\beta u; 0) \,. && (\text{Б.8})
\end{aligned}
$$

Соотношения звездочной перестановочности с неблышой модификацией остаются верными и для (Б.1). Прямым вычисление можно показать, что выполнены следующие соотношения

$$
\triangle_{q,\beta} \, (f(y;k) * J(z,y;k;\theta)) = f(y;k) * \triangle_{q+(1-\beta)p,\beta} \, J(z,y;k;\theta) \,, \tag{Б.9}
$$

$$
h_{q,\beta}(f(y;k) * J(z,y;k;\theta)) = f(y,k) * h_{q+(1-\beta)p,\beta} J(z,y;k;\theta) \,, \tag{Б.10}
$$

$$
\triangle_{q,\beta} \, (J(z,y;\theta) * k^\nu * f(y;k)) = \triangle_{q+(-1)^\nu(1+\beta)p,\beta} \, \Big(J(z,y;\theta) * k^\nu \Big) * f\,(y,k) \,, \tag{Б.11}
$$

$$
h_{q,\beta}(J(z,y;\theta) * k^\nu * f(y;k)) = h_{q+(-1)^\nu(1+\beta)p,\beta} \Big(J(z,y;\theta) * k^\nu \Big) * f\,(y,k) \,, \tag{Б.12}
$$

Другим важнейшим свойством является действие резольвенты (Б.1) на центральный элемент γ

$$
\triangle_{q,\beta} \, \gamma = \triangle_{\frac{1}{1-\beta} q, 0} \, \gamma \,. \tag{Б.13}
$$

Таким образом применимо к γ резольвента (Б.1) действует так же как и оператор сдвиговой гомотопии (3.32) с перескалированным сдвигом q. Последнее показывается прямым вычислением

$$
\triangle_{q,\beta} \, \gamma = 2\theta^\alpha \int_0^1 \mathrm{d}\tau \, \frac{(1-\beta)\tau}{(1-\beta(1-\tau))^3} (z + \frac{q}{1-\beta})_\alpha e^{\frac{i}{1-\beta(1-\tau)}(\tau z - (1-\tau)q)_\alpha y^\alpha} \,. \tag{Б.14}
$$

После замены переменной интегрирования

$$\tau' = \frac{\tau}{1-\beta(1-\tau)} \in [0{,}1]\,, \tag{Б.15}$$

мы получим

$$\triangle_{q,\beta}\,\gamma = 2\theta^{\alpha}\int_0^1 \mathrm{d}\tau'\,\tau'(z+\frac{q}{1-\beta})_{\alpha}e^{i(\tau' z-(1-\tau')\frac{q}{1-\beta})_{\alpha}y^{\alpha}} \equiv \triangle_{\frac{1}{1-\beta}q,\,0}\,\gamma\,, \tag{Б.16}$$

что завершает доказательство (Б.13).

Таким образом в рамках исследуемого в Диссертации порядка теории возмущений использование резольвенты (Б.1) эквивалентно использованию резольвенты (3.32).