ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. П.Н. ЛЕБЕДЕВА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

Мисуна Никита Георгиевич

Развернутый подход в теории высших спинов и суперсимметричных моделях

Специальность 01.04.02 — Теоретическая физика

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
Васильев Михаил Андреевич

Москва — 2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

Введение 5

Глава 1. Развернутый подход и модель Весса-Зумино 22

1.1. Развернутый формализм 25

1.1.1 Развернутые уравнения 25

1.1.2 σ_--когомологии 28

1.1.3 Развернутые действия и заряды 30

1.2. Интегрирование в суперпространстве 34

1.3. Развернутая формулировка безмассового скалярного поля 37

1.4. Развернутая формулировка скалярного супермультиплета 40

1.4.1 Суперсимметричный вакуум 40

1.4.2 Развернутые уравнения скалярного супермультиплета 42

1.5. Оператор Q 46

1.5.1 Общие свойства 46

1.5.2 Старшие градуировки 48

1.6. Лагранжианы 54

1.6.1 Лагранжиан как 4-суперформа 54

1.6.2 Лагранжиан как интегральная форма 56

1.6.3 Киральное суперпространство 58

1.7. Выводы 63

Глава 2. Уравнения Васильева и токи высших спинов 65

2.1. Нелинейные уравнения высших спинов 67

2.2. Теория возмущений 70

2.3. Поправки токов к уравнениям Фронсдала 73

2.3.1 Вершины с максимальным число производных 75

2.3.2 Вершины с минимальным числом производных 80

2.3.3 Квадратичные уравнения Фронсдала с токами высших спинов 82

2.4. Выводы 84

Глава 3. Теория возмущений для расширенных уравнений высших спинов 86

3.1. Твисторные уравнения 87
3.2. Стягивающие гомотопии 88
3.2.1 Гомотопический трюк 88
3.2.2 Анализ операторной последовательности 91
3.3. Операторная последовательность в уравнениях высших спинов . . . 94
3.3.1 Присоединенный случай 94
3.3.2 Твистованный случай 98
3.4. Приложения 101
3.4.1 Свободные уравнения 101
3.4.2 Старшие порядки 102
3.4.3 Расширенные уравнения 103
3.5. Выводы 104

Глава 4. Лоренц-ковариантность расширенных уравнений высших спинов 106
4.1. Лоренц-ковариантная форма уравнений Васильева 109
4.2. Ковариантизация расширенной системы высших спинов 115
4.2.1 Лоренц-ковариантность в твистованном секторе 115
4.2.2 Обобщенная алгебра деформированных осцилляторов 116
4.2.3 Лоренц-ковариантные уравнения 118
4.3. Ковариантная теория возмущений 120
4.3.1 Присоединенный случай 122
4.3.2 Твистованный случай 125
4.4. Выводы 126

Глава 5. Заряды в нелинейной теории высших спинов 128
5.1. Заряды и топологические поля высших спинов 129
5.2. Заряды и статсуммы в уравнениях высших спинов 134
5.2.1 Асимптотические заряды 134
5.2.2 Вакуумная статсумма 138
5.2.3 Вклад топологического сектора 140
5.3. Черные дыры в ОТО и теории высших спинов 143
5.3.1 Особенности $4d$ пространства–времени 144
5.3.2 Черная дыра Керра в теории высших спинов 146
5.3.3 Заряды черной дыры Керра 147

5.4. Выводы 148

Заключение 151

Список литературы 153

Приложение А. Обозначения и соглашения 172

Приложение Б. Уравнения Q-замкнутости из Главы 1 174

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Одной из наиболее важных задач современной теоретической физики является построение квантовой теории гравитации. Отсутствие понимания того, что происходит с гравитацией при сверхвысоких энергиях, где она подчиняется квантовым законам и смыкается с остальными взаимодействиями в единую теорию, представляет собой наиболее значительный пробел в наших представлениях о фундаментальном устройстве окружающего мира. Влияние квантовых эффектов на гравитационное взаимодействие становится существенным на масштабе Планка $\sim 10^{19}$ ГэВ, что на много порядков превосходит возможности современных ускорителей ($\sim 10^{4}$ ГэВ). Поэтому единственным способом изучения квантовой гравитации является теоретический метод.

На сегодняшний день самым плодотворным подходом к описанию фундаментальных взаимодействий является квантовая теория поля. Крупнейшим ее успехом явилась формулировка в 60-70-х гг. XX века современной теории элементарных частиц – Стандартной модели, которая описывает три из четырех известных к настоящему моменту фундаментальных взаимодействий: сильное, слабое и электромагнитное. Главным принципом, в значительной степени фиксирующим структуру Стандартной модели, является инвариантность относительно неабелевых калибровочных симметрий спина 1 (теория Янга–Миллса). Поля Стандартной модели безмассовы (что и приводит к появлению калибровочной симметрии, изгоняющей зависимость от нефизических продольных поляризаций полей Янга–Миллса), а соответствие с наблюдаемым спектром масс элементарных частиц достигается путем спонтанного нарушения электрослабой калибровочной симметрии (механизм Хиггса). В то же время нелинейная теория, в которой изначально присутствует массивное поле спина 1, оказывается неперенормируемой из-за специфики его пропагатора и может рассматриваться лишь как низкоэнергетическая эффективная модель.

Таким образом, Стандартная модель указывает следующую стратегию построения теорий фундаментальных взаимодействий: для исправления ультрафиолетового поведения неперенормируемой эффективной квантовой теории следует повышать ее симметрию, например, путем добавления безмассовых полей. Затем с помощью спонтанного нарушения симметрии можно придать этим полям большие массы, исключив их из низкоэнергетического спектра теории. Возникает естественный вопрос – какие вообще возможны симметрии в квантовой теории поля? Результатом изучения этой проблемы явились различные «теоремы запрета»: низкоэнергетическая теорема Вайнберга [1], теорема Коулмена–Мандулы [2], теорема Вайнберга–Виттена [3] и т.д. В целом, их содержание сводится к тому, что при определенных достаточно общих предположениях максимально возможной алгеброй непрерывных симметрий квантовой теории поля с нетривиальной S-матрицей является прямая сумма алгебры Пуанкаре (т.е. симметрии пространства–времени) и компактных алгебр Ли (отвечающих янг–миллсовским безмассовым полям спина 1), а присутствие взаимодействующих безмассовых полей со спинами > 2 (что могло бы повысить калибровочную симметрию теории) оказывается невозможным.

Существенным шагом вперед стало теоретическое открытие *суперсимметрии* – расширении алгебры пространственно-временных симметрий генераторами, являющимися грассмановыми числами [4–10]. Такое расширение превращает алгебру симметрий в супералгебру, что выходит за рамки исходных предположений теоремы Коулмена–Мандулы и, таким образом, снимает ее ограничения. Как и можно было ожидать, суперсимметричные теории демонстрируют более мягкое ультрафиолетовое поведение по сравнению со своими несуперсимметричными аналогами: расходимости в них возникают, как правило, в более старших порядках. А, к примеру, $4d$ $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричная теория Янга–Миллса, представляющая собой максимально симметричную квантовую теорию поля в $4d$ плоском пространстве–времени со спинами полей не больше 1, вообще оказывается ультрафиолетово конечной [11–13]. С суперсимметрией связаны значительный прогресс в квантовой теории поля и большое число интересных теоретических результатов, например, конструкция гармонического суперпространства [14–17], дуальность Зайберга–Виттена [18–21], суперсимметричная локализация [22–24] АГТ-соответствие [25–30] и др. На сегодняшний день, однако, экспериментальных подтверждений существования суперсимметрии в природе не обнаружено.

Несмотря на все эти достижения, квантовополевой подход к гравитации не принес такого же успеха. Эйнштейновская теория гравитации (общая теория относительности) обладает значительной симметрией, а именно, инвариантностью относительно диффеоморфизмов – гладких обратимых замен пространственно-временных координат. Тем не менее, этой симметрии оказывается недостаточно, и общая теория относительности (ОТО) при квантовании оказывается неперенормируемой начиная со второй петли (при наличии материи – уже с первой). Суперсимметричное обобщение ОТО, супергравитация [31, 32], хотя и обладает улучшенным ультрафиолетовым поведением, по всей видимости, также неперенормируема, хотя и существуют некоторые указания на то, что максимальная $\mathcal{N} = 8$ супергравитация может оказаться конечной [33–35]. По этой причине возникает интерес к альтернативным подходам к проблеме квантовой гравитации.

На сегодняшний день основным кандидатом на роль квантовой теории гравитации, а также единой теории всех фундаментальных взаимодействий, считается теория струн [36]. Первичными объектами в ней являются протяженные одномерные струны, спектр колебаний которых образует бесконечную башню квантовых полей с возрастающими до бесконечности спинами. Все поля, за исключением безмассового сектора со спинами $s \leqslant 2$, имеют массы порядка планковской. Единственным размерным параметром теории является обратное струнное натяжение α', которое определяет спектр масс квантовых полей и по порядку величины совпадает с квадратом планковской длины. Теория струн, помимо (супер)симметрий пространства–времени, обладает также бесконечномерной (супер)конформной симметрией мирового листа – двумерной поверхности, заметаемой струной в пространстве–времени. Предполагается, что такая мощная симметрия должна приводить к ультрафиолетовой конечности теории струн (хотя строгое доказательство этого отсутствует).

Одной из трудностей этой теории является отсутствие полноценного полевого описания: струны представляют собой первично-квантованные объекты. Впервые полевая формулировка была построена Виттеном для случая открытой бозонной струны [37], с тех пор активно исследуются ее суперсимметричные обобщения [38–43]. Однако случай замкнутых струн оказался гораздо более сложен и прогресс здесь сильно ограничен [44–51]. Другой сложностью является отсутствие координатно-независимой и непертурбативной формулировки: в большинстве случаев рассматривается теория возмущений (по степеням α') над пространством Минковского. К этому имеет отношение и самая большая проблема теории: суперконформная симметрия оказывается не аномальной только в размерности пространства–времени $d = 10$. Это означает, что ненаблюдаемые 6 измерений должны быть каким-то образом компактифицированы. Отсутствие принципа, который выбирал бы из колоссального числа всех возможных компактификаций (каждая из которых приводит к своей низкоэнергетической 4-мерной теории) какой-то конкретный вариант, подрывает предсказательную силу и именуется проблемой ландшафта теории струн [52].

В работе Гросса [53] было показано, что в пределе нулевого натяжения $\alpha' \to \infty$ (что соответствует режиму сильной связи в теории струн и энергиям много больше планковской) струнные амплитуды рассеяния порождают бесконечный набор тождеств Уорда, соответствующих всем возможным значениям спинов. Таким образом, в этом пределе в теории струн восстанавливается некоторая бесконечномерная калибровочная симметрия. Это позволяет предположить, что сама теория струн является спонтанно-нарушенной фазой некоторой калибровочной теории безмассовых полей всех спинов – *теории высших спинов*. Последняя должна представлять собой максимально симметричную релятивистскую теорию поля, поскольку любая калибровочная симметрия порождается безмассовым полем спина $s \geqslant 1$. В этом смысле теория высших спинов является дальнейшим нетривиальным обобщением суперсимметричных теорий поля.

Интерес к теориям высших спинов значительно возрос после открытия голографического AdS/CFT-соответствия [54–56]. В общем случае эта гипотеза (до сих пор недоказанная) утверждает, что имеется дуальность между теорией гравитации в $(d+1)$-мерном пространстве анти-де Ситтера (AdS) и конформной теорией поля (CFT) на его границе, представляющей собой d-мерное пространство Минковского: функциональный интеграл теории гравитации в AdS_{d+1} есть производящий функционал CFT_d, если граничные значения AdS-полей отождествить с источниками для операторов конформной теории. Изначальная гипотеза [54], в частности, связывала между собой теорию IIB суперструн на $AdS_5 \times S^5$ и $4d$ $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричную теорию Янга–Миллса, причем режим сильной связи на одной стороне соответствовал слабой связи на другой. Успешные проверки этой гипотезы были проведены в пределе бесконечной постоянной 'т Хофта $\lambda = g_{YM}^2 N$ (N – число цветов, g_{YM} – константа связи в теории Янга–Миллса), что соответствует супергравитационному пределу теории струн. Позднее Клебанов и Поляков выдвинули гипотезу [57] (подробнее речь о ней пойдет ниже), что имеется также дуальность между минимальной теорией высших спинов в AdS_4 и, в зависимости от граничных условий, либо свободной, либо критической трехмерными векторными моделями. Свободная векторная модель – это теория свободного скалярного поля с глобальной $O(N)$-симметрией, т.е. простейшая конформная теория поля. Критическая векторная модель – это теория $\lambda\varphi^4$ с глобальной $O(N)$-симметрией. Она представляет большой физический интерес, т.к. является моделью критической точки в фазовых переходах второго рода. Впоследствии были предложены дуальности для случая суперсимметричных теорий высших спинов [58, 59], а также теорий высших спинов с нарушенной четностью [60, 61]: предполагается, что они дуальны $3d$ топологическим теориям Черна–Саймонса с конформной материей. AdS/CFT-соответствие для теорий высших спинов характерно тем, что в нем обе дуальные теории находятся в режиме слабой связи. Это позволяет надеяться, что именно в случае теории высших спинов удастся напрямую установить полную эквивалентность двух теорий и, таким образом, дать прямое доказательство AdS/CFT-соответствия, что, как можно ожидать, поможет и в доказательстве гипотезы в общем положении. В настоящее время AdS/CFT-соответствие теорий высших спинов является предметом активного исследования [62–74].

Таким образом, теория высших спинов представляет значительный интерес и с точки зрения развития квантовой теории поля (в цепочке нетривиальных обобщений калибровочные теории $\rightarrow$ суперсимметричные теории $\rightarrow$ теории высших спинов), и с точки зрения исследования квантовой гравитации и теории струн (как высокоэнергетическая симметричная фаза последней), и с точки зрения AdS/CFT голографии (возможность провести полное доказательство дуальности).

Степень разработанности темы. Первые работы по высшим спинам относятся к 30-м годам прошлого века и связаны с именами Майораны [75], Дирака [76] и Фирца с Паули [77]. Важную роль также сыграла статья Вигнера [78], где было показано, что объединение постулатов квантовой механики и специальной теории относительности требует, чтобы на гильбертовом пространстве состояний квантовой теории реализовывалось унитарное представление группы Пуанкаре, и были классифицированы (для $4d$ пространства

Минковского) все такие неприводимые представления. Они определяются двумя квантовыми числами: непрерывным неотрицательным (чтобы исключить тахионы) числом m^2 (квадрат массы), и полуцелым неотрицательным числом $s \in \left\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, ...\right\}$ (спин для массивных или спиральность для безмассовых представлений). Таким образом, изучение теории с полями произвольного спина есть изучение релятивистской квантовой теории общего вида, что само по себе является интересной задачей.

Как уже говорилось выше, теории с безмассовыми полями обычно обладают более хорошими квантовыми свойствами по сравнению с массивными. Теоретико-полевое описание свободных безмассовых полей произвольных спинов впервые была дано Фронсдалом [79] и Фангом и Фронсдалом [80] на основе предшествовавших работ Синга и Хагена по массивным полям [81, 82]. Безмассовое поле целого спина s описывается дважды бесследовым симметричным тензором ранга s $\phi_{a(s)}\left(x\right)$[1],

$$\phi^{bc}{}_{bca(s-4)}\left(x\right) = 0. \tag{0.0.1}$$

Классические уравнения движения имеют вид

$$\Box\phi_{a(s)}\left(x\right) - s\partial_a\partial_b\phi^b{}_{a(s-1)}\left(x\right) + \frac{1}{2}s\left(s-1\right)\partial_a\partial_a\phi^b{}_{ba(s-2)}\left(x\right) = 0 \tag{0.0.2}$$

и инвариантны (для любого ненулевого спина) относительно калибровочных преобразований

$$\delta\phi_{a(s)}\left(x\right) = \partial_a\xi_{a(s-1)}\left(x\right), \quad \xi^b{}_{ba(s-3)}\left(x\right) = 0 \tag{0.0.3}$$

с произвольным параметром $\xi_{a_1 \ldots a_{s-1}}\left(x\right)$, являющимся симметричным бесследовым тензором ранга $(s-1)$. Соответствующие выражение для калибровочно-инвариантных лагранжианов и полей полуцелого спина мы здесь приводить не будем. Теория свободных фронсдаловских полей без труда обобщается на случай пространства–времени постоянной кривизны [83, 84].

Следующим естественным шагом выглядело построение взаимодействующей теории с безмассовыми полями высших (т.е. $s > 2$) спинов. На этом пути были найдены кубические вершины взаимодействия полей высших спинов друг с другом [85–89], но не удавалось найти калибровочно-инвариантные вершины их взаимодействия с гравитацией [90, 91]. К тому же упоминавшаяся выше

[1]Используемые в данной работе обозначения см. в Приложении А.

теорема Коулмена–Мандулы, казалось бы, заранее обрекала на неудачу любые попытки построить нелинейную теорию с калибровочными симметриями высших спинов. Решение этой проблемы было найдено в работах Фрадкина и Васильева [92, 93], где был построен кубический лагранжиан полей высших спинов, включающий и гравитационные взаимодействия: оказалось, задача решается, если рассматривать пертурбативное разложение не над пространством Минковского, а над пространством–временем постоянной ненулевой кривизны, т.е. пространством (анти-)де Ситтера. Одновременно при этом снимается ограничение теоремы Коулмена–Мандулы, поскольку в таких пространствах отсутствует понятие S-матрицы (невозможно определить асимптотические состояния).

Развивая эту идею, удалось найти полные нелинейные уравнения теории высших спинов [94, 95], известные также как *уравнения Васильева*. В отличие от обычных уравнений движения теории поля они являются т.н. *развернутыми* [96, 97], представляя собой бесконечный набор дифференциальных уравнений первого порядка, записанных в терминах дифференциальных форм. Бесконечное множество вершин взаимодействия между полями закодированы в них через эволюцию по вспомогательным твисторным переменным. Изначально уравнения были получены для случая $d = 4$ измерений, затем была найдена формулировка для произвольного d для симметричных бозонных полей [98]. В связи с этим отметим, что при $d > 4$ теория представлений групп Пуанкаре и (анти-)де Ситтера усложняется, появляются унитарные неприводимые представления, соответствующие т.н. полям смешанной симметрии, характеризующимся более чем двумя квантовыми числами и описывающимся многострочными диаграммами Юнга. Исследование этих полей актуально в контексте прояснения связи теории высших спинов с теорией струн и активно ведется [99–112], но затруднено техническими сложностями.

Отличительными особенностями теории Васильева являются: обязательное присутствие в спектре безмассовых полей всех спинов $0 \leqslant s < \infty$ (возможна редукция на бозонные поля и, далее, на поля четных спинов); связанная с этим бесконечномерная неабелева калибровочная симметрия высших спинов (при этом имеются конечномерные подалгебры в секторе низших спинов $s \leqslant 2$); наличие ненулевой космологической постоянной (плоское пространство–время не является решением уравнений и теория не имеет осмысленного плоского предела при ненарушенных симметриях высших спинов); координатно-независимая формулировка уравнений, достигающаяся путем использованием языка дифференциальных форм. Действие для теории Васильева неизвестно (см, однако, [113], где предложен аналог принципа наименьшего действия).

Развернутые уравнения высших спинов можно воспринимать как нетривиальное обобщение тетрадной формулировки ОТО Картана [114–116]. В ней гравитационные поля описываются полями тетрады и спиновой связности, калибровочные симметрии которых соответствуют Пуанкаре-симметриям локально-инерциальных систем отсчета, что обеспечивает справедливость принципа эквивалентности. Отметим, что именно картановская формулировка гравитации (в отличие от стандартного метрического подхода) позволяет ввести взаимодействие фермионов с гравитационным полем (фактически, поле тетрады играет роль σ-матриц для искривленного пространства–времени). По этой причине тетрадный формализм неизбежно возникает при рассмотрении теорий супергравитации, где, помимо гравитона, присутствуют поля его суперпартнера гравитино – безмассового поля спина $3/2$. В связи с этим возникает вопрос – могут ли методы развернутого формализма, оказавшиеся плодотворными в теории высших спинов, помочь в изучении суперсимметричных теорий.

Одним из актуальных вопросов суперсимметрии является вопрос о существовании явно суперсимметричной формулировки теорий типа $4d$ $\mathcal{N} = 4$ или $10d$ $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных теорий Янга–Миллса, суперполевая off-shell формулировка которых до сих пор неизвестна, если вообще существует (см, однако, [15], где с помощью гармонического суперпространства удалось построить off-shell формулировку для $\mathcal{N} = 3$ суперсимметричной теории Янга–Миллса). Эта ситуация является схожей с теорией Васильева, для которой также неизвестна off-shell формулировка. Выглядит разумным начать изучение вопроса о применении развернутого формализма к суперсимметричным теориям с разбора простейшей модели. Таковой является модель Весса–Зумино – $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричная теория скалярного и спинорного полей [9, 10]. Опишем ее кратко.

Рассмотрим следующий лагранжиан для спинорного поля χ_β и комплексных скалярных полей C и F

$$\mathcal{L} = \bar{C}\Box C + i\partial_a \bar{\chi}_{\dot{\alpha}} \left(\bar{\sigma}^a\right)^{\dot{\alpha}\beta} \chi_\beta + \bar{F}F + m\left(CF - \frac{1}{2}\chi_\alpha\chi^\alpha + c.c.\right). \tag{0.0.4}$$

Он и соответствующие ему уравнения движения инвариантны относительно глобальных преобразований $\mathcal{N} = 1$ суперсимметрии

$$\delta C = \sqrt{2}\xi_\alpha\chi^\alpha, \tag{0.0.5}$$

$$\delta\chi_\alpha = i\sqrt{2}\left(\sigma^a\right)_{\alpha\dot{\beta}} \bar{\xi}^{\dot{\beta}}\partial_a C + \sqrt{2}\xi_\alpha F, \tag{0.0.6}$$

$$\delta F = i\sqrt{2}\bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \left(\bar{\sigma}^a\right)^{\dot{\alpha}\beta} \partial_a\chi_\beta \tag{0.0.7}$$

с произвольным спинорным параметром ξ_α. Поскольку лагранжиан не содержит производных F, то уравнения движения последнего являются алгебраическими, выражая F через C. В итоге, теория описывает свободные поля Клейна–Гордона и Дирака с одинаковыми массами. Появление вспомогательных полей наподобие F, которые не несут локальных степеней свободы и служат для замыкания алгебры off-shell преобразований симметрии, характерно для суперсимметричных теорий. Для систематического анализа и, в частности, поиска нелинейных теорий полезно перейти к суперполевой формулировке [117]. Для этого пространственно-временное многообразие расширяется до суперпространства $\mathbb{R}^{4|4}$ путем добавления четырех грассмановых координат $\theta^A = \left(\theta^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\right)$. Тогда описывающее модель Весса-Зумино т.н. киральное суперполе выделяется наложением на произвольное суперполе $\Phi\left(x,\theta\right)$ алгебраической (с точки зрения пространства–времени) связи

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi\left(x,\theta\right) := \left(-\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} - i\theta^\beta \left(\sigma^a\right)_{\beta\dot{\alpha}} \partial_a\right)\Phi\left(x,\theta\right) = 0. \tag{0.0.8}$$

Общее решение этого уравнения может быть легко записано в терминах переменных θ^α и $y^a := x^a + i\theta^\alpha \left(\sigma^a\right)_{\alpha\dot{\beta}} \bar{\theta}^{\dot{\beta}}$, так как для них

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}\theta^\alpha = \bar{D}_{\dot{\alpha}}y^a = 0. \tag{0.0.9}$$

В итоге, общее киральное суперполе имеет вид

$$\Phi\left(x,\theta\right) = C\left(y\right) + \sqrt{2}\theta_\alpha\chi^\alpha\left(y\right) + \theta_\alpha\theta^\alpha F\left(y\right). \tag{0.0.10}$$

В этих терминах суперполевое действие наиболее общего вида есть

$$S=\int \mathrm{d}^4x\left(\int \mathrm{d}^2\bar{\theta}\mathrm{d}^2\theta K\left(\Phi,\bar{\Phi}\right)+\int \mathrm{d}^2\theta W\left(\Phi\right)+\int \mathrm{d}^2\bar{\theta}\bar{W}\left(\bar{\Phi}\right)\right), \qquad (0.0.11)$$

где K называется кэлеровым потенциалом, а W – суперпотенциалом.

Первый шаг в изучении разворачивания суперсимметричных теорий был сделан в [118], где была найдена развернутая версия уравнений движения свободной модели Весса–Зумино. Следующим шагом является построение развернутой off-shell формулировки теории и поиск и классификация всех ее инвариантных функционалов. Это является одной из целей данной Диссертации.

Развернутые уравнения и связанные с ними функционалы имеют существенно иной вид по сравнению со стандартными лагранжевыми уравнениями движения и функционалами теории поля. В первую очередь это связано с тем, что релятивистские поля в развернутом формализме описываются бесконечными наборами тензоров, параметризующими все степени свободы, так что развернутых уравнений обычно бесконечно много, а развернутые функционалы зависят от этих тензоров и не содержат пространственно-временных производных. Таким образом, извлечение стандартных лагранжевых структур из развернутых систем является нетривиальной задачей. Более того, данный вопрос не является просто формально-техническим, но имеет и физическое значение.

В частности, в последнее время в литературе активно обсуждается проблема локальности в теории высших спинов [119–126]. В случае пространства Минковского требование локальности может быть сформулировано как запрет на появление в теории бесконечных рядов по пространственно-временным производным (т.к. они, фактически, являются рядами Тейлора, связывающими поля в точках, разделенных конечным расстоянием). С этой точки зрения теория высших спинов *a priori* не является локальной, т.к. наличие в ее спектре бесконечного набора полей неограниченного спина (т.е. лоренцевых тензоров неограниченного ранга) очевидно ведет к появлению в вершинах взаимодействия производных неограниченного порядка. Требование локальности можно уточнить, запретив появление бесконечных рядов по производным в вершине после фиксации входящих в нее полей. Тогда оказывается, что по крайней мере кубические вершины высших спинов в пространстве Минковского являются в этом смысле локальными [127, 128]. Калибровочно-инвариантные четвертичные вершины высших спинов в плоском пространстве–времени не существуют, что не позволяет построить полную нелинейную теорию в пространстве Минковского и является проявлением теоремы Коулмена–Мандулы.[2] Но, с другой стороны, понятие локальности в пространстве анти-де Ситтера, где и сформулирована полная нелинейная теория высших спинов, не формализовано, что связано, в том числе, с некоммутативностью производных. Поэтому задача состоит в фиксации допустимого функционального класса полей, что активно обсуждается в литературе [119, 121, 123, 125].

С технической точки зрения проблема локальности теории Васильева сводится к проблеме построения правильной резольвенты по вспомогательным твисторным переменным. Локальная резольвента для квадратичных уравнений была построена в [124, 132]. С ее помощью можно извлекать из уравнений Васильева лагранжевы уравнения движения до второго порядка по полям. Извлечение вершин и сравнение их с известными в литературе результатами является одной из целей Диссертации.

Как уже говорилось, большое внимание привлекают голографические дуальности высших спинов. В частности, гипотеза Клебанова–Полякова [57] утверждает, что минимальная бозонная (т.е. содержащая поля только четных спинов) $4d$ теория Васильева с четной материей дуальна либо (в зависимости от граничных условий) свободной, либо критической $3d$ векторной модели (т.е. теории конформного скаляра, заряженного по глобальной $O(N)$ группе). Если убрать требование минимальности, то глобальная группа расширяется до $U(N)$. Аналогично, бозонная теория Васильева с нечетной материей дуальна свободной или критической модели Гросса–Невье (теории конформного спинора); в случае теорий Васильева с фермионами дуальные модели становятся суперсимметричными [58, 59]. Четно-неинвариантные теории Васильева, как предполагается, дуальны $3d$ топологическим теориям Черна–Саймонса с конформной материей [60, 61]. В работе [62] было показано, что на линейном уровне теория Васильева действительно воспроизводит спектр конформ-

[2] В последнее время, однако, в литературе изучаются т.н. киральные теории высших спинов [129–131], которые являются самосогласованными и не содержат вершин старше кубической. Они существенным образом опираются на подход светового конуса и не допускают переформулировки в терминах лоренцевых тензоров, обходя, таким образом, теорему Коулмена–Мандулы.

ной теории. Главной проблемой, тормозящей дальнейший прогресс в области AdS/CFT-соответствия высших спинов, является отсутствие нелинейного действия теории Васильева, из-за чего стандартная схема AdS/CFT-вычислений непосредственно неприменима. В связи с этим возникает вопрос об альтернативных путях изучения дуальностей высших спинов.

Один из способов, использованный Джиомби и Йином [63, 64], состоит в отождествлении конформных корреляционных функций с определенными решениями уравнений Васильева, взятых в граничном пределе. Этот метод технически сложен и не универсален, но, тем не менее, позволил получить важные подтверждения в пользу существования дуальности. Недавно в [74] аналогичные вычисления были проведены на более строгом уровне с использованием локальной резольвенты, полученной в [124], что помогло извлечь дополнительную информацию, в частности, о существовании различных редукций теории в балке и необходимости нелинейных поправок к граничным условиям.

Другой путь, предложенный в [133], состоит в обобщении $4d$ уравнений Васильева путем включения в них полей, являющихся дифференциальными формами старших рангов. Это позволяет определить на расширенных таким образом уравнениях замкнутые пространственно-временные 2- и 4-формы, являющиеся функциями от развернутых полей высших спинов. Соответственно, интеграл от этих форм будет являться сохраняющейся величиной. В [133] приведены доводы в в пользу того, что 2-форма должна воспроизводить сохраняющиеся заряды для решений теории высших спинов, обобщающих черные дыры эйнштейновской гравитации, тогда как 4-форма может рассматриваться как древесный производящий функционал голографически дуальной конформной теории поля, т.е. она соответствует плотности действия (лагранжиану) теории, вычисленной на уравнениях движения и рассматриваемой как функционал от граничных значений полей.

Однако, вычисление 4-формы даже в низших порядках по полям оказывается технически весьма сложной задачей. Это связано с тем, что обычный метод решения развернутых уравнений основывается на использовании стягивающих гомотопий, обращающих дифференциал де Рама по вспомогательным твисторным переменным. С ростом ранга формы число стягивающих гомотопий растет комбинаторно, что сводится к многократному повторению однообразных вычислений, приводящих в итоге к громоздким и неудобным в обращении выражениям. По этой причине встает вопрос разработки более эффективной техники решения развернутых уравнений высших спинов, которая автоматически учитывала бы многократное выполнение однотипных интегрирований. Это является одной из задач данной диссертационной работы.

С другой стороны, упомянутая 2-форма на уравнениях высших спинов может быть определена даже и без добавления старших форм, что делает ее вычисление (по крайней мере, в младших порядках) относительно простой задачей. При этом изучение 2-формы способно дать много интересных сведений, касающихся физики черных дыр. Поскольку теория высших спинов обобщает теорию гравитации Эйнштейна и содержит в своем спектре гравитон (безмассовое поле спина 2), то появляется естественный вопрос: существуют ли в теории высших спинов аналоги черных дыр ОТО, и какими свойствами они обладают. Как оказалось, методы теории высших спинов способны дать новую информацию даже применительно к обычной гравитации. Так, в [134, 135] чернодырные решения ОТО были проанализированы с помощью развернутого подхода. Благодаря этому удалось построить координатно-независимое описание черной дыры в AdS_4 в терминах одного параметра глобальной симметрии AdS_4. Затем в [136] данный подход был обобщен на теорию высших спинов, в результате чего удалось получить точное нелинейное решение уравнений Васильева, обобщающее $4d$ статическую черную дыру.

Черные дыры являются одной из важнейших моделей для исследования квантовой гравитации. В частности, формула Бекенштейна–Хокинга для энтропии черной дыры [137] включает в себя как ньютоновскую гравитационную постоянную, так и постоянную Планка, следовательно, термодинамика черных дыр должна регулироваться законами квантовой гравитации. Однако микроскопический вывод энтропии Бекенштейна–Хокинга до сих пор отсутствует. Частный результат Вафы–Строминджера [138], которым удалось воспроизвести энтропию пятимерной экстремальной черной дыры из теории струн, рассматривается как один из крупнейших успехов последней. До сих пор не получил разрешения парадокс потери информации [139], также связанный с термодинамикой черных дыр и излучением Хокинга. С формальной точки зрения проблема энтропии и родственные ей задачи являются проблемами определения сохраняющихся величин, т.е., с точки зрения дифференциальной геометрии, замкнутых функционалов. Вычисление с помощью 2-формы сохраняющихся зарядов в теории высших спинов, являющееся одной из целей настоящей Диссертации, открывает новые возможности в решении этих проблем. Кроме того, эта конструкция естественным образом вовлекает в игру топологические поля высших спинов, которые до этого выглядели как непонятный математический артефакт уравнений Васильева.

