

На правах рукописи

Давыдов Андрей Семёнович

**НЕПЕРТУРБАТИВНЫЕ ЭФФЕКТЫ ПОЛЯРИЗАЦИИ
ВАКУУМА В УСЛОВИЯХ КУЛОНОВСКОЙ
ЗАКРИТИЧНОСТИ**

Специальность 01.04.02 —
«теоретическая физика»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2021

Общая характеристика работы

Проблема критических полей для дираковских фермионов возникла более 70 лет назад, когда в пионерской работе Померанчука и Смородинского [1] было показано, что в случае протяженного ядра с радиусом около 10 – 12 фм кулоновская задача сохраняет самосопряженность и при $Z > 137$, при этом электронные уровни дискретного спектра последовательно становятся отрицательными и опускаются до порога нижнего континуума. В частности, нижний электронный $1s$ -уровень достигает нижнего континуума при заряде ядра (Z_{cr}) около 170 – 173. Непертурбативные эффекты поляризации вакуума при погружении электронных уровней в нижний континуум были принципиально поняты значительно позже, когда в работах Герштейна и Зельдовича, Пипера и Грейнера, Зельдовича и Попова [2–4] и др. в 1969-71 гг. был рассмотрен наиболее известный эффект такого типа, который предсказывал спонтанное рождение электрон-позитронных пар и перестройку вакуума при эффективном заряде атомного ядра $Z > 170 - 173$. Подробному изложению данного эффекта посвящены монографии [5–7]. Однако эксперименты, проведенные в течение последних 40 лет на тяжелоионном комплексе GSI (Дармштадт) и в Аргоннской национальной лаборатории (США), не позволяют пока сделать однозначное заключение о существовании такого эффекта, по крайней мере в диапазоне $170 < Z < 190$ [7–11]. Одно из возможных объяснений этого результата состоит в том, что время погружения $1s$ -уровня в нижний континуум при столкновении тяжелых ионов в проведенных экспериментах оказывается меньше, чем время жизни возникающего при погружении уровня метастабильного состояния, распад которого приводит к испусканию вакуумных позитронов. В работах [12; 13] даже имела место дискуссия о том, возможно или невозможно рождение пар при $Z > Z_{cr}$. Однако корректный анализ всей проблемы критических зарядов сверхтяжелых атомных ядер (более точно, ядерных квазимолекул, возникающих при сближении тяжелых ионов) возможен только при существенно более детальном изучении процесса погружения электронных уровней с учетом непертурбативных эффектов формирования вакуумных оболочек, соответствующего изменения вакуумной энергии за счет поляризации моря Дирака и возрастания роли магнитных эффектов при $Z \gg Z_{cr}$.

Следует отметить, что исследования по физике тяжелых ионов, проводимые совместно группами Шабаева (СПбГУ), Плюньена (Дармштадт) и др., в основном ограничиваются либо расчетом диаграммных квантово-электродинамических эффектов для $Z < 137$ с учетом следующих поправок по теории возмущений, либо уточнением характеристик (возможного) излучения вакуумных позитронов в диапазоне $170 < Z < 190$ [14–20]. В нашей работе преследуется совершенно иная цель – исследование физических систем, моделирующих эффекты новой физики в тяжелоионных кластерах при $Z \gg Z_{cr}$, которые могут иметь гораздо более серьезные последствия, нежели испускание вакуумных позитронов.

Критические заряды в графене являются предметом активных исследова-

ний практически сразу после экспериментального подтверждения существования планарной фазы углерода в 2004 г. [21—24], однако как и в 3+1D, поведение вакуумной (казимировской) энергии системы в области $Z \gg Z_{cr}$ практически не рассматривалось.

Магнитным эффектам поляризации в графене за последнее время также посвящено достаточно много работ [25—32], в которых рассматривались как отдельно магнитные эффекты, так и случай скрещенных кулоновского и магнитного полей. Однако магнитные эффекты ограничивались лишь случаем потенциала типа Ааронова-Бома, при этом кулоновский источник выбирался точечным. В нашей работе основной акцент делается на протяженные кулоновские источники.

Альтернативным подходом в проблеме критических зарядов является использование квазиодномерных систем Дирака-Кулона типа «релятивистского одномерного водородоподобного иона», теоретическому изучению которого уже много лет уделяется большое внимание [33—38], поскольку в таких системах возможно значительное понижение Z_{cr} . Однако реальная степень квазиодномерности таких систем до сих пор детально не исследована.

Необходимо отметить, что с проблемой критических ядерных зарядов непосредственно связано отдельное направление современной теоретической квантовой химии по строению таблицы Менделеева и сверхтяжелых атомов в области больших Z , включая критические и закритические [39; 40]. Наиболее принципиальным открытым вопросом в этом направлении является активно обсуждаемая проблема продолжения таблицы Менделеева за $Z > 170 - 173$, поскольку после погружения $1s$ -уровня в нижний континуум должна произойти существенная перестройка электронных оболочек, но систематический анализ этого явления возможен только на основе непertурбативных расчетов вакуумных поляризационных эффектов.

В настоящей работе исследуются непertурбативные эффекты поляризации вакуума в условиях кулоновской закритичности ($Z > Z_{cr}$) для модельных $1+1$ - и $2+1$ -мерных систем Дирака-Кулона с последующей оценкой эффектов поляризации вакуума в соответствующем $3+1$ -мерном случае. Отдельно рассматривается случай планарной системы Дирака-Кулона в магнитном поле с аксиальным векторным потенциалом. Такие системы, как было сказано ранее, представляют большой теоретический и экспериментальный интерес сами по себе и воспроизводят почти все свойства реальной $3+1D$ задачи поляризации вакуума сверхтяжелым ядром (ядерной квазимолекулой), но с рядом вычислительных упрощений, обусловленных меньшим числом вращательных квантовых чисел.

Целью работы является исследование существенно непertурбативных эффектов поляризации вакуума, возникающих при опускании дискретных уровней в нижний континуум в сверхсильных (сверхкритических) кулоновских полях. Для достижения указанной цели были поставлены следующие **задачи**:

1. Разработка непertурбативного метода расчета вакуумной плотности заряда, тока и вакуумной энергии, которые являются основными характе-

- ристиками поляризации вакуума.
2. Вычисление вакуумной плотности заряда и вакуумной энергии для 1+1-мерной системы Дирака-Кулона, моделирующей соответствующую 3+1-мерную систему в сильном однородном магнитном поле.
 3. Вычисление вакуумной плотности заряда и вакуумной энергии для 2+1-мерной системы Дирака-Кулона. Оценка эффектов поляризации вакуума в соответствующем 3+1-мерном случае.
 4. Проверка справедливости предположения о превращении нейтрального вакуума в заряженный в сверхсильных (сверхкритических) кулоновских полях, приводящее к спонтанному излучению вакуумных позитронов при погружении уровней дискретного спектра в нижний континуум вследствие закона сохранения заряда.
 5. Исследование влияния магнитного поля с аксиальным векторным потенциалом в 2+1-мерной системе Дирака-Кулона на основные характеристики поляризации вакуума, включая вакуумную плотность тока.