Поскольку теория высших спинов обобщает ОТО, она должна содержать в себе принцип эквивалентности, который лежит в основе теории гравитации и на сегодняшний день выглядит как фундаментальный закон природы.[3] В картановской формулировке гравитации, которая и применяется в теории Васильева, принцип эквивалентности сводится к требованию, чтобы спиновая связность появлялась только в составе лоренц-ковариантной производной (иными словами, чтобы в уравнениях все индексы плоского касательного пространства были индексами лоренцевых тензоров). Лоренц-инвариантность исходных уравнений Васильева была доказана в [147], однако для расширенных уравнений высших спинов [133] этот вопрос в литературе не обсуждался. Одной из целей Диссертации является установление лоренц-инвариантности расширенных уравнений высших спинов и изучение структуры их явно лоренц-ковариантной формы.

Таким образом, **целями** предлагаемой диссертационной работы являются:

1. Анализ модели Весса–Зумино методами развернутого подхода.
2. Изучение кубических вершин взаимодействия высших спинов с точки зрения уравнений Васильева.
3. Развитие пертурбативных методов теории высших спинов.
4. Исследование вопроса о лоренц-ковариантности расширенных уравнений высших спинов.
5. Анализ сохраняющихся зарядов высших спинов с точки зрения уравнений Васильева.

Для достижения этих целей необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Найти развернутую off-shell формулировку безмассового скалярного супермультиплета.

[3] Существует, однако, и альтернативная точка зрения: в теориях с возникающей лоренц-инвариантностью [140–146] лоренцева симметрия, а с ней и принцип эквивалентности, трактуются как приближенная низкоэнергетическая симметрия фундаментальной лоренц-неинвариантной теории.

2. Классифицировать все нетривиальные развернутые суперполевые лагранжианы модели Весса–Зумино.
3. Извлечь из уравнений Васильева квадратичные поправки к уравнениям Фронсдала, соответствующие токовым взаимодействиям высших спинов.
4. Найти разложение единицы для расширенных уравнений высших спинов, полностью разрешающее эволюцию по твисторным переменым.
5. Найти явно лоренц-ковариантную форму расширенных уравнений высших спинов.
6. Вычислить сохраняющиеся заряды в младших порядках для черной дыры Керра с высшими спинами.

На защиту выносятся следующие **основные положения**:

1. Классификация всех развернутых суперполевых лагранжианов модели Весса–Зумино в классах суперформ, интегральных форм и киральных интегральных форм.
2. Найденные в явном виде квадратичные поправки к уравнениям Фронсдала, порождаемые токовыми взаимодействиями в теории Васильева с произвольной фазой.
3. Теория возмущений для расширенных уравнений высших спинов, полностью разрешающая эволюцию по вспомогательным твисторным переменным.
4. Явно лоренц-ковариантная форма расширенных уравнений высших спинов.
5. Конструкция для сохраняющихся зарядов высших спинов в теориях с топологическими полями.
6. Выражения для сохраняющихся зарядов черной дыры Керра с высшими спинами в младших порядках по полям.

Личный вклад автора, научная новизна, методология и достоверность результатов работы. Все представленные в Диссертации результаты являются оригинальными и получены лично автором либо при его непосредственном участии. Их научная новизна позволила продвинуться в понимании структуры теории высших спинов, в анализе нелинейных уравнений высших спинов и в приложении развернутого подхода к суперсимметричным теориям. Достоверность полученных результатов обеспечивается надежностью применяемого в Диссертации математического аппарата теоретической физики (включающего теорию дифференциальных уравнений, дифференциальную геометрию, теорию представлений алгебр Ли и ассоциативных алгебр, теорию дифференциальных форм и когомологий и пр.). Основным методом исследования в Диссертации является развернутый подход, ранее уже многократно доказавший свою эффективность и плодотворность в применении к теории высших спинов.

Теоретическая и практическая значимость работы. Изучаемые проблемы представляют конкретный научный интерес в области теоретической физики фундаментальных взаимодействий. Полученные в работе результаты могут быть использованы для исследований в области теории высших спинов и суперсимметричных теорий поля. Предложенная конструкция развернутых суперполевых действий открывает возможности для исследования суперсимметричных теорий методами развернутого подхода, а его эффективность доказывается разобранным в работе примером модели Весса–Зумино, для которой получены все суперполевые развернутые действия. Полученные в Диссертации квадратичные поправки токов высших спинов к уравнениям Фронсдала доказывают правильность предложенной в [124, 132] локальной квадратичной резольвенты для уравнений Васильева. Разработанная в Диссертации теория возмущений для расширенных уравнений высших спинов значительно упрощает их пертурбативный анализ, автоматически учитывая многократные гомотопические интегрирования, возникающие при применении стандартной пертурбативной техники. Найденная в работе лоренц-ковариантная форма расширенных уравнений высших спинов, во-первых, доказывает, что эти уравнения соблюдают принцип эквивалентности, а, во-вторых, ведет к дальнейшему упрощению теории возмущений. Наконец, предложенная конструкция для зарядов высших спинов с топологическими полями открывает новые возможности как для анализа структуры теории высших спинов, так и для исследования проблемы энтропии черных дыр и информационного парадокса.

Апробация результатов. Основные результаты Диссертации опубликованы в 5 статьях в журналах, рекомендованных ВАК, [148–152].

Результаты диссертационной работы докладывались на различных международных конференциях, совещаниях и семинарах: «Quarks-2014» (Суздаль, 2

- 8 июня 2014), «Higher Spin Theory and Holography-1» (Москва, 8 - 10 декабря 2014), «Higher Spin Theory and Holography-2» (Москва, 2 - 4 июня 2015), международная сессия-конференция Секции ядерной физики ОФН РАН «Физика фундаментальных взаимодействий» (Дубна, 12 - 15 апреля 2016), «Quarks-2016» (Пушкин, 29 мая - 4 июня 2016), «Higher Spin Theory and Holography-4» (Москва, 30 мая - 1 июня 2016), «Ginzburg Centennial Conference on Physics» (Москва, 29 мая - 3 июня 2017), «Higher Spin Theory and Holography-6» (Москва, 31 мая - 2 июня 2017), «XXVth International Conference on Integrable Systems and Quantum Symmetries (ISQS-25)» (Прага, Чешская республика, 6 - 10 июня 2017), «Supersymmetries and Quantum Symmetries – SQS'2017» (Дубна, 31 июля - 5 августа 2017), «Quarks-2018» (Валдай, 27 мая - 2 июня 2018), «Higher Spin Theory and Holography-7» (Москва, 4 - 6 июня 2018), «Quantum Field Theory and Gravity» (Томск, 30 июля - 4 августа 2018), а также на семинарах по квантовой теории поля ФИАН.

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из Введения, 5 глав основной части, Заключения, Списка литературы и 2 приложений. В Приложении А собраны различные соглашения и обозначения, применяемые в Диссертации. В Приложении Б выписаны уравнения Q-замкнутости суперформы лагранжиана из Главы 1. Полный объем Диссертации составляет 174 страницы. Список литературы включает 226 наименований. Диссертация не содержит рисунков и таблиц.

Благодарности. Я хотел бы выразить глубокую признательность своему научному руководителю Михаилу Андреевичу Васильеву, без чьей непрерывной поддержки, многочисленных консультаций и советов данная работа не смогла бы появиться. Его взгляды на теоретическую физику и науку вообще оказали на меня огромное влияние, и я рад, что могу учиться у него. Также я хотел бы поблагодарить своего соавтора Вячеслава Евгеньевича Диденко, сотрудничество и общение с которым сыграли неоценимую роль в работе над диссертацией. Диссертация была выполнена при финансовой поддержке Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС».

ГЛАВА 1. Развернутый подход и модель Весса-Зумино

Развернутый подход, изначально развитый для описания динамики полей высших спинов [97], представляет собой переформулировку полевых уравнений в виде некоторых обобщенных условий ковариантного постоянства. В принципе, любая теория может быть переписана таким образом. Развернутая формулировка динамической системы позволяет контролировать ее калибровочные симметрии, а используемый ею координатно-независимый язык дифференциальных форм особенно удобен для теорий, включающих гравитацию. Более того, вид так называемых универсальных развернутых уравнений [153], к которым, по сути, принадлежат все известные примеры, вообще оказывается нечувствительным к конкретному выбору пространства–времени, в котором распространяются поля. Последнее свойство позволяет, в частности, легко получать различные версии суперпространственных формулировок прямо из развернутой формулировки в физическом пространстве–времени.

Связанной с этим чертой развернутого подхода является то, что он предоставляет инструменты для систематического поиска лагранжианов и сохраняющихся токов в терминах определенных Q-когомологий, ассоциированных с системой развернутых уравнений [154]. В данной Главе мы проиллюстрируем этот метод, систематически выведя суперпространственные действия для простейшей суперсимметричной модели, а именно $4d$ $\mathcal{N}=1$ модели Весса–Зумино [9, 10]. Наши результаты являются off-shell расширением on-shell результатов [118].

На первый взгляд, развернутая схема получения действий не работает для суперполевых теорий, поскольку суперформы не интегрируемы на супермногообразиях. Тем не менее, как мы покажем ниже, это можно исправить, если развернутое действие определить как интеграл либо от суперформы по четному подмногообразию, произвольным образом вложенному в полное суперпространство, либо от интегральной формы Бернштейна–Лейтеса [155]. Следует отметить, что интегрирование Бернштейна–Лейтеса изначально применялось в контексте D-бран [156], где использовалась специфическая гауссова форма подынтегральных выражений. В этой Главе мы расширяем класс интегральных форм на случай δ-функций от супертетрад. Соответствующие суперпространственные интегралы оказываются хорошо определенными, обеспечивая явно суперсимметричную формулировку теорий. Будучи полезным в практических вычислениях, такое расширение класса суперпространственных лагранжианов открывает новые возможности для конструирования суперсимметричных действий в суперпространстве. В частности, в модели Весса–Зумино, рассматриваемой в этой Главе, интегральные формы с δ-функциями от супертетрад обеспечивают явные решения для уравнений, определяющих инвариантные действия.

Результаты этой Главы дают пример применения развернутого формализма к суперсимметричным моделям, в которых суперпространственные связи возникают естественным образом при поднятии развернутой системы в суперпространство. Мы построим наиболее общие развернутые лагранжианы модели Весса–Зумино в виде 4-суперформы, интегральной формы и киральной интегральной формы. Они содержат все возможные суперсимметричные лагранжианы $4d$ модели Весса–Зумино, т.е., помимо стандартных лагранжианов Весса–Зумино [10] и Салама–Стрэтсди [117], также лагранжианы со старшими производными. Список суперсимметричных лагранжианов, представленных в этой Главе, не выходит за рамки общего суперсимметричного лагранжиана (0.0.11) для кирального суперполя Φ ($\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi = 0$) с произвольными лоренц-инвариантными суперпотенциалом $W(\Phi)$ и (вещественным) кэлеровым потенциалом K, зависящим от Φ, $\bar{\Phi}$ и их (супер)производных [157]. Тем не менее, можно ожидать, что полученные результаты могут быть полезны для практического анализа компонент со старшими производными суперсимметричных действий, поскольку явно суперсимметричные развернутые суперформенные действия в нашем подходе прямо воспроизводят компонентные действия при отождествлении пространства Минковского с поверхностью интегрирования в полном суперпространстве. В контексте модели Весса–Зумино лагранжианы со старшими производными изучались, к примеру, в [158–161].

В применении к суперсимметричным моделям предлагаемый метод имеет много общего с подходом группового многообразия [162, 163], который трактует действия как инвариантные функционалы на гиперповерхностях, вложенных в групповое многобразие, а также с подходом «эктоплазмы» [164–167], в котором суперсимметричные компонентные действия возникают после наложения условия d-замкнутости на суперлагранжиан. Изучаемые же нами Q-

когомологии развернутого формализма связаны с когомологиями де Рама посредством развернутых уравнений.

Привлекательной чертой подхода Q-когомологий является то, что он переформулирует проблему координатно-независимым алгебраическим способом, делая процедуру более систематической по сравнению с анализом дифференциальных операторов, требующимся, к примеру, в эктоплазменном подходе. Таким образом, подход Q-когомологий более общий и применим к любым (не обязательно суперсимметричным) моделям и геометриям.

Одним из ключевых свойств развернутого подхода является то, что он делает явными калибровочные и глобальные симметрии (последние как остаточные калибровочные симметрии уравнений для вакуумных полей). В частности, локальная или глобальная суперсимметрия являются одними из таких симметрий, в зависимости от рассматриваемой модели. Именно это свойство делает развернутый подход особенно полезным для изучения калибровочных теорий высших спинов, для которых он изначально был разработан. Одна из целей данной Главы – показать, что он может быть полезным также и для анализа обычных теорий поля (низших спинов). То обстоятельство, что этот подход включает бесконечные башни полевых переменных, иногда рассматриваемое как усложнение, на самом деле является упрощением, т.к. эти башни полей просто формируют базис всех off-shell или on-shell нетривиальных старших производных модели. Если не интересоваться анализом старших производных, возможно редуцировать соответствующим образом развернутые уравнения. Преимущество же состоит в том, что развернутая формулировка предоставляет хорошо определенный базис полей для анализа членов старших порядков и/или старших производных. Единственным условием является нильпотентность оператора Q, которая гарантирует как совместность, так и инвариантность системы. Это условие дает инструмент для поиска явно суперсимметричной формулировки теории. В этом контексте следует отметить, что так как динамические уравнения развернутой системы классифицируются в терминах так называемых σ_--когомологий [168], это делает возможным выведение off-shell развернутой системы прямо из on-shell системы путем поиска такого дополнения развернутых уравнений, в котором соответствующий сектор σ_--когомологий обнуляется. В принципе, это дает общий подход к поиску явно суперсимметричных версий рассматриваемых теорий.

Хотя калибровочные симметрии не играют существенной роли в модели Весса–Зумино, можно ожидать, что развернутый формализм окажется полезен для анализа более сложных моделей типа суперсимметричной теории Янга–Миллса, несмотря на значительный прогресс, уже достигнутый с помощью различных методов [169–174]. В этой Главе мы в основном интересуемся анализом специфики применения развернутой техники к суперсимметричным моделям в суперпространстве, что является первым шагом к изучению калибровочных суперсимметричных теорий.

Глава организована следующим образом. В Разделе 1.1 дается обзор развернутого подхода и предлагается когомологический метод вычисления лагранжианов для градуированных систем. В Разделе 1.2 рассмотрены релевантные аспекты проблемы интегрирования суперформ. В Разделе 1.3 рассматривается пример простейшей развернутой полевой системы – безмассового скалярного поля в пространстве Минковского. Раздел 1.4 содержит обзор результатов [118] для on-shell безмассового скалярного супермультиплета, а также его off-shell обобщение. В Разделе 1.5 мы изучаем Q-оператор рассматриваемой системы и вычисляем когомологии его старшей по градуировки части. В Разделе 1.6 мы выводим и решаем уравнения, которые определяют суперсимметричные инвариантные функционалы модели и находим частные решения, связанные с действием модели Весса–Зумино. В конце Раздела 1.6 объясняется, как обычные теоретико-полевые лагранжианы возникают из найденных развернутых лагранжианов, и аргументируется, что последние описывают все возможные суперсимметричные лагранжианы рассматриваемой модели, включая стандартные выражения [10, 117] вместе с их обобщениями со старшими производными.

1.1. Развернутый формализм

1.1.1. Развернутые уравнения

Рассмотрим d-мерное пространственно-временное многобразие M^d с локальными координатами $x^{\underline{n}}$, $\underline{n} = 0, ..., d-1$. Разворачивание уравнений подразумевает их переформулировку в виде обобщенных уравнений нулевой кривизны

$$R^{\Omega}(x) := \mathrm{d}W^{\Omega}(x) + G^{\Omega}(W(x)) = 0, \tag{1.1.1}$$

где $\mathrm{d} = \mathrm{d}x^{\underline{n}}\partial/\partial x^{\underline{n}}$ – дифференциал де Рама, $W^{\Omega}(x)$ – дифференциальные формы ранга p_{Ω} и

$$G^{\Omega} := \sum_{n=1}^{\infty} f^{\Omega}{}_{\Upsilon_1 \ldots \Upsilon_n} W^{\Upsilon_1} \ldots W^{\Upsilon_n} \tag{1.1.2}$$

суть дифференциальные формы степени $(p_{\Omega} + 1)$, представляющие собой внешние произведения форм $W^{\Upsilon}(x)$ (мы будем опускать символ внешнего произведения). Ω и Υ обозначают наборы индексов, которые несут дифференциальные формы.

Тождество $\mathrm{d}^2 \equiv 0$ влечет за собой условие совместности

$$G^{\Upsilon} \frac{\partial G^{\Omega}(W)}{\partial W^{\Upsilon}} \equiv 0, \tag{1.1.3}$$

которое должно удовлетворяться для всех W^{Ω}. Оно может быть эквивалентно переписано в виде условия нильпотентности на следующий оператор Q

$$Q := G^{\Upsilon} \frac{\delta}{\delta W^{\Upsilon}}, \quad Q^2 \equiv 0. \tag{1.1.4}$$

Развернутые уравнения называются универсальными [153, 154], если условие совместности (1.1.3) выполняется вне зависимости от ранга топ-формы на многообразии M^d (т.е., фактически, вне зависимости от размерности M^d). В этом случае вариация по $W^{\Omega}(x)$ хорошо определена и уравнения (1.1.1) инвариантны относительно калибровочных преобразований

$$\delta W^{\Omega} = \mathrm{d}\varepsilon^{\Omega} - \varepsilon^{\Upsilon} \frac{\partial G^{\Omega}(W)}{\partial W^{\Upsilon}}, \tag{1.1.5}$$

где $(p_{\Omega} - 1)$-форма $\varepsilon^{\Omega}(x)$ является калибровочным параметром, связанным с p_{Ω}-формой $(p_{\Omega} > 0)$ $W^{\Omega}(x)$. 0-формы калибровочных симметрий не порождают.

Для универсальных развернутых уравнений условие (1.1.3) выполняется независимо от выбора пространственно-временного многообразия. Вся информация о локальных физических степенях свободы содержится в 0-формах в любой данной точке пространства-времени. Поскольку эти данные остаются теми же в любом пространстве, универсальные развернутые системы обеспечивают эквивалентное описание в более широком (супер)пространстве путем простого добавления дополнительных координат. Конкретные примеры этого явления представлены в [118, 175–177].

Ниже мы используем следующую терминологию. Поля, которые не могут быть ни выражены через производные других полей, ни откалиброваны в ноль, мы называем динамическими. Все остальные поля носят название вспомогательных. (Заметим, что разделение полей на динамические и вспомогательные не является с необходимостью однозначным). Дифференциальные условия, налагаемые развернутыми уравнениями на динамические поля, называются динамическими уравнениями. Тогда остальные уравнения являются либо следствиями динамических уравнений, либо связями, которые выражают вспомогательные поля через производные динамических.

Пример развернутого уравнения может быть построен следующим образом. Возьмем алгебру Ли $\mathfrak{g}$ с базисом $\{T_a\}$ и рассмотрим лежащую в ней 1-форму $\Omega = \Omega^a T_a$. Если взять $G = \Omega\Omega$, то уравнение (1.1.1) принимает вид

$$\mathrm{d}\Omega + \Omega\Omega = 0, \tag{1.1.6}$$

а условие совместности (1.1.3) сводится к обычному тождеству Якоби для $\mathfrak{g}$. Уравнение (1.1.6) означает, что связность Ω – плоская, что является стандартным способом описания $\mathfrak{g}$-инвариантного вакуума. Уравнение (1.1.5) дает обычные калибровочные преобразования связности Ω

$$\delta\Omega = \mathrm{d}\varepsilon\left(x\right) + \Omega\varepsilon\left(x\right) - \varepsilon\left(x\right)\Omega, \tag{1.1.7}$$

где 0-форма $\varepsilon\left(x\right)$ принимает значения в $\mathfrak{g}$. Фиксированная плоская связность Ω_0 инвариантна относительно преобразований с параметрами, удовлетворяющими

$$\mathrm{d}\varepsilon_0\left(x\right) + \Omega_0\varepsilon_0\left(x\right) - \varepsilon_0\left(x\right)\Omega_0 = 0. \tag{1.1.8}$$

Это уравнение формально совместно в силу (1.1.3). Решения (1.1.8) описывают остаточную глобальную $\mathfrak{g}$-симметрию любого решения (1.1.6).

Линеаризуем развернутое уравнение (1.1.1) вокруг фиксированной связности Ω_0, удовлетворяющей (1.1.6),

$$W = \Omega_0 + C(x), \tag{1.1.9}$$

где C – это дифференциальные формы, рассматриваемые как малые возмущения и поэтому дающие только линейный вклад в уравнения. Пусть $\left\{C_p^i\right\}$ – подмножество форм фиксированной степени p, пронумерованных индексом i. В линейном приближении вклад будет давать часть G, билинейная по Ω_0 и C_p^i, т.е. $G = \Omega_0^a (T_a)^i{}_j C_p^j$. Тогда (1.1.3) означает, что матрицы $(T_a)^i{}_j$ образуют представление алгебры $\mathfrak{g}$ на пространстве V, где принимают значения p-формы C_p^i. А (1.1.1) превращается в уравнение ковариантного постоянства

$$D_{\Omega_0} C_p^i = 0, \tag{1.1.10}$$

где $D_{\Omega_0} \equiv \mathrm{d} + \Omega_0$ – ковариантная производная в $\mathfrak{g}$-модуле V. C_p^i надлежащим образом преобразуется при калибровочных преобразованиях $\mathfrak{g}$. Действительно, (1.1.5) дает для (1.1.10)

$$\delta C_p^i = \mathrm{d}\varepsilon_p^i + \Omega_0 \varepsilon_p^i - \varepsilon_0 C_p^i, \tag{1.1.11}$$

где ε_p^i – это калибровочные параметры, связанные с C_p^i (для $p > 0$), а ε_0 – параметры глобальной $\mathfrak{g}$-симметрии, удовлетворяющие (1.1.8).

1.1.2. σ_--когомологии

Классификация динамических полей, калибровочных симметрий и динамических уравнений развернутых систем осуществляется с помощью т.н. σ_--когомологий [118, 153, 154, 168]. Рассмотрим линейную развернутую систему

$$\left(\mathrm{d} + \sum_i \sigma_i\right) C(x) = 0, \tag{1.1.12}$$

где $C(x)$ – дифференциальные формы некоторых полей и операторы σ_i действуют алгебраически (т.е. не дифференцируют по $x^{\underline{n}}$).

В технике σ_--когомологий разделение полей на динамические и вспомогательные контролируется $\mathbb{Z}$-градуированием $\mathcal{G}$, по отношению к которому вспомогательные поля имеют более высокую градуировку, чем динамические.

Градуирующий оператор $\mathcal{G}$ должен быть диагонализуемым на пространстве полей и ограниченным снизу, а дифференциал де Рама d иметь нулевую градуировку. Обычно $\mathcal{G}$ считает число тензорных индексов у полей.

Техника σ_--когомологий применима, если $\{\sigma_i\}$ содержит оператор с отрицательной градуировкой. Тогда σ_- – это оператор с минимальной градуировкой и (1.1.12) принимает вид

$$\left(\mathrm{d} + \sigma_- + \sum\right) C\left(x\right) = 0, \tag{1.1.13}$$

где $\sum$ обозначает сумму всех операторов $\{\sigma_i\}$, кроме σ_-. Поскольку σ_- имеет наименьшую $\mathcal{G}$-градуировку, из условия совместности (1.1.3)

$$\left(\mathrm{d} + \sigma_- + \sum\right)^2 = 0 \tag{1.1.14}$$

следует, что

$$\left(\sigma_-\right)^2 = 0. \tag{1.1.15}$$

Учитывая, что калибровочное преобразование (1.1.5) для уравнения (1.1.13) имеет вид

$$\delta C\left(x\right) = \left(\mathrm{d} + \sigma_- + \sum\right) \varepsilon\left(x\right), \tag{1.1.16}$$

можно показать [153, 154, 168], что для p-форм C_p из линейного пространства V когомологии $H^{p-1}\left(\sigma_-, V\right)$, $H^p\left(\sigma_-, V\right)$ и $H^{p+1}\left(\sigma_-, V\right)$ изоморфны, соответственно, пространствам калибровочных симметрий, динамических полей и динамических уравнений.

Ситуация, когда имеется несколько операторов σ_i с отрицательной градуировкой, более сложна. Как показано в [118], в этом случае обычный анализ σ_--когомологий должен быть расширен до анализа последовательности всех таких операторов. Полная теоретико-полевая интерпретация развернутой системы тогда определяется когомологиями $H\left(\sigma_-^{'\cdots'}|...|\sigma_-^{''}|\sigma_-^{'}|\sigma_-\right)$, где операторы $\sigma_-^{'\cdots'}$ упорядочены в порядке возрастания их $\mathcal{G}$-градуировки и $H\left(\sigma_-^{'}|\sigma_-\right)$ обозначает когомологии $\sigma_-^{'}$, ограниченные на $H\left(\sigma_-\right)$.

1.1.3. Развернутые действия и заряды

Инварианты развернутой системы, такие как действия и сохраняющиеся заряды, классифицируются когомологиями соответствующего оператора Q (1.1.4) [154].

Предположим, что система (1.1.1) находится off-shell, т.е. не содержит динамических уравнений и, следовательно, представляет из себя просто множество связей. На языке σ_--когомологий это значит, что развернутые уравнения для $(p-1)$-форм W^Ω имеют $H^p(\sigma_-)=0$. Следуя [154], определим действие S такой системы как интеграл по многообразию M^d

$$S=\int\limits_{M^d}\mathcal{L} \tag{1.1.17}$$

от некоторой d-формы $\mathcal{L}(W)$ (лагранжиана), которая является Q-замкнутой функцией полей W^Ω

$$Q\mathcal{L}=0: \quad G^\Omega\frac{\partial\mathcal{L}(W)}{\partial W^\Omega}=0. \tag{1.1.18}$$

Принимая во внимание, что $\delta\mathcal{L}=\left(\partial\mathcal{L}(W)/\partial W^\Omega\right)\delta W^\Omega$, и используя (1.1.5), легко видеть, что калибровочная вариация $\mathcal{L}$ есть

$$\delta\mathcal{L}=\mathrm{d}\left(\varepsilon^\Omega\frac{\partial\mathcal{L}(W)}{\partial W^\Omega}\right). \tag{1.1.19}$$

В предположении, что M^d не имеет границы (или что поля достаточно быстро убывают на бесконечности), отсюда следует, что действие S инвариантно относительно калибровочных преобразований (1.1.5).

Если лагранжиан $\mathcal{L}$ является Q-точным, т.е. $\mathcal{L}=G^\Omega\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial W^\Omega}$ для некоторой $(d-1)$-формы $\mathcal{F}(W)$, то в силу (1.1.1)

$$\mathcal{L}=G^\Omega\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial W^\Omega}\Longleftrightarrow\mathcal{L}=-\mathrm{d}\mathcal{F} \tag{1.1.20}$$

и, следовательно, Q-точные лагранжианы ведут к локально-тривиальным действиям. Таким образом, нетривиальные калибровочно-инвариантные действия off-shell развернутой системы (1.1.1) находятся во взаимооднозначном соответствии с ее Q-когомологиями.

Если же предположить, что система (1.1.1) находится on-shell (т.е. содержит в себе некоторые динамические уравнения), а p-форма $\mathcal{L}$ является представителем нетривиальной Q-когомологии, то интеграл от нее по p-циклу $\sum^p$

$$q = \int\limits_{\sum^p} \mathcal{L} \tag{1.1.21}$$

будет описывать сохраняющийся заряд.

Пусть M^d вложено в некоторое $\tilde{d}$-мерное объемлющее пространство $\widetilde{M^{\tilde{d}}}$, $M^d \subset \widetilde{M^{\tilde{d}}}$, $\tilde{d} > d$. Расширяя (1.1.1) на $\widetilde{M^{\tilde{d}}}$, получаем, что в силу (1.1.18), которое эквивалентно d-замкнутости $\mathcal{L}$, и теоремы Стокса действие (1.1.17) не зависит от локального вида такого вложения.

Особый интерес представляет случай, когда алгебра функций полей, из которых построен лагранжиан, допускает градуировку G, ограниченную снизу. Пусть Q и $\mathcal{L}$ разлагаются в конечные суммы G-однородных слагаемых

$$Q = \sum_{i=0}^{n} Q_i, \quad \mathcal{L} = \sum_{i=0}^{k} \mathcal{L}_i, \tag{1.1.22}$$

где $G(Q_i) = G(\mathcal{L}_i) = i$. Тогда пространство нетривиальных Q-замкнутых лагранжианов изоморфно некоторому подпространству в $H(Q_n)$, где Q_n – часть Q с максимальной G-градуировкой. Покажем это.

Действительно, из $Q^2 = 0$ для различных G-градуировок следует

$$(Q_n)^2 = 0, \tag{1.1.23}$$

$$\{Q_n, Q_{n-1}\} = 0, \tag{1.1.24}$$

$$\dots$$

$$(Q_0)^2 = 0. \tag{1.1.25}$$

Уравнение $Q\mathcal{L} = 0$ дает

$$Q_n \mathcal{L}_k = 0, \tag{1.1.26}$$

$$Q_{n-1}\mathcal{L}_k + Q_n \mathcal{L}_{k-1} = 0, \tag{1.1.27}$$

$$\ldots$$

$$Q_0 \mathcal{L}_0 = 0. \tag{1.1.28}$$

Обозначим компоненты с наивысшими градуировками как $\mathbb{Q} := Q_n$ и $\mathbb{L} := \mathcal{L}_k$. Так как нетривиальные лагранжианы представлены Q-когомологиями, то если $\mathbb{L} = \mathbb{Q}f$, эта компонента может быть удалена переопределением

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} - Qf, \tag{1.1.29}$$

так что $G(\mathbb{L}') < G(\mathbb{L})$. Если вновь $\mathbb{L}' = \mathbb{Q}g$, вычитание

$$\mathcal{L}'' = \mathcal{L}' - Qg \tag{1.1.30}$$

понижает старшую градуировку дальше. Этот процесс заканчивается через конечное число шагов, поскольку G-градуировка ограничена снизу. В конце концов, либо лагранжиан оказывается тривиальным, либо его компонента со старшей градуировкой $\mathbb{L}$ лежит в $H(\mathbb{Q})$. Таким образом, любой нетривиальный лагранжиан представлен некоторой $\mathbb{L} \in H(\mathbb{Q})$.

Это не означает, однако, что любая $\mathbb{L} \in H(\mathbb{Q})$ связана с каким-то нетривиальным лагранжианом $\mathcal{L} \in H(Q)$. Здесь могут иметь место две связанных между собой ситуации.

Одна состоит в том, что $\mathbb{L}$ не может быть дополнена слагаемыми с меньшими градуировками так, чтобы получился Q-замкнутый лагранжиан $\mathcal{L}$. Действительно, $Q_{n-1}\mathbb{L}$ в (1.1.27), к примеру, $\mathbb{Q}$-замкнут в силу (1.1.23), (1.1.24) и (1.1.26). Однако, если он не $\mathbb{Q}$-точен, то (1.1.27) не имеет решений. Иными словами, принадлежность $Q_{n-1}\mathbb{L}$ к нетривиальным $\mathbb{Q}$-когомологиям препятствует восстановлению $\mathcal{L}$ по $\mathbb{L}$.

Другая ситуация заключается в том, что если этот же самый элемент $\mathbb{Q}$-когомологий, препятствующий расширению до полной Q-когомологии, интерпретируется как компонента со старшей градуировкой другого лагранжиана с $\mathbb{L}' = Q_{n-1}\mathbb{L}$, то эта компонента может быть удалена добавлением Q-точного члена $-Q\mathbb{L}$.