Актуальность темы обусловлена прежде всего тем, что вопрос о критических зарядах атомных ядер имеет принципиальное значение для корректного продолжения таблицы Менделеева в область $Z > 170$ и строения (гипотетических) сверхтяжелых атомов. В настоящее время вопрос о критических зарядах открыт, поскольку эксперименты GSI (Дармштадт) и Аргоннской национальной лаборатории (США) в диапазоне $170 < Z < 190$ не привели к однозначному выводу о статусе закритической области. В связи со строительством новых тяжелоионных ускорительных комплексов FAIR (Дармштадт), NICA (Дубна), EIR & HIAF (Китай) и Фабрики Сверхтяжелых Элементов (SHE, Дубна), и разработки их научных программ становится крайне актуальным существенно более детальное моделирование процесса погружения электронных уровней в нижний континуум с учетом непертурбативных эффектов изменения вакуумной энергии за счет поляризации моря Дирака и возрастания роли вакуумных магнитных эффектов при зарядах кулоновских источников превышающих критическое. Особый интерес такая задача приобретает в связи с наличием 2+1-мерного аналога феномена критического заряда в графене, в котором за счет большой эффективной постоянной тонкой структуры критический заряд оказывается $O(1)$ в единицах заряда электрона. Поэтому графен предоставляет уникальную возможность для экспериментальной проверки различных теоретических концепций по проблеме критических зарядов в квантовой электродинамике.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Перенормировка через фермионную петлю с двумя внешними линиями оказывается универсальным приемом, который устраняет расходимость теории как в чисто пертурбативном, так и в существенно непертурбативном режимах для вакуумной плотности заряда (и вакуумной плотности тока при наличии магнитного поля) и для вакуумной энергии.
2. В одномерных, двумерных и трехмерных системах Дирака-Кулона в далеко закритической области вакуумная энергия становится быстро убы-

вающей функцией заряда кулоновского источника, достигающей больших отрицательных значений.

3. Подтверждена гипотеза о фазовом переходе нейтрального вакуума в заряженный (который является основным состоянием электрон-позитронного поля в сильных (сверхкритических) электромагнитных полях), приводящем к спонтанному излучению вакуумных позитронов при погружении уровней дискретного спектра в нижний континуум вследствие закона сохранения заряда.
4. В присутствии закритического кулоновского источника в двумерной системе Дирака-Кулона наведённое магнитное поле при определённых значениях параметров внешнего векторного потенциала способно усиливать исходное магнитное поле.

Научная новизна. В ходе исследований на основе оригинальной комбинации аналитических методов, компьютерной алгебры и численных расчетов были разработаны непertурбативные методы расчета вакуумной плотности заряда, тока и вакуумной энергии.

1. Исследовано поведение вакуумной энергии в закритической области для одномерных, двумерных и трехмерных систем Дирака-Кулона. Наиболее значимый результат состоит в том, что в такой системе в далеко закритической области вакуумная энергия становится быстро убывающей функцией заряда кулоновского источника, достигающей больших отрицательных значений.
2. Исследована зависимость эффектов поляризации от обрезания кулоновской асимптотики внешнего поля в $2+1$ -мерной системе Дирака-Кулона. Впервые показано, что экранировка асимптотики существенно изменяет структуру и свойства первых парциальных каналов с квантовым числом третьей проекции полного момента равным $\pm 1/2$ и $\pm 3/2$.
3. Исследована $2+1$ -мерная система Дирака-Кулона в присутствии магнитного поля с аксиальным вектор-потенциалом. Показано, что в присутствии закритического кулоновского источника наведённое магнитное поле при определённых значениях параметров внешнего векторного потенциала способно усиливать исходное магнитное поле.
4. Показано, что перенормировка через фермионную петлю с двумя внешними линиями оказывается универсальным приемом, который устраняет расходимость теории как в чисто пертурбативном, так и в существенно непertурбативном режимах как для вакуумной плотности заряда, так и для вакуумной энергии.

Практическая значимость. В работе исследованы новые, существенно непertурбативные эффекты поляризации вакуума для систем дираковских фермионов в критических и сверхкритических кулоновских полях и в присутствии магнитных эффектов. Полученные в работе результаты должны внести существенный вклад в развитие науки о критических явлениях в сильных (сверхкритических) полях. Они позволяют получить теоретические оценки по достижи-

мости критического заряда и свойствах закритической области в установках по столкновению тяжелых ионов, а также в современных наноматериалах, таких как графен и нанотрубки. Полученные в работе результаты могут не только объяснить существующие экспериментальные данные, но и помочь в проектировании новых экспериментов по поиску ярких эффектов в физике тяжелых ионов, допированном графене и квазиодномерных кулоновских системах.

Достоверность работы обеспечивается использованием строгих математических методов и методов квантовой теории поля, подкрепляемых численной проверкой полученных в работе формул. Результаты находятся в соответствии с результатами, полученными другими авторами.

Апробация работы. На основе результатов диссертации были сделаны доклады на конференциях:

1. Давыдов А.С. Непертурбативные эффекты поляризации вакуума в одномерных и двумерных сверхкритических системах Дирака-Кулона (Устный). XXV Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2018». Секция «Физика», Москва, Россия, 9-13 апреля 2018.
2. Давыдов А.С., Воронина Ю.С., Свешников К.А. Непертурбативные эффекты поляризации вакуума в одномерных и двумерных сверхкритических системах Дирака-Кулона (Устный). VIII Международная школа-конференция молодых ученых и специалистов «Современные проблемы физики – 2018», Минск, Беларусь, 13-15 июня 2018.
3. Davydov A., Sveshnikov K., Voronina Yu. Nonperturbative Vacuum Polarization Effects in One- and Two-Dimensional Supercritical Dirac-Coulomb Systems (Oral). International School of Nuclear Physics 40th Course The Strong Interaction: From Quarks and Gluons to Nuclei and Stars, Erice, Sicily, Italy, 16-24 September 2018.
4. Краснов А.А., Давыдов А.С., Свешников К.А. Магнитные эффекты поляризации вакуума в планарных системах в закритических полях (Устный). Молодежная конференция по теоретической и экспериментальной физике (МКТЭФ-2018), НИЦ «Курчатовский институт» – ИТЭФ, Москва, Россия, 26-29 ноября 2018.
5. Давыдов А.С., Свешников К.А., Воронина Ю.С., Грашин П.А. Вакуумная плотность заряда и вакуумная энергия в одномерных и двумерных сверхкритических системах Дирака-Кулона (Устный). Молодежная конференция по теоретической и экспериментальной физике (МКТЭФ-2018), НИЦ «Курчатовский институт» – ИТЭФ, Москва, Россия, 26-29 ноября 2018.

Результаты работы также были доложены 10 февраля 2018 г. на семинаре Лаборатории физики высоких энергий им. В.И. Векслера и А.М. Балдина Объединенного института ядерных исследований (Дубна).

Личный вклад. Все результаты работы получены автором лично или при его непосредственном участии. Постановка задач исследований и интерпретация

результатов выполнены совместно с соавторами опубликованных работ.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 10 статьях в рецензируемых изданиях, индексируемых в базах Web of Science, Scopus и RSCI:

1. Davydov A., Sveshnikov K., Voronina Y. Vacuum energy of one-dimensional supercritical Dirac–Coulomb system // International Journal of Modern Physics A. — 2017. — Vol. 32, no. 11. — P. 1750054.
2. Воронина Ю. С., Давыдов А. С., Свешников К. А. Вакуумные эффекты для одномерного «атома водорода» при $Z > Z_{cr}$ // Теоретическая и математическая физика. — 2017. — Т. 193, № 2. — С. 276-308.
3. Воронина Ю., Давыдов А., Свешников К. Непертурбативные эффекты поляризации вакуума для квазиодномерной системы Дирака-Кулона при $Z > Z_{cr}$ // Письма в журнал «Физика элементарных частиц и атомного ядра». — 2017. — Т. 14, № 5(210). — С. 464–486.
4. Davydov A., Sveshnikov K., Voronina Y. Nonperturbative vacuum polarization effects in two-dimensional supercritical Dirac–Coulomb system I. Vacuum charge density // International Journal of Modern Physics A. — 2018. — Vol. 33, no. 01. — P. 1850004.
5. Davydov A., Sveshnikov K., Voronina Y. Nonperturbative vacuum polarization effects in two-dimensional supercritical Dirac–Coulomb system II. Vacuum energy // International Journal of Modern Physics A. — 2018. — Vol. 33, no. 01. — P. 1850005.
6. Voronina Y., Sveshnikov K., Grashin P., Davydov A. Essentially non-perturbative and peculiar polarization effects in planar QED with strong coupling // Physica E: Low-Dimensional Systems and Nanostructures. — 2019 — Vol. 106. — P. 298-311.
7. Voronina Y., Sveshnikov K., Grashin P., Davydov A. Casimir (vacuum) energy in planar QED with strong coupling // Physica E: Low-Dimensional Systems and Nanostructures. — 2019. — Vol. 109. — P. 209-224 .
8. Свешников К. А., Воронина Ю. С., Давыдов А. С., Грашин П.А. Существенно непертурбативные эффекты поляризации вакуума в двумерной системе Дирака-Кулона при $Z > Z_{cr}$. Вакуумная плотность заряда // Теоретическая и математическая физика. — 2019. — Т. 198, № 3. — С. 381-417.
9. Свешников К. А., Воронина Ю. С., Давыдов А. С., Грашин П.А. Существенно непертурбативные эффекты поляризации вакуума в двумерной системе Дирака-Кулона при $Z > Z_{cr}$. Энергия поляризации вакуума // Теоретическая и математическая физика. — 2019. — Т. 199, № 1. — С. 69-103.
10. Давыдов А. С., Краснов А. А., Кузьмин В. А. Вакуумные плотности заряда и тока в закритической двумерной системе Дирака-Кулона в магнитном поле с аксиальным векторным потенциалом. Теоретическая и математическая физика. — 2021. — Т. 208, № 1. — С. 122-144.

А также в тезисах докладов:

1. Давыдов А.С. Непертурбативные эффекты поляризации вакуума в одномерных и двумерных сверхкритических системах Дирака-Кулона. В сборнике XXV Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых по фундаментальным наукам «Ломоносов-2018». Секция «Физика», место издания Физический факультет МГУ, тезисы, с. 157-158.
2. Давыдов А.С., Воронина Ю.С., Свешников К.А. Непертурбативные эффекты поляризации вакуума в одномерных и двумерных сверхкритических системах Дирака-Кулона. В сборнике VIII Международная школа-конференция молодых ученых и специалистов «Современные проблемы физики», место издания Институт физики НАН Беларуси Минск, тезисы, с. 25-30.
3. Краснов А.А., Давыдов А.С., Свешников К.А. Магнитные эффекты поляризации вакуума в планарных системах в закритических полях. Сборник аннотаций докладов Молодежной конференции по теоретической и экспериментальной физике МКТЭФ-2018, место издания НИЦ «Курчатовский институт» – ИТЭФ, Москва, тезисы, с. 61.
4. Давыдов А.С., Свешников К.А., Воронина Ю.С., Грашин П.А. Вакуумная плотность заряда и вакуумная энергия в одномерных и двумерных сверхкритических системах Дирака-Кулона. Сборник аннотаций докладов Молодежной конференции по теоретической и экспериментальной физике МКТЭФ-2018, место издания НИЦ «Курчатовский институт» – ИТЭФ, Москва, тезисы, с. 35.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и трех приложений. Полный объем диссертации 200 страниц с 42 рисунками. Список литературы содержит 105 наименований.

Диссертационная работа была выполнена при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС».

Содержание работы

Во введении обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируются цели, ставятся задачи работы, сформулированы научная новизна и практическая значимость представляемой работы.

В первой главе для модельной одномерной задачи Дирака-Кулона (ДК) с $Z > Z_{cr,1}$ рассмотрены метод вычисления и основные непертурбативные свойства как вакуумной плотности заряда $\rho_{VP}(x)$, так и вакуумной энергии \mathcal{E}_{VP} . Такая задача имеет самостоятельное значение как для атома в сильном однородном магнитном поле, так и для моделирования существенно непертурбативных эффектов поляризации вакуума в сверхкритических кулоновских полях при $Z > Z_{cr,1}$ для большего числа пространственных измерений. Следует, однако, отметить, что если общий подход к вычислению вакуумных эффектов и поведение $\rho_{VP}(x)$ в закритической области для различного числа пространственных измерений действительно имеют много общего, то \mathcal{E}_{VP} для 1+1D в закритической области имеет целый ряд специфических особенностей, обусловленных одномерностью задачи. В частности, в 1+1D доминантным эффектом в поведении \mathcal{E}_{VP} в закритической области оказывается вклад от ультрафиолетовой (УФ) перенормировки с поправкой за счет непертурбативных эффектов, а не наоборот, как в 2+1D и 3+1D. По аналогии с большим числом пространственных измерений рассматриваются две системы Дирака-Кулона с внешним потенциалом следующих типов, обеспечивающих самосопряженность гамильтониана:

I. Кулоновский потенциал с гладким обрезанием на масштабе $a > 0$

$$V_I(x) = -\frac{Z\alpha}{|x| + a}. \quad (1)$$

II. Проекция трехмерного кулоновского потенциала сферической оболочки радиусом R_0 на ось x

$$V_{II}(x) = -Z\alpha \left[\frac{1}{R_0} \theta(R_0 - x) + \frac{1}{|x|} \theta(|x| - R_0) \right]. \quad (2)$$

где $\theta(x)$ – функция Хевисайда.

Раздел 1.1 является отдельным введением к первой главе и содержит обзор исследований квазиодномерных атомных систем с кулоновским взаимодействием. Раздел 1.2 посвящен вычислению вакуумной плотности заряда и связанной с ней вакуумной энергии в первом порядке теории возмущений с помощью перенормированной поляризационной функции в 1+1D. Подчеркивается, что при равномерно убывающем на пространственной бесконечности внешнем поле, без специальных граничных условий или нетривиальной топологии полевого многообразия в докритической области при $Z < Z_{cr,1}$ интегральный вакуумный заряд будет нулевым, поляризация вакуума может только исказить его пространственное распределение. В разделе 1.3 исследуется непертурбативная вакуумная плот-

ность заряда для 1+1D. В подразделе 1.3.1 с помощью формализма Вихманна-Кролла выводится выражение для расчета $\rho_{\text{VP}}(x)$ в виде интеграла по мнимой оси в комплексной плоскости по энергии от следа функции Грина одномерной задачи Дирака-Кулона и суммы отрицательных дискретных уровней. Обосновывается необходимость перенормировки и производится перенормировка вакуумной плотности заряда в линейном по Z порядке. Окончательное выражение для вакуумной плотности заряда принимает вид

$$\rho_{\text{VP}}^{\text{ren}}(x) = \rho_{\text{VP}}^{(1)}(x) + \rho_{\text{VP}}^{(3+)}(x),$$

$$\rho_{\text{VP}}^{(3+)}(x) = |e| \left[\sum_{-1 \leq \epsilon_n < 0} \psi_n(x)^\dagger \psi_n(x) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \left(\text{Tr} G(x, x; iy) - \text{Tr} G^{(1)}(x, x; iy) \right) \right], \quad (3)$$