В общем случае, схожие ситуации могут возникать на любом шаге анализа уравнений (1.1.26)-(1.1.28). В частности, соответствующая Q-тривиальная компонента со старшей градуировкой имеет вид

$$\mathbb{L}=\sum_{i=i_0}^{n} Q_i\mathcal{F}_{k-i}=Q_{i_0}\mathcal{F}_{k-i_0}+Q_{i_0+1}\mathcal{F}_{k-i_0-1}+...+Q_{n-1}\mathcal{F}_{k-n+1}+\mathbb{Q}\mathcal{F}_{k-n}, \quad (1.1.31)$$

где $\mathcal{F}_i$ удовлетворяют

$$Q_{i_0+1}\mathcal{F}_{k-i_0}+Q_{i_0+2}\mathcal{F}_{k-i_0-1}+...+\mathbb{Q}\mathcal{F}_{k-n+1}=0, \quad (1.1.32)$$

$$...$$

$$Q_{n-1}\mathcal{F}_{k-i_0}+\mathbb{Q}\mathcal{F}_{k-i_0-1}=0, \quad (1.1.33)$$

$$\mathbb{Q}\mathcal{F}_{k-i_0}=0, \quad (1.1.34)$$

а $i_0\in[0,n]$ – фиксированное целое число. Если $\mathcal{F}_{k-i_0}=\mathbb{Q}g$, то он может быть удален переопределением $\mathcal{F}_i^{'}=\mathcal{F}_i-Q_{i+n-k+i_0}g$ с $\mathcal{F}_i^{'}$, который, в силу (1.1.23)-(1.1.25), удовлетворяет той же системе (1.1.31)-(1.1.34) с $i_0'=i_0+1$. В результате, либо старшая компонента оказывается тривиальной $\mathbb{L}=\mathbb{Q}\widetilde{\mathcal{F}}_{k-n}$ (если все $\mathcal{F}_i$ в (1.1.32)-(1.1.34) могут быть удалены), либо $\widetilde{\mathcal{F}}_{k-n}$ в (1.1.34) принадлежит $H\left(\mathbb{Q}\right)$. В последнем случае $\mathbb{L}$, хоть и не будучи $\mathbb{Q}$-точным, может быть удален добавлением Q-точных членов $-\sum_i Q\mathcal{F}_i$.

Заметим, что схожая ситуация имела место в [178], где изучались деформации вершин высших спинов из пространства Минковского в пространство анти-де Ситтера. Там нетривиальные вершины являлись когомологиями нильпотентного оператора $Q=Q^{fl}+\lambda^2Q^{sub}$, а космологическая постоянная равнялась $-\lambda^2$. Градуировка G считала число производных в вершине, и $G\left(Q^{fl}\right)=1$, $G\left(Q^{sub}\right)=-1$. Оказывалось, что AdS-деформация (если вообще существовала) вершины F, нетривиальной в пространстве Минковского (где $\lambda=0$ и $Q=Q^{fl}$), могла, в принципе, быть тривиальной в AdS.

Итак, пространство нетривиальных Q-замкнутых лагранжианов изоморфно подпространству в $H\left(\mathbb{Q}\right)$, которое формируется такими старшими компонентами $\mathbb{L}$, которые не могут быть представлены в виде (1.1.31), где $\mathcal{F}_i$ удовлетворяют (1.1.32)-(1.1.34).

Отметим, что рассмотренная здесь конструкция оператора Q, как и развернутый подход в целом, имеют непосредственную связь с БРСТ-формализмом, как обсуждалось в [179–181]. В частности, в [181] показано, что если БРСТ-формулировка дана в терминах векторных полей Ли на групповом многообразии, то оба подхода фактически эквивалентны. При этом БРСТ-подход и сам по себе является эффективным методом исследования теорий высших спинов [182–190].

Изложенная здесь конструкция инвариантных функционалов хорошо определена для обычных многообразий, но ее применимость не так очевидна в случае супермногообразий. Поскольку дифференциальные суперформы непосредственно не интегрируемы на супермногобразиях (см., например, [191]), необходимо уточнить определение развернутого действия в суперпространстве.

1.2. Интегрирование в суперпространстве

Значительная часть дифференциальной геометрии допускает прямое обобщение на супермногообразия. Не так обстоит дело с интегрированием дифференциальных суперформ. В частности, закон преобразования суперформ не согласуется с определением интеграла Березина. Действительно, рассмотрим супермногообразие $M^{p|q}$ с локальными координатами $z^M = (x^m, \theta^\mu)$. Чтобы интеграл по $M^{p|q}$ не зависел от выбора координат, мера интегрирования должна преобразовываться согласно формуле Березина

$$\int\limits_{M^{p|q}} f\left(x^m, \theta^\mu\right) \mathrm{d}^p x \mathrm{d}^q \theta = \int\limits_{M^{p|q}} f\left(y^m, \xi^\mu\right) Ber J \mathrm{d}^p y \mathrm{d}^q \xi, \tag{1.2.1}$$

где

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial y} & \dfrac{\partial x}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial y} & \dfrac{\partial \theta}{\partial \xi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad Ber J = \frac{\det\left(A - BD^{-1}C\right)}{\det D}. \tag{1.2.2}$$

Суперформы, возникающие путем наивного обобщения дифференциальных форм на грассмановы координаты, очевидно не удовлетворяют этому условию и, следовательно, неинтегрируемы.

Однако, четные формы все еще можно интегрировать по четным циклам в суперпространстве. Действительно, рассмотрим четную n-мерную поверхность $\mathcal{S}^n$ в $M^{p|q}$: $\left\{z^M\left(t^a\right)=\left(x^m\left(t^a\right),\theta^\mu\left(t^a\right)\right),\ a=1,...,n\right\}$, параметризованную некоторыми четными параметрами t^a (координатами на поверхности). Определим интеграл от n-суперформы $\omega=\omega_{M_1...M_n}dz^{M_1}...dz^{M_n}$ по $\mathcal{S}^n$ как

$$\int\limits_{\mathcal{S}^n}\omega=\int\omega_{M_1...M_n}\left(\frac{\partial z^{M_1}}{\partial t^{a_1}}\mathrm{d}t^{a_1}\right)...\left(\frac{\partial z^{M_n}}{\partial t^{a_n}}\mathrm{d}t^{a_n}\right)=\int\omega^{'}_{1...n}\mathrm{d}t^1...\mathrm{d}t^n. \tag{1.2.3}$$

Он не зависит ни от выбора z^M, ни от выбора t^a. Очевидно, что если ω точна в суперпространстве, интегрирование по $\mathcal{S}^n$ сводится к интегрированию по границе $\partial\mathcal{S}^n$. Согласно формуле Картана $\mathcal{L}_V=\{\mathrm{d},i_V\}$ для производной Ли векторного поля $V^N\left(z\right)$, интеграл от замкнутой формы ω $(\mathrm{d}\omega=0)$ не зависит от локальных вариаций $\mathcal{S}^n$. Это позволяет определить развернутое суперполевое действие как интеграл от замкнутой p-суперформы $\mathcal{L}$ по четной p-мерной поверхности в суперпространстве.

В более общем случае интегрирование в суперпространстве может быть определено с помощью интегральных форм, как было предложено Бернштейном и Лейтесом в [155] (см. также [191]). Для этого интеграл от суперфункции $f\left(x,\theta\right)$ в суперпространстве переписывается в виде

$$\int f\left(x,\theta\right)\mathrm{d}^px\mathrm{d}^q\theta=\int F\left(x,\theta,\varsigma,s\right)\mathrm{d}^px\mathrm{d}^q\theta\mathrm{d}^p\varsigma\mathrm{d}^qs, \tag{1.2.4}$$

где ς^m, $m=1,...,p$ и s^μ, $\mu=1,...,q$ рассматриваются как дополнительные антикоммутируюшие и коммутирующие переменные интегрирования, соответственно. Отсюда следует, что $F\left(x,\theta,\varsigma,s\right)$ должна иметь вид

$$F\left(x,\theta,\varsigma,s\right)=f\left(x,\theta\right)\delta^p\left(\varsigma\right)\delta^q\left(s\right). \tag{1.2.5}$$

Чтобы установить связь с обычными суперформами, нужно формально подставить $\mathrm{d}x^m$ и $\mathrm{d}\theta^\mu$ вместо ς^m и s^μ в (1.2.5). Возникшие объекты носят название интегральных форм. Заметим, что $\delta^p\left(\mathrm{d}x\right)$ – это просто обычная форма объема $\mathrm{d}x^1...\mathrm{d}x^p$, в то время как $\delta^q\left(\mathrm{d}\theta\right)$ представляет собой настоящую (четную) δ-функцию, которая существенно неполиномиальна. С другой стороны, интегрирование обычных суперформ, полиномиальных по $\mathrm{d}\theta$, не имеет смысла, так как приводит к расходящимся интегралам (1.2.4) с полиномиальным по s^{μ} $F(x,\theta,\varsigma,s)$.

Наш подход имеет много общего с методом «эктоплазмы» [164–167], позволяющим строить явно суперсимметричные действия, представляющие собой интегралы от суперформ по пространственно-временной «гиперповерхности» в полном суперпространстве $M^{p|q}$ с координатами $z^M = (x^m, \theta^\mu)$. Рассмотрим p-суперформу

$$J = J_{M_1\ldots M_p} \mathrm{d}z^{M_1} \ldots \mathrm{d}z^{M_p}, \tag{1.2.6}$$

которая замкнута

$$\mathrm{d}J = 0 \;\Rightarrow\; \mathcal{D}_{[N} J_{M_1\ldots M_P)} - \frac{(p+q)}{2} T_{[NM|}{}^{P} J_{P|M_2\ldots M_P)} = 0, \tag{1.2.7}$$

где $\mathcal{D}_M$ – ковариантная производная, а $T_{MN}{}^P$ – тензор кручения. Тогда интеграл по пространственно-временной гиперповерхности

$$S = \int\limits_{M^p} J_{m_1\ldots m_p} \mathrm{d}x^{m_1} \ldots \mathrm{d}x^{m_p} \tag{1.2.8}$$

не зависит от координат $M^{p|q}$ и, в силу (1.2.7), от конкретного выбора гиперповерхности интегрирования, при условии что последняя является четной и J достаточно быстро убывает на пространственной бесконечности. Интеграл инвариантен относительно преобразований

$$\delta J_{M_1\ldots M_p} = \partial_{[M_1} \lambda_{M_2\ldots M_p)}. \tag{1.2.9}$$

Более общий случай искривленного суперпространства может быть рассмотрен аналогично с помощью супертетрад [165, 166]. Отметим, что в некоторых приложениях эктоплазменного подхода использовалось также и интегрирование по Бернштейну–Лейтесу [156]. Однако в этом случае его применимость была обусловлена специфической гауссовой формой подынтегральных выражений, позволяющей выполнить интегрирование по нечетным дифференциалам. Для наших целей мы обобщим интеграл Бернштейна–Лейтеса на случай обобщенных функций фоновых супертетрад, что открывает простой и эффективный путь для записи суперсимметричных инвариантов.

Сходство эктоплазменного и развернутого подходов очевидно. Действительно, в первом d-замкнутость лагранжиана обеспечивает его явную суперсимметричность, во втором то же самое достигается условием Q-замкнутости. При этом, как показано в Разделе 1.1, Q представляет собой алгебраический эквивалент дифференциала де Рама. В то же время, хотя для конкретных суперсимметричных моделей оба метода дают схожие результаты, развернутый подход является более общим, т.к. он применим к любым (не обязательно суперсимметричным) теориям и (обобщенным) пространствам-временам, как, например, $Sp\,(8)$-инвариантному пространству-времени, рассмотренному в [175, 177].

1.3. Развернутая формулировка безмассового скалярного поля

В качестве примера разворачивания полевой теории рассмотрим, следуя [97, 168], развернутую систему, описывающую свободное безмассовое скалярное поле в пространстве Минковского. Для этого рассмотрим 1-форму, принимающую значения в алгебре Пуанкаре,

$$\Omega^{Mink} := ie^a P_a + \frac{i}{2}\omega^{a,b} M_{ab}, \tag{1.3.1}$$

где P_a и M_{ab} – генераторы трансляций и лоренцевых поворотов, соответственно, $e^a = e^a_{\underline{m}} \mathrm{d}x^{\underline{m}}$ – 1-форма тетрады, $\omega^{a,b} = \omega^{a,b}_{\underline{m}} \mathrm{d}x^{\underline{m}}$ – 1-форма спиновой связности. Ω^{Mink} подчиняется уравнению ковариантного постоянства (1.1.6), которое, с учетом коммутационных соотношений алгебры Пуанкаре

$$[M_{ab}, M_{cd}] = i\left(\eta_{ad} M_{bc} - \eta_{ac} M_{bd} + -\eta_{bd} M_{ac} + \eta_{bc} M_{ad}\right), \tag{1.3.2}$$

$$[P_a, M_{bc}] = i\left(\eta_{ab} P_c - \eta_{ac} P_b\right), \tag{1.3.3}$$

$$[P_a, P_b] = 0, \tag{1.3.4}$$

сводится к следующим уравнениям на компонентные 1-формы

$$\mathrm{d}\omega^{a,b} + \omega^{a,}{}_c \omega^{c,b} = 0, \tag{1.3.5}$$

$$D^L e^a := \mathrm{d}e^a + \omega^{a,}{}_c e^c = 0 \tag{1.3.6}$$

– уравнениям нулевой кривизны и отсутствия кручения, соответственно. Символом $D^L \equiv \mathrm{d} + \omega$ мы будем обозначать лоренц-ковариантную производную. Формула (1.1.8) для (1.3.1) описывает глобальные симметрии пространства

Минковского: глобальные трансляции и повороты, генерируемые параметрами ε^aи $\varepsilon^{a,b}$, подчиняющимися

$$D^L\varepsilon^a = \mathrm{d}\varepsilon^a + \omega^{a,}{}_c\varepsilon^c = \varepsilon^{a,}{}_c e^c, \tag{1.3.7}$$

$$D^L\varepsilon^{a,b} = \mathrm{d}\varepsilon^{a,b} + \omega^{a,}{}_c\varepsilon^{c,b} - \omega^{b,}{}_c\varepsilon^{c,a} = 0. \tag{1.3.8}$$

Скалярное поле, распространяющееся на фоне Минковского, будем описывать с помощью бесконечного набора 0-форм $\left\{C^{a(n)}(x)\right\}$, представляющих собой симметричные лоренцевы тензоры всех рангов. Соответствующие развернутые уравнения имеют вид

$$D^L C^{a(n)} + e_b C^{a(n)b} = 0. \tag{1.3.9}$$

Для изучения динамического содержания этой системы введем градуировку на пространстве полей, которая считает количество свободных тензорных индексов. Тогда оператор σ_-, действующий на этом пространстве, имеет вид

$$\sigma_-\left[f^{a(n)}\right] = e_b f^{a(n-1)b}. \tag{1.3.10}$$

Легко видеть, что в секторе 0-форм у него имеется одна когомология – скаляр $C(x)$, который, следовательно, является единственным динамическим полем в системе.

В секторе 1-форм единственной потенциальной когомологией σ_- является $e^a f\left(\left\{C^{b(n)}(x)\right\}\right)$, где f – произвольная скалярная функция $\left\{C^{b(n)}(x)\right\}$. Здесь возникают две принципиально различные ситуации: если $\left\{C^{a(n)}(x)\right\}$ суть бесследовые тензора, то $e^a f$ – когомология; если на $\left\{C^{a(n)}(x)\right\}$ не наложено условие бесследовости, то $e^a f = \sigma_-\left[\eta^{aa} f\right]$ и когомологий нет. Разница состоит в том, что в первом случае обратный тензор Минковского η^{aa} не является элементом модуля, так как не может появиться в линейных соотношениях между бесследовыми тензорами $\left\{C^{a(n)}(x)\right\}$.

Присутствие σ_--когомологии в секторе 1-форм свидетельствует о наличии динамического уравнения на поле $C(x)$. Действительно, проектируя уравнение (1.3.9) с $n = 1$

$$D^L C^a + e_b C^{ab} = 0 \tag{1.3.11}$$

на подпространство функций вида $e^a f$, с учетом бесследовости $\left\{C^{a(n)}(x)\right\}$ получаем дифференциальное условие

$$e^a D_b C^b = 0, \tag{1.3.12}$$

где операторная 0-форма D_b определяется соотношением $e^b D_b = D^L$. Из (1.3.9) при $n = 0$

$$D^L C + e_b C^b = 0 \tag{1.3.13}$$

следует, что

$$C^a = -D^a C. \tag{1.3.14}$$

Подставляя это соотношение в (1.3.12), находим, что динамическое поле $C(x)$ подчинено безмассовому уравнению Клейна-Гордона

$$D_a D^a C = 0. \tag{1.3.15}$$

Вспомогательные поля $\left\{C^{a(n)}(x)\,|n > 0\right\}$, как видно из (1.3.9), образуют бесконечную башню всех производных динамического скаляра $C(x)$

$$C^{a(n)}(x) = (-1)^n D^{a_1} ... D^{a_n} C(x). \tag{1.3.16}$$

Отсюда видно, что формула (1.1.11), имеющая в данном случае вид

$$\delta C^{a(n)} = -\varepsilon^a C^{a(n-1)} - n\varepsilon^{a,}{}_b C^{a(n-1)b} \tag{1.3.17}$$

с ε^aи $\varepsilon^{a,b}$, подчиненными (1.3.7)-(1.3.8), действительно описывает стандартное действие алгебры Пуанкаре на скалярное поле.

Итак, кратко подытожим наше рассмотрение развернутой формулировки свободного безмассового скалярного поля. Она включает в себя развернутые уравнения фонового пространства-времени (плоского, в данном случае) (1.3.5)-(1.3.6) и развернутые уравнения (1.3.9) на модуль скалярного поля $\left\{C^{a(n)}(x)\right\}$. σ_--анализ показывает, что среди $\left\{C^{a(n)}(x)\right\}$ единственным динамическим полем является скалярное поле $C(x)$, в то время как тензоры ненулевых рангов описывают все его производные (т.е. все физические степени свободы) согласно (1.3.16). В случае следовых тензоров $\left\{C^{a(n)}(x)\right\}$ система находится off-shell и не содержит уравнений на $C(x)$; в случае бесследовых тензоров $C(x)$ подчинено безмассовому уравнению Клейна-Гордона (1.3.15). Общие соотношения развернутого формализма также позволяют явно выписать реализацию преобразований глобальной алгебры Пуанкаре на скалярном модуле (1.3.17).

1.4. Развернутая формулировка скалярного супермультиплета

1.4.1. Суперсимметричный вакуум

Чтобы получить развернутое описание плоского суперпространства, рассмотрим $\mathcal{N}=1$ супералгебру Пуанкаре

$$[M_{ab},M_{cd}]=i\left(\eta_{ad}M_{bc}-\eta_{ac}M_{bd}+-\eta_{bd}M_{ac}+\eta_{bc}M_{ad}\right), \tag{1.4.1}$$

$$[P_a,M_{bc}]=i\left(\eta_{ab}P_c-\eta_{ac}P_b\right), \tag{1.4.2}$$

$$\left\{Q_\alpha,\bar{Q}_{\dot\beta}\right\}=-2i\left(\sigma^a\right)_{\alpha\dot\beta}P_a, \tag{1.4.3}$$

$$[M_{ab},Q_\alpha]=\frac{1}{2}\left(\sigma_{ab}\right)_\alpha{}^\beta Q_\beta, \tag{1.4.4}$$

$$\left[M_{ab},\bar{Q}_{\dot\alpha}\right]=\frac{1}{2}\left(\bar\sigma_{ab}\right)_{\dot\alpha}{}^{\dot\beta}\bar{Q}_{\dot\beta}. \tag{1.4.5}$$

(Все остальные (анти)коммутаторы равны нулю.)

Калибровочными полями супергравитации являются 1-формы тетрады $e^a=e^a_{\underline{m}}\mathrm{d}x^{\underline{m}}$, спиновой связности $\omega^{a,b}=\omega^{a,b}_{\underline{m}}\mathrm{d}x^{\underline{m}}$ и гравитино $\phi^\alpha=\phi^\alpha_{\underline{m}}\mathrm{d}x^{\underline{m}}$, $\bar\phi^{\dot\alpha}=\bar\phi^{\dot\alpha}_{\underline{m}}\mathrm{d}x^{\underline{m}}$ (см., например, [192]). Они представляют собой компоненты 1-формы Ω^{SUSY}, принимающей значения в супералгебре Пуанкаре,

$$\Omega^{SUSY}=ie^aP_a+\frac{i}{2}\omega^{a,b}M_{ab}+i\phi^\alpha Q_\alpha+i\bar\phi^{\dot\alpha}\bar{Q}_{\dot\alpha}. \tag{1.4.6}$$

Суперсимметричный плоский фон задается связностью Ω^{SUSY}, которая удовлетворяет (1.1.6). В терминах компонентных полей это дает

$$\mathrm{d}\omega^{a,b}+\omega^{a,}{}_c\omega^{c,b}=0, \tag{1.4.7}$$

$$D^Le^a:=\mathrm{d}e^a+\omega^{a,}{}_ce^c=2i\left(\sigma^a\right)_{\alpha\dot\beta}\phi^\alpha\bar\phi^{\dot\beta}, \tag{1.4.8}$$

$$D^L\phi^\alpha:=\mathrm{d}\phi^\alpha+\frac{1}{2}\omega^{a,b}\left(\sigma_{ab}\right)^\alpha{}_\beta\phi^\beta=0, \tag{1.4.9}$$

$$D^L\bar\phi^{\dot\alpha}:=\mathrm{d}\bar\phi^{\dot\alpha}+\frac{1}{2}\omega^{a,b}\left(\bar\sigma_{ab}\right)^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}\bar\phi^{\dot\beta}=0. \tag{1.4.10}$$

Поскольку эти развернутые уравнения являются, очевидно, универсальными (их совместность обеспечивается тождествами Якоби и не требует фиксации ранга топ-формы), для обобщения их на суперпространство достаточно просто добавить грассмановы координаты $x^{\underline{m}} \to z^{\underline{M}} = \left(x^{\underline{m}}, \theta^{\mu}, \bar{\theta}^{\dot{\mu}}\right)$ и соответствующим образом обобщить индексы дифференциальных форм

$$e^{a}_{\underline{m}}\left(x\right)\mathrm{d}x^{\underline{m}} \to E^{a}_{\underline{M}}\left(z\right)\mathrm{d}z^{\underline{M}}, \quad \omega^{a,b}_{\underline{m}}\left(x\right)\mathrm{d}x^{\underline{m}} \to \Omega^{a,b}_{\underline{M}}\left(z\right)\mathrm{d}z^{\underline{M}}, \tag{1.4.11}$$

$$\phi^{\alpha}_{\underline{m}}\left(x\right)\mathrm{d}x^{\underline{m}} \to E^{\alpha}_{\underline{M}}\left(z\right)\mathrm{d}z^{\underline{M}}, \quad \bar{\phi}^{\dot{\alpha}}_{\underline{m}}\left(x\right)\mathrm{d}x^{\underline{m}} \to \bar{E}^{\dot{\alpha}}_{\underline{M}}\left(z\right)\mathrm{d}z^{\underline{M}}. \tag{1.4.12}$$

Тогда плоское пространство задается уравнениями

$$\mathrm{d}\Omega^{a,b} + \Omega^{a,}{}_{c}\Omega^{c,b} = 0, \tag{1.4.13}$$

$$DE^{a} := \mathrm{d}E^{a} + \Omega^{a,}{}_{c}E^{c} = 2i\left(\sigma^{a}\right)_{\alpha\dot{\beta}}E^{\alpha}\bar{E}^{\dot{\beta}}, \tag{1.4.14}$$

$$DE^{\alpha} := \mathrm{d}E^{\alpha} + \frac{1}{2}\Omega^{a,b}\left(\sigma_{ab}\right)^{\alpha}{}_{\beta}E^{\beta} = 0, \tag{1.4.15}$$

$$D\bar{E}^{\dot{\alpha}} := \mathrm{d}\bar{E}^{\dot{\alpha}} + \frac{1}{2}\Omega^{a,b}\left(\bar{\sigma}_{ab}\right)^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}\bar{E}^{\dot{\beta}} = 0, \tag{1.4.16}$$

где D – лоренц-ковариантная производная в суперпространстве.

Глобальные SUSY-преобразования описываются теми калибровочными преобразованиями (1.1.8) системы (1.4.13)-(1.4.16), которые не меняют 1-формы суперсвязности

$$\delta\Omega^{a,b} = \mathrm{d}\varepsilon^{a,b} + \Omega^{a,}{}_{c}\varepsilon^{c,b} - \varepsilon^{a,}{}_{c}\Omega^{c,b} = 0, \tag{1.4.17}$$

$$\delta E^{a} = \mathrm{d}\varepsilon^{a} + \varepsilon^{a,}{}_{c}E^{c} + \Omega^{a,}{}_{c}\varepsilon^{c} - 2i\left(\sigma^{a}\right)_{\alpha\dot{\beta}}\left(\varepsilon^{\alpha}\bar{E}^{\dot{\beta}} + E^{\alpha}\bar{\varepsilon}^{\dot{\beta}}\right) = 0, \tag{1.4.18}$$

$$\delta E^{\alpha} = \mathrm{d}\varepsilon^{\alpha} + \frac{1}{2}\Omega^{a,b}\left(\sigma_{ab}\right)^{\alpha}{}_{\beta}\varepsilon^{\beta} + \frac{1}{2}\varepsilon^{a,b}\left(\sigma_{ab}\right)^{\alpha}{}_{\beta}E^{\beta} = 0, \tag{1.4.19}$$

$$\delta\bar{E}^{\dot{\alpha}} = \mathrm{d}\bar{\varepsilon}^{\dot{\alpha}} + \frac{1}{2}\Omega^{a,b}\left(\bar{\sigma}_{ab}\right)^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}\bar{\varepsilon}^{\dot{\beta}} + \frac{1}{2}\varepsilon^{a,b}\left(\bar{\sigma}_{ab}\right)^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}\bar{E}^{\dot{\beta}} + = 0. \tag{1.4.20}$$

Частным решением (1.4.13)-(1.4.16) являются декартовы координаты в суперпространстве

$$E^{a} = \mathrm{d}x^{\underline{m}}\delta^{a}_{\underline{m}} + i\theta^{\mu}\left(\sigma^{a}\right)_{\mu\dot{\mu}}\mathrm{d}\bar{\theta}^{\dot{\mu}} - i\mathrm{d}\theta^{\mu}\left(\sigma^{a}\right)_{\mu\dot{\mu}}\bar{\theta}^{\dot{\mu}}, \tag{1.4.21}$$

$$\Omega^{a,b} = 0, \quad E^{\alpha} = \mathrm{d}\theta^{\alpha}, \quad \bar{E}^{\dot{\alpha}} = \mathrm{d}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}. \tag{1.4.22}$$

В этих координатах явное решение системы (1.4.17)-(1.4.20) имеет вид

$$\varepsilon^{a,b}\left(z\right) = \xi^{a,b} \tag{1.4.23}$$

$$\varepsilon^{\alpha}\left(z\right) = \xi^{\alpha} + \frac{1}{2}\xi^{a,b}\left(\sigma_{ab}\right)^{\alpha}{}_{\beta}\theta^{\beta}, \tag{1.4.24}$$

$$\bar{\varepsilon}^{\dot{\alpha}}\left(z\right) = \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} + \frac{1}{2}\xi^{a,b}\left(\bar{\sigma}_{ab}\right)^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}}, \tag{1.4.25}$$

$$\varepsilon^a(z) = \xi^a + \xi^{a,}{}_b x^b + i\xi^a{}_b \left(\sigma^b\right)_{\alpha\dot\beta} \theta^\alpha \bar\theta^{\dot\beta} + 2i\left(\sigma^a\right)_{\alpha\dot\beta}\left(\xi^\alpha \bar\theta^{\dot\beta} + \bar\xi^{\dot\alpha}\theta^\alpha\right), \quad (1.4.26)$$

где коммутирующие числа ξ^a, $\xi^{a,b} = -\xi^{b,a}$ и антикоммутирующие числа ξ^α, $\bar\xi^{\dot\alpha}$ – произвольные константы, параметризующие глобальные SUSY-преобразования.

Лоренц-ковариантную производную в суперпространстве можно разложить по супертетрадам как

$$D = E^a D_a + E^\alpha D_\alpha + \bar E^{\dot\alpha} \bar D_{\dot\alpha}. \quad (1.4.27)$$

В декартовых координатах

$$D_a = \partial_a, \quad D_\alpha = \partial_\alpha - i\left(\sigma^b\right)_{\alpha\dot\beta} \bar\theta^{\dot\beta}\partial_b, \quad \bar D_{\dot\alpha} = \bar\partial_{\dot\alpha} - i\left(\sigma^b\right)_{\beta\dot\alpha}\theta^\beta\partial_b. \quad (1.4.28)$$

1.4.2. Развернутые уравнения скалярного супермультиплета

Следующей нашей задачей является нахождение и анализ развернутых уравнений, описывающих $4d$ $\mathcal{N} = 1$ свободный безмассовый скалярный супермультиплет. Для этого, кроме уравнений скалярного поля (1.3.9), нам нужны развернутые уравнения, описывающие безмассовое поле спина 1/2. Они имеют вид [97, 193]

$$D^L \chi_\alpha^{a(n)} + e_b \chi_\alpha^{a(n)b} = 0, \quad (1.4.29)$$

где развернутый модуль $\left\{\chi_\alpha^{a(n)}(x)\right\}$ состоит из комплексных симметричных спинор-тензоров всех рангов n, на которые наложено условие σ-поперечности

$$\left(\bar\sigma_b\right)^{\dot\alpha\beta} \chi_\beta^{a(n-1)b} = 0. \quad (1.4.30)$$

Анализ, полностью аналогичный проделанному в Разделе 1.3 для скалярного поля, показывает, что единственным динамическим полем в $\left\{\chi_\alpha^{a(n)}\right\}$ является спинор $\chi_\alpha(x)$, а спинор-тензоры ненулевых рангов выражаются через его производные.

Рассматривая (1.4.29) при $n = 0$ и учитывая условие (1.4.30), находим, что $\chi_\alpha(x)$ подчиняется уравнению Вейля

$$(\bar{\sigma}_b)^{\dot{\alpha}\beta} D^b \chi_\beta = 0. \tag{1.4.31}$$

Таким образом, развернутые уравнения (1.4.29) действительно описывают безмассовое (левое) поле спина 1/2. Заметим также, что тождество

$$(\sigma_b)_{\alpha\dot{\gamma}} \chi_\beta^{a(n-1)b} = (\sigma_b)_{\beta\dot{\gamma}} \chi_\alpha^{a(n-1)b}, \tag{1.4.32}$$

являющееся следствием σ-поперечности и того, что спинорные индексы принимают два значения, приводит к тому, что $\left\{\chi_\alpha^{a(n)}\right\}$ бесследовы по тензорным индексам.

Чтобы объединить развернутые системы скалярного (1.3.9) и спинорного (1.4.29) полей в супермультиплет, необходимо добавить в уравнения члены со связностями гравитино ϕ^α и $\bar{\phi}^{\dot{\alpha}}$, которые мы рассматриваем как фиксированные и описывающие нединамический супергравитационный фон. Это дает [118]

$$D^L C^{a(n)} + e_b C^{a(n)b} - \sqrt{2}\phi^\alpha \chi_\alpha^{a(n)} = 0, \tag{1.4.33}$$

$$D^L \chi_\alpha^{a(n)} + e_b \chi_\alpha^{a(n)b} - \sqrt{2} i \bar{\phi}^{\dot{\alpha}} (\sigma_b)_{\alpha\dot{\alpha}} C^{a(n)b} = 0. \tag{1.4.34}$$

Совместность этой системы обеспечивается уравнениями SUSY-вакуума (1.4.7)-(1.4.10) и тождеством (1.4.32), так что данная система является универсальной. Поэтому ее перенос в суперпространство осуществляется наивным добавлением грассмановых координат $x^{\underline{m}} \to z^{\underline{M}} = \left(x^{\underline{m}}, \theta^\mu, \bar{\theta}^{\dot{\mu}}\right)$

$$D^L C^{a(n)}(z) + E_b C^{a(n)b}(z) - \sqrt{2} E^\alpha \chi_\alpha^{a(n)}(z) = 0, \tag{1.4.35}$$

$$D^L \chi_\alpha^{a(n)}(z) + E_b \chi_\alpha^{a(n)b}(z) - \sqrt{2} i \bar{E}^{\dot{\alpha}} (\sigma_b)_{\alpha\dot{\alpha}} C^{a(n)b}(z) = 0. \tag{1.4.36}$$

Чтобы проверить, действительно ли уравнения (1.4.35)-(1.4.36) описывают свободный безмассовый скалярный супермультиплет, необходимо провести анализ σ_--когомологий и выделить независимые динамические суперполя и динамические уравнения. Как показано в [118], это приводит к следующему результату. Единственным динамическим полем является $C(z)$. Все остальные суперполя – вспомогательные и выражаются через его производные. К примеру, $\chi_\alpha(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} D_\alpha C(z)$. Независимые динамические уравнения имеют вид

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}} C\left(z\right) = 0, \qquad (1.4.37)$$

$$D_{\alpha} D^{\alpha} C\left(z\right) = 0, \qquad (1.4.38)$$

т.е. представляют собой стандартные суперполевые уравнения движения безмассовой модели Весса–Зумино.