где $\rho_{\text{VP}}^{(1)}$ – линейная по Q пертурбативная плотность, найденная через перенормированную однопетлевую диаграмму с двумя концами, а $\text{Tr} G^{(1)}$ – след функции Грина в первом борновском приближении. Подраздел 1.3.2 содержит результаты численных расчетов вакуумной плотности заряда в 1+1D (см. рис. 1). Численным интегрированием подтверждается, что вакуумный заряд для докритических зарядов источника тождественно равен нулю и скачкообразно изменяется на величину элементарного заряда при погружении очередного уровня дискретного спектра в нижний континуум. В конце раздела 1.3 обсуждается характер траекторий комплексных полюсов функции Грина на втором листе римановой поверхности в комплексной плоскости по энергии в закритической области по Z . Раздел 1.4 посвящен непertурбативному исследованию вакуумной энергии в 1+1D. В подразделе 1.4.1 выводится формула для расчета вакуумной энергии в виде интеграла от сдвигов фаз упругого рассеяния и суммы энергий (с вычетом массы покоя электрона) дискретных уровней соответствующей задачи Дирака-Кулона:

$$\mathcal{E}_{\text{VP}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{k dk}{\sqrt{k^2 + 1}} \delta_{\text{tot}}(k) + \frac{1}{2} \sum_{-1 \leq \epsilon_n < 1} (1 - \epsilon_n). \quad (4)$$

На основе результатов раздела 1.3 производится перенормировка вакуумной энергии в квадратичном по Z порядке:

$$\mathcal{E}_{\text{VP}}^{\text{ren}}(Z) = \mathcal{E}_{\text{VP}}(Z) + \eta Z^2, \quad \eta = \lim_{Z_0 \rightarrow 0} \frac{\mathcal{E}_{\text{VP}}^{(1)}(Z_0) - \mathcal{E}_{\text{VP}}(Z_0)}{Z_0^2}, \quad (5)$$

где η – коэффициент перенормировки. Доказывается сходимость интегралов от сдвигов фаз упругого рассеяния. В подразделе 1.4.2 представлены результаты численных расчетов вакуумной энергии (для модели I см. рис. 2). Детально по-

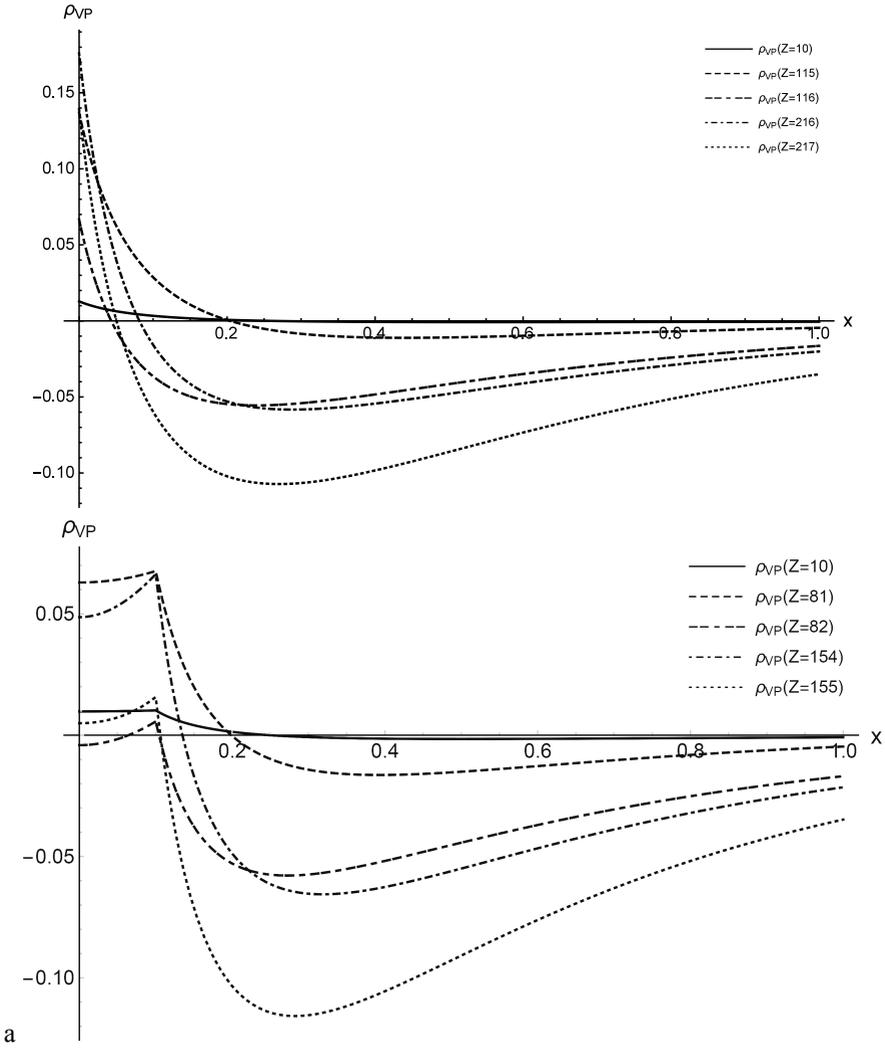


Рис. 1 — $\rho_{VP}^{ren}(x)$ (а) в модели I при $a = 0.1$ и (б) в модели II при $R_0 = 0.1$.

казаны изменения, происходящие в сдвигах фаз, при погружении уровней дискретного спектра в нижний континуум. Исследовано поведение \mathcal{E}_{VP}^{ren} в зависимости от знака коэффициента перенормировки. Показано, что скорость убывания перенормированной вакуумной энергии в рассмотренном в работе диапазоне кулоновских источников не превышает $-|\eta|Z^2$, что обусловлено исключительно медленным ростом числа вакуумных оболочек в одномерном случае. В разделе 1.5 сделаны выводы по результатам первой главы. Также представлены результа-

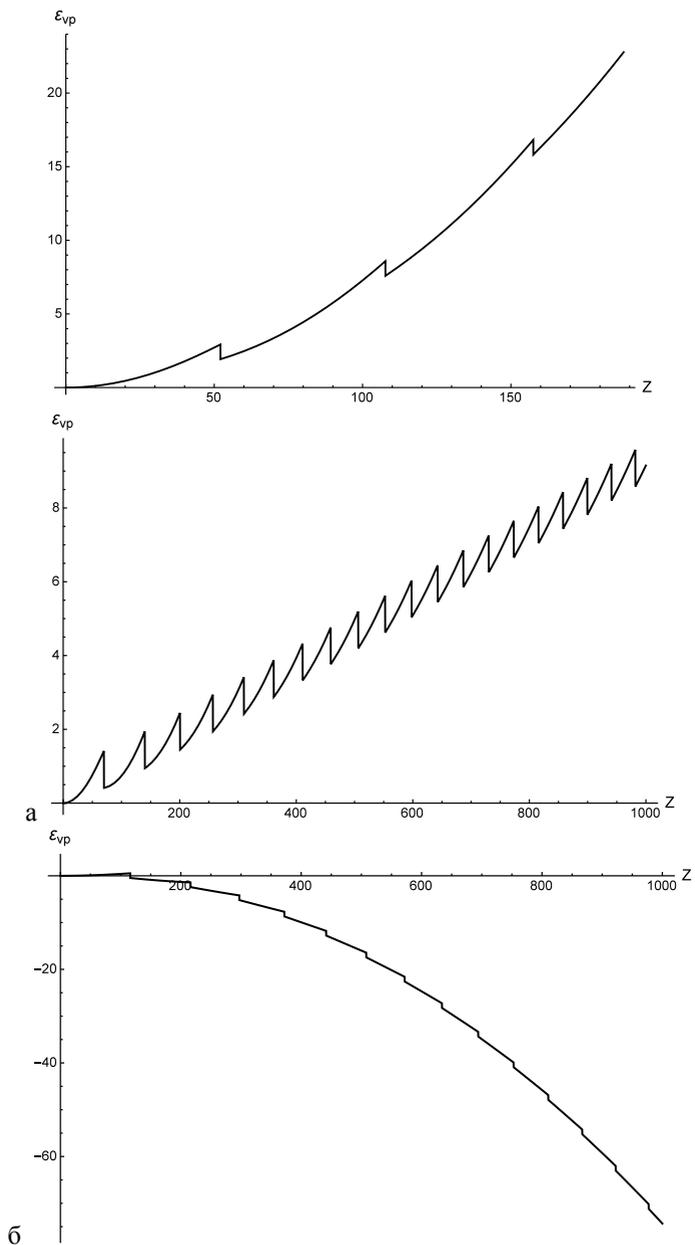


Рис. 2 — $\mathcal{E}_{VP}^{\text{ren}}(Z)$ в модели I при (а) $a = 0.01$, (б) $a = a_{cr} \approx 0.027$, (в) $a = 0.1$.