Чтобы построить развернутые действия системы (1.4.35)-(1.4.36), необходимо найти ее off-shell модификацию, которая не содержала бы динамических уравнений. Для начала найдем off-shell вариант системы (1.4.33)-(1.4.34). В случае свободного скалярного поля (1.3.9) система выходит в off-shell при снятии условия бесследовости $\left\{C^{a(n)}\left(x\right)\right\}$; аналогично, система (1.4.29) теряет динамические уравнения при снятии условия σ-поперечности (1.4.30). Off-shell системы представляют собой множество связей, выражающих (спинор)-тензоры старших рангов через производные динамических полей. Можно было бы ожидать, что и в случае суперсимметризованной on-shell системы (1.4.33)-(1.4.34) снятие условий бесследовости и σ-поперечности на $\left\{C^{a(n)}\left(x\right)\right\}$ и $\left\{\chi_{\alpha}^{a(n)}\right\}$ приведет к развернутой off-shell системе.

Однако такая модификация приводит к тому, что (1.4.33)-(1.4.34) перестает удовлетворять (1.1.3), т.е. становится несовместной. Действительно, условие совместности для (1.4.34) требует выполнения равенства

$$\phi_{\alpha}\bar{\phi}_{\dot{\alpha}}\left(\bar{\sigma}_{b}\right)^{\dot{\alpha}\beta}\chi_{\beta}^{a(n)b} = 0. \qquad (1.4.39)$$

В on-shell случае это равенство выполняется в силу условия σ-поперечности, отсутствующего off-shell.

Несовместность системы означает, помимо прочего, что ее калибровочные преобразования (1.1.5) больше не удовлетворяют SUSY алгебре (1.4.1)-(1.4.5), т.е. система теряет суперсимметрию. Для того чтобы восстановить как совместность, так и суперсимметрию off-shell уравнений, необходимо ввести множество вспомогательных полей $\left\{F^{a(n)}\left(x\right)\right\}$. Тогда суперсимметричная off-shell система уравнений приобретает вид

$$D^L C^{a(n)} + e_b C^{a(n)b} - \sqrt{2}\phi^\alpha \chi_\alpha^{a(n)} = 0, \qquad (1.4.40)$$

$$D^L \chi_\alpha^{a(n)} + e_b \chi_\alpha^{a(n)b} - \sqrt{2} i \bar{\phi}^{\dot{\alpha}} \left(\sigma_b\right)_{\alpha\dot{\alpha}} C^{a(n)b} - \sqrt{2}\phi_\alpha F^{a(n)} = 0, \qquad (1.4.41)$$

$$D^L F^{a(n)} + e_b F^{a(n)b} - \sqrt{2} i \bar{\phi}_{\dot{\alpha}} \left(\bar{\sigma}_b\right)^{\dot{\alpha}\alpha} \chi_\alpha^{a(n)b} = 0. \qquad (1.4.42)$$

Данная система совместна, удовлетворяя (1.1.3). В силу (1.4.42) вспомогательные поля $\left\{F^{a(n)}(x) \,| n > 0\right\}$ представляют собой производные основного вспомогательного поля $F(x)$, которое известно из стандартной формулировки модели Весса–Зумино. Неудивительно поэтому, что $\left\{F^{a(n)}(x)\right\}$ обеспечивают замыкание алгебры глобальной суперсимметрии развернутой off-shell системы.

Согласно общей формуле (1.1.11), соответствующие SUSY преобразования имеют вид

$$\delta C^{a(n)} = \sqrt{2}\varepsilon^\alpha \chi_\alpha^{a(n)}, \qquad (1.4.43)$$

$$\delta \chi_\alpha^{a(n)} = \sqrt{2} i \bar{\varepsilon}^{\dot{\alpha}} \left(\sigma_b\right)_{\alpha\dot{\alpha}} C^{a(n)b} + \sqrt{2}\varepsilon_\alpha F^{a(n)}, \qquad (1.4.44)$$

$$\delta F^{a(n)} = \sqrt{2} i \bar{\varepsilon}_{\dot{\alpha}} \left(\bar{\sigma}_b\right)^{\dot{\alpha}\alpha} \chi_\alpha^{a(n)b}. \qquad (1.4.45)$$

В декартовых координатах в пространстве Минковского $e^a{}_{\underline{m}} = \delta^a{}_{\underline{m}}$, $\phi^\alpha = \bar{\phi}^{\dot{\alpha}} = 0$, $D^L = \mathrm{d}$ и система (1.4.40)-(1.4.42) кладет $C_a = -\partial_a C$, $\chi_\alpha^a = -\partial^a \chi_\alpha$. В результате,

$$\delta C = \sqrt{2}\varepsilon^\alpha \chi_\alpha, \qquad (1.4.46)$$

$$\delta \chi_\alpha = -\sqrt{2} i \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \left(\sigma^b\right)_{\alpha\dot{\alpha}} \partial_b C + \sqrt{2}\xi_\alpha F, \qquad (1.4.47)$$

$$\delta F = -\sqrt{2} i \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \left(\bar{\sigma}^b\right)^{\dot{\alpha}\alpha} \partial_b \chi_\alpha, \qquad (1.4.48)$$

где ξ^α и $\bar{\xi}^{\dot{\alpha}}$ – параметры глобальной суперсимметрии, т.е. воспроизводятся стандартные суперпреобразования кирального мультиплета (0.0.5)-(0.0.7).

Перенос системы (1.4.40)-(1.4.42) в суперпространство вновь осуществляется путем простого добавления грассмановых координат

$$D^L C^{a(n)}(z) + E_b C^{a(n)b}(z) - \sqrt{2} E^\alpha \chi_\alpha^{a(n)}(z) = 0, \qquad (1.4.49)$$

$$D^L \chi_\alpha^{a(n)}(z) + E_b \chi_\alpha^{a(n)b}(z) - \sqrt{2} i \bar{E}^{\dot{\alpha}} \left(\sigma_b\right)_{\alpha\dot{\alpha}} C^{a(n)b}(z) - \sqrt{2} E_\alpha F^{a(n)}(z) = 0 \qquad (1.4.50)$$

$$D^L F^{a(n)}(z) + E_b F^{a(n)b}(z) - \sqrt{2} i \bar{E}_{\dot{\alpha}} \left(\bar{\sigma}_b\right)^{\dot{\alpha}\alpha} \chi_\alpha^{a(n)b}(z) = 0. \qquad (1.4.51)$$

Результирующая система накладывает, однако, дифференциальные уравнения по грассмановым координатам, т.е., строго говоря, не является полностью off-shell в суперпространстве. Действительно, разлагая суперпространственную производную согласно (1.4.27), из (1.4.49)-(1.4.51) легко получить

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}} C^{a(n)} = 0, \quad D_\alpha F^{a(n)} = 0. \tag{1.4.52}$$

Это условия киральности на модуль $\left\{C^{a(n)}(x)\right\}$ и антикиральности на $\left\{F^{a(n)}(x)\right\}$. Они не генерируют дифференциальных уравнений в пространстве Минковского, где система остается off-shell.

Поскольку поля в модели Весса–Зумино комплексные, система (1.4.49)-(1.4.51) должна быть дополнена сопряженными уравнениями

$$D^L \bar{C}^{a(n)} + E_b \bar{C}^{a(n)b} - \sqrt{2} \bar{E}^{\dot{\alpha}} \bar{\chi}_{\dot{\alpha}}^{a(n)} = 0, \tag{1.4.53}$$
$$D^L \bar{\chi}_{\dot{\alpha}}^{a(n)} + E_b \bar{\chi}_{\dot{\alpha}}^{a(n)b} - \sqrt{2} i E^\alpha \left(\sigma_b\right)_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{C}^{a(n)b} - \sqrt{2} \bar{E}_{\dot{\alpha}} \bar{F}^{a(n)} = 0 \tag{1.4.54}$$
$$D^L \bar{F}^{a(n)} + E_b \bar{F}^{a(n)b} - \sqrt{2} i E_\alpha \left(\bar{\sigma}_b\right)^{\dot{\alpha}\alpha} \bar{\chi}_{\dot{\alpha}}^{a(n)b} = 0. \tag{1.4.55}$$

Дифференциальные следствия из них

$$D_\alpha \bar{C}^{a(n)} = 0, \quad \bar{D}_{\dot{\alpha}} \bar{F}^{a(n)} = 0 \tag{1.4.56}$$

означают, что поля $\bar{C}^{a(n)}$ – антикиральные, а $\bar{F}^{a(n)}$ – киральные.

1.5. Оператор Q

1.5.1. Общие свойства

Согласно общей схеме [154], представленной в Разделе 1.1.3, лагранжианы развернутой системы ассоциируются с ее Q-когомологиями. Полный набор уравнений, которые мы рассматриваем, состоит из (1.4.13)-(1.4.16), описывающих плоский суперпространственный фон, и уравнений (1.4.49)-(1.4.51), (1.4.53)-(1.4.55), описывающих скалярный супермультиплет. Оператор Q такой системы имеет вид

$$Q = Q_\Omega + \hat{Q}, \tag{1.5.1}$$

где

$$
\begin{aligned}
Q_\Omega &= \Omega^{a,b}E_b\frac{\partial}{\partial E^a}+\frac{1}{4}\Omega^{a,b}E^\beta\left(\sigma_{ab}\right)_\beta{}^\alpha\frac{\partial}{\partial E^\alpha}+\frac{1}{4}\Omega^{a,b}\bar{E}_{\dot\beta}\left(\bar\sigma_{ab}\right)^{\dot\beta}{}_{\dot\alpha}\frac{\partial}{\partial \bar{E}_{\dot\alpha}}+\Omega^{a,b}\hat{q}_{ba}+\\
&+\Omega^{a,c}\Omega_c{}^{,b}\frac{\partial}{\partial\Omega^{a,b}}, \qquad (1.5.2)\\
\hat{Q} &= 2iE^\alpha\left(\sigma^a\right)_{\alpha\dot\alpha}\bar{E}^{\dot\alpha}\frac{\partial}{\partial E^a}+E_a\hat{q}^a+\sqrt{2}E_\alpha\hat{q}^\alpha+\sqrt{2}\bar{E}_{\dot\alpha}\hat{\bar{q}}^{\dot\alpha} \qquad (1.5.3)
\end{aligned}
$$

и введены обозначения

$$
\begin{aligned}
\hat{q}^b{}_c &= \sum_{n=0}^{\infty}(C^{a(n)b}\frac{\partial}{\partial C^{a(n)c}}+\bar{C}^{a(n)b}\frac{\partial}{\partial \bar{C}^{a(n)c}}+F^{a(n)b}\frac{\partial}{\partial F^{a(n)c}}+\bar{F}^{a(n)b}\frac{\partial}{\partial \bar{F}^{a(n)c}}+\\
&+\chi_\alpha^{a(n)b}\frac{\partial}{\partial\chi_\alpha^{a(n)c}}-\frac{1}{4}\chi_\beta^{a(n)}\left(\sigma^b{}_c\right)^\beta{}_\alpha\frac{\partial}{\partial\chi_\alpha^{a(n)}}+\bar\chi_{\dot\alpha}^{a(n)b}\frac{\partial}{\partial\bar\chi_{\dot\alpha}^{a(n)c}}-\frac{1}{4}\bar\chi_{\dot\beta}^{a(n)}\left(\bar\sigma^b{}_c\right)^{\dot\beta}{}_{\dot\alpha}\frac{\partial}{\partial\bar\chi_{\dot\alpha}^{a(n)}}),\\
\hat{q}^b &= \sum_{n=0}^{\infty}(C^{a(n)b}\frac{\partial}{\partial C^{a(n)}}+\bar{C}^{a(n)b}\frac{\partial}{\partial \bar{C}^{a(n)}}+F^{a(n)b}\frac{\partial}{\partial F^{a(n)}}+\bar{F}^{a(n)b}\frac{\partial}{\partial \bar{F}^{a(n)}}+\\
&+\chi_\alpha^{a(n)b}\frac{\partial}{\partial\chi_\alpha^{a(n)}}+\bar\chi_{\dot\alpha}^{a(n)b}\frac{\partial}{\partial\bar\chi_{\dot\alpha}^{a(n)}}),\\
\hat{q}^\alpha &= \sum_{n=0}^{\infty}((\chi^\alpha)^{a(n)}\frac{\partial}{\partial C^{a(n)}}-F^{a(n)}\frac{\partial}{\partial\chi_\alpha^{a(n)}}-i\epsilon^{\alpha\beta}\left(\sigma_b\right)_{\beta\dot\beta}\bar{C}^{a(n)b}\frac{\partial}{\partial\bar\chi_{\dot\beta}^{a(n)}}-\\
&-i\bar\chi_{\dot\beta}^{a(n)b}\left(\bar\sigma_b\right)^{\dot\beta\alpha}\frac{\partial}{\partial\bar{F}^{a(n)}}),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{\bar{q}}^{\dot\alpha} &= \sum_{n=0}^{\infty}(\left(\bar\chi^{\dot\alpha}\right)^{a(n)}\frac{\partial}{\partial\bar{C}^{a(n)}}-\bar{F}^{a(n)}\frac{\partial}{\partial\bar\chi_{\dot\alpha}^{a(n)}}-i\epsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\left(\sigma_b\right)_{\beta\dot\beta}C^{a(n)b}\frac{\partial}{\partial\chi_\beta^{a(n)}}-\\
&-i\chi_\beta^{a(n)b}\left(\bar\sigma_b\right)^{\dot\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial F^{a(n)}}).
\end{aligned}
$$

$\hat{Q}$ может быть представлен в форме

$$
\hat{Q}=Q_1+Q_2^{+}+Q_2^{-}+Q_3, \qquad (1.5.4)
$$

где операторы

$$
Q_1=E_a\hat{q}^a,\quad Q_2^{+}=\sqrt{2}E_\alpha\hat{q}^\alpha,\quad Q_2^{-}=\sqrt{2}\bar{E}_{\dot\alpha}\hat{\bar{q}}^{\dot\alpha},\quad Q_3=2iE^\alpha\left(\sigma^a\right)_{\alpha\dot\alpha}\bar{E}^{\dot\alpha}\frac{\partial}{\partial E^a} \qquad (1.5.5)
$$

удовлетворяют соотношениям

$$\left(Q_1\right)^2 = \left(Q_2^+\right)^2 = \left(Q_2^-\right)^2 = \left(Q_3\right)^2 = 0, \tag{1.5.6}$$

$$\left\{Q_1, Q_3\right\} = -\left\{Q_2^+, Q_2^-\right\} = 2iE^\alpha \left(\sigma_a\right)_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{E}^{\dot{\alpha}} \hat{q}^a, \tag{1.5.7}$$

а все остальные антикоммутаторы, в т.ч. с Q_Ω, равны нулю. Соотношение (1.5.7) может быть также сформулировано в виде

$$\left\{\hat{q}^\alpha, \hat{\bar{q}}^{\dot{\alpha}}\right\} = i \left(\bar{\sigma}_a\right)^{\dot{\alpha}\alpha} \hat{q}^a. \tag{1.5.8}$$

1.5.2. Старшие градуировки

Теперь мы готовы к поиску лагранжианов, представляющих собой когомологии оператора Q. Они построены из фоновых 1-форм $\Omega^{a,b}$, E^a, E^α, $\bar{E}^{\dot{\alpha}}$и 0-форм супермультиплета $C^{a(n)}$, $\bar{C}^{a(n)}$, $\chi_\alpha^{a(n)}$, $\bar{\chi}_{\dot{\alpha}}^{a(n)}$, $F^{a(n)}$, $\bar{F}^{a(n)}$.

Прежде всего отметим, что лагранжианы не могут содержать $\Omega^{a,b}$, поскольку члены, возникающие в результате действия $\Omega^{a,c}\Omega_c{}^{,b}\dfrac{\partial}{\partial\Omega^{a,b}}$ в (1.5.2), не могут быть скомпенсированы другими членами. Действительно, рассмотрим, например, функцию $\Omega^{a,b}A_{a,b}$, где $A_{a,b}$ построена из 1-форм E^a, E^α, $\bar{E}^{\dot{\alpha}}$ и супермультиплетных 0-форм. Тогда часть $Q\left(\Omega^{a,b}A_{a,b}\right)$, билинейная по Ω, содержит три слагаемых вида $\Omega^{a,c}\Omega_c{}^{,b}A_{a,b}$, которые не сокращаются. Аналогично обстоит дело с членами старших порядков по Ω. Более точно, все потенциальные Ω-нелинейные члены могут быть удалены добавлением Q-точных слагаемых, т.е. они лежат в тривиальном классе Q-когомологий.

Легко видеть, что для Ω-независимых лагранжианов условие

$$Q_\Omega \mathcal{L} = 0 \tag{1.5.9}$$

означает лоренц-инвариантность $\mathcal{L}$, т.е. все индексы внутри $\mathcal{L}$ свернуты с помощью лоренц-инвариантной плоской метрики и σ-матриц.

В результате, Q-когомологии эквивалентны когомологиям Ω-независимой части Q, обозначенной как $\hat{Q}$, на пространстве лоренц-инвариантных функций. Удобно ввести следующую градуировку G фоновых 1-форм

$$G\left(E^{\alpha}\right)=G\left(\bar{E}^{\dot{\alpha}}\right)=2, \quad G\left(E^{a}\right)=1. \tag{1.5.10}$$

Тогда

$$G\left(Q_{1}\right)=1, \quad G\left(Q_{2}^{+}\right)=G\left(Q_{2}^{-}\right)=2, \quad G\left(Q_{3}\right)=3. \tag{1.5.11}$$

Согласно результатам Раздела 1.1.3, нетривиальные лагранжианы могут быть представлены когомологиями $H\left(Q_{3}\right)$.

Последующие вычисления значительно упрощаются в терминах спиноров. Словарь между векторными и спинорными индексами обеспечивается σ-матрицами. Например, для лоренцева вектора A_{a}

$$A_{a}=\frac{1}{2}\left(\bar{\sigma}^{a}\right)^{\dot{\alpha}\alpha} A_{\alpha\dot{\alpha}}, \quad A_{\alpha\dot{\alpha}}=\left(\sigma_{a}\right)_{\alpha\dot{\alpha}} A^{a}. \tag{1.5.12}$$

В спинорных обозначениях

$$Q_{1}=\frac{1}{2} E^{\alpha\dot{\alpha}} \hat{q}_{\alpha\dot{\alpha}}, \tag{1.5.13}$$

$$Q_{3}=2 i \bar{E}^{\dot{\alpha}} E^{\alpha} \frac{\partial}{\partial E^{\alpha\dot{\alpha}}}. \tag{1.5.14}$$

Эффективным инструментом вычисления когомологий является *теорема о стягивающей гомотопии* [194]. Рассмотрим $V=\sum_{p=-\infty}^{\infty} \oplus V^{p}$, где линейные пространства V^{p} конечномерны. Пусть Q – нильпотентный оператор, имеющий градуировку 1,

$$Q\left(V^{p}\right) \subset V^{p+1}, \quad Q^{2}=0, \tag{1.5.15}$$

а $\widetilde{Q}$ – нильпотентный оператор с градуировкой -1 (стягивающая гомотопия)

$$\widetilde{Q}\left(V^{p}\right) \subset V^{p-1}, \quad \widetilde{Q}=0. \tag{1.5.16}$$

Теорема о стягивающей гомотопии утверждает, что если оператор

$$\mathcal{H}:=\left\{Q, \widetilde{Q}\right\} \tag{1.5.17}$$

диагонализуем на V, то когомологии $H(Q, V) \subset Ker(\mathcal{H})$. Действительно, пусть $v \in V$ – Q-замкнутый собственный вектор $\mathcal{H}$

$$\mathcal{H} v=\lambda v, \quad Q v=0 \tag{1.5.18}$$

с $\lambda \neq 0$. Тогда v является Q-точным, т.к. его можно представить в виде

$$v = \lambda^{-1}\mathcal{H}v = Qw, \quad w := \lambda^{-1}\widetilde{Q}v. \tag{1.5.19}$$

Следовательно, только такие v, которые являются нулевыми собственными векторами $\mathcal{H}$, могут лежать в $H\left(Q,V\right)$.

Чтобы применить эту технику к нашему случаю, введем оператор

$$\widetilde{Q}_3 := \frac{1}{2i}E^{\alpha\dot{\alpha}}\frac{\partial^2}{\partial\bar{E}^{\dot{\alpha}}\partial E^{\alpha}}, \quad \left(\widetilde{Q}_3\right)^2 = 0, \quad G\left(\widetilde{Q}_3\right) = -3. \tag{1.5.20}$$

Оператор (1.5.17), порождаемый (1.5.14) и (1.5.20), имеет вид

$$\mathcal{H} = E^{\alpha}\bar{E}^{\dot{\alpha}}\frac{\partial^2}{\partial\bar{E}^{\dot{\alpha}}\partial E^{\alpha}} + E^{\alpha\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial E^{\alpha\dot{\alpha}}} + E^{\beta\dot{\alpha}}E^{\alpha}\frac{\partial^2}{\partial E^{\beta}\partial E^{\alpha\dot{\alpha}}} + E^{\alpha\dot{\beta}}\bar{E}^{\dot{\alpha}}\frac{\partial^2}{\partial\bar{E}^{\dot{\beta}}\partial E^{\alpha\dot{\alpha}}}. \tag{1.5.21}$$

Как объяснялось в Разделе 1.2, в суперсимметричных моделях можно строить различные типы развернутых суперлагранжианов, в зависимости от того, являются ли они полиномами или обобщенными функциями по коммутирующим нечетным дифференциалам $\mathrm{d}\theta$ или, в терминах калибровочных полей, по 1-формам гравитино E^{α} и $\bar{E}^{\dot{\alpha}}$. В обоих случаях $\mathcal{H}$ имеет нулевую G-градуировку и диагонализуем, так что применима теорема о стягивающей гомотопии.

Удобно классифицировать рассматриваемые выражения по количеству содержащихся в них 1-форм $E^{\alpha\dot{\alpha}}$. Будучи антикоммутирующими, $E^{\alpha\dot{\alpha}}$ могут появляться только в следующих комбинациях: $E^{\alpha\dot{\alpha}}X_{\alpha\dot{\alpha}}$, $E^{\alpha}{}_{\dot{\alpha}}E^{\beta\dot{\alpha}}X_{\alpha\beta} + h.c.$, $E^{\alpha}{}_{\dot{\beta}}E^{\beta\dot{\beta}}E_{\beta}{}^{\dot{\alpha}}X_{\alpha\dot{\alpha}}$, $E^{\alpha}{}_{\dot{\alpha}}E^{\beta\dot{\alpha}}E_{\beta\dot{\beta}}E_{\alpha}{}^{\dot{\beta}}X$, где все X не содержат $E^{\alpha\dot{\alpha}}$. Заметим, что для последнего члена в (1.5.21) выполняются соотношения

$$E^{\alpha\dot{\beta}}\bar{E}^{\dot{\alpha}}\frac{\partial^2}{\partial\bar{E}^{\dot{\beta}}\partial E^{\alpha\dot{\alpha}}}\left(E^{\gamma}{}_{\dot{\gamma}}E^{\delta\dot{\gamma}}\bar{E}^{\dot{\delta}}\right) = E^{\gamma}{}_{\dot{\gamma}}E^{\delta\dot{\gamma}}\bar{E}^{\dot{\delta}}, \tag{1.5.22}$$

$$E^{\alpha\dot{\beta}}\bar{E}^{\dot{\alpha}}\frac{\partial^2}{\partial\bar{E}^{\dot{\beta}}\partial E^{\alpha\dot{\alpha}}}\left(\delta^2\left(\bar{E}_{\dot{\delta}}\right)E^{\gamma\dot{\gamma}}\right) = -2\delta^2\left(\bar{E}_{\dot{\delta}}\right)E^{\gamma\dot{\gamma}}, \tag{1.5.23}$$

которые следуют из (A.6) и того, что $E^{\gamma}{}_{\dot{\gamma}}E^{\delta\dot{\gamma}}$ симметрично по γ и δ из-за антикоммутативности $E^{\alpha\dot{\alpha}}$. Производная δ-функции определяется стандартным способом как $\bar{E}_{\dot{\alpha}}\delta'_{\dot{\beta}}\left(\bar{E}_{\dot{\delta}}\right) = \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\delta^2\left(\bar{E}_{\dot{\delta}}\right)$. Аналогичные соотношения имеют место и для третьего члена в (1.5.21).

Теперь мы воспользуемся теоремой о стягивающей гомотопии и вычислим Q_3-когомологии в классе вещественных суперформ, полиномиальных по E^{α} и $\bar{E}^{\dot{\alpha}}$. В зависимости от количества $E^{\alpha\dot{\alpha}}$, имеется пять вариантов:

- $\Lambda_0 := E^{\alpha_1}...E^{\alpha_m}\bar{E}^{\dot\alpha_1}...\bar{E}^{\dot\alpha_n}\lambda_{\alpha(m),\dot\alpha(n)} + h.c.$, где $\lambda_{\alpha(m),\dot\alpha(n)}$ – симметричные по индексам α и (отдельно)$\dot\alpha$ 0-формы. Теорема о стягивающей гомотопии требует, чтобы
$$\mathcal{H}\Lambda_0 = mn\Lambda_0 + h.c. = 0, \tag{1.5.24}$$
что выполняется если $m=0$ и/или $n=0$, т.е.
$$\Lambda_0 = E^{\alpha_1}...E^{\alpha_m}\lambda_{\alpha(m)} + h.c. \tag{1.5.25}$$

- $\Lambda_1 := E^{\beta\dot\beta}E^{\alpha_1}...E^{\alpha_m}\bar{E}^{\dot\alpha_1}...\bar{E}^{\dot\alpha_n}\lambda_{\beta,\alpha(m),\dot\beta,\dot\alpha(n)} + h.c.$, где $\lambda_{\beta,\alpha(m),\dot\beta,\dot\alpha(n)}$ – симметричные по индексам α и (отдельно) $\dot\alpha$ 0-формы (по β и $\dot\beta$ никакой симметрии не предполагается). В этом случае
$$\begin{aligned}\mathcal{H}\Lambda_1 \;&=\; mn\Lambda_1 + \Lambda_1 + mE^{\alpha\dot\beta}E^{\beta}E^{\alpha_2}...E^{\alpha_m}\bar{E}^{\dot\alpha_1}...\bar{E}^{\dot\alpha_n}\lambda_{\beta,\alpha(m),\dot\beta,\dot\alpha(n)} + \\ &+nE^{\beta\dot\alpha}E^{\alpha_1}...E^{\alpha_m}\bar{E}^{\dot\beta}\bar{E}^{\dot\alpha_2}...\bar{E}^{\dot\alpha_n}\lambda_{\beta,\alpha(m),\dot\beta,\dot\alpha(n)} + h.c. = 0.\end{aligned} \tag{1.5.26}$$
Это уравнение имеет нетривиальные решения, если в $\lambda_{\beta,\alpha(m),\dot\beta,\dot\alpha(n)}$ β антисимметризовано с α, а $\dot\beta$ – с $\dot\alpha$. Тогда соответствующие решения можно записать в виде
$$\Lambda_1^1 \;=\; E^{\alpha\dot\alpha}E_\alpha\bar{E}_{\dot\alpha}\lambda, \tag{1.5.27}$$
$$\Lambda_1^2 \;=\; E^{\beta\dot\alpha}E_\beta E^{\alpha_1}...E^{\alpha_m}\lambda_{\alpha(m),\dot\alpha} + h.c. \tag{1.5.28}$$

- $\Lambda_2 := E^{\beta}{}_{\dot\beta}E^{\gamma\dot\beta}E^{\alpha_1}...E^{\alpha_m}\bar{E}^{\dot\alpha_1}...\bar{E}^{\dot\alpha_n}\lambda_{\beta\gamma,\alpha(m),\dot\alpha(n)} + h.c.$, где $\lambda_{\beta\gamma,\alpha(m),\dot\alpha(n)}$ симметрична отдельно по β и γ, по α и по $\dot\alpha$.
$$\mathcal{H}\Lambda_2 = mn\Lambda_2 + n\Lambda_2 + 2\Lambda_2 + 2mE^{\alpha_1}{}_{\dot\beta}E^{\gamma\dot\beta}E^{\beta}E^{\alpha_2}...E^{\alpha_m}\bar{E}^{\dot\alpha_1}...\bar{E}^{\dot\alpha_n}\lambda_{\beta\gamma,\alpha(m),\dot\alpha(n)} + h.c. = 0. \tag{1.5.29}$$
Опять, это уравнение имеет нетривиальные решения, только если в $\lambda_{\beta\gamma,\alpha(m),\dot\alpha(n)}$ индексы β и γ антисимметризованы с α, т.е.
$$\Lambda_2 = E^{\beta}{}_{\dot\alpha}E^{\gamma\dot\alpha}E_\beta E_\gamma E^{\alpha_1}...E^{\alpha_m}\lambda_{\alpha(m)} + h.c. \tag{1.5.30}$$

- $\Lambda_3 := E^{\beta}{}_{\dot\gamma}E^{\gamma\dot\gamma}E_{\gamma}{}^{\dot\beta}E^{\alpha_1}...E^{\alpha_m}\bar{E}^{\dot\alpha_1}...\bar{E}^{\dot\alpha_n}\lambda_{\beta,\alpha(m),\dot\beta,\dot\alpha(n)} + h.c.$
$$\begin{aligned}\mathcal{H}\Lambda_3 \;&=\; mn\Lambda_3 + m\Lambda_3 + n\Lambda_3 + 3\Lambda_3 + \\ &+mE^{\alpha}{}_{\dot\gamma}E^{\gamma\dot\gamma}E_{\gamma}{}^{\dot\beta}E^{\beta}E^{\alpha_2}...E^{\alpha_m}\bar{E}^{\dot\alpha_1}...\bar{E}^{\dot\alpha_n}\lambda_{\beta,\alpha(m),\dot\beta,\dot\alpha(n)} + \\ &+nE^{\beta}{}_{\dot\gamma}E^{\gamma\dot\gamma}E_{\gamma}{}^{\dot\alpha_1}E^{\alpha_1}...E^{\alpha_m}\bar{E}^{\dot\beta}\bar{E}^{\dot\alpha_2}...\bar{E}^{\dot\alpha_n}\lambda_{\beta,\alpha(m),\dot\beta,\dot\alpha(n)} + h.c. = 0\end{aligned} \tag{1.5.31}$$

У этого уравнения нет нетривиальных решений.

- $\Lambda_4 := E^{\beta}{}_{\dot{\beta}} E^{\gamma\dot{\beta}} E_{\gamma\dot{\gamma}} E_{\beta}{}^{\dot{\gamma}} E^{\alpha_1} ... E^{\alpha_m} \bar{E}^{\dot{\alpha}_1} ... \bar{E}^{\dot{\alpha}_n} \lambda_{\alpha(m),\dot{\alpha}(n)} + h.c.$ Из (1.5.22) следует, что

$$\mathcal{H}\Lambda_4 = mn\Lambda_4 + 2m\Lambda_4 + 2n\Lambda_4 + 4\Lambda_4, \tag{1.5.32}$$

следовательно, у $\mathcal{H}\Lambda_4 = 0$ отсутствуют нетривиальные решения.