ты простейшей оценки роли вакуумных эффектов с учетом вклада виртуальных фотонов на поведение вакуумной энергии.

Вторая глава посвящена исследованию аналогичных эффектов поляризации вакуума в закритической области для модельной 2+1D системы Дирака-Кулона. Более конкретно, рассмотрено поведение вакуумной плотности заряда $\rho_{\text{VP}}(\vec{r})$ планарной электрон-позитронной системы во внешнем сверхкритическом кулоновском поле в виде проекции на плоскость потенциала равномерно заряженной сферы с радиусом R_0

$$A_0^{\text{ext}}(\vec{r}) = Z|e| \left[\frac{1}{R_0} \theta(R_0 - r) + \frac{1}{r} \theta(R_0 \leq r \leq R_1) \right] \quad (6)$$

с учетом (возможного) обрезания кулоновской асимптотики на некотором масштабе $R_1 > R_0$.

Вакуумная энергия \mathcal{E}_{VP} рассмотрена как для неэкранированного источника, так и при модифицированном обрезании кулоновской асимптотики вида

$$A_0^{\text{ext}}(\vec{r}) = Z|e| \left[\frac{1}{R_0} \theta(R_0 - r) + \frac{1/r - 1/R_1}{1 - R_0/R_1} \theta(R_0 \leq r \leq R_1) \right]. \quad (7)$$

Два различных вида экранировки обусловлены тем, что хотя и первый потенциал выглядит физически более прозрачным, но пертурбативная энергия поляризации вакуума при этом расходится из-за разрыва в A_0^{ext} при $r = R_1$. Несмотря на то что при стандартном выборе электромагнитной константы $\alpha \simeq 1/137$ и без специального подбора параметров обрезания кулоновского поля такая система может рассматриваться лишь как упрощенная модель для 3+1D, тем не менее ее исследование при $Z > Z_{\text{cr},1}$ представляет значительный интерес, так как при этом воспроизводятся почти все свойства реальной 3+1D задачи поляризации вакуума сверхтяжелым ядром (ядерной квазимолекулой), но с рядом вычислительных упрощений, обусловленных меньшим числом вращательных квантовых чисел. В связи с этим радиус внешнего источника выбирается таким как в 3+1D для случая сверхтяжелого ядра

$$R_0 = R_0(Z) \simeq 1.2(2.5Z)^{1/3} \text{ Фм}. \quad (8)$$

Раздел 2.1 является введением ко второй главе. Раздел 2.2 посвящен методам вычисления вакуумной плотности заряда и связанной с ней вакуумной энергии в первом порядке теории возмущений с помощью перенормированной поляризационной функции в 2+1D при необрезанной кулоновской асимптотике $R_1 \rightarrow \infty$. Подчеркивается, что после перенормировки индуцированный заряд вакуума становится ненулевым только при $Z > Z_{\text{cr},1}$ за счет непертурбативных эффектов, обусловленных опусканием дискретных уровней в нижний континуум. В разделе 2.3 исследуется непертурбативная вакуумная плотность заряда для 2+1D. В подразделе 2.3.1 по аналогии с разделом 1.3.1 получается выражение для расчета вакуумной плотности заряда в неэкранированном случае, но уже в виде бесконечного ряда по квантовому числу третьей проекции полного момента m_j . Обосновывается необходимость перенормировки и проводится перенормировка $\rho_{\text{VP}}(r)$

в линейном порядке по Z и канале $|m_j| = 1/2$ (с учетом кратности вырождения состояний с определенным значением m_j равной 2):

$$\rho_{\text{VP}}^{\text{ren}}(r) = 2 \left[\rho_{\text{VP}}^{(1)}(r) + \sum_{m_j=1/2, 3/2, \dots} \rho_{\text{VP}, |m_j|}^{(3+)}(r) \right], \quad (9)$$

где $\rho_{\text{VP}}^{(1)}(r)$ – пертурбативная вакуумная плотность, рассчитанная с помощью поляризационной функции в первом порядке теории возмущений, а

$$\rho_{\text{VP}, |m_j|}^{(3+)}(r) = \frac{|e|}{2\pi} \left[\sum_{m_j=\pm|m_j|} \sum_{-1 \leq \epsilon < 0} \psi_{\epsilon, m_j}(r)^\dagger \psi_{\epsilon, m_j}(r) + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dy \operatorname{Re} \left(\operatorname{Tr} G_{|m_j|}(r, r; iy) - 2 \operatorname{Tr} G_{m_j}^{(1)}(r; iy) \right) \right]. \quad (10)$$

где $G_{m_j}^{(1)}(r; iy)$ является компонентой парциальной функции Грина $G_{m_j}(r, r; iy)$, линейной по Q , и находится из первого борновского приближения для G_{m_j} . Для перенормированной вакуумной плотности заряда доказывается сходимость ряда по m_j и интеграла по мнимой оси на первом физическом листе римановой поверхности в комплексной плоскости по энергии от следа функции Грина. Подраздел 2.3.2 содержит результаты численных расчетов ρ_{VP} для незранированного случая (см. рис. 3). Как и в разделе 1.3.2 численным интегрированием подтверждается, что вакуумный заряд для докритических зарядов источника тождественно равен нулю и скачкообразно изменяется на величину элементарного заряда (без учета кратности вырождения) при погружении очередного уровня дискретного спектра в нижний континуум. В разделе 2.4 подробно рассматривается пертурбативная вакуумная плотность заряда при конечном R_1 в 2+1D для потенциала (6). Подчеркивается, что в рассматриваемом случае поведение перенормированной вакуумной плотности на качественном уровне повторяет случай отсутствия экранировки ($R_1 \rightarrow \infty$). В разделе 2.5 исследуются специфические двумерные эффекты при конечном R_1 для потенциала (6). Показано, что экранировка кулоновской асимптотики (6) существенно изменяет структуру и свойства первых парциальных каналов с квантовыми числами третьей проекции полного момента равными $\pm 1/2$ и $\pm 3/2$. Раздел 2.6 посвящен исследованию вакуумной энергии в 2+1D для незранированного случая. В подразделе 2.6.1 выводится формула для расчета вакуумной энергии в виде интеграла от сдвигов фаз упругого рассеяния и суммы энергий (с вычетом массы покоя электрона) дискретных уровней соответствующей задачи Дирака-Кулона в виде бесконечной суммы по

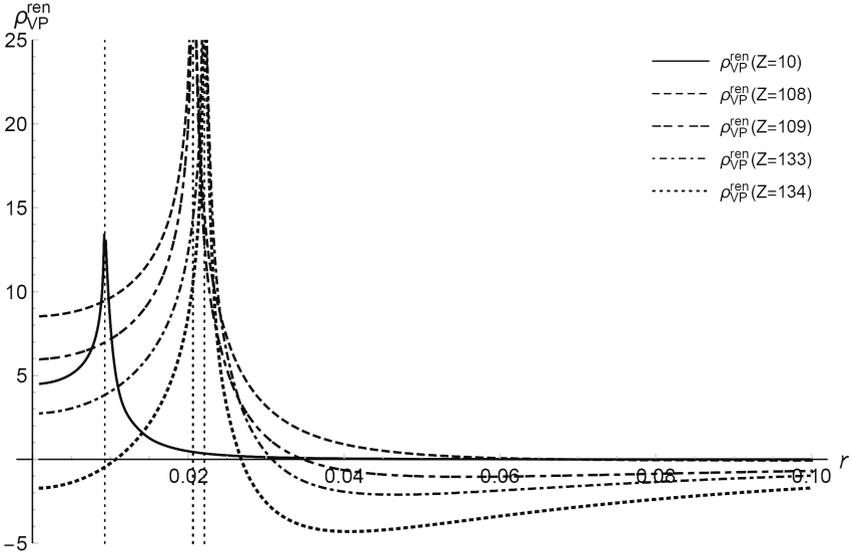


Рис. 3 — $\rho_{VP}^{ren}(r)$ для $Z = 10, 108, 109, 133, 134$.

квантовому числу третьей проекции m_j :

$$\mathcal{E}_{VP} = 2 \sum_{m_j=1/2, 3/2, \dots} \mathcal{E}_{VP, |m_j|} = 2 \sum_{m_j=1/2, 3/2, \dots} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{k dk}{\sqrt{k^2 + 1}} \delta_{tot, |m_j|}(k) + \frac{1}{2} \sum_{-2 \leq \epsilon_{n, |m_j|} < 2} (2 - \epsilon_{n, |m_j|}) \right). \quad (11)$$

На основе результатов раздела 2.3 производится перенормировка вакуумной энергии в квадратичном по Z порядке и канале $|m_j| = 1/2$:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{VP}^{ren}(Z) &= 2 \sum_{m_j=1/2, 3/2, \dots} \mathcal{E}_{VP, |m_j|}^{ren}(Z), \\ \mathcal{E}_{VP, |m_j|}^{ren}(Z) &= \mathcal{E}_{VP, |m_j|}(Z) + \eta_{|m_j|}(R_0) Z^2, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\eta_{|m_j|}(R_0) = \lim_{Z_0 \rightarrow 0} \left[\frac{\mathcal{E}_{VP}^{(1)}(Z_0) \delta_{|m_j|, 1/2} - \mathcal{E}_{VP, |m_j|}(Z_0)}{Z_0^2} \right]_{R_0=R_0(Z)}. \quad (13)$$

Доказывается сходимость бесконечной суммы по m_j и интегралов от сдвигов фаз упругого рассеяния для перенормированной вакуумной энергии в 2+1D. В подразделе 2.6.2 представлены результаты численных расчетов вакуумной энергии. Показано, что скорость убывания перенормированной вакуумной энергии

в рассмотренном в работе диапазоне кулоновских источников оценивается как $-|\eta|Z^3$. Кубическая нелинейность вакуумной энергии является спецификой поляризации вакуума в 2+1D. Раздел 2.7 посвящен непертурбативному расчету вакуумной энергии при экранировке кулоновской асимптотики (7). В подразделе 2.7.1 рассмотрены изменения, которые вносит экранировка кулоновского потенциала (7), в фазовый метод расчета вакуумной энергии в 2+1D, рассмотренный в разделе 2.6. Подраздел 2.7.2 содержит результаты численных расчетов вакуумной энергии при различных значениях параметра обрезания R_1 (7) (см. рис. 4). В разделе 2.8 сделаны выводы по результатам второй главы. Особо подчеркива-

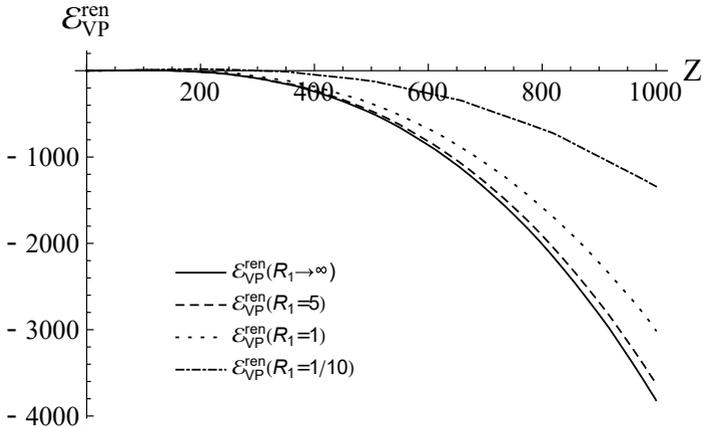


Рис. 4 — $\mathcal{E}_{VP}^{\text{ren}}(Z)$ для различных значений параметра R_1 обрезания кулоновской асимптотики.

ется, что рассмотренные в данной главе методы расчета вакуумной энергии для внешнего потенциала типа (6) в 2+1D с минимальными дополнениями переносятся и на трехмерный случай. Более конкретно, расчеты показывают, что при том же соотношении между радиусом R_0 и зарядом кулоновского источника (8) при $Z \gg Z_{cr,1}$ полное число вакуумных оболочек $N(Z)$ ведет себя не медленнее чем $\sim Z^{3.17}$, а перенормированная вакуумная энергия $\mathcal{E}_{VP}^{\text{ren}}(Z, R_0)$ убывает примерно как $-|\eta|Z^4/R_0$. При этом скорость убывания последней оказывается такова, что она становится конкурентноспособной с классической электростатической энергией кулоновского источника. Проведенные расчеты показывают, что в случае источника в виде сферы $\mathcal{E}_{VP}^{\text{ren}}(Z, R_0(Z)) + Z^2\alpha/2R_0(Z) \simeq 0$ при $Z^* \simeq 3000$. Таким образом, в 3+1D эффекты поляризации вакуума оказываются способными полностью экранировать классическое кулоновское отталкивание. Основная причина, по которой детальные расчеты трехмерного случая до сих пор не опубликованы, состоит в том, что при $Z \sim 2000$ достигается критический заряд для пионного поля [41], и для последовательного описания поведения вакуума в таких полях следует учитывать эффекты сильных взаимодействий. По-

этому вопрос о том, не могут ли другие существенно нелинейные динамические эффекты поляризации вакуума чисто электромагнитной природы понизить Z^* до значения, меньшего 2000, является весьма актуальным.

Третья глава посвящена исследованию непертурбативных эффектов поляризации вакуума в двумерной сверхкритической системе Дирака-Кулона при наличии магнитного поля с аксиальным вектор-потенциалом. В качестве основных характеристик поляризации вакуума в этой главе выступают вакуумная плотность заряда $\rho_{VP}(\vec{r})$ и тока $\vec{j}_{VP}(\vec{r})$. При наличии внешнего магнитного поля отсутствует вырождение по третьей проекции полного углового момента m_j . Таким образом, вакуумная плотность тока в рассматриваемом случае отлична от нуля и является не менее информативной и без сомнений должна рассматриваться наравне с вакуумной плотностью заряда. Внешнее кулоновское поле, как и в главах 1 и 2, выбирается в виде проекции потенциала равномерно заряженной сферы на плоскость

$$A_0^{\text{ext}}(r) = Z|e| \left[\frac{1}{R_0} \theta(R_0 - r) + \frac{1}{r} \theta(r - R_0) \right]. \quad (14)$$

Внешний векторный потенциал \vec{A}^{ext} выбирается в виде потенциала бесконечно тонкого соленоида с радиусом R_1

$$\begin{aligned} \vec{A}^{\text{ext}}(\vec{r}) &= A^{\text{ext}}(r) \vec{e}_\varphi, \\ A^{\text{ext}}(r) &= \frac{\lambda}{|e|} \left[r\theta(R_1 - r) + \frac{R_1^2}{r} \theta(r - R_1) \right], \quad \lambda = |e|H_0/2, \end{aligned} \quad (15)$$

где H_0 - модуль вектора напряженности магнитного поля внутри соленоида

$$\vec{H}(\vec{r}) = \vec{e}_z H_0 \theta(R_1 - r). \quad (16)$$

Отдельно подчеркнем то, что выбор внешнего магнитного поля в виде поля соленоида с бесконечно тонкими стенками обусловлен прежде всего тем, что при такой постановке задачи уравнение Дирака допускает разделение радиальных и угловых переменных. Эта возможность значительно упрощает дальнейшие аналитические и численные расчеты.