Прямое вычисление показывает, что выражения (1.5.25), (1.5.27), (1.5.28) и (1.5.30) Q_3-замкнуты. Таким образом, все когомологии Q_3 в классе вещественных суперформ находятся среди функций вида

$$\Lambda_0 = E^{\alpha_1} ... E^{\alpha_m} \lambda_{\alpha(m)} + h.c., \tag{1.5.33}$$

$$\Lambda_1^1 = E^{\alpha\dot{\alpha}} E_{\alpha} \bar{E}_{\dot{\alpha}} \lambda, \tag{1.5.34}$$

$$\Lambda_1^2 = E^{\beta\dot{\alpha}} E_{\beta} E^{\alpha_1} ... E^{\alpha_m} \lambda_{\alpha(m),\dot{\alpha}} + h.c., \tag{1.5.35}$$

$$\Lambda_2 = E^{\beta}{}_{\dot{\alpha}} E^{\gamma\dot{\alpha}} E_{\beta} E_{\gamma} E^{\alpha_1} ... E^{\alpha_m} \lambda_{\alpha(m)} + h.c. \tag{1.5.36}$$

В соответствии с Разделом 1.1.3, возможные нетривиальные лагранжианы находятся в соответствии с 4-суперформами из $H(Q_3)$, которые имеют вид

$$\mathbb{L}_8 = E^{\alpha_1} E^{\alpha_2} E^{\alpha_3} E^{\alpha_4} \ell_{\alpha(4)} + h.c., \tag{1.5.37}$$

$$\mathbb{L}_7 = E^{\beta\dot{\alpha}} E_{\beta} E^{\alpha_1} E^{\alpha_2} \ell_{\alpha(2),\dot{\alpha}} + h.c., \tag{1.5.38}$$

$$\mathbb{L}_6 = E^{\alpha}{}_{\dot{\alpha}} E^{\beta\dot{\alpha}} E_{\alpha} E_{\beta} \ell + h.c., \tag{1.5.39}$$

где $G(\mathbb{L}_n) = n$ и 0-формы $\ell_{\alpha(4)}$, $\ell_{\alpha(2),\dot{\alpha}}$, ℓ построены из полей супермультиплета. Однако, как можно показать, (1.5.37) и (1.5.38) не ведут к Q-замкнутым выражениям. Опуская подробности, отметим, что здесь имеет место явление, рассмотренное в Разделе 1.1.3: $Q_1\mathbb{L}_8$ и $Q_1\mathbb{L}_7$ оказываются нетривиальными когомологиями Q_2^+, что создает препятствия для восстановления полных лагранжианов.

Таким образом, единственным кандидатом в лагранжианы остается (1.5.39). Чтобы исключить тривиальные члены из (1.5.39), рассмотрим следующие 3-суперформы из $H(Q_3)$ (1.5.25)-(1.5.30)

$$\mathcal{F}_6 = E^{\alpha_1}E^{\alpha_2}E^{\alpha_3}f_{\alpha(3)} + h.c., \tag{1.5.40}$$

$$\mathcal{F}_5^1 = E^{\alpha\dot{\alpha}}E_\alpha\bar{E}_{\dot{\alpha}}f, \tag{1.5.41}$$

$$\mathcal{F}_5^2 = E^{\alpha\dot{\alpha}}E_\alpha E^\beta f_{\beta\dot{\alpha}} + h.c., \tag{1.5.42}$$

где $G(\mathcal{F}_n) = n$ и 0-формы f построены из полей супермультиплета. Как было показано в Разделе 1.1.3, тривиальные лагранжианы определяются решениями системы (1.1.31)-(1.1.34) для (1.5.39) и $\mathcal{F}$ вида (1.5.40)-(1.5.42).

Во-первых, мы отмечаем, что (1.5.40) не может давать вклада, так как его градуировка $G(\mathcal{F}_6) = 6$ равна градуировке $\mathbb{L}_6$ и, следовательно, система (1.1.31)-(1.1.34) не имеет решений, поскольку все Q_n имеют положительные градуировки. Для $\mathcal{F}_5^1$ (1.5.41) и $\mathcal{F}_5^2$ (1.5.42) с $G(\mathcal{F}_5^1) = G(\mathcal{F}_5^2) = 5$ система (1.1.31)-(1.1.34) принимает вид

$$Q_3\mathcal{F}_5^i = 0, \tag{1.5.43}$$

$$\left(Q_2^+ + Q_2^-\right)\mathcal{F}_5^i + Q_3\mathcal{F}_4^i = 0, \tag{1.5.44}$$

$$Q_1\mathcal{F}_5^i + \left(Q_2^+ + Q_2^-\right)\mathcal{F}_4^i + Q_3\mathcal{F}_3^i = E^\alpha{}_{\dot{\alpha}}E^{\beta\dot{\alpha}}E_\alpha E_\beta \ell + h.c., \tag{1.5.45}$$

где $i = 1, 2$.

Уравнение (1.5.43) удовлетворяется в силу того, что $\mathcal{F}_5^1$ и $\mathcal{F}_5^2$ Q_3-замкнуты. Для $\mathcal{F}_5^1$ уравнение (1.5.44) имеет решение вида

$$\mathcal{F}_4^1 = \frac{i}{\sqrt{2}}E^{\alpha\dot{\alpha}}E^\beta{}_{\dot{\alpha}}\hat{q}_\beta f + h.c. \tag{1.5.46}$$

Однако, (1.5.45) не допускает нетривиальных решений для случая $\mathcal{F}_5^1$ (1.5.41) и $\mathcal{F}_4^1$ (1.5.46), поскольку его левая часть содержит, кроме прочих, слагаемые вида

$$iE^{\alpha\dot{\alpha}}E^\beta{}_{\dot{\alpha}}\bar{E}^{\dot{\beta}}E_\alpha\hat{\bar{q}}_{\dot{\beta}}\hat{q}_\beta f + iE^{\alpha\dot{\alpha}}E_\alpha{}^{\dot{\beta}}E^\beta\bar{E}_{\dot{\alpha}}\hat{q}_\beta\hat{\bar{q}}_{\dot{\beta}}f,$$

для которых нет аналогов в правой части (1.5.45) и которые не могут быть скомпенсированы добавкой вида $Q_3\mathcal{F}_3^1$ при любом $\mathcal{F}_3^1$ из-за соотношения (1.5.8), которое в спинорых обозначениях принимает вид

$$\left\{\hat{q}^\alpha, \hat{\bar{q}}^{\dot{\alpha}}\right\} = -i\hat{q}^{\alpha\dot{\alpha}}. \tag{1.5.47}$$

Для $\mathcal{F}_5^2$ (1.5.42) уравнение (1.5.44) дает

$$\hat{q}_\alpha f_{\beta\dot{\alpha}} = 0, \quad \hat{\bar{q}}_{\dot{\alpha}} \bar{f}_{\dot{\beta}\alpha} = 0, \tag{1.5.48}$$

$$\mathcal{F}_4^2 = i\sqrt{2} E^\alpha{}_{\dot{\alpha}} E^{\beta\dot{\alpha}} E_\alpha \hat{\bar{q}}^{\dot{\beta}} f_{\beta\dot{\beta}} + h.c. \tag{1.5.49}$$

Тогда (1.5.45) решается функциями

$$\mathcal{F}_3^2 = -\frac{2}{3} E^\alpha{}_{\dot{\beta}} E^{\beta\dot{\beta}} E_\beta{}^{\dot{\alpha}} E_\alpha \hat{\bar{q}}_{\dot{\gamma}} \hat{\bar{q}}^{\dot{\gamma}} f_{\alpha\dot{\alpha}} + h.c., \tag{1.5.50}$$

$$\ell = -\frac{1}{2} \hat{q}^{\alpha\dot{\alpha}} f_{\alpha\dot{\alpha}}. \tag{1.5.51}$$

В итоге, мы приходим к выводу, что лагранжианы, порождаемые $\mathbb{L}$ вида (1.5.39), являются тривиальными, если ℓ представима в виде (1.5.51) (аналогично для $\bar{\ell}$) с $f_{\alpha\dot{\alpha}}$, удовлетворяющим (1.5.48).

1.6. Лагранжианы

1.6.1. Лагранжиан как 4-суперформа

Мы ищем лагранжиан в виде Q-замкнутой 4-суперформы

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \;=\; & E_a E_b \left\{ \left(\bar{\sigma}^{ab}\right)^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{E}_{\dot{\alpha}} \bar{E}_{\dot{\beta}} \ell_6 + \left(\sigma^{ab}\right)^{\alpha\beta} E_\alpha E_\beta \bar{\ell}_6 \right\} + \\ & + \epsilon^{abcd} E_a E_b E_c \left\{ \bar{E}_{\dot{\alpha}} \left(\bar{\sigma}_d\right)^{\dot{\alpha}\alpha} \ell_{5\alpha} + E^\alpha \left(\sigma_d\right)_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\ell}_5{}^{\dot{\alpha}} \right\} + E_a E_b E_c E_d \epsilon^{abcd} \ell_4 \end{aligned} \tag{1.6.1}$$

где 0-формы ℓ_i построены лоренц-ковариантно из супермультиплетных полей $C^{a(n)}$, $\bar{C}^{a(n)}$, $\chi_\alpha^{a(n)}$, $\bar{\chi}_{\dot{\alpha}}^{a(n)}$, $F^{a(n)}$, $\bar{F}^{a(n)}$. То, что это наиболее общий анзац для лоренц-ивариантной 4-суперформы, следует из результатов Раздела 1.5.2. (К примеру, слагаемое $\epsilon^{abcd} E_a E_b E^\alpha \left(\sigma_c\right)_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{E}^{\dot{\alpha}} \ell_d$, которое имеет ту же G-градуировку, что и (1.5.39), не включено, т.к. представляет собой нетривиальную Q_3-когомологию).

Теперь можно анализировать уравнение $\hat{Q}\mathcal{L} = 0$ в секторах с различной градуировкой, начиная со старшей. Полный набор уравнений представлен в Приложении Б.

В старшей градуировке $G = 9$ имеются два комплексно-сопряженных уравнения

$$2iE^{\gamma}\left(\sigma^{c}\right)_{\gamma\dot{\gamma}}\bar{E}^{\dot{\gamma}}\frac{\partial}{\partial E^{c}}E_{a}E_{b}\left(\bar{\sigma}^{ab}\right)^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{E}_{\dot{\alpha}}\bar{E}_{\dot{\beta}}\ell_{6} = 0, \tag{1.6.2}$$

$$2iE^{\gamma}\left(\sigma^{c}\right)_{\gamma\dot{\gamma}}\bar{E}^{\dot{\gamma}}\frac{\partial}{\partial E^{c}}E_{a}E_{b}\left(\sigma^{ab}\right)^{\alpha\beta}E_{\alpha}E_{\beta}\bar{\ell}_{6} = 0. \tag{1.6.3}$$

Они выполняются для любых ℓ_6 и $\bar{\ell}_6$, так как соответствующие члены принадлежат $H\left(Q_3\right)$. Действительно, (1.6.2), к примеру, пропорционально $\epsilon^{abcd}\left(\bar{\sigma}_{ab}\right)^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\left(\sigma_c\right)^{\dot{\gamma}\alpha}\bar{E}_{\dot{\alpha}}\bar{E}_{\dot{\beta}}\bar{E}_{\dot{\gamma}}$. Соотношение (A.9) показывает, что для того чтобы быть симметричным по трем точечным спинорным индексам, $\epsilon^{abcd}\left(\bar{\sigma}_{ab}\right)^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\left(\sigma_c\right)^{\dot{\gamma}\alpha}$ должно быть антисимметрично по трем неточечным индексам, т.е. нулем, поскольку индексы принимают только два значения.

В градуировке $G = 8$ имеются четыре уравнения. Из первых двух

$$\bar{E}_{\dot{\gamma}}\hat{\bar{q}}^{\dot{\gamma}}E_{a}E_{b}\left(\bar{\sigma}^{ab}\right)^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{E}_{\dot{\alpha}}\bar{E}_{\dot{\beta}}\ell_{6} = 0, \tag{1.6.4}$$

$$E_{\gamma}\hat{q}^{\gamma}E_{a}E_{b}\left(\sigma^{ab}\right)^{\alpha\beta}E_{\alpha}E_{\beta}\bar{\ell}_{6} = 0 \tag{1.6.5}$$

мы находим, что ℓ_6 и $\bar{\ell}_6$ должны удовлетворять $\hat{\bar{q}}^{\dot{\alpha}}\ell_6 = 0$ и $\hat{q}^{\alpha}\bar{\ell}_6 = 0$, соответственно. Используя (A.9), легко видеть, что остальные два уравнения

$$2iE^{\gamma}\left(\sigma^{e}\right)_{\gamma\dot{\gamma}}\bar{E}^{\dot{\gamma}}\frac{\partial}{\partial E^{e}}\epsilon^{abcd}E_{a}E_{b}E_{c}\bar{E}_{\dot{\alpha}}\left(\bar{\sigma}_{d}\right)^{\dot{\alpha}\alpha}\ell_{5\alpha} + \sqrt{2}E_{\gamma}\hat{q}^{\gamma}E_{a}E_{b}\left(\bar{\sigma}^{ab}\right)^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{E}_{\dot{\alpha}}\bar{E}_{\dot{\beta}}\ell_{6} = 0, \tag{1.6.6}$$

$$2iE^{\gamma}\left(\sigma^{e}\right)_{\gamma\dot{\gamma}}\bar{E}^{\dot{\gamma}}\frac{\partial}{\partial E^{e}}\epsilon^{abcd}E_{a}E_{b}E_{c}E^{\alpha}\left(\sigma_{d}\right)_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\ell}_{5}{}^{\dot{\alpha}} + \sqrt{2}\bar{E}_{\dot{\gamma}}\hat{\bar{q}}^{\dot{\gamma}}E_{a}E_{b}\left(\sigma^{ab}\right)^{\alpha\beta}E_{\alpha}E_{\beta}\bar{\ell}_{6} = 0 \tag{1.6.7}$$

решаются функциями $\ell_{5\alpha} = \frac{\sqrt{2}}{6}\hat{q}_{\alpha}\ell_6$ и $\bar{\ell}_{5\dot{\alpha}} = \frac{\sqrt{2}}{6}\hat{\bar{q}}_{\dot{\alpha}}\bar{\ell}_6$.

Продолжая такой анализ, находим следующий Q-замкнутый суперполевой лагранжиан

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= E_{a}E_{b}\left(\bar{\sigma}^{ab}\right)^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{E}_{\dot{\alpha}}\bar{E}_{\dot{\beta}}W + E_{a}E_{b}\left(\sigma^{ab}\right)^{\alpha\beta}E_{\alpha}E_{\beta}\bar{W} + \\ &+\frac{\sqrt{2}}{6}\epsilon^{abcd}E_{a}E_{b}E_{c}\bar{E}_{\dot{\alpha}}\left(\bar{\sigma}_{d}\right)^{\dot{\alpha}\alpha}\hat{q}_{\alpha}W + \frac{\sqrt{2}}{6}\epsilon^{abcd}E_{a}E_{b}E_{c}E^{\alpha}\left(\sigma_{d}\right)_{\alpha\dot{\alpha}}\hat{\bar{q}}^{\dot{\alpha}}\bar{W} + \\ &+\frac{i\sqrt{2}}{16}E_{a}E_{b}E_{c}E_{d}\epsilon^{abcd}\left(\hat{q}_{\alpha}\hat{q}^{\alpha}W + \hat{\bar{q}}_{\dot{\alpha}}\hat{\bar{q}}^{\dot{\alpha}}\bar{W}\right),\end{aligned} \tag{1.6.8}$$

где 0-формы W и $\bar{W}$ являются произвольными лоренц-инвариантными функциями $C^{a(n)}$, $\bar{F}^{a(n)}$ и $\bar{C}^{a(n)}$, $F^{a(n)}$, соответственно, т.ч. $\hat{\bar{q}}^{\dot{\alpha}}W = 0$ и $\hat{q}^{\alpha}\bar{W} = 0$. В силу (1.4.52), (1.4.56) это означает, что W – киральная функция, а $\bar{W}$ – антикиральная. Отметим также, что, как следует из (1.5.51), W вида $W = \hat{q}^a f_a$ соответствуют тривиальным лагранжианам.

По построению лагранжиан (1.6.8) явно суперсимметричен, а соответствующее действие инвариантно относительно локальных вариаций поверхности интегрирования. Частное решение, воспроизводящее свободное действие Весса–Зумино [9], получается из (1.6.8) выбором $W = i2\sqrt{2}C\bar{F}$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{\mathcal{WZ}} \;=\;& i2\sqrt{2}E_a E_b \left(\bar{\sigma}^{ab}\right)^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{E}_{\dot{\alpha}}\bar{E}_{\dot{\beta}}C\bar{F} - i2\sqrt{2}E_a E_b \left(\sigma^{ab}\right)^{\alpha\beta} E_\alpha E_\beta \bar{C}F + \\
&+\frac{2i}{3}\epsilon^{abcd}E_a E_b E_c \bar{E}_{\dot{\alpha}} \left(\bar{\sigma}_d\right)^{\dot{\alpha}\alpha} \left[\chi_\alpha \bar{F} - iC\left(\sigma^e\right)_{\alpha\dot{\beta}} \bar{\chi}_e^{\dot{\beta}}\right] + \\
&+\frac{2i}{3}\epsilon^{abcd}E_a E_b E_c E^\alpha \left(\sigma_d\right)_{\alpha\dot{\alpha}} \left[\bar{\chi}^{\dot{\alpha}}F + i\bar{C}\left(\bar{\sigma}_e\right)^{\dot{\alpha}\beta} \chi_\beta^e\right] + \\
&+E_a E_b E_c E_d \epsilon^{abcd}\left[\frac{1}{2}C^e{}_e\bar{C} + \frac{1}{2}C\bar{C}^e{}_e + \frac{i}{2}\bar{\chi}^e_{\dot{\alpha}}\left(\bar{\sigma}_e\right)^{\dot{\alpha}\alpha}\chi_\alpha - \frac{i}{2}\bar{\chi}_{\dot{\alpha}}\left(\bar{\sigma}_e\right)^{\dot{\alpha}\alpha}\chi^e_\alpha + F\bar{F}\right].
\end{aligned}
\tag{1.6.9}
$$

Важное замечание состоит в том, что, хотя развернутая on-shell система из Раздела 1.4 описывает свободную динамику безмассового скалярного супермультиплета, ее off-shell модификация представляет собой просто бесконечный набор связей. Форма этих связей не зависит от того, является ли модель свободной или нелинейной. В результате, она может быть использована для описания массивной взаимодействующей теории. Нелинейные (начиная с кубических) представители Q-когомологий определяют лагранжианы со взаимодействиями. В частности, если $W = W\left(C\right)$ зависит только от C (соответственно, $\bar{W} = \bar{W}\left(\bar{C}\right)$), то (1.6.8) описывает суперпотенциал.

1.6.2. Лагранжиан как интегральная форма

Как объяснялось в Разделе 1.2, суперпространственный лагранжиан может быть также представлен в виде интегральной формы

$$
\mathcal{L} = E_{a_1}...E_{a_m}\delta^2\left(E_\alpha\right)\delta^2\left(\bar{E}_{\dot{\alpha}}\right)\ell^{[a_1...a_m]}, \tag{1.6.10}
$$

где $\ell^{[a_1...a_m]}$ есть некоторая лоренц-ковариантная 0-форма, построенная из полей супермультиплета.

Применяя теорему о стягивающей гомотопии, в спинорных обозначениях мы имеем

$$\mathcal{H}\left(E_{\alpha_1\dot{\alpha}_1}...E_{\alpha_m\dot{\alpha}_m}\delta^2\left(E_\beta\right)\delta^2\left(\bar{E}_{\dot{\beta}}\right)\ell^{\alpha_1...\alpha_m,\dot{\alpha}_1...\dot{\alpha}_m}\right)=4\mathcal{L}+m\mathcal{L}-m\mathcal{L}-m\mathcal{L}=0, \quad (1.6.11)$$

откуда следует, что $m=4$. Так что единственной ненулевой когомологией Q_3 является

$$\mathcal{L}=E^{\alpha}{}_{\dot{\alpha}}E^{\beta\dot{\alpha}}E_{\beta\dot{\beta}}E_{\alpha}{}^{\dot{\beta}}\delta^2\left(E_\gamma\right)\delta^2\left(\bar{E}_{\dot{\gamma}}\right)\ell. \quad (1.6.12)$$

Данный лагранжиан с очевидностью является Q-замкнутым.

Чтобы проанализировать, содержат ли такие лагранжианы тривиальные вклады, нужно рассмотреть Q-образы выражений, содержащих производные дельта-функций. Действительно, для

$$\mathcal{F}=E^{\alpha}{}_{\dot{\alpha}}E^{\beta\dot{\alpha}}E_{\beta\dot{\beta}}E_{\alpha}{}^{\dot{\beta}}\delta'_{\delta}\left(E_\gamma\right)\delta^2\left(\bar{E}_{\dot{\gamma}}\right)f^{\delta}+h.c. \quad (1.6.13)$$

мы имеем

$$Q\mathcal{F}=\left(Q_2^{+}+Q_2^{-}\right)\mathcal{F}=\sqrt{2}E^{\alpha}{}_{\dot{\alpha}}E^{\beta\dot{\alpha}}E_{\beta\dot{\beta}}E_{\alpha}{}^{\dot{\beta}}\delta^2\left(E_\gamma\right)\delta^2\left(\bar{E}_{\dot{\gamma}}\right)\left(\hat{q}^{\delta}f_{\delta}+h.c.\right). \quad (1.6.14)$$

В результате, (1.6.12) описывает тривиальные лагранжианы, если $\ell=\hat{q}^{\alpha}f_{\alpha}+h.c.$ для некоторого f_{α}. В частности, являются тривиальными лагранжианы с $\ell=\hat{q}^{\alpha\dot{\alpha}}f_{\alpha\dot{\alpha}}$, потому что, как следует из (1.5.47), в этом случае

$$\ell=i\hat{q}^{\alpha}\left(\hat{\bar{q}}^{\dot{\alpha}}f_{\alpha\dot{\alpha}}\right)+i\hat{\bar{q}}^{\dot{\alpha}}\left(\hat{q}^{\alpha}f_{\alpha\dot{\alpha}}\right). \quad (1.6.15)$$

В тензорных индексах лагранжиан выглядит как

$$\mathcal{L}=\epsilon^{abcd}E_aE_bE_cE_d\delta^2\left(E_\alpha\right)\delta^2\left(\bar{E}_{\dot{\alpha}}\right)\ell. \quad (1.6.16)$$

Частное решение, воспроизводящее свободный лагранжиан Салама–Стрэтсди [117], имеет вид

$$\mathcal{L}^{SS}=\epsilon^{abcd}E_aE_bE_cE_d\delta^2\left(E_\alpha\right)\delta^2\left(\bar{E}_{\dot{\alpha}}\right)C\bar{C}, \quad (1.6.17)$$

как следует из (1.4.52), означающей, что $C\left(z\right)$ – киральное суперполе.

Чтобы связать между собой лагранжианы (1.6.8) и (1.6.16), поверхность интегрирования для (1.6.8) следует выбрать в виде

$$x^{\underline{m}}=f^{\underline{m}}\left(t^{\underline{n}}\right),\quad \theta^{\mu}=\varphi^{\mu}\left(t^{\underline{n}}\right),\quad \bar{\theta}^{\dot{\mu}}=\bar{\varphi}^{\dot{\mu}}\left(t^{\underline{n}}\right), \quad (1.6.18)$$

где координаты поверхности $t^{\underline{n}}$, $\underline{n} = 1, ..., 4$ – четные, функции $f^{\underline{n}}$ – четные, φ^{μ} и $\bar{\varphi}^{\dot{\mu}}$ – нечетные. Дополняя $t^{\underline{n}}$ нечетными координатами λ^{μ}, $\bar{\lambda}^{\dot{\mu}}$, $\mu, \dot{\mu} = 1, 2$, так чтобы $\left\{t^{\underline{n}}, \lambda^{\mu}, \bar{\lambda}^{\dot{\mu}}\right\}$ образовывали полный набор координат в суперпространстве, дополним (1.6.18) до

$$x^{\underline{m}} = f^{\underline{m}} + i\varphi^{\mu} \left(\sigma^{\underline{m}}\right)_{\mu\dot{\mu}} \bar{\lambda}^{\dot{\mu}} - i\lambda^{\mu} \left(\sigma^{\underline{m}}\right)_{\mu\dot{\mu}} \bar{\varphi}^{\dot{\mu}}, \quad \theta^{\mu} = \varphi^{\mu} + \lambda^{\mu}, \quad \bar{\theta}^{\dot{\mu}} = \bar{\varphi}^{\dot{\mu}} + \bar{\lambda}^{\dot{\mu}}. \tag{1.6.19}$$

Подставив (1.6.19) в $S = \int \mathcal{L}$ для (1.6.16) и проинтегрировав по λ^{μ}, $\bar{\lambda}^{\dot{\mu}}$, мы выразим действие в виде интеграла по четной поверхности (1.6.18) от лагранжиана (1.6.8), где $W = \hat{\bar{q}}_{\dot{\alpha}} \hat{\bar{q}}^{\dot{\alpha}} \ell$ и $\bar{W} = \hat{q}_{\alpha} \hat{q}^{\alpha} \ell$ (плюс Q-точные члены). При этом 1-формы E_a, E_{α}, $\bar{E}_{\dot{\alpha}}$ в лагранжиане (1.6.16) трансформируются в декартовы 1-формы (1.4.22) в лагранжиане (1.6.8)

$$\tilde{E}^a = \mathrm{d}f^a(t) + i\left(\sigma^a\right)_{\mu\dot{\mu}} \bar{\varphi}^{\dot{\mu}} \mathrm{d}\varphi^{\mu}(t) - i\left(\sigma^a\right)_{\mu\dot{\mu}} \varphi^{\mu} \mathrm{d}\bar{\varphi}^{\dot{\mu}}(t), \quad \tilde{E}^{\alpha} = \mathrm{d}\varphi^{\alpha}(t), \quad \tilde{\bar{E}}^{\dot{\alpha}} = \mathrm{d}\bar{\varphi}^{\dot{\alpha}}(t). \tag{1.6.20}$$

Для свободного лагранжиана Салама–Стрэтсди (1.6.17) эта процедура приводит к действию Весса–Зумино с лагранжианом (1.6.9), таким образом, демонстрируя их эквивалентность.

Однако, суперпотенциалы не представимы в виде интегральной формы (1.6.16). Это ожидаемо, поскольку они представляют собой киральные функции, которые нужно интегрировать по киральным подпространствам [157]. В нашем подходе такие члены наиболее удобно представить в виде, промежуточном между 4-суперформой и интегральной формой.

1.6.3. Киральное суперпространство

Для того, чтобы описать суперпотенциалы, мы вводим следующие киральные интегральные формы,

$$\Lambda = \delta^2\left(E_{\alpha}\right) E_{a_1} ... E_{a_m} \bar{E}_{\dot{\alpha}_1} ... \bar{E}_{\dot{\alpha}_n} W^{[a_1 ... a_m] \dot{\alpha}(n)}, \tag{1.6.21}$$

где W – лоренц-ковариантная 0-форма, построенная из киральных функций $C^{a(k)}$ и $\bar{F}^{a(k)}$ (т.ч. $Q_2^{-} \Lambda = 0$). Такие формы можно интегрировать по киральному подпространству $\mathbb{C}^{m+n|2}$ стандартным способом, описанным в Разделе 1.2. Здесь

$\bar{E}_{\dot{\alpha}}$ без δ-функций описывают кодифференциал (pullback) соответствующей 1-формы на киральное пространство.

Рассмотрим уравнение $\mathcal{H}\Lambda_i = 0$ в спинорных обозначениях, где Λ_i вида (1.6.21) содержат i штук $E_{\alpha\dot{\alpha}}$ (т.е. E_a). Для

$$\begin{aligned}
\Lambda_0 &= \delta^2(E_\alpha)\,\bar{E}^{\dot{\alpha}}...\bar{E}^{\dot{\alpha}}W_{\dot{\alpha}(m)}, && (1.6.22)\\
\Lambda_1 &= \delta^2(E_\alpha)\,\bar{E}^{\dot{\alpha}}...\bar{E}^{\dot{\alpha}}E^{\beta\dot{\beta}}W_{\beta,\dot{\beta},\dot{\alpha}(m)}, && (1.6.23)\\
\Lambda_2 &= \delta^2(E_\alpha)\,\bar{E}^{\dot{\alpha}}...\bar{E}^{\dot{\alpha}}\left(E^{\beta}{}_{\dot{\beta}}E^{\gamma\dot{\beta}}W_{\beta\gamma,\dot{\alpha}(m)} + E^{\beta\dot{\beta}}E_{\beta}{}^{\dot{\gamma}}W_{\dot{\beta}\dot{\gamma},\dot{\alpha}(m)}\right), && (1.6.24)\\
\Lambda_3 &= \delta^2(E_\alpha)\,E^{\beta}{}_{\dot{\gamma}}E^{\gamma\dot{\gamma}}E_{\gamma}{}^{\dot{\beta}}\bar{E}^{\dot{\alpha}}...\bar{E}^{\dot{\alpha}}W_{\beta,\dot{\beta},\dot{\alpha}(m)} && (1.6.25)
\end{aligned}$$

уравнение $\mathcal{H}\Lambda = 0$ обладает нетривиальными решениями (с произвольными 0-формами W) только при $m = 0$. Это легко понять, если заметить, что, поскольку $\delta^2(E_\alpha)\,\bar{E}^{\dot{\alpha}} = Q_3\left(\frac{i}{4}\delta'_\beta(E_\alpha)\,E^{\beta\dot{\alpha}}\right)$, все Λ_i, будучи Q_3-замкнутыми из-за δ-функций, не являются Q_3-точными только если они не зависят от $\bar{E}^{\dot{\alpha}}$.