Раздел 3.1 является введением к третьей главе и содержит обзор исследований планарных систем Дирака-Кулона в присутствии магнитного поля. В разделе 3.2 вычисляется пертурбативная плотность тока с помощью перенормированной поляризационной функции. В разделе 3.3 формализм Вихманна-Кролла применяется для непертурбативного расчета вакуумной плотности тока \vec{j}_{VP} в виде бесконечной суммы по квантовому числу третьей проекции полного момента m_j . Обосновывается необходимость перенормировки и производится перенормировка вакуумной плотности тока в линейном по Z порядке и канале $|m_j| = 1/2$. Доказывается сходимость бесконечной суммы по m_j и интеграла по мнимой оси в комплексной плоскости по энергии для перенормированной ва-

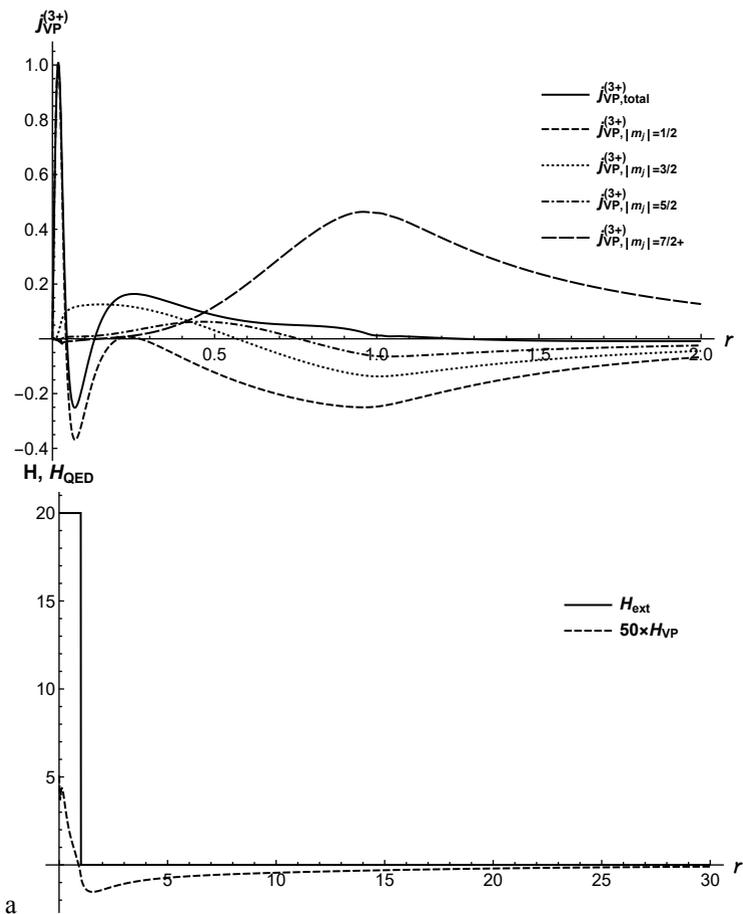


Рис. 5 — $Z = 200$, $\lambda = 10$, $R_1 = 1$: (а) парциальные вакуумные плотности тока; (б) индуцированное магнитное поле.

куумной плотности тока. Выражение для перенормированной вакуумной плотности тока имеет вид

$$j_{VP}^{ren}(r) = \left[j_{VP}^{(1)}(r) + \sum_{m_j=1/2, 3/2, \dots} j_{VP}^{(3+)}(r) \right], \quad (17)$$

где $j_{VP}^{(1)}(r)$ — пертурбативная плотность тока, рассчитанная с помощью перенормированной поляризационной функции в первом порядке теории возмущений,

a

$$j_{\text{VP},|m_j|}^{(3+)}(r) = \frac{|e|}{2\pi} \left[\sum_{m_j=\pm m_j} \sum_{-1 \leq \epsilon_n < 0} \psi_{m_j}^\dagger(r; \epsilon_n) \mathcal{A} \psi_{m_j}(r; \epsilon_n) + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dy \operatorname{Re} \left(\operatorname{Tr} \mathcal{A} G_{|m_j|}(r, r; iy) - 2 \operatorname{Tr} \mathcal{A} G_{m_j}^{(1)}(r; iy) \right) \right], \quad (18)$$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Также рассматриваются изменения в вакуумной плотности заряда в присутствии магнитного поля с аксиальным векторным потенциалом. Раздел 3.4 содержит результаты численных расчетов вакуумной плотности тока, заряда и наведенного магнитного поля в 2+1D. Оказывается, что поведение вакуумной плотности заряда слабо зависит от величины напряженности магнитного поля. Показано, что в присутствии закритического кулоновского источника наведенное магнитное поле при определенных значениях параметров внешнего векторного потенциала способно усиливать исходное магнитное поле. (см. рис. 5). В разделе 3.5 сделаны выводы по результатам третьей главы.

В **заключении** приведены основные результаты работы, которые заключаются в следующем:

1. Разработан непертурбативный метод расчета вакуумной плотности заряда и вакуумной энергии, которые являются основными характеристиками поляризации вакуума, в сверхкритических системах Дирака-Кулона. Также представлен метод расчета вакуумной плотности тока для двумерной сверхкритической системы Дирака-Кулона в присутствии магнитного поля с аксиальным вектор-потенциалом.
2. Показано, что перенормировка через фермионную петлю с двумя внешними линиями оказывается универсальным приемом, который устраняет расходимость теории как в чисто пертурбативном, так и в существенно непертурбативном режимах для вакуумной плотности заряда, вакуумной плотности тока и для вакуумной энергии.
3. Показано, что для широкого диапазона параметров внешнего источника (с зарядом Z и радиусом R_0), нелинейные эффекты в закритической области могут приводить к существенно отличному от пертурбативного квадратичного роста поведению вакуумной энергии вплоть до чётко выраженного убывания в отрицательную область со скачками, вызванными погружением дискретных уровней в нижний континуум. В рассматриваемом диапазоне изменения параметров Z и R_0 , вакуумная энергия ведет себя $\sim -Z^2/R_0$ в 1+1 измерениях и $\sim -Z^3/R_0$ в 2+1 измерениях, достигая больших отрицательных значений. Подчеркивается, что методы,

- примененные для расчета вакуумной энергии в 2+1 измерениях, с минимальным числом изменений могут быть перенесены на трёхмерный случай, где поведение вакуумной энергии, как ожидается, должно быть $\sim -Z^4/R_0$, и, следовательно, вакуумная энергия будет конкурировать с классической электростатической энергией кулоновского источника.
4. Показано, что в присутствии закритического кулоновского источника наведенное магнитное поле при определенных значениях параметров внешнего векторного потенциала способно усиливать исходное магнитное поле.
 5. Представленные теоретические и численные результаты полностью подтверждают предположение о превращении нейтрального вакуума в заряженный в сверхкритических внешних полях, приводящее к спонтанному излучению вакуумных позитронов при погружении уровней дискретного спектра в нижний континуум вследствие закона сохранения заряда.