Однако, для

$$\Lambda_4 = \delta^2(E_\alpha)\,E^{\beta}{}_{\dot{\beta}}E^{\gamma\dot{\beta}}E_{\gamma\dot{\gamma}}E_{\beta}{}^{\dot{\gamma}}\bar{E}^{\dot{\alpha}}...\bar{E}^{\dot{\alpha}}W_{\dot{\alpha}(m)} \tag{1.6.26}$$

имеем $\mathcal{H}\Lambda_4 = -2m\Lambda_4 + 4\Lambda_4 - 4\Lambda_4 + 2m\Lambda_4 \equiv 0$. Следовательно, Λ_4 (1.6.26) может представлять собой Q_3-когомологию при любом m. Таким образом, имеются следующие Q_3-когомологии в классе киральных интегральных форм

$$\begin{aligned}
\Lambda_0 &= \delta^2(E_\alpha)\,W, && (1.6.27)\\
\Lambda_1 &= \delta^2(E_\alpha)\,E^{\beta\dot{\beta}}W_{\beta\dot{\beta}}, && (1.6.28)\\
\Lambda_2 &= \delta^2(E_\alpha)\left(E^{\beta}{}_{\dot{\beta}}E^{\gamma\dot{\beta}}W_{\beta\gamma} + E^{\beta\dot{\beta}}E_{\beta}{}^{\dot{\gamma}}W_{\dot{\beta}\dot{\gamma}}\right), && (1.6.29)\\
\Lambda_3 &= \delta^2(E_\alpha)\,E^{\beta}{}_{\dot{\gamma}}E^{\gamma\dot{\gamma}}E_{\gamma}{}^{\dot{\beta}}W_{\beta\dot{\beta}}, && (1.6.30)\\
\Lambda_4 &= \delta^2(E_\alpha)\,E^{\beta}{}_{\dot{\beta}}E^{\gamma\dot{\beta}}E_{\gamma\dot{\gamma}}E_{\beta}{}^{\dot{\gamma}}\bar{E}^{\dot{\alpha}}...\bar{E}^{\dot{\alpha}}W_{\dot{\alpha}(m)}. && (1.6.31)
\end{aligned}$$

Для интегрирования по $\mathbb{C}^{4|2}$ единственным подходящим выражением из (1.6.27)-(1.6.31) является

$$\mathcal{L}_0 = \delta^2(E_\alpha)\,E^{\beta}{}_{\dot{\beta}}E^{\gamma\dot{\beta}}E_{\gamma\dot{\gamma}}E_{\beta}{}^{\dot{\gamma}}W. \tag{1.6.32}$$

Заметим, что $G(\delta^2(E_\alpha)) = -4$, поскольку $G(E_\alpha) = 2$, а δ-функция имеет степень однородности -2, так что, в результате, $G(\mathcal{L}_0) = 0$. Для того чтобы отделить тривиальные лагранжианы, запишем уравнения (1.1.31)-(1.1.34) для

$$\mathcal{F}_{-1} = \delta^2 (E_\alpha) E^\beta{}_{\dot\gamma} E^{\gamma\dot\gamma} E_\gamma{}^{\dot\beta} f_{\beta\dot\beta}, \quad G(\mathcal{F}_{-1}) = -1, \tag{1.6.33}$$

которое является единственным выражением среди (1.6.27)-(1.6.31), чей Q-образ может дать вклад в (1.6.32). Это дает

$$Q_3 \mathcal{F}_{-1} = 0, \tag{1.6.34}$$
$$\left(Q_2^+ + Q_2^-\right) \mathcal{F}_{-1} + Q_3 \mathcal{F}_{-2} = 0, \tag{1.6.35}$$
$$Q_1 \mathcal{F}_{-1} + \left(Q_2^+ + Q_2^-\right) \mathcal{F}_{-2} + Q_3 \mathcal{F}_{-3} = \delta^2 (E_\alpha) E^\beta{}_{\dot\beta} E^{\gamma\dot\beta} E_{\gamma\dot\gamma} E_\beta{}^{\dot\gamma} W. \tag{1.6.36}$$

Мы немедленно заключаем, что $\mathcal{F}_{-2}$ с $G = -2$ здесь может иметь только вид

$$\mathcal{F}_{-2} = \delta'_\delta (E_\alpha) E^\beta{}_{\dot\beta} E^{\gamma\dot\beta} E_{\gamma\dot\gamma} E_\beta{}^{\dot\gamma} f^\delta. \tag{1.6.37}$$

(Производная δ-функции имеет градуировку $G\left(\delta'_\beta (E_\alpha)\right) = -6$, как следует из ее определения $E_\gamma \delta'_\beta (E_\alpha) = \epsilon_{\gamma\beta} \delta^2 (E_\alpha)$ и $G(\delta^2 (E_\alpha)) = -4$.) Уравнение (1.6.34) удовлетворяется в силу того, что $\mathcal{F}_{-1} \in H(Q_3)$. Слагаемое с $\mathcal{F}_{-1}$ в (1.6.35) равно нулю, т.к. (1.6.33) содержит δ-функцию, а $f_{\beta\dot\beta}$ построено из $C^{a(k)}$ и $\bar{F}^{a(k)}$, так что $\mathcal{F}_{-2} = 0$. Наконец, (1.6.36) имеет своим решением

$$\mathcal{F}_{-3} = 0, \quad W = \frac{1}{8} \hat{q}_{\alpha\dot\alpha} f^{\alpha\dot\alpha}. \tag{1.6.38}$$

В итоге, мы приходим к выводу, что (1.6.32) описывает нетривиальные лагранжианы только если $W \neq \hat{q}_{\alpha\dot\alpha} f^{\alpha\dot\alpha}$ для какого-либо $f^{\alpha\dot\alpha}$. Также, аналогично Разделу 1.6.2, мы должны рассмотреть выражения с производными δ-функции, чьи Q-образы могут приводить к тривиальным лагранжианам 1.6.32. Легко видеть, что единственными подходящими элементами из $Ker(Q_3)$ являются

$$K_1 = \delta'_\beta (E_\alpha) \bar{E}^{\dot\alpha_1} ... \bar{E}^{\dot\alpha_4} \bar{k}^\beta{}_{\dot\alpha(4)}, \tag{1.6.39}$$
$$K_2 = \delta'_\beta (E_\alpha) E^{\gamma\dot\alpha} E_\gamma{}^{\dot\beta} \bar{E}_{\dot\alpha} \bar{E}_{\dot\beta} k^\beta. \tag{1.6.40}$$

Однако, для первого из них $G(K_1) = 2$, а для второго $G(K_2) = 0$. И, поскольку $G(\mathcal{L}_0) = 0$, система (1.1.31)-(1.1.34) не допускает ненулевых решений для этих случаев.

Далее, помимо $Q_3 \mathcal{L}_0 = 0$, $\mathcal{L}_0$ подчинен условиям

$$
\begin{aligned}
Q_2^- \mathcal{L}_0 &= 0, && (1.6.41)\\
Q_2^+ \mathcal{L}_0 &= 0, && (1.6.42)\\
Q_1 \mathcal{L}_0 &= 0. && (1.6.43)
\end{aligned}
$$

Первое уравнение выполняется, потому что W в (1.6.32) построено из киральных $C^{a(k)}$ и $\bar{F}^{a(k)}$. Второе выполняется благодаря δ-функции в $\mathcal{L}_0$. Третье удовлетворяется в связи с тем, что $\mathcal{L}_0$ является топ-формой по $E^{\alpha\dot{\alpha}}$. Так что $\mathcal{L}_0$ (1.6.32) Q-замкнуто и, следовательно, представляет собой общую форму развернутого кирального лагранжиана. (Заметим, что (1.6.27)-(1.6.30) с ненулевым W не являются Q-замкнутыми, так как они содержат менее четырех $E^{\alpha\dot{\alpha}}$ и поэтому не зануляются оператором $Q_1 = \frac{1}{2} E_{\alpha\dot{\alpha}} \hat{q}^{\alpha\dot{\alpha}}$).

В тензорных обозначениях общий киральный лагранжиан имеет вид

$$
\mathcal{L} = \delta^2 (E_\alpha) \epsilon^{abcd} E_a E_b E_c E_d W, \tag{1.6.44}
$$

где лоренц-инвариатная 0-форма W построена из $C^{a(k)}$ и $\bar{F}^{a(k)}$и $W \neq \hat{q}^a f_a$. Чтобы действие было вещественным, к (1.6.44) нужно добавить комплексно-сопряженное выражение, интегрируемое по антикиральному суперпространству с 0-формой $\bar{W}$, построенной из $F^{a(k)}$ и $\bar{C}^{a(k)}$. Комбинация (1.6.44) (плюс сопряженное выражение) и (1.6.16) дает развернутое суперпространственное действие нелинейной теории.

Чтобы воспроизвести суперпотенциал модели Весса–Зумино [157], выберем $W = kC + \frac{m}{2} CC + \frac{g}{3} CCC$ с произвольными константами k, m, g. Тогда суперпотенциал принимает вид

$$
S = \int \delta^2 (E_\alpha) \epsilon^{abcd} E_a E_b E_c E_d \left(kC + \tfrac{m}{2} CC + \tfrac{g}{3} CCC \right) + h.c. \tag{1.6.45}
$$

Чтобы записать полное действие, содержащее и кинетический член и суперпотенциал модели Весса–Зумино в киральной форме, положим $W = -\frac{1}{16} C\bar{F} + kC + \frac{m}{2} CC + \frac{g}{3} CCC$. Это дает

$$
S = \int \delta^2 (E_\alpha) \epsilon^{abcd} E_a E_b E_c E_d \left(-\frac{1}{16} C\bar{F} + kC + \frac{m}{2} CC + \frac{g}{3} CCC \right) + h.c. \tag{1.6.46}
$$

Кинетический член $-\frac{1}{16} C\bar{F}$ в (1.6.46) возникает в результате интегрирования

(1.6.17) по $\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$ с учетом того, что $\bar{F} = 2\bar{D}\bar{D}\bar{C}$, как следует из (1.4.53)-(1.4.55).

Как и в Разделе 1.6.2, можно отобразить решение (1.6.44) в 4-суперформу (1.6.8). Единственная разница состоит в том, что вместо (1.6.19) четные поверхности кирального суперпространства $(x^m, \theta^\mu) \to (t^m, \lambda^\mu)$ параметризуются как

$$x^{\underline{m}} = f^{\underline{m}} + i\left(\varphi^\mu(t) + \lambda^\mu\right)\left(\sigma^{\underline{m}}\right)_{\mu\dot{\mu}}\bar{\varphi}^{\dot{\mu}}(t), \quad \theta^\mu = \varphi^\mu(t) + \lambda^\mu. \tag{1.6.47}$$

Интегрирование по $\lambda^{\underline{\mu}}$ дает лагранжиан (1.6.8) с той же функцией W, что и в (1.6.44). Аналогично Разделу 1.6.2, получающийся лагранжиан интегрируется по поверхности (1.6.18) с 1-формами (1.6.20).

Выражения (1.6.8), (1.6.16) и (1.6.44) представляют собой наиболее общие развернутые лагранжианы, которые можно записать для модели Весса–Зумино в виде 4-суперформы, интегральной формы или киральной интегральной формы, соответственно. Помимо стандартных лагранжианов Весса–Зумино и Салама–Стрэтсди, они также описывают лагранжианы со старшими производными. А именно, в силу (1.4.49)-(1.4.51), тензоры ранга k $C^{a(k)}$, $\chi_\alpha^{a(k)}$ и $F^{a(k)}$ описывают k-ые производные динамических полей C, χ_α и F. Подстановка тензоров высших рангов в (1.6.8), (1.6.16) или (1.6.44) дает развернутые действия со старшими производными. Развернутые лагранжианы содержат все возможные обычные лагранжианы, которые могут быть написаны для $4d$ модели Весса–Зумино. Чтобы получить обычный теоретико-полевой лагранжиан из развернутого, необходимо выразить все вспомогательные поля $C^{a(n)}$, $\bar{C}^{a(n)}$, $\chi_\alpha^{a(n)}$, $\bar{\chi}_{\dot{\alpha}}^{a(n)}$, $F^{a(n)}$, $\bar{F}^{a(n)}$ с $n \geq 1$ через производные динамических полей с помощью развернутых уравнений (1.4.49)-(1.4.51), (1.4.53)-(1.4.55). Затем, зафиксировав поверхность интегрирования и подставив получившиеся выражения, к примеру, в (1.6.8), мы получим обычное пространственно-временное действие.

В частности, делая это для (1.6.9) и выбирая пространство Минковского в качестве поверхности интегрирования, мы видим, что интеграл от (1.6.9) воспроизводит компонентное действие свободного кирального супермультиплета [9]. Альтернативно, можно использовать лагранжианы (1.6.17) или (1.6.46), получая стандартное суперполевое действие Салама–Стрэтсди. Вообще, будучи явно суперсимметричным, развернутый лагранжиан в виде суперформы прямо ведет к компонентному действию.

1.7. Выводы

В этой Главе мы построили развернутую off-shell формулировку безмассового скалярного супермультиплета, а также вывели и проанализировали систему уравнений, которая определяет все возможные суперполевые лагранжианы модели. Были получены частные решения в различных функциональных классах, порождающие стандартные суперполевые действия модели Весса–Зумино: в виде 4-суперформы, интегральной формы и киральной интегральной формы. Установлены явные соответствия между этими действиями. В частности, показано, как обычное суперполевое действие модели Весса–Зумино может быть переписано в виде интеграла от 4-суперформы.

Предложенная нами конструкция киральной интегральной формы в некотором смысле является промежуточной между конструкциями Раздела 1.6.1 и Раздела 1.6.2. По сути, это частный пример достаточно общего явления: полное действие может иметь вид интеграла по (супер)многообразиям различных размерностей. Пока фиксирована структура по четным координатам, интегрирование по грассмановым координатам будет вести к тому или иному пространственно-временному действию. В более сложных теориях типа теорий высших спинов и их многочастичных обобщениях можно ожидать, что в конечный ответ будут одновременно давать вклад инвариантные функционалы, возникающие из интегралов по пространствам–временам различных четных размерностей.

Таким образом, на примере простейшей суперсимметричной теории мы продемонстрировали эффективность развернутого подхода к проблеме построения off-shell суперполевых формулировок. Основываясь на развернутом формализме, предложенный метод анализа суперсимметричных инвариантных функционалов является наиболее общим, обеспечивая максимальную гибкость при построении суперсимметричных действий. Применительно к развернутым on-shell системам он предоставляет систематический инструмент анализа on-shell контрчленов суперсимметричных теорий, что является предметом активного изучения в последние годы [169–174]. Было бы интересно исследовать его в применении к более сложным моделям с расширенной суперсимметрией и, в первую очередь, к теориям, для которых до сих пор неизвестна явная суперсимметричная формулировка, например, $10d$ $\mathcal{N} = 1$ или $4d$ $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричная теория Янга–Миллса. Также было бы интересно прояснить связь предлагаемого подхода с подходом гармонического суперпространства [14].

ГЛАВА 2. Уравнения Васильева и токи высших спинов

В этой Главе мы рассмотрим развернутые нелинейные уравнения теории высших спинов (уравнения Васильева) и покажем, каким образом из них можно извлекать стандартные лагранжевы структуры теории поля. В частности, мы найдем квадратичные поправки к свободным уравнениям высших спинов (уравнениям Фронсдала), отвечающие токовым взаимодействиям высших спинов.

Выбор именно этих поправок не случаен. Уравнения Васильева определяют нелинейную теорию безмассовых полей всех спинов на пространстве анти-де Ситтера. Будучи развернутыми, они представляют собой бесконечный набор дифференциальных уравнений первого порядка на 0- и 1-формы. Как обычно, поле каждого спина в развернутом подходе описывается бесконечным набором полей, параметризующих все его степени свободы. При этом бесконечное множество вершин, описывающих взаимодействия высших спинов, закодированы в эволюцию по вспомогательным (в $d = 3, 4$ измерениях – твисторным) переменным. В этом отношении уравнения Васильева могут рассматриваться как производящие («уравнения на уравнения»).

Извлечение пространственно-временной динамики из уравнений Васильева является весьма нетривиальной проблемой, в первую очередь из-за свободы в выборе резольвенты по твисторным переменным. Как обычно, резольвента опеределена с точностью до произвольного решения однородного уравнения, что с точки зрения физических переменных отвечает свободе переопределения полей, которая может изменять вид уравнений движения. К примеру, в [195] было обнаружено, что псевдолокальными переопределениями полей можно избавиться от взаимодействий в $3d$ уравнениях высших спинов (см. также [196, 197] для доказательства псевдолокальной тривиальности любых $3d$ токов высших спинов). В [122] было показано, что простейший выбор резольвенты (т.н. стандартная гомотопия) ведет к нелокальным выражениям для части $4d$ кубических вершин высших спинов. Все это приводит к вопросу о выборе функционального класса для полей и фиксации правильной твисторной резольвенты [119, 121, 123]. С другой стороны, твисторная резольвента, приводящая к локальным квадратичным уравнениям движения, была найдена для сектора

0-форм в [124] и для сектора 1-форм в [132]. Затем в [74, 198] было проверено, что получающиеся с помощью этой резольвенты квадратичные динамические уравнения правильно воспроизводят голографические корреляционные функции в соответствии с AdS/CFT-гипотезой Клебанова–Полякова [57]. Наконец, в [125] было показано, как сконструировать правильную резольвенту, исходя только из требования локальности в квадратичном порядке и минимально возможной нелокальности в следующих порядках.

В этой Главе мы проводим дальнейшее исследование локальных развернутых квадратичных уравнений [132] и находим явный вид поправок к бозонным уравнениям Фронсдала, порождаемых калибровочно-инвариантными токами высших спинов, поскольку именно эти поправки становятся нелокальными при неправильном выборе твисторной резольвенты, и, таким образом, являются наиболее чувствительными к процедуре извлечения динамической информации из уравнений Васильева. Полученные нами результаты следует сравнить с результатами [127, 128], где кубические вершины высших спинов были найдены в формализме светового конуса в пространстве Минковского, и с результатами [199], где они были восстановлены с помощью AdS/CFT из корреляторов граничной теории свободного скалярного поля. Сравнение показывает полное согласие результатов, таким образом, окончательно подтверждая правильность локальных квадратичных уравнений [124, 132]. Помимо этого, мы находим зависимость вершин от фазового множителя, входящего в уравнения Васильева, обобщая предыдущие результаты на случай теорий с нарушенной четностью. В частности, оказывается, что при специальном значении фазы $\varphi = \frac{\pi}{4}$ вершины нарушают четность максимальным образом, что, возможно, имеет интересные проявления в дуальной граничной теории в соответствии с гипотезой [60, 61].

2.1. Нелинейные уравнения высших спинов

Нелинейные уравнения высших спинов (уравнения Васильева) в четырех измерениях имеют следующий стандартный вид [95]

$$\mathrm{d}W + W * W = 0\,, \tag{2.1.1}$$

$$\mathrm{d}S + [W, S]_* = 0\,, \tag{2.1.2}$$

$$\mathrm{d}B + [W, B]_* = 0\,, \tag{2.1.3}$$

$$S * S = -i\theta_\alpha\theta^\alpha \left(1 + F_* \left(B\right) * k\varkappa\right) - i\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \left(1 + \bar{F}_* \left(B\right) * \bar{k}\bar{\varkappa}\right)\,, \tag{2.1.4}$$

$$[S, B]_* = 0\,. \tag{2.1.5}$$

Здесь d – пространственно-временной дифференциал де Рама, W, S и B – мастер-поля теории, зависящие от пространственно-временных координат и твисторных переменных $Y^A = (y^\alpha, \bar{y}^{\dot{\alpha}})$, $Z^A = (z^\alpha, \bar{z}^{\dot{\alpha}})$ со спинорными индексами α и $\dot{\alpha}$, принимающими два значения. Переменные Y и Z реализуют алгебру высших спинов через некоммутативное звездочное произведение

$$\left(f * g\right)\left(Z, Y\right) = \int \mathrm{d}^4U \mathrm{d}^4V f\left(Z + U, Y + U\right) g\left(Z - V, Y + V\right) e^{iU_A V^A}, \tag{2.1.6}$$

где мера интегрирования неявным образом зафиксирована так, чтобы выполнялось $1 * f = f * 1 = f$. Звездочное произведение (2.1.6) индуцирует следующие коммутационные соотношения

$$\left[Y^A, Y^B\right]_* = -\left[Z^A, Z^B\right]_* = 2i\epsilon^{AB}, \qquad \left[Y^A, Z^B\right]_* = 0. \tag{2.1.7}$$

Существенными составляющими уравнений Васильева являются внутренние операторы Клейна $\varkappa$ и $\bar{\varkappa}$ в (2.1.4). Они представляют собой особые элементы звездочной алгебры, которые имеют вид

$$\varkappa := \exp\left(iz_\alpha y^\alpha\right)\,, \quad \bar{\varkappa} := \exp\left(i\bar{z}_{\dot{\alpha}}\bar{y}^{\dot{\alpha}}\right) \tag{2.1.8}$$

и обладают следующими характерными свойствами

$$\varkappa * \varkappa = 1, \quad \varkappa * f\left(z^\alpha, y^\alpha\right) = f\left(-z^\alpha, -y^\alpha\right) * \varkappa, \tag{2.1.9}$$

$$f(z,y) * \varkappa = f(-y,-z)\, e^{iz_\alpha y^\alpha} \tag{2.1.10}$$

(аналогично для $\bar{\varkappa}$.)

Мастер-поле $W(Z,Y;K|x) = W_{\underline{m}} \mathrm{d}x^{\underline{m}}$ является пространственно-временной 1-формой, которая описывает потенциалы высших спинов и их производные, таким образом, параметризуя все калибровочно-неинвариантные степени свободы теории. В 0-форме $B(Z,Y;K|x)$ содержатся поля материи со спинами $s = 0$, $s = 1/2$, а также все кривизны высших спинов и их производные. Таким образом, мастер-поле B кодирует все калибровочно-инвариантные степени свободы. Поле $S(Z,Y;K|x) = S_A\theta^A$ представляет собой 1-форму по вспомогательному спинорному дифференциалу $\theta^A = (\theta^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}})$, дуальному Z^A, и является целиком вспомогательным, не обладая собственными локальными степенями свободы[1]. Все дифференциалы антикоммутируют

$$\{\mathrm{d}x^{\underline{m}}, \mathrm{d}x^{\underline{n}}\} = \left\{\mathrm{d}x^{\underline{m}}, \theta^A\right\} = \left\{\theta^A, \theta^B\right\} = 0. \tag{2.1.11}$$

Помимо внутренних операторов Клейна имеется также пара внешних операторов Клейна $K = \left(k, \bar{k}\right)$, которые имеют сходные с $(\varkappa, \bar{\varkappa})$ свойства

$$kk = 1, \quad kf(z^\alpha; y^\alpha; \theta^\alpha) = f(-z^\alpha; -y^\alpha; -\theta^\alpha)\, k, \tag{2.1.12}$$

но, в отличие от $\varkappa$, k антикоммутирует также и с θ^α дифференциалами, что не позволяет представить его в виде элемента звездочной алгебры (аналогично для $\bar{k}$).

В силу (2.1.12) зависимость любых функций от внешних операторов Клейна не более чем билинейна

$$f = \sum_{i,j=0,1} f_{i,j} k^i \bar{k}^j. \tag{2.1.13}$$

Это приводит к естественному расщеплению полей на физический и топологический секторы в соответствии со степенью однородности по K [95]. Физический сектор выделяется условиями $W\left(-k,-\bar{k}\right) = W\left(k,\bar{k}\right)$ и $B\left(-k,-\bar{k}\right) = -B\left(k,\bar{k}\right)$ и, собственно, и описывает релятивистские безмассовые поля всех

[1]Во избежание недоразумений отметим, что определенный здесь дифференциал θ^A не имеет никакого отношения к грассмановым координатам суперпространства из Главы 1.

спинов. Сектор же $W\left(-k,-\bar{k}\right) = -W\left(k,\bar{k}\right)$ и $B\left(-k,-\bar{k}\right) = B\left(k,\bar{k}\right)$ представляет собой бесконечную башню полей, каждое из которых несет не более конечного числа динамических степеней свободы, являясь, таким образом, топологическим.

$F_*\left(B\right)$ является произвольной комплексной функцией, построенной из звездочных произведений B. В этой Главе мы рассмотрим наиболее простой случай, когда $F_*\left(B\right)$ есть линейная функция

$$F_*\left(B\right) = \eta B. \tag{2.1.14}$$

Комплексный параметр η в (2.1.14) с помощью перемасштабирования полей может быть сделан унимодулярным $|\eta| = 1$, таким образом, описывая свободу выбора фазового множителя[2]. Теория сохраняет четность в двух случаях: $\eta = 1$ (A-модель) и $\eta = i$ (B-модель) [59].

Имеются три центральных элемента, входящих в правую часть (2.1.4). Один – это $\theta_A\theta^A$, который с очевидностью коммутирует с любыми переменными. Другие два имеют вид

$$\gamma := 2k\varkappa\delta^2(\theta)\,, \quad \bar{\gamma} := 2\bar{k}\bar{\varkappa}\delta^2(\bar{\theta}) \tag{2.1.15}$$

где

$$\delta^2(\theta) := \frac{1}{2}\theta^\alpha\theta_\alpha, \quad \delta^2(\bar{\theta}) := \frac{1}{2}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}. \tag{2.1.16}$$

Они также коммутируют со всем, включая θ^α, благодаря наличию грассмановой δ-функции, $\theta^\alpha\delta^2(\theta) = 0$. В итоге, рассматриваемые в данной Главе уравнения можно записать в компактном виде, введя единое поле 1-форм в дважды градуированном пространстве

$$\mathbb{W}(Z,Y;K|x) := W_{\underline{m}}(Z,Y;K|x)\mathrm{d}x^{\underline{m}} + S_A(Z,Y;K|x)\theta^A\,, \tag{2.1.17}$$

Тогда уравнения примут вид

$$\mathrm{d}\mathbb{W} + \mathbb{W} * \mathbb{W} = i\theta^A\theta_A + i\eta B * \gamma + i\bar{\eta} B * \bar{\gamma}\,, \tag{2.1.18}$$

$$\mathrm{d}B + [\mathbb{W}, B]_* = 0\,, \tag{2.1.19}$$

[2] В [95] было выдвинуто предположение, что противоположная ситуация, когда $(\eta)\;\bar{\eta} = 0$, соответствует (анти)самодуальной теории высших спинов, не допускающей нетривиальных амплитуд. Мы не будем рассматривать этот случай.

Кроме того, в этой Главе для простоты мы отбрасываем топологический сектор и, далее, делаем бозонную редукцию, которая оставляет только одно поле каждого целого спина. Все это реализуется путем наложения условий

$$\mathbb{W}\left(Z;Y|K|x|\theta^{A},dx^{\underline{m}}\right)\to\mathbb{W}\left(Z;Y|x|\theta^{A},dx^{\underline{m}}\right)\left(1+k\bar{k}\right), \qquad (2.1.20)$$

$$B\left(Z;Y|K|x\right)\to B\left(Z;Y|x\right)\left(k+\bar{k}\right). \qquad (2.1.21)$$

Теории с произвольными $F_{*}(B)$ и топологическими полями будут рассмотрены в Главе 5, посвященной построению сохраняющихся зарядов высших спинов.

2.2. Теория возмущений

Для осуществления пертурбативного разложения необходимо зафиксировать какое-либо (вакуумное) решение для (2.1.18), (2.1.19). Уравнение (2.1.19) может быть решено выбором нулевого вакуумного значения B

$$B_0=0. \qquad (2.2.1)$$

Тогда решение для (2.1.18) можно выбрать в виде

$$\mathbb{W}_0=\phi_{AdS}+Z_A\theta^A \qquad (2.2.2)$$

с пространственно-временной 1-формой $sp(4)$-связности ϕ_{AdS}, описывающей AdS_4-фон,

$$\phi_{AdS}=-\frac{i}{4}\left(\omega_L^{\alpha\beta}y_\alpha y_\beta+\bar{\omega}_L^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{y}_{\dot{\alpha}}\bar{y}_{\dot{\beta}}+2\lambda e^{\alpha\dot{\beta}}y_\alpha\bar{y}_{\dot{\beta}}\right), \qquad (2.2.3)$$

$$\mathrm{d}\phi_{AdS}+\phi_{AdS}*\phi_{AdS}=0, \qquad (2.2.4)$$

где λ – космологический параметр (обратный радиус AdS), $e^{\alpha\dot{\beta}}$ и $\omega_L^{\alpha\beta}$ ($\bar{\omega}_L^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$) – тетрада и (анти)самодуальная часть лоренцевой связности AdS_4.

Осуществляя разложение уравнений (2.1.18)-(2.1.19) над вакуумом (2.2.1)-(2.2.2), в линейном порядке мы получаем [95]

$$\mathcal{D}^{Y}_{ad}\omega\left(Y|K|x\right)=L\left(C\right), \tag{2.2.5}$$
$$\mathcal{D}^{Y}_{tw}C\left(Y|K|x\right)=0, \tag{2.2.6}$$

где

$$L\left(C\right):=\frac{i\lambda}{4}\eta\bar{H}^{\dot\alpha\dot\beta}\bar\partial_{\dot\alpha}\bar\partial_{\dot\beta}C\left(0,\bar y|K|x\right)k+\frac{i\lambda}{4}\bar\eta H^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta C\left(y,0|K|x\right)\bar k, \tag{2.2.7}$$
$$H^{\alpha\beta}:=e^{\alpha\dot\gamma}e^{\beta}{}_{\dot\gamma},\quad \bar H^{\dot\alpha\dot\beta}:=e^{\gamma\dot\alpha}e_{\gamma}{}^{\dot\beta} \tag{2.2.8}$$
$$\partial_\alpha:=\frac{\partial}{\partial y^\alpha},\quad \bar\partial_{\dot\alpha}:=\frac{\partial}{\partial\bar y^{\dot\alpha}}, \tag{2.2.9}$$
$$\mathcal{D}^{Y}_{ad}f\left(Y|K|x\right):=D^{L,Y}f+\lambda e^{\alpha\dot\beta}\left(y_\alpha\bar\partial_{\dot\beta}+\partial_\alpha\bar y_{\dot\beta}\right)f, \tag{2.2.10}$$
$$\mathcal{D}^{Y}_{tw}f\left(Y|K|x\right):=D^{L,Y}f-i\lambda e^{\alpha\dot\beta}\left(y_\alpha\bar y_{\dot\beta}-\partial_\alpha\bar\partial_{\dot\beta}\right)f, \tag{2.2.11}$$
$$D^{L,Y}f:=\mathrm{d}f+\left(\omega_L^{\alpha\beta}y_\alpha\partial_\beta+\bar\omega_L^{\dot\alpha\dot\beta}\bar y_{\dot\alpha}\bar\partial_{\dot\beta}\right)f. \tag{2.2.12}$$

Уравнения (2.2.5)-(2.2.6), именуемые *центральной on-mass-shell теоремой*, представляют собой развернутый вид уравнений Фронсдала для свободных полей высших спинов в AdS_4. Разложим поля высших спинов как

$$\omega\left(Y|K|x\right)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\omega_{m,n}\left(Y|K|x\right),\quad C\left(Y|K|x\right)=\sum_{m,n=0}^{\infty}C_{m,n}\left(Y|K|x\right), \tag{2.2.13}$$

где

$$f_{m,n}\left(Y\right):=f_{\alpha_1\ldots\alpha_m,\dot\beta_1\ldots\dot\beta_n}y^{\alpha_1}\ldots y^{\alpha_m}\bar y^{\dot\beta_1}\ldots\bar y^{\dot\beta_n}. \tag{2.2.14}$$

Введем также разложение на секторы положительных и отрицательных спиральностей

$$\omega=\omega_++\omega_-+\omega_0,\quad C=C_++C_-+C_0, \tag{2.2.15}$$

где

$$f_+=\sum_{m>n}f_{m,n},\quad f_-=\sum_{m<n}f_{m,n},\quad f_0=\sum_{m=n}f_{m,n} \tag{2.2.16}$$

представляют собой положительно-спиральные, отрицательно-спиральные и нуль-спиральные секторы, соответственно. Тогда подмодуль, описывающий поле спина s, состоит из $\omega_{m,n}$, $n+m=2\left(s-1\right)$ и $C_{m,n}$, $|m-n|=2s$.

В старших порядках необходимо выбирать резольвенту по переменным Z, которая минимизирует нелокальность вершин. Во втором порядке вершины полностью локальны и, как показано в [124, 132], соответствующие развернутые уравнения имеют вид

$$\mathcal{D}^{Y}_{ad}\omega + [\omega,\omega]_* = L\,(C) + Q\,(C,\omega) + \Gamma_{s<s_1+s_2}\,(J) + \Gamma^{can}\,(J)\,, \quad (2.2.17)$$

$$\mathcal{D}^{Y}_{tw}C\,(Y|K|x) + [\omega, C]_* = -\mathcal{H}_{\eta}\,(J) - \mathcal{H}_{\bar\eta}\,(J) + \mathcal{D}^{Y}_{tw}B^{sum}\,(J)\,, \quad (2.2.18)$$

где

$$J\left(Y^1, Y^2|K|x\right) := C\left(Y^1|K|x\right) C\left(Y^2|K|x\right) \quad (2.2.19)$$

представляет собой билинейный ток высших спинов. Упомянутый выбор резольвенты обеспечивает локальность J-зависимых членов. Мы будем анализировать первое уравнение (2.2.17), которое содержит в себе уравнения Фронсдала с квадратичными поправками. Эти поправки разделяются на четыре типа: член $[\omega,\omega]_*$, который полностью фиксирован алгеброй симметрий высших спинов; калибровочно-зависимый вклад $Q\,(C,\omega)$, который локален с самого начала, т.к. ω является полиномом ограниченной степени по Y для любого фиксированного спина; член $\Gamma_{s<s_1+s_2}\,(J)$, являющийся токовой деформацией в калибровочно-зависимом секторе внутри неравенства треугольника $s < s_1 + s_2$; член $\Gamma^{can}\,(J)$, который представляет собой калибровочно-инвариантную токовую деформацию вне неравенства треугольника, $s \geq s_1 + s_2$. Нас интересует именно последний вклад.

Преобразуем все объекты в 0-формы, разлагая их по фоновым тетрадам $e^{\alpha\dot\beta}$

$$\omega_{m,n} = e^{\alpha\dot\beta}\omega_{m,n|\alpha\dot\beta}, \quad D^{L,Y} = e^{\alpha\dot\beta}D_{\alpha\dot\beta}. \quad (2.2.20)$$

Тогда релевантный сектор (2.2.17), описывающий вклад токов в уравнения движения поля спина s, можно переписать как [132]

$$D_{\alpha\dot\beta}\omega_{s-2,s|\alpha}{}^{\dot\beta} = -\bar y_{\dot\beta}\partial_\alpha\omega_{s-1,s-1|\alpha}{}^{\dot\beta} - y_\alpha\bar\partial_{\dot\beta}\omega_{s-3,s+1|\alpha}{}^{\dot\beta} + \partial_\alpha\partial_\alpha\mathcal{J}_{s,s}, \quad (2.2.21)$$

$$D_{\beta\dot\alpha}\omega_{s,s-2|}{}^{\beta}{}_{\dot\alpha} = -y_\beta\bar\partial_{\dot\alpha}\omega_{s-1,s-1|}{}^{\beta}{}_{\dot\alpha} - \bar y_{\dot\alpha}\partial_\beta\omega_{s+1,s-3|}{}^{\beta}{}_{\dot\alpha} + \bar\partial_{\dot\alpha}\bar\partial_{\dot\alpha}\mathcal{J}_{s,s}, \quad (2.2.22)$$

где

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_{s,s} \;=\; & i\frac{(s-2)!}{8\,(2s)!}\sum_{k,m=0}^{s}\frac{(m+k)!\,(2s-m-k)!}{(s-k)!k!\,(s-m)!m!}\left(y^\alpha\partial^1_\alpha\right)^m\left(-y^\beta\partial^2_\beta\right)^{s-m}\left(\bar y^{\dot\alpha}\bar\partial^1_{\dot\alpha}\right)^{s-k}\left(-\bar y^{\dot\beta}\bar\partial^2_{\dot\beta}\right)^k \\ & \left\{\sum_{n=0}^{s}\frac{i^n}{(s+n-1)!}\left(\left(\partial^1_\gamma\partial^{2\gamma}\right)^n + \left(\bar\partial^1_{\dot\gamma}\bar\partial^{2\dot\gamma}\right)^n\right)C\left(Y^1|K|x\right)C\left(Y^2|K|x\right)\right\}\Big|_{Y^1=Y^2=0}\end{aligned} \quad (2.2.23)$$

2.3. Поправки токов к уравнениям Фронсдала

Наша задача – получить явные выражения для квадратичных поправок к уравнениям Фронсдала, генерируемых (2.2.21)-(2.2.22). Дважды-бесследовое поле спина s в спинорных обозначениях описывается как $\omega_{\alpha(s-1),\dot\alpha(s-1)|\beta\dot\beta}$. Мы воспользуемся тем обстоятельством, что изучаемые токи являются конформными [200], так что нам достаточно следить только за полностью бесследовыми (в терминах лоренцевых тензоров) компонентами фронсдаловских полей, которые на спинорном языке соответствуют полностью симметричным спинор-тензорам $\phi_{\alpha(s),\dot\alpha(s)}$

$$\phi_{s,s} := \omega_{s-1,s-1|\beta\dot\beta}y^\beta\bar y^{\dot\beta}. \tag{2.3.1}$$

Далее, мы можем работать в калибровке, где поля поперечны

$$D_{\alpha\dot\beta}\partial^\alpha\bar\partial^{\dot\beta}\phi_{s,s} = 0. \tag{2.3.2}$$

Наконец, несмотря на то, что полная нелинейная теория высших спинов не допускает плоского предела, калибровочно-инвариантные кубические взаимодействия, которые мы изучаем, его допускают (например, для $2-s-s$ вершины Фрадкина–Васильева [92, 93] это было показано в [201]). Поэтому мы может взять плоский предел в наших уравнениях и считать производные коммутирующими

$$\left[D_{\alpha\dot\alpha}, D_{\beta\dot\beta}\right] = 0. \tag{2.3.3}$$

Для этого нужно перемасштабировать поля следующим образом

$$\omega_{m,n} \longrightarrow \lambda^{-\frac{|m-n|}{2}}\omega_{m,n}, \quad C_{m,n} \longrightarrow \lambda^{-\frac{m+n}{2}}C_{m,n}. \tag{2.3.4}$$

Для перемасштабированных полей плоский предел $\lambda \to 0$ превращает ковариантные производные в

$$\mathcal{D}^Y_{ad}\omega\left(Y|K|x\right) \longrightarrow D^L\omega + e^{\alpha\dot\beta}y_\alpha\bar\partial_{\dot\beta}\omega_- + e^{\alpha\dot\beta}\partial_\alpha\bar y_{\dot\beta}\omega_+, \tag{2.3.5}$$

$$\mathcal{D}^Y_{tw}C\left(Y|K|x\right) \longrightarrow D^LC + ie^{\alpha\dot\beta}\partial_\alpha\bar\partial_{\dot\beta}C, \tag{2.3.6}$$

где D^L и $e^{\alpha\dot\beta}$ – лоренц-ковариантная производная и тетрада пространства Минковского. Подстановка (2.3.5)-(2.3.6) в (2.2.5)-(2.2.6) приводит к следующим линейным уравнениям для полей высших спинов в плоском пространстве–времени

$$D^L\omega\left(Y|K|x\right)+e^{\alpha\dot\beta}y_\alpha\bar\partial_{\dot\beta}\omega_-\left(Y|K|x\right)+e^{\alpha\dot\beta}\partial_\alpha\bar y_{\dot\beta}\omega_+\left(Y|K|x\right)=$$
$$=\frac{i}{4}\eta\bar H^{\dot\alpha\dot\beta}\bar\partial_{\dot\alpha}\bar\partial_{\dot\beta}C\left(0,\bar y|K|x\right)k++\frac{i}{4}\bar\eta H^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta C\left(y,0|K|x\right)\bar k, \qquad (2.3.7)$$
$$D^LC\left(Y|K|x\right)+ie^{\alpha\dot\beta}\partial_\alpha\bar\partial_{\dot\beta}C\left(Y|K|x\right)=0. \qquad (2.3.8)$$

Теперь нужно выразить поле C в (2.2.23) через производные фронсдаловских полей. Для этого перепишем (2.3.7) в терминах 0-форм

$$\begin{aligned} D^\beta{}_{\dot\alpha}\omega_{n,m|\beta\dot\alpha} &= -y^\beta\bar\partial_{\dot\alpha}\left(\omega_-\right)_{n-1,m+1|\beta\dot\alpha}-\partial^\beta\bar y_{\dot\alpha}\left(\omega_+\right)_{n+1,m-1|\beta\dot\alpha}+\\ &\quad+\frac{i}{2}\eta\delta_{n,0}\bar\partial_{\dot\alpha}\bar\partial_{\dot\alpha}C_{0,m+2}k, \qquad (2.3.9)\\ D_\alpha{}^{\dot\beta}\omega_{n,m|\alpha\dot\beta} &= -y_\alpha\bar\partial^{\dot\beta}\left(\omega_-\right)_{n-1,m+1|\alpha\dot\beta}-\partial_\alpha\bar y^{\dot\beta}\left(\omega_+\right)_{n+1,m-1|\alpha\dot\beta}+\\ &\quad+\frac{i}{2}\bar\eta\delta_{m,0}\partial_\alpha\partial_\alpha C_{n+2,0}\bar k. \qquad (2.3.10)\end{aligned}$$

Сворачивая (2.3.9) с $\bar y^{\dot\alpha}\bar y^{\dot\alpha}$, а (2.3.10) с $y^\alpha y^\alpha$, получаем

$$\bar y^{\dot\alpha}D_{\alpha\dot\alpha}\partial^\alpha\phi_{n,m} = n\cdot m\left(\phi_-\right)_{n-1,m+1}-\frac{i}{2}\eta\delta_{n,1}m\left(m+1\right)C_{0,m+1}k, \qquad (2.3.11)$$
$$y^\alpha D_{\alpha\dot\alpha}\bar\partial^{\dot\alpha}\phi_{n,m} = n\cdot m\left(\phi_+\right)_{n+1,m-1}-\frac{i}{2}\bar\eta\delta_{m,1}n\left(n+1\right)C_{n+1,0}\bar k. \qquad (2.3.12)$$

Отсюда находим

$$C_{2s,0} = \frac{2i\eta}{s\cdot(2s)!}\left(y^\alpha D_{\alpha\dot\alpha}\bar\partial^{\dot\alpha}\right)^s\phi_{s,s}\bar k, \qquad (2.3.13)$$
$$C_{0,2s} = \frac{2i\bar\eta}{s\cdot(2s)!}\left(\bar y^{\dot\alpha}D_{\alpha\dot\alpha}\partial^\alpha\right)^s\phi_{s,s}k. \qquad (2.3.14)$$

Тогда (2.3.8) дает

$$C_{2s+d,d} = \frac{2\eta\cdot i^{d+1}}{s\cdot(2s+d)!d!}\left(y^\beta D_{\beta\dot\beta}\bar y^{\dot\beta}\right)^d\left(y^\alpha D_{\alpha\dot\alpha}\bar\partial^{\dot\alpha}\right)^s\phi_{s,s}\bar k, \qquad (2.3.15)$$
$$C_{d,2s+d} = \frac{2\bar\eta\cdot i^{d+1}}{s\cdot(2s+d)!d!}\left(y^\beta D_{\beta\dot\beta}\bar y^{\dot\beta}\right)^d\left(\bar y^{\dot\alpha}D_{\alpha\dot\alpha}\partial^\alpha\right)^s\phi_{s,s}k. \qquad (2.3.16)$$

Теперь свернем (2.2.21) с $y^\alpha y^\alpha$ (или (2.2.22) с $\bar y^{\dot\alpha}\bar y^{\dot\alpha}$) и, воспользовавшись (2.3.12) (или (2.3.11)), получим

$$\Box\phi_{s,s} + ... = -s^2\,(s-1)\,\mathcal{J}_{s,s} + ..., \tag{2.3.17}$$

где $\Box = \frac{1}{2}D_{\alpha\dot{\alpha}}D^{\alpha\dot{\alpha}}$, многоточие слева обозначает все остальные слагаемые фронсдаловского кинетического оператора помимо даламбертиана, а многоточие справа обозначает все другие источники (из калибровочно-зависимого сектора), генерируемые $Q\,(C,\omega)$ и $\Gamma_{s<s_1+s_2}\,(J)$ в (2.2.17).

Рассмотрим ток (2.2.23). Мы хотим выделить член, описывающий $s-s_1-s_2$ вершину. Простой подсчет показывает, что в (2.2.23) представлены два типа членов: либо спарены две сонаправленные спиральности (C_+C_+ or C_-C_-), тогда член содержит $(s+s_1+s_2)$ производных, либо две противоположно направленные (C_+C_- or C_-C_+), тогда общее число производных равно $(s+|s_1-s_2|)$ (напомним, что рассматривается сектор $s \geq s_1+s_2$). Это соответствует двум возможным типам четырехмерных кубических вершин высших спинов, обнаруженным в [202]. Все вместе это означает, что в (2.2.23) нет добавок (improvement) со старшими производными к вершинам из [202], которые могли бы, к примеру, повлиять на локальность вершин в старших порядках. (Заметим, что добавки с низшими производными к $(s+s_1+s_2)$-члену не дают вклада в $(s+|s_1-s_2|)$-член из-за различной структуры спиральностей). Проанализируем каждый тип вершин по отдельности.

2.3.1. Вершины с максимальным число производных

Рассмотрим часть (2.2.23) с $(s+s_1+s_2)$ производными. Она имеет следующий вид

$$\begin{aligned}
&\mathcal{J}^H_{s-s_1-s_2} = i\frac{(s-2)!}{8\,(2s)!}\sum_{k,m=0}^{s}\frac{(m+k)!\,(2s-m-k)!}{(s-k)!k!\,(s-m)!m!}\left(y^\alpha\partial^1_\alpha\right)^m\left(-y^\beta\partial^2_\beta\right)^{s-m}\left(\bar{y}^{\dot{\alpha}}\bar{\partial}^1_{\dot{\alpha}}\right)^{s-k}\left(-\bar{y}^{\dot{\beta}}\bar{\partial}^2_{\dot{\beta}}\right)^k\\
&\sum_{n=0}^{s}\frac{i^n}{(s+n-1)!}\left(\left(\partial^1_\gamma\partial^{2\gamma}\right)^n+\left(\bar{\partial}^1_{\dot{\gamma}}\bar{\partial}^{2\dot{\gamma}}\right)^n\right)\sum_{d_1,d_2=0}^{\infty}\Big\{C_{2s_1+d_1,d_1}\left(Y^1|K|x\right)C_{2s_2+d_2,d_2}\left(Y^2|K|x\right)+\\
&+C_{2s_2+d_2,d_2}\left(Y^1|K|x\right)C_{2s_1+d_1,d_1}\left(Y^2|K|x\right)+C_{d_1,2s_1+d_1}\left(Y^1|K|x\right)C_{d_2,2s_2+d_2}\left(Y^2|K|x\right)+\\
&+C_{d_2,2s_2+d_2}\left(Y^1|K|x\right)C_{d_1,2s_1+d_1}\left(Y^2|K|x\right)\Big\}\Big|_{Y^1=Y^2=0}.
\end{aligned} \tag{2.3.18}$$

То, что спины s_1, s_2 конституентных полей фиксированы, а все Y^1 и Y^2 в конце концов кладутся равными нулю, сводит пятикратную сумму в (2.3.18) к однократной:

$$\mathcal{J}^H_{s-s_1-s_2} = i\frac{(s-2)!}{8\,(2s)!}\sum_{d=0}^{s}\frac{(s+s_1-s_2)!\,(s-s_1+s_2)!}{(s-d)!d!\,(-s_1+s_2+d)!\,(s+s_1-s_2-d)!}$$
$$\left(y^\alpha\partial^1_\alpha\right)^{s+s_1-s_2-d}\left(y^\beta\partial^2_\beta\right)^{-s_1+s_2+d}\left(\bar{y}^{\dot\alpha}\bar\partial^1_{\dot\alpha}\right)^{s-d}\left(\bar{y}^{\dot\beta}\bar\partial^2_{\dot\beta}\right)^{d}\frac{i^{s_1+s_2}\left(-1\right)^{s+d}\left(1+(-1)^{s+s_1+s_2}\right)}{(s+s_1+s_2-1)!}$$
$$\left(\left(\partial^1_\gamma\partial^{2\gamma}\right)^{s_1+s_2}C_{2s_1+s-d,s-d}\left(Y^1|x\right)C_{2s_2+d,d}\left(Y^2|x\right)+h.c.\right)\Big|_{Y^1=Y^2=0} \qquad (2.3.19)$$

(здесь мы разрешили K-зависимость с помощью (2.1.12)), что после вычисления твисторных производных во второй строчке дает

$$\mathcal{J}^H_{s-s_1-s_2} = \frac{(s-2)!\,(s+s_1-s_2)!\,(s-s_1+s_2)!}{8\,(2s)!\,(s+s_1+s_2-1)!}i^{s_1+s_2+1}\left(1+(-1)^{s+s_1+s_2}\right)\cdot$$
$$\cdot\sum_{d=0}^{s}\left(-1\right)^{s+d}\Bigg\{\left(\partial_\gamma\right)^{s_1+s_2}C_{2s_1+s-d,s-d}\left(Y|x\right)\cdot\left(\partial^\gamma\right)^{s_1+s_2}C_{2s_2+d,d}\left(Y|x\right)+$$
$$+\left(\bar\partial_{\dot\gamma}\right)^{s_1+s_2}C_{2s_1+s-d,s-d}\left(Y|x\right)\cdot\left(\bar\partial^{\dot\gamma}\right)^{s_1+s_2}C_{2s_2+d,d}\left(Y|x\right)\Bigg\}. \qquad (2.3.20)$$

Заметим, что из-за множителя $\left(1+(-1)^{s+s_1+s_2}\right)$ (2.3.20) зануляется, если общая сумма спинов нечетная. Фактически, это происходит потому, что у нас имеется только одно поле каждого спина, наподобие того, как в электродинамике для наличия ненулевого электрического тока необходимы две копии полей материи. Если же мы рассматривали бы матричнозначные поля высших спинов, то вклад был бы ненулевым и для нечетной суммы.

Рассмотрим спинорное выражение в (2.3.20). Наша цель – привести его к форме, которая могла бы легко быть переписана в терминах лоренцевых тензоров.

Для начала воспользуемся (2.3.15) чтобы переписать его как

$$\left(\partial_\gamma\right)^{s_1+s_2}C_{2s_1+s-d,s-d}\left(Y|x\right)\cdot\left(\partial^\gamma\right)^{s_1+s_2}C_{2s_2+d,d}\left(Y|x\right)=$$
$$=-\frac{4\eta^2 i^s}{(2s_1+s-d)!\,(2s_2+d)!\,(s-d)!d!\cdot s_1\cdot s_2}$$
$$\left\{\left(\partial_\gamma\right)^{s_1+s_2}\left(y^\alpha D_{\alpha\dot\alpha}\bar{y}^{\dot\alpha}\right)^{s-d}\left(y^\alpha D_{\alpha\dot\alpha}\bar\partial^{\dot\alpha}\right)^{s_1}\phi_{s_1,s_1}\right\}\left\{\left(\partial^\gamma\right)^{s_1+s_2}\left(y^\beta D_{\beta\dot\beta}\bar{y}^{\dot\beta}\right)^{d}\left(y^\beta D_{\beta\dot\beta}\bar\partial^{\dot\beta}\right)^{s_2}\phi_{s_2,s_2}\right\}. \qquad (2.3.21)$$

Вычисление спинорных производных дает

$$
\begin{aligned}
&\left\{(\partial_\gamma)^{s_1+s_2}\left(y^\alpha D_{\alpha\dot\alpha}\bar y^{\dot\alpha}\right)^{s-d}\left(y^\alpha D_{\alpha\dot\alpha}\bar\partial^{\dot\alpha}\right)^{s_1}\phi_{s_1,s_1}\right\}\left\{(\partial^\gamma)^{s_1+s_2}\left(y^\beta D_{\beta\dot\beta}\bar y^{\dot\beta}\right)^{d}\left(y^\beta D_{\beta\dot\beta}\bar\partial^{\dot\beta}\right)^{s_2}\phi_{s_2,s_2}\right\}= \\
&=\left\{({\delta_\gamma}^{\mu})^{s_1+s_2}(y^\mu)^{s+s_1-s_2-d}\left(\bar y^{\dot\mu}\right)^{s-d}(D_{\mu\dot\mu})^{s-d}\left(D_{\mu\dot\beta}\right)^{s_1}{\phi_{\mu(s_1),}}^{\dot\beta(s_1)}\right\} \\
&\left\{(\epsilon^{\gamma\nu})^{s_1+s_2}(y^\nu)^{-s_1+s_2+d}\left(\bar y^{\dot\nu}\right)^{d}(D_{\nu\dot\nu})^{d}(D_{\nu\dot\alpha})^{s_2}{\phi_{\nu(s_2),}}^{\dot\alpha(s_2)}\right\}\cdot\frac{s_1!s_2!\,(s+2s_1-d)!\,(2s_2+d)!}{(s+s_1-s_2-d)!\,(-s_1+s_2+d)!}
\end{aligned}
\tag{2.3.22}
$$

Из-за симметричности по μ (и по ν), нижние (и верхние) индексы γ после применения $({\delta_\gamma}^{\mu})^{s_1+s_2}$ (и $(\epsilon^{\gamma\nu})^{s_1+s_2}$) повиснут симметричным образом на полях и производных. Но мы собираемся упорядочить гаммы некоторым специальным образом, для чего выведем несколько полезных соотношений. Первое из них (мы выписываем только релевантные индексы)

$$
D_{\alpha\dot\gamma}{\phi_\beta}^{\dot\gamma}=D_{\beta\dot\gamma}{\phi_\alpha}^{\dot\gamma}+\epsilon_{\alpha\beta}D_{\gamma\dot\gamma}\phi^{\gamma\dot\gamma}\approx D_{\beta\dot\gamma}{\phi_\alpha}^{\dot\gamma},
\tag{2.3.23}
$$

где символ приближенного равенства означает, что мы отбросили дивергенцию поля, так как считаем поля поперечными. Второе соотношение

$$
D_{\alpha\dot\alpha}D_{\beta\dot\beta}\phi\approx D_{\alpha\dot\beta}D_{\beta\dot\alpha}\phi
\tag{2.3.24}
$$

выполняется по модулю даламбертианов (которые могут быть изгнаны переопределением полей) и слагаемых с $D_{\alpha\dot\beta}{D_\alpha}^{\dot\beta}$ ($D_{\beta\dot\alpha}{D^\beta}_{\dot\alpha}$), которые равны нулю в плоском пространстве. Используя эти два соотношения, можно получить третье

$$
D_{\gamma\dot\gamma}D_{\alpha\dot\beta}{\phi_\beta}^{\dot\beta}\approx D_{\beta\dot\gamma}D_{\alpha\dot\beta}{\phi_\gamma}^{\dot\beta}.
\tag{2.3.25}
$$

Все вместе они означают, что мы можем располагать гаммы на любых местах вместо нижних μ (ν) индексов в (2.3.22), поскольку все комбинации эквивалентны. Поэтому, предполагая для определенности, что $s_1\geq s_2$, перепишем (2.3.22) как

$$
\begin{aligned}
&\frac{s_1!s_2!\,(s+2s_1-d)!\,(2s_2+d)!}{(s+s_1-s_2-d)!\,(-s_1+s_2+d)!}(y^\mu)^s\left(\bar y^{\dot\mu}\right)^s\left\{(D_{\mu\dot\mu})^{s-d}\left(D_{\mu\dot\beta}\right)^{s_1-s_2}\left(D_{\gamma\dot\beta}\right)^{s_2}{\phi_{\gamma(s_1),}}^{\dot\beta(s_1)}\right\} \\
&\left\{(D_{\mu\dot\mu})^{d-s_1+s_2}({D^\gamma}_{\dot\mu})^{s_1-s_2}({D^\gamma}_{\dot\alpha})^{s_2}\phi^{\gamma(s_2),\dot\alpha(s_2)}\right\},
\end{aligned}
\tag{2.3.26}
$$

и, используя (2.3.23), далее как

$$\frac{s_1!s_2!\,(s+2s_1-d)!\,(2s_2+d)!}{(s+s_1-s_2-d)!\,(-s_1+s_2+d)!}\left(y^{\mu}\right)^s\left(\bar{y}^{\dot{\mu}}\right)^s\left\{\left(D_{\mu\dot{\mu}}\right)^{s-d}\left(D_{\mu\dot{\beta}}\right)^{s_1-s_2}\left(D_{\delta\dot{\beta}}\right)^{s_2}\phi_{\gamma(s_1),}{}^{\dot{\beta}(s_1)}\right\}$$
$$\left\{\left(D_{\mu\dot{\mu}}\right)^{d-s_1+s_2}\left(D^{\gamma}{}_{\dot{\mu}}\right)^{s_1-s_2}\left(D^{\gamma}{}_{\dot{\alpha}}\right)^{s_2}\phi^{\delta(s_2),\dot{\alpha}(s_2)}\right\}. \qquad (2.3.27)$$

Теперь мы хотим заменить все нижние $\dot{\beta}$ из $\left(D_{\delta\dot{\beta}}\right)^{s_2}$ в первой строчке на нижние $\dot{\alpha}$, с тем чтобы эти производные были полностью свернуты с полем спина s_2. Мы можем осуществить это с помощью $D_{\mu\dot{\beta}}$ из первой строчки, т.к.

$$\begin{aligned}&D_{\mu\dot{\beta}}D_{\delta\dot{\beta}}\phi^{\gamma\dot{\beta}\dot{\beta}}\cdot D_{\gamma\dot{\alpha}}\phi^{\delta\dot{\alpha}}=D_{\mu\dot{\beta}}D_{\delta\dot{\alpha}}\phi^{\gamma\dot{\beta}\dot{\beta}}\cdot D_{\gamma\dot{\beta}}\phi^{\delta\dot{\alpha}}+D_{\mu\dot{\beta}}D_{\delta\dot{\gamma}}\phi^{\gamma\dot{\beta}}{}_{\dot{\alpha}}\cdot D_{\gamma}{}^{\dot{\gamma}}\phi^{\delta\dot{\alpha}}\approx\\&\approx D_{\mu\dot{\beta}}D_{\delta\dot{\alpha}}\phi^{\gamma\dot{\beta}\dot{\beta}}\cdot D_{\gamma\dot{\beta}}\phi^{\delta\dot{\alpha}}+D_{\mu\dot{\beta}}D_{\gamma\dot{\gamma}}\phi^{\gamma\dot{\beta}}{}_{\dot{\alpha}}\cdot D_{\delta}{}^{\dot{\gamma}}\phi^{\delta\dot{\alpha}}\approx D_{\mu\dot{\beta}}D_{\delta\dot{\alpha}}\phi^{\gamma\dot{\beta}\dot{\beta}}\cdot D_{\gamma\dot{\beta}}\phi^{\delta\dot{\alpha}},\end{aligned} \qquad (2.3.28)$$

где на предпоследнем шаге мы использовали, что

$$\begin{aligned}&D_{\alpha\dot{\gamma}}\phi\cdot D_{\beta}{}^{\dot{\gamma}}\phi=D_{\beta\dot{\gamma}}\phi\cdot D_{\alpha}{}^{\dot{\gamma}}\phi+\epsilon_{\alpha\beta}D_{\gamma\dot{\gamma}}\phi\cdot D^{\gamma\dot{\gamma}}\phi=\\&=D_{\beta\dot{\gamma}}\phi\cdot D_{\alpha}{}^{\dot{\gamma}}\phi+\epsilon_{\alpha\beta}\Box\left(\phi\cdot\phi\right)-\epsilon_{\alpha\beta}\left(\Box\phi\cdot\phi+\phi\cdot\Box\phi\right)\approx\\&\approx D_{\beta\dot{\gamma}}\phi\cdot D_{\alpha}{}^{\dot{\gamma}}\phi,\end{aligned} \qquad (2.3.29)$$

а на последнем шаге – что

$$D_{\alpha\dot{\alpha}}D_{\beta\dot{\beta}}\phi^{\alpha\dot{\beta}}\approx D_{\beta\dot{\alpha}}D_{\alpha\dot{\beta}}\phi^{\alpha\dot{\beta}}\approx 0. \qquad (2.3.30)$$

Таким образом, (2.3.27) принимает вид

$$\frac{s_1!s_2!\,(s+2s_1-d)!\,(2s_2+d)!}{(s+s_1-s_2-d)!\,(-s_1+s_2+d)!}\left(y^{\mu}\right)^s\left(\bar{y}^{\dot{\mu}}\right)^s\left\{\left(D_{\mu\dot{\mu}}\right)^{s-d}\left(D_{\mu\dot{\beta}}\right)^{s_1-s_2}\left(D_{\delta\dot{\alpha}}\right)^{s_2}\phi_{\gamma(s_1),}{}^{\dot{\beta}(s_1)}\right\}$$
$$\left\{\left(D_{\mu\dot{\mu}}\right)^{d-s_1+s_2}\left(D^{\gamma}{}_{\dot{\mu}}\right)^{s_1-s_2}\left(D^{\gamma}{}_{\dot{\beta}}\right)^{s_2}\phi^{\delta(s_2),\dot{\alpha}(s_2)}\right\}. \qquad (2.3.31)$$

Теперь мы хотим поменять местами $\dot{\beta}$ из $\left(D_{\mu\dot{\beta}}\right)^{s_1-s_2}$ в первой строчке с $\dot{\mu}$ из $\left(D^{\gamma}{}_{\dot{\mu}}\right)^{s_1-s_2}$ во второй. Это может быть сделано в силу соотношения, аналогичного (2.3.28):

$$\begin{aligned}&D_{\mu\dot{\beta}}D_{\mu\dot{\beta}}\phi^{\gamma\dot{\beta}\dot{\beta}}\cdot D_{\gamma\dot{\mu}}\phi=D_{\mu\dot{\beta}}D_{\mu\dot{\mu}}\phi^{\gamma\dot{\beta}\dot{\beta}}\cdot D_{\gamma\dot{\beta}}\phi+D_{\mu\dot{\beta}}D_{\mu\dot{\alpha}}\phi^{\gamma\dot{\beta}}{}_{\dot{\mu}}\cdot D_{\gamma}{}^{\dot{\alpha}}\phi\approx\\&\approx D_{\mu\dot{\beta}}D_{\mu\dot{\mu}}\phi^{\gamma\dot{\beta}\dot{\beta}}\cdot D_{\gamma\dot{\beta}}\phi+D_{\mu\dot{\beta}}D_{\gamma\dot{\alpha}}\phi^{\gamma\dot{\beta}}{}_{\dot{\mu}}\cdot D_{\mu}{}^{\dot{\alpha}}\phi\approx D_{\mu\dot{\beta}}D_{\mu\dot{\mu}}\phi^{\gamma\dot{\beta}\dot{\beta}}\cdot D_{\gamma\dot{\beta}}\phi.\end{aligned} \qquad (2.3.32)$$

Оно позволяет произвести все необходимые замены в $\left(D_{\mu\dot{\beta}}\right)^{s_1-s_2}$, за исключением последней, поскольку для применения (2.3.32) необходимы по крайней мере две $D_{\mu\dot{\beta}}$. Таким образом, мы приходим к

$$\frac{s_1!s_2!\,(s+2s_1-d)!\,(2s_2+d)!}{(s+s_1-s_2-d)!\,(-s_1+s_2+d)!}\left(y^{\mu}\right)^s\left(\bar{y}^{\dot{\mu}}\right)^s\left\{D_{\mu\dot{\beta}}\left(D_{\mu\dot{\mu}}\right)^{s+s_1-s_2-d-1}\left(D_{\alpha\dot{\alpha}}\right)^{s_2}\phi_{\beta(s_1),}{}^{\dot{\beta}(s_1)}\right\}$$
$$\left\{D^{\beta}{}_{\dot{\mu}}\left(D_{\mu\dot{\mu}}\right)^{-s_1+s_2+d}\left(D^{\beta}{}_{\dot{\beta}}\right)^{s_1-1}\phi^{\alpha(s_2),\dot{\alpha}(s_2)}\right\}, \tag{2.3.33}$$

а последняя замена порождает следующее выражение

$$\frac{s_1!s_2!\,(s+2s_1-d)!\,(2s_2+d)!}{(s+s_1-s_2-d)!\,(-s_1+s_2+d)!}\left(y^{\mu}\right)^s\left(\bar{y}^{\dot{\mu}}\right)^s(-1)^{s_1}$$
$$\Bigg[\left(D_{\mu\dot{\mu}}\right)^{s+s_1-s_2-d}\left(D_{\alpha\dot{\alpha}}\right)^{s_2}\phi^{\beta(s_1),\dot{\beta}(s_1)}\cdot\left(D_{\mu\dot{\mu}}\right)^{-s_1+s_2+d}\left(D_{\beta\dot{\beta}}\right)^{s_1}\phi^{\alpha(s_2),\dot{\alpha}(s_2)}-$$
$$-\left(D_{\mu\dot{\mu}}\right)^{s+s_1-s_2-d-1}\left(D_{\alpha\dot{\alpha}}\right)^{s_2}D_{\beta\dot{\mu}}\phi^{\beta(s_1),\dot{\beta}(s_1)}\cdot D_{\mu\dot{\beta}}\left(D_{\mu\dot{\mu}}\right)^{-s_1+s_2+d}\left(D_{\beta\dot{\beta}}\right)^{s_1-1}\phi^{\alpha(s_2),\dot{\alpha}(s_2)}\Bigg]. \tag{2.3.34}$$

Теперь, подставляя (2.3.34) во вторую строчку (2.3.21), затем (2.3.21) в (2.3.20), прибавляя сопряженное выражение и упрощая, получаем

$$\mathcal{J}^H_{s-s_1-s_2}=-i\frac{(s-2)!}{4\,(2s)!}\sum_{d=0}^{s}\begin{pmatrix} s+s_1-s_2 \\ d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} s-s_1+s_2 \\ s-d\end{pmatrix}(s_1-1)!\,(s_2-1)!$$
$$\frac{i^{s+s_1+s_2}\,(-1)^{s+d+s_1}\left(1+(-1)^{s+s_1+s_2}\right)}{(s+s_1+s_2-1)!}\left(y^{\mu}\right)^s\left(\bar{y}^{\dot{\mu}}\right)^s$$
$$\Bigg\{\left(\eta^2+\bar{\eta}^2\right)\left(D_{\mu\dot{\mu}}\right)^{s+s_1-s_2-d}\left(D_{\alpha\dot{\alpha}}\right)^{s_2}\phi^{\beta(s_1),\dot{\beta}(s_1)}\cdot\left(D_{\mu\dot{\mu}}\right)^{-s_1+s_2+d}\left(D_{\beta\dot{\beta}}\right)^{s_1}\phi^{\alpha(s_2),\dot{\alpha}(s_2)}+$$
$$+\left(\eta^2-\bar{\eta}^2\right)\Bigg[D_{\mu\dot{\beta}}\left(D_{\mu\dot{\mu}}\right)^{s+s_1-s_2-d-1}\left(D_{\alpha\dot{\alpha}}\right)^{s_2}\phi^{\beta(s_1),\dot{\beta}(s_1)}\cdot D_{\beta\dot{\mu}}\left(D_{\mu\dot{\mu}}\right)^{-s_1+s_2+d}\left(D_{\beta\dot{\beta}}\right)^{s_1-1}\phi^{\alpha(s_2),\dot{\alpha}(s_2)}-$$
$$-D_{\beta\dot{\mu}}\left(D_{\mu\dot{\mu}}\right)^{s+s_1-s_2-d-1}\left(D_{\alpha\dot{\alpha}}\right)^{s_2}\phi^{\beta(s_1),\dot{\beta}(s_1)}\cdot D_{\mu\dot{\beta}}\left(D_{\mu\dot{\mu}}\right)^{-s_1+s_2+d}\left(D_{\beta\dot{\beta}}\right)^{s_1-1}\phi^{\alpha(s_2),\dot{\alpha}(s_2)}\Bigg]\Bigg\}. \tag{2.3.35}$$

Далее, используя тождество Вандермонда

$$\sum_{n=0}^{c}\begin{pmatrix} a \\ n\end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ c-n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+b \\ c\end{pmatrix} \tag{2.3.36}$$

и интегрируя по частям, можно явно выполнить суммирование по d, упрощая (2.3.35) до вида

$$\mathcal{J}^{H}_{s-s_1-s_2} = -\frac{i^{s+s_1+s_2+1}\,(s-2)!\,(s_1-1)!\,(s_2-1)!\,(-1)^{s_1}\left(1+(-1)^{s+s_1+s_2}\right)}{4\cdot s!s!\,(s+s_1+s_2-1)!}\,(y^{\mu})^{s}\left(\bar{y}^{\dot{\mu}}\right)^{s}$$
$$\left\{\left(\eta^2+\bar{\eta}^2\right)(D_{\mu\dot{\mu}})^{s}\,(D_{\alpha\dot{\alpha}})^{s_2}\,\phi^{\beta(s_1),\dot{\beta}(s_1)}\cdot\left(D_{\beta\dot{\beta}}\right)^{s_1}\phi^{\alpha(s_2),\dot{\alpha}(s_2)}+\right.$$
$$+\left(\eta^2-\bar{\eta}^2\right)\left[D_{\mu\dot{\beta}}\,(D_{\mu\dot{\mu}})^{s-1}\,(D_{\alpha\dot{\alpha}})^{s_2}\,\phi^{\beta(s_1),\dot{\beta}(s_1)}\cdot D_{\beta\dot{\mu}}\left(D_{\beta\dot{\beta}}\right)^{s_1-1}\phi^{\alpha(s_2),\dot{\alpha}(s_2)}-\right.$$
$$\left.\left.-D_{\beta\dot{\mu}}\,(D_{\mu\dot{\mu}})^{s-1}\,(D_{\alpha\dot{\alpha}})^{s_2}\,\phi^{\beta(s_1),\dot{\beta}(s_1)}\cdot D_{\mu\dot{\beta}}\left(D_{\beta\dot{\beta}}\right)^{s_1-1}\phi^{\alpha(s_2),\dot{\alpha}(s_2)}\right]\right\}. \tag{2.3.37}$$

Этим мы достигли своей цели, так как данное выражение может быть легко переведено в лоренцевские тензоры, как будет показано ниже. Теперь необходимо обработать подобным образом другую часть тока (2.2.23), которая содержит $(s+|s_1-s_2|)$ производных.