Список литературы

1. *Pomeranchuk I., Smorodinsky Y.* On the energy levels of systems with $Z > 137$ // J. Phys. Ussr. — 1945. — Т. 9. — С. 97.
2. *Gershtein S., Zel'dovich Y. B.* The critical charge of the nucleus and the vacuum polarization // Lettere Al Nuovo Cimento (1969-1970). — 1969. — Т. 1, № 16. — С. 835—836.
3. *Pieper W., Greiner W.* Interior electron shells in superheavy nuclei // Zeitschrift für Physik A Hadrons and nuclei. — 1969. — Т. 218, № 4. — С. 327—340.
4. *Зельдович Я. Б., Понов В. С.* Электронная структура сверхтяжелых атомов // Успехи физических наук. — 1971. — Т. 105, № 11. — С. 403—440.
5. *Greiner W., Müller B., Rafelski J.* Quantum Electrodynamics of Strong Fields: With an Introduction into Modern Relativistic Quantum Mechanics. — Springer Science & Business Media, 2012.
6. *Гриб А. А., Мамаев С. Г., Мостепаненко В. М.* Вакуумные квантовые эффекты в сильных полях. — Энергоатомиздат, 1988.
7. *Greiner W., Reinhardt J.* Quantum electrodynamics. — Springer Science & Business Media, 2012.
8. Creation dynamics of bound states in supercritical fields / P. Krekora [и др.] // Physical review letters. — 2005. — Т. 95, № 7. — С. 070403.
9. *Zagrebaev V., Greiner W.* Shell effects in damped collisions: a new way to superheavies // Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics. — 2007. — Т. 34, № 11. — С. 2265.
10. *Ruffini R., Vereshchagin G., Xue S.-S.* Electron–positron pairs in physics and astrophysics: from heavy nuclei to black holes // Physics Reports. — 2010. — Т. 487, № 1—4. — С. 1—140.
11. Probing QED vacuum with heavy ions / J. Rafelski [и др.] // New horizons in fundamental physics. — Springer, 2017. — С. 211—251.
12. Coulomb problem for a nucleus / V. M. Kuleshov [и др.] // Physics Uspekhi. — 2015. — Т. 58, № 8. — С. 785.
13. *Godunov S., Machet B., Iysotsky M.* Resonances in positron scattering on a supercritical nucleus and spontaneous production of $e^+ e^-$ pairs // The European Physical Journal C. — 2017. — Т. 77, № 11. — С. 782.
14. Electron-positron pair creation in low-energy collisions of heavy bare nuclei / I. Maltsev [и др.] // Physical Review A. — 2015. — Т. 91, № 3. — С. 032708.
15. *Artemyev A., Surzhykov A.* Quantum electrodynamical corrections to energy levels of diatomic quasimolecules // Physical review letters. — 2015. — Т. 114, № 24. — С. 243004.

16. *Yerokhin V., Shabaev V.* Lamb Shift of $n = 1$ and $n = 2$ States of Hydrogen-like Atoms, $1 \leq Z \leq 110$ // Journal of Physical and Chemical Reference Data. — 2015. — T. 44, № 3. — C. 033103.
17. Positron creation probabilities in low-energy heavy-ion collisions / A. I. Bondarev [и др.] // The European Physical Journal D. — 2015. — T. 69, № 4. — C. 110.
18. One-center calculations of the electron-positron pair creation in low-energy collisions of heavy bare nuclei / R. V. Popov [и др.] // The European Physical Journal D. — 2018. — T. 72, № 6. — C. 115.
19. K-shell ionization of heavy hydrogenlike ions / O. Novak [и др.] // Physical Review A. — 2018. — T. 97, № 3. — C. 032518.
20. *Yerokhin V.* Two-loop self-energy in the Lamb shift of the ground and excited states of hydrogenlike ions // Physical Review A. — 2018. — T. 97, № 5. — C. 052509.
21. *Shytov A. V., Katsnelson M. I., Levitov L. S.* Vacuum polarization and screening of supercritical impurities in graphene // Physical review letters. — 2007. — T. 99, № 23. — C. 236801.
22. *Gamayun O., Gorbar E., Gusynin V.* Supercritical Coulomb center and excitonic instability in graphene // Physical Review B. — 2009. — T. 80, № 16. — C. 165429.
23. *Sobol O., Gorbar E., Gusynin V.* Supercritical instability in graphene with two charged impurities // Physical Review B. — 2013. — T. 88, № 20. — C. 205116.
24. Observing atomic collapse resonances in artificial nuclei on graphene / Y. Wang [и др.] // Science. — 2013. — T. 340, № 6133. — C. 734—737.
25. *Górnicki P.* Aharonov-Bohm effect and vacuum polarization // Annals of Physics. — 1990. — T. 202, № 2. — C. 271—296.
26. Induced current and Aharonov-Bohm effect in graphene / R. Jackiw [и др.] // Physical Review B. — 2009. — T. 80, № 3.
27. *Nishida Y.* Vacuum polarization of graphene with a supercritical Coulomb impurity: Low-energy universality and discrete scale invariance // Physical Review B. — 2014. — T. 90, № 16. — C. 165414.
28. *Khalilov V., Mamsurov I.* Planar density of vacuum charge induced by a supercritical Coulomb potential // Physics Letters B. — 2017. — T. 769. — C. 152—158.
29. *Khalilov V. R., Lee K. E.* Planar massless fermions in Coulomb and Aharonov–Bohm potentials // International J. of Modern Phys. A. — 2012. — T. 27, № 29. — C. 1250169.
30. *Milstein A. I., Terekhov I. S.* Induced charge generated by a potential well in graphene // Phys. Rev. B. — 2010. — T. 81, № 12.

31. *Milstein A. I., Terekhov I. S.* Induced current in the presence of a magnetic flux tube of small radius // *Phys. Rev. B.* — 2011. — Т. 83, № 7.
32. *Sitenko Y. A., Vlasii N. D.* Vacuum polarization effects on graphitic nanocones // *J. of Phys.: Conference Series.* — 2008. — Т. 129. — С. 012008.
33. *Barbieri R.* Hydrogen atom in superstrong magnetic fields: Relativistic treatment // *Nuclear Physics A.* — 1971. — Т. 161, № 1. — С. 1—11.
34. *Krainov V.* A hydrogen-like atom in a superstrong magnetic field // *JETP.* — 1973. — Т. 37, № 3. — С. 406.
35. *Shabad A., Usov V.* Electric field of a pointlike charge in a strong magnetic field and ground state of a hydrogenlike atom // *Physical Review D.* — 2008. — Т. 77, № 2. — С. 025001.
36. *Oraevskii V., Rex A., Semikoz V.* Spontaneous production of positrons by a Coulomb center in a homogeneous magnetic field // *JETP.* — 1977. — Т. 45, № 3. — С. 428.
37. *Karnakov B., Popov V.* A hydrogen atom in a superstrong magnetic field and the Zeldovich effect // *Journal of Experimental and Theoretical Physics.* — 2003. — Т. 97, № 5. — С. 890—914.
38. *Высоцкий М. И., Годунов С. И.* Критический заряд в сверхсильном магнитном поле // *Успехи физических наук.* — 2014. — Т. 184, № 2. — С. 206—210.
39. *Pyykko P.* The physics behind chemistry and the periodic table // *Chemical reviews.* — 2011. — Т. 112, № 1. — С. 371—384.
40. *Indelicato P., Bieroń J., Jönsson P.* Are MCDF calculations 101% correct in the super-heavy elements range? // *Theoretical Chemistry Accounts.* — 2011. — Т. 129, № 3—5. — С. 495—505.
41. *Rafelski J., Fulcher L. P., Klein A.* Fermions and bosons interacting with arbitrarily strong external fields // *Physics Reports.* — 1978. — Т. 38, № 5. — С. 227—361.