2.3.2. Вершины с минимальным числом производных

Анализ части (2.2.23) с минимальным числом производных, которая имеет вид

$$\mathcal{J}^{L}_{s-s_1-s_2} = i\frac{(s-2)!}{8\,(2s)!}\sum_{k,m=0}^{s}\frac{(m+k)!\,(2s-m-k)!}{(s-k)!k!\,(s-m)!m!}$$
$$\left(y^{\alpha}\partial^{1}_{\alpha}\right)^{m}\left(-y^{\beta}\partial^{2}_{\beta}\right)^{s-m}\left(\bar{y}^{\dot{\alpha}}\bar{\partial}^{1}_{\dot{\alpha}}\right)^{s-k}\left(-\bar{y}^{\dot{\beta}}\bar{\partial}^{2}_{\dot{\beta}}\right)^{k}\sum_{n=0}^{s}\frac{i^{n}}{(s+n-1)!}\left(\left(\partial^{1}_{\gamma}\partial^{2\gamma}\right)^{n}+\left(\bar{\partial}^{1}_{\dot{\gamma}}\bar{\partial}^{2\dot{\gamma}}\right)^{n}\right)$$
$$\sum_{d_1,d_2=0}^{\infty}\left\{C_{2s_1+d_1,d_1}\left(Y^1|K|x\right)C_{d_2,2s_2+d_2}\left(Y^2|K|x\right)+\right.$$
$$+C_{2s_2+d_2,d_2}\left(Y^1|K|x\right)C_{d_1,2s_1+d_1}\left(Y^2|K|x\right)+C_{d_1,2s_1+d_1}\left(Y^1|K|x\right)C_{2s_2+d_2,d_2}\left(Y^2|K|x\right)+$$
$$\left.+C_{d_2,2s_2+d_2}\left(Y^1|K|x\right)C_{2s_1+d_1,d_1}\left(Y^2|K|x\right)\right\}\Big|_{Y^1=Y^2=0}, \tag{2.3.38}$$

практически повторяет анализ части с максимальным числом производных.

Сначала нужно вычислить твисторные производные из первой строчки (2.3.38) и упростить выражение до вида

$$\begin{aligned}\mathcal{J}^L_{s-s_1-s_2} \;=\; & \frac{(s-2)!\,(s+s_1+s_2)!\,(s-s_1-s_2)!}{8\cdot(2s)!\,(s+s_1-s_2-1)!} i^{s_1+s_2+1}\left(1+(-1)^{s+s_1+s_2}\right)\cdot\\ & \sum_{d=0}^{s}(-1)^{s+d+s_1}\Big\{\left(\partial_\gamma\right)^{s_1-s_2}C_{2s_1+d,d}\left(Y|x\right)\cdot\left(\partial^\gamma\right)^{s_1-s_2}C_{s-2s_2-d,s-d}\left(Y|x\right)+\\ & +\left(\bar\partial_{\dot\gamma}\right)^{s_1-s_2}C_{d,2s_1+d}\left(Y|x\right)\cdot\left(\bar\partial^{\dot\gamma}\right)^{s_1-s_2}C_{s-d,s-2s_2-d}\left(Y|x\right)\Big\}.\end{aligned} \tag{2.3.39}$$

Затем, воспользовавшись (2.3.15), переписать первый член в скобках в (2.3.39) как

$$\begin{aligned}&\left(\partial_\gamma\right)^{s_1-s_2}C_{2s_1+d,d}\left(Y|x\right)\cdot\left(\partial^\gamma\right)^{s_1-s_2}C_{s-2s_2-d,s-d}\left(Y|x\right)=\\ &=-\frac{4i^s\left(-1\right)^{s_2}\left(s_1-1\right)!\left(s_2-1\right)!}{\left(s_1+s_2+d\right)!\left(s-s_1-s_2-d\right)!\left(s-d\right)!d!}\cdot\\ &\cdot\left\{\left(\delta_\gamma{}^\mu\right)^{s_1-s_2}\left(y^\mu\right)^{s_1+s_2+d}\left(\bar y^{\dot\mu}\right)^d\left(D_{\mu\dot\mu}\right)^d\left(D_{\mu\dot\alpha}\right)^{s_1}\phi_{\mu(s_1),}{}^{\dot\alpha(s_1)}\right\}\cdot\\ &\cdot\left\{\left(\epsilon^{\gamma\nu}\right)^{s_1-s_2}\left(y^\nu\right)^{s-s_1-s_2-d}\left(\bar y^{\dot\nu}\right)^{s-d}\left(D_{\nu\dot\nu}\right)^{s-2s_2-d}\left(D_{\alpha\dot\nu}\right)^{s_2}\phi^{\alpha(s_2)}{}_{\dot\nu(s_2)}\right\}.\end{aligned} \tag{2.3.40}$$

Как и в Разделе 2.3.1, с помощью соотношений (2.3.23)-(2.3.25) можно навесить все гаммы во второй строчке (2.3.40) на поле спина s_1

$$\begin{aligned}&\left(\partial_\gamma\right)^{s_1-s_2}C_{2s_1+d,d}\left(Y|x\right)\cdot\left(\partial^\gamma\right)^{s_1-s_2}C_{s-2s_2-d,s-d}\left(Y|x\right)=\\ &=-\frac{4i^s\left(-1\right)^{s_1}\left(s_1-1\right)!\left(s_2-1\right)!}{\left(s_1+s_2+d\right)!\left(s-s_1-s_2-d\right)!\left(s-d\right)!d!}\left(y^\mu\right)^s\left(\bar y^{\dot\mu}\right)^s\cdot\\ &\cdot\left\{\left(D_{\mu\dot\mu}\right)^d\left(D_{\mu\dot\beta}\right)^{s_1}\phi_{\mu(s_2)}{}^{\gamma(s_1-s_2),\dot\beta(s_1)}\right\}\left\{\left(D_{\gamma\dot\mu}\right)^{s_1-s_2}\left(D_{\mu\dot\mu}\right)^{s-s_1-s_2-d}\left(D_{\alpha\dot\mu}\right)^{s_2}\phi^{\alpha(s_2),}{}_{\dot\mu(s_2)}\right\},\end{aligned} \tag{2.3.41}$$

и поменять местами (s_1-s_2) штук $\dot\beta$ из $D_{\mu\dot\beta}$ в первой скобке с $\dot\mu$ из $D_{\gamma\dot\mu}$ во второй

$$\begin{aligned}&\left\{\left(D_{\mu\dot\mu}\right)^d\left(D_{\mu\dot\beta}\right)^{s_1}\phi_{\mu(s_2)}{}^{\gamma(s_1-s_2),\dot\beta(s_1)}\right\}\left\{\left(D_{\gamma\dot\mu}\right)^{s_1-s_2}\left(D_{\mu\dot\mu}\right)^{s-s_1-s_2-d}\left(D_{\alpha\dot\mu}\right)^{s_2}\phi^{\alpha(s_2),}{}_{\dot\mu(s_2)}\right\}=\\ &=\left\{\left(D_{\mu\dot\mu}\right)^{s_1-s_2+d}\left(D_{\mu\dot\beta}\right)^{s_2}\phi_{\mu(s_2)}{}^{\gamma(s_1-s_2),\dot\beta(s_1)}\right\}\left\{\left(D_{\gamma\dot\beta}\right)^{s_1-s_2}\left(D_{\mu\dot\mu}\right)^{s-s_1-s_2-d}\left(D_{\alpha\dot\mu}\right)^{s_2}\phi^{\alpha(s_2),}{}_{\dot\mu(s_2)}\right\}.\end{aligned} \tag{2.3.42}$$

Подставляя все это в (2.3.39), добавляя сопряженный член и учитывая, что

$$D_{\mu\dot\beta}\phi_\mu{}^{\dot\beta}\cdot D_{\alpha\dot\mu}\phi^\alpha{}_{\dot\mu}\approx D_{\mu\dot\mu}\phi^{\alpha\dot\beta}\cdot D_{\alpha\dot\beta}\phi_{\mu\dot\mu}-D_{\mu\dot\mu}\phi^{\alpha\dot\beta}\cdot D_{\mu\dot\mu}\phi_{\alpha\dot\beta}-D_{\beta\dot\mu}\phi^\beta{}_{\dot\mu}\cdot D_{\mu\dot\alpha}\phi_\mu{}^{\dot\alpha}, \tag{2.3.43}$$

приходим к следующему выражению для части тока с минимальным числом производных

$$\mathcal{J}^L_{s-s_1-s_2} = -i\frac{(s-2)!}{(2s)!}\frac{i^{s+s_1+s_2}\left(1+(-1)^{s+s_1+s_2}\right)}{(s+s_1-s_2-1)!}(s_1-1)!\,(s_2-1)!$$
$$\sum_{d=0}^{s}(-1)^d\begin{pmatrix} s+s_1+s_2\\ s-d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} s-s_1-s_2\\ d\end{pmatrix}(y^\mu)^s\left(\bar{y}^{\dot\mu}\right)^s(D_{\mu\dot\mu})^d\,\phi^{\alpha(s_1),\dot\alpha(s_1)}$$
$$\cdot\left\{\sum_{n=0}^{s_2}(-1)^n\begin{pmatrix} s_2\\ n\end{pmatrix}(D_{\mu\dot\mu})^{s-d-n}(D_{\alpha\dot\alpha})^{s_1-s_2+n}\,\phi_{\alpha(s_2-n)\mu(n),\dot\alpha(s_2-n)\dot\mu(n)}\right\}. \tag{2.3.44}$$

Как и в Разделе 2.3.1, используя тождество Вандермонда (2.3.36) и интегрируя по частям, можно вычислить сумму по d, что дает

$$\mathcal{J}^L_{s-s_1-s_2} = -\frac{(s-2)!\,(s_1-1)!\,(s_2-1)!}{s!s!\,(s+s_1-s_2-1)!}i^{s+s_1+s_2+1}\left(1+(-1)^{s+s_1+s_2}\right)\cdot$$
$$\cdot\,(y^\mu)^s\left(\bar{y}^{\dot\mu}\right)^s\phi^{\alpha(s_1),\dot\alpha(s_1)}\left\{\sum_{n=0}^{s_2}(-1)^n\begin{pmatrix} s_2\\ n\end{pmatrix}(D_{\mu\dot\mu})^{s-n}(D_{\alpha\dot\alpha})^{s_1-s_2+n}\,\phi_{\alpha(s_2-n)\mu(n),\dot\alpha(s_2-n)\dot\mu(n)}\right\}. \tag{2.3.45}$$

Этим завершается анализ части тока с минимальным числом производных.

2.3.3. Квадратичные уравнения Фронсдала с токами высших спинов

Теперь мы готовы сделать последний шаг и записать вклад токов в квадратичные уравнения высших спинов на языке лоренцевых тензоров. Из (2.3.17) имеем

$$\Box\phi_{\mu(s),\dot\mu(s)}\,(y^\mu)^s\left(\bar{y}^{\dot\mu}\right)^s+\ldots = -s^2\,(s-1)\sum_{s_1+s_2\le s}\left(\mathcal{J}^H_{s-s_1-s_2}+\mathcal{J}^L_{s-s_1-s_2}\right)+\ldots, \tag{2.3.46}$$

где $\mathcal{J}^H_{s-s_1-s_2}$ и $\mathcal{J}^L_{s-s_1-s_2}$ берутся из (2.3.37) и (2.3.45), соответственно. После удаления твисторных переменных y и $\bar{y}$ тензорные индексы восстанавливаются с помощью σ-матриц, что приводит, в силу

$$\mathrm{Tr}\left\{\sigma_a\bar\sigma_b\right\} = 2\eta_{ab},\quad \left(\sigma^a\bar\sigma^b\sigma^c-\sigma^c\bar\sigma^b\sigma^a\right) = 2i\epsilon^{abcd}\sigma_d, \tag{2.3.47}$$

к следующему результату

$$\Box\phi_{a(s)}+...=\sum_{s_1+s_2\leq s}\frac{(s_1-1)!\,(s_2-1)!}{(s-1)!}\left(1+(-1)^{s+s_1+s_2}\right)i^{s+s_1+s_2+1}2^{s_1+s_2}\cdot$$
$$\cdot\Bigg[\frac{(-1)^{s_1}\left(\eta^2+\bar\eta^2\right)}{4\cdot(s+s_1+s_2-1)!}(D_a)^{s_1-s_2}(D_b)^{s_2}\phi^{c(s_1)}\cdot(D_a)^{s-s_1+s_2}(D_c)^{s_1}\phi^{b(s_2)}+$$
$$+\frac{(-1)^{s_1}i\left(\eta^2-\bar\eta^2\right)}{4\cdot(s+s_1+s_2-1)!}\epsilon_{afcg}D^f(D_a)^{s_1-s_2-1}(D_b)^{s_2}\phi^{c(s_1)}\cdot D^g(D_a)^{s-s_1+s_2}(D_c)^{s_1-1}\phi^{b(s_2)}+$$
$$+\frac{2^{-s_2}}{(s+s_1-s_2-1)!}\phi^{b(s_1)}\sum_{n=0}^{s_2}(-1)^{s_2+n}\begin{pmatrix}s_2\\n\end{pmatrix}(D_a)^{s-n}(D_b)^{s_1-s_2+n}\phi_{b(s_2-n)a(n)}\Bigg]+...\tag{2.3.48}$$

Форму этого уравнения можно упростить, перемасштабировав поля как

$$\phi_{a(n)}\longrightarrow\frac{2^{-\frac{n}{2}}}{(n-1)!i^{(n+1)}}\phi_{a(n)},\tag{2.3.49}$$

тогда (2.3.48) переходит в

$$\Box\phi_{a(s)}+...=\sum_{s_1+s_2\leq s}\left(1+(-1)^{s+s_1+s_2}\right)2^{\frac{s+s_1+s_2}{2}}$$
$$\Bigg\{\cos(2\varphi)\frac{(-1)^{s_2}}{2\cdot\Gamma(s+s_1+s_2)}(D_a)^s(D_b)^{s_2}\phi^{c(s_1)}\cdot(D_c)^{s_1}\phi^{b(s_2)}-$$
$$-\sin(2\varphi)\frac{(-1)^{s_2}}{2\cdot\Gamma(s+s_1+s_2)}\epsilon_{afcg}D^f(D_a)^{s-1}(D_b)^{s_2}\phi^{c(s_1)}\cdot D^g(D_c)^{s_1-1}\phi^{b(s_2)}+$$
$$+\frac{(-1)^s}{\Gamma(s+s_1-s_2)}\sum_{n=0}^{s_2}k_n(D_a)^{s-n}\phi^{b(s_1)}\cdot(D_b)^{s_1-s_2+n}\phi_{b(s_2-n)a(n)}\Bigg\}+...\tag{2.3.50}$$

где

$$k_n:=2^{-s_2}\begin{pmatrix}s_2\\n\end{pmatrix},\qquad\sum_{n=0}^{s_2}k_n=1,\tag{2.3.51}$$

и мы ввели «фазовый угол» φ

$$\eta=\exp(i\varphi).\tag{2.3.52}$$

Обсудим уравнение (2.3.50), являющееся главным результатом этой Главы, более подробно. Прежде всего, напомним, что многоточие в левой части обозначает все оставшиеся слагаемые фронсдаловского кинетического оператора, а многоточие справа обозначает квадратичные поправки из области $s<s_1+s_2$

и вклад токов высших спинов вне поперечно-бесследового сектора. Последний полностью фиксируется поперечно-бесследовым вкладом, найденным нами (процедура дополнения поперечно-бесследовой части до полной лагранжевой AdS кубической вершины высших спинов была продемонстрирована в [199, 203]).

Далее, как видно, часть тока с минимальным числом производных (последний член в скобках) не зависит от φ, тогда как часть с максимальным числом производных состоит из двух различных φ-зависимых членов. Член, пропорциональный $\sin(2\varphi)$, содержит символ Леви-Чивиты и, следовательно, нарушает четность, так что он ожидаемо зануляется в четно-инвариантных A- и B-моделях ($\varphi = 0$ и $\varphi = \frac{\pi}{2}$). В случае четно-инвариантных моделей вершины в (2.3.50) с точностью до нормировки совпадают с известными в литературе выражениями [127, 128, 199], подтверждая правильность локальной схемы уравнений Васильева, найденной в [132]. Другая примечательная ситуация имеет место для $\varphi = \frac{\pi}{4}$ модели. В этом случае первое слагаемое с $\cos(2\varphi)$ отсутствует, так что вершина с максимальным числом производных целиком пропорциональна символу Леви-Чивиты, являясь в некотором смысле «максимально нарушающей четность». Было бы интересно увидеть отражение этого факта в дуальной теории, которой, предположительно, является $3d$ теория полей Черна–Саймонса, взаимодействующих со скалярной материей [60, 61].

2.4. Выводы

В этой Главе мы, стартуя с локальных уравнений Васильева второго порядка [132], получили квадратичные поправки к бозонным уравнениям Фронсдала, генерируемые калибровочно-инвариантными токами высших спинов. В случае четно-инвариантных моделей результаты согласуются с ранее известными выражениями [127, 128, 199] для кубических вершин высших спинов. Это дает дополнительное подтверждение правильности локальной схемы уравнений высших спинов, предложенной в [124, 132]. В случае $\varphi = \frac{\pi}{4}$ модели мы обнаружили, что лидирующая по производным вершина пропорциональна символу Леви-Чивиты, таким образом, максимально нарушая четность.

Это может иметь интересные следствия для дуальной граничной теории Черна–Саймонса. Было бы интересно изучить также теории с фермионами и найти вклад калибровочно-зависимого сектора, что позволило бы записать полные квадратичные уравнения высших спинов.

ГЛАВА 3. Теория возмущений для расширенных уравнений высших спинов

Недавно в работе [133] было предложено обобщение уравнений Васильева (2.1.18), (2.1.19), которое вовлекает дифференциальные формы старших рангов и имеет вид

$$\mathrm{d}\mathcal{W}+\mathcal{W}*\mathcal{W}=-i\theta_A\theta^A-i\eta\mathcal{B}*\gamma-i\bar{\eta}\mathcal{B}*\bar{\gamma}+g\gamma*\bar{\gamma}+\mathcal{L}, \qquad (3.0.1)$$

$$\mathrm{d}\mathcal{B}+\mathcal{W}*\mathcal{B}-\mathcal{B}*\mathcal{W}=0, \qquad (3.0.2)$$

$$\mathrm{d}\mathcal{L}=0. \qquad (3.0.3)$$

Здесь $\mathcal{W}$ содержит дифференциальные формы нечетных рангов, т.е. кроме 1-формы $\mathbb{W}$ в нее входит 3-форма Ω с аналогичными свойствами, в то время как $\mathcal{B}$ состоит из дифференциальных форм четных рангов, являясь суммой 0-формы B и 2-формы Φ. g – произвольная константа связи. d-замкнутая $\mathcal{L}(x)$ не зависит от переменных Y, Z, K и θ. Это сумма пространственно-временной 2-формы $\mathcal{L}_2$ и пространственно-временной 4-формы $\mathcal{L}_4$. Добавленные старшие формы не несут локальных физических степеней свободы, выражаясь через физические поля на массовой поверхности. Как будет показано в Главе 5, $\mathcal{L}_2$ порождает поверхностные заряды для решений теории типа черных дыр с высшими спинами. $\mathcal{L}_4$ предположительно порождает on-shell действие (является его плотностью, т.е. on-shell лагранжианом), играя ключевую роль в AdS/CFT-соответствии теорий высших спинов. Ввиду отсутствия обычного полного нелинейного действия высших спинов (см, однако, [113]) возможность вычислений on-shell лагранжиана открывает дорогу к явной проверке AdS/CFT-гипотезы, по крайней мере, на древесном уровне. (Дальнейшее расширение, учитывающее квантовые поправки, также обсуждалось в [133].)

Расширение (3.0.1)-(3.0.3) исходных уравнений (2.1.18)-(2.1.19) не меняет ни спектр динамических полей, ни структуру взаимодействий. Действительно, система (3.0.1)-(3.0.3) содержит в себе (2.1.18)-(2.1.19) в качестве подсектора низших рангов, а все старшие формы пертурбативно выражаются через

B и $\mathbb{W}$. Появление старших форм значительно усложняет пертурбативный анализ, необходимый для вычисления лагранжиана $\mathcal{L}_4$. На практике это сводится к необходимости раз за разом решать сходные между собой уравнения, выражающие вспомогательные (Z,θ)-зависимые функции через физические (Z,θ)-независимые пространственно-временные формы. Прямые вычисления в этом случае быстро становятся громоздкими. Целью данной Главы является развитие общей техники, позволяющей пертурбативно обрабатывать уравнения (3.0.1)-(3.0.3) гораздо более эффективным образом.

3.1. Твисторные уравнения

Для пертурбативного анализа системы (3.0.1)-(3.0.3) прежде всего нужно найти вакуумное решение, обобщающее вакуум (2.2.1)-(2.2.4) нерасширенной системы (2.1.18)-(2.1.19). Решение уравнения (3.0.2) очевидно

$$\mathcal{B}_0 = 0. \tag{3.1.1}$$

Вакуумное решение (3.0.1) в секторе 1-форм, описывающее AdS_4-фон, остается прежним, (2.2.2)-(2.2.4). Удобно следующим образом выделить лоренцеву связность и тетраду

$$\phi_{AdS} = -\frac{i}{4}\phi^{AB}Y_AY_B = -\frac{i}{4}\left(\omega^{AB}+e^{AB}\right)Y_AY_B, \tag{3.1.2}$$

$$\omega^{AB}Y_AY_B := \omega^{\alpha\beta}y_\alpha y_\beta + \bar{\omega}^{\dot\alpha\dot\beta}\bar{y}_{\dot\alpha}\bar{y}_{\dot\beta}, \tag{3.1.3}$$

$$e^{AB}Y_AY_B := 2e^{\alpha\dot\beta}y_\alpha\bar{y}_{\dot\beta}. \tag{3.1.4}$$

(В этой Главе мы полагаем космологический параметр λ равным единице.)

Далее необходимо найти вакуумные значения Ω и $\mathcal{L}$, после чего можно изучать пертурбативные поправки. На всех шагах, однако, будут встречаться только два типа уравнений, в присоединенном и твистованном секторах, соответственно:

$$\Delta_{ad}f := \mathrm{d}_Xf + [\phi_{AdS}, f]_* - 2i\mathrm{d}_Zf = J, \tag{3.1.5}$$

и

$$\Delta_{tw} f := \mathrm{d}_X f - \frac{i}{4}\left[\omega^{AB} Y_A Y_B, f\right]_* - \frac{i}{4}\left\{e^{AB} Y_A Y_B, f\right\}_* - 2i\mathrm{d}_Z f = J, \tag{3.1.6}$$

где $\mathrm{d}_Z := \theta^A \frac{\partial}{\partial Z^A}$, а символом d_X, во избежание путаницы, обозначен пространственно-временной дифференциал де Рама. Действительно, эти уравнения появляются в результате разложения (3.0.1) и (3.0.2), соответственно, вокруг вакуума (2.2.2) и определяют f через некоторый источник J, являющийся дифференциальной формой по $\mathrm{d}x^{\underline{m}}$ и θ^A, которая выражается порядок за порядком через поля низших порядков и/или дифференциальные формы низших рангов. Z-производная d_Z возникает из звездочного коммутатора с $Z_A\theta^A$ в (2.2.2). Антикоммутатор в (3.1.6) получается в результате линейной зависимости $\mathcal{B}$ по k и $\bar{k}$, меняющей знак перед $e^{AB} Y_A Y_B$

$$\Delta_{ad}(fk) = (\Delta_{tw} f)\, k. \tag{3.1.7}$$

Это соответствует так называемому твистованному представлению, в отличие от присоединенного (3.1.5). Наша цель – найти итеративное решение уравнений (3.1.5), (3.1.6) в замкнутом виде.

3.2. Стягивающие гомотопии

3.2.1. Гомотопический трюк

Для начала напомним некоторые факты о стандартном гомотопическом трюке. Пусть d – это нильпотентный дифференциал

$$\mathrm{d}^2 = 0\,. \tag{3.2.1}$$

В применении к теории высших спинов он будет отождествляться с дифференциалом де Рама в Z-пространстве.

Введем также нильпотентный оператор ∂,

$$\partial^2 = 0. \tag{3.2.2}$$

Тогда оператор

$$A := \{\mathrm{d}\,, \partial\} \tag{3.2.3}$$

удовлетворяет

$$[\mathrm{d}\,, A] = 0\,, \qquad [\partial\,, A] = 0 \tag{3.2.4}$$

как следствие (3.2.1) и (3.2.2). Обсуждавшаяся в Разделе 1.5.2 теорема о стягивающей гомотопии утверждает, что для диагонализуемых A когомологии d, обозначаемые $H(\mathrm{d})$, сконцентрированы в ядре A

$$H(\mathrm{d}) \subset KerA\,. \tag{3.2.5}$$

В этом случае проектор $\hat{h}$ на $KerA$

$$\hat{h}^2 = \hat{h} \tag{3.2.6}$$

существует и удовлетворяет

$$[\hat{h}\,, \mathrm{d}] = [\hat{h}\,, \partial] = 0. \tag{3.2.7}$$

Также можно ввести оператор A^*, такой что

$$A^*A = AA^* = Id - \hat{h}. \tag{3.2.8}$$

Все это позволяет определить оператор (*стягивающую гомотопию* для $\big(Id - \hat{h}\big)$ по отношению к d)

$$\mathrm{d}^* := A^*\partial = \partial A^*, \tag{3.2.9}$$

который удовлетворяет соотношению

$$\mathrm{d}^*\mathrm{d} + \mathrm{d}\mathrm{d}^* = Id - \hat{h}. \tag{3.2.10}$$

эквивалентному разложению единицы

$$\{\mathrm{d}\,, \mathrm{d}^*\} + \hat{h} = Id\,. \tag{3.2.11}$$

Оно предоставляет общее решение уравнения

$$\mathrm{d}f = J \tag{3.2.12}$$

с d-замкнутой формой J, лежащей вне $H\,(\mathrm{d})$, $\hat{h}J = 0$. Для таких J с помощью (3.2.11) получаем

$$J = \mathrm{d}\mathrm{d}^* J, \tag{3.2.13}$$

так что (3.2.12) превращается в

$$\mathrm{d}\,(f - \mathrm{d}^* J) = 0. \tag{3.2.14}$$

Следовательно,

$$f = \mathrm{d}^* J + \mathrm{d}\epsilon + g, \tag{3.2.15}$$

где $\mathrm{d}\epsilon$ представляет собой точную часть, а $g \in H\,(\mathrm{d})$ остается неопределенным.

Все вышеупомянутые свойства имеют место для внешнего дифференциала $\mathrm{d} = \mathrm{d}_Z$ в тривиальной топологии. В этом случае можно выбрать

$$\partial = Z^A \frac{\partial}{\partial \theta^A}\,. \tag{3.2.16}$$

Это дает

$$A = \theta^A \frac{\partial}{\partial \theta^A} + Z^A \frac{\partial}{\partial Z^A}, \tag{3.2.17}$$

$$A^* f\,(Z; Y; \theta) = \int\limits_0^1 dt \frac{1}{t} f\,(tZ; Y; t\theta)\,. \tag{3.2.18}$$

Проверяя, что эти выражения действительно удовлетворяют (3.2.8), следует воспользоваться соотношением

$$t \frac{\partial}{\partial t} f\,(tx) = x \frac{\partial}{\partial x} f\,(tx)\,. \tag{3.2.19}$$

$Ker A$ состоит из Z- и θ-независимых функций и, таким образом, согласно лемме Пуанкаре, соотношение (3.2.5) превращается в точное равенство

$$H(\mathrm{d}_Z) = Ker A\,. \tag{3.2.20}$$

Соответственно, $\hat{h}$ в данном случае есть просто

$$\hat{h} J\,(Z; Y; \theta) = J\,(0; Y; 0)\,, \tag{3.2.21}$$

тогда как

$$\mathrm{d}^*_Z J\left(Z;Y;\theta\right) = Z^A \frac{\partial}{\partial\theta^A}\int\limits_0^1 dt\frac{1}{t}J\left(tZ;Y;t\theta\right). \tag{3.2.22}$$

Наша цель – обобщить данный анализ на случай полной ковариантной производной, содержащей одновременно и x-зависимую, и Z-зависимые компоненты, путем вывода подходящего разложения единицы. В общем случае решение этой проблемы может быть описано в терминах операторной последовательности. Однако, в случае уравнений высших спинов окончательный результат приобретает замечательно простой вид, аккумулирующий в себе много различных членов.

3.2.2. Анализ операторной последовательности

Рассмотрим систему общего вида

$$\Delta f := \mathrm{d}f + \mathcal{D}f = J\,, \tag{3.2.23}$$

где d и $\mathcal{D}$ подчинены соотношениям

$$\mathrm{d}^2 = 0, \qquad \{\mathrm{d},\mathcal{D}\} = 0\,, \qquad \mathcal{D}^2 = 0\,, \tag{3.2.24}$$

f – m-форма, а J является $(m+1)$-формой, удовлетворяющей условию совместности

$$\Delta J = 0\,. \tag{3.2.25}$$

Система (3.2.23) обладает двойной градуировкой по отношению к двум различным дифференциалам $\mathrm{d}x^{\underline{m}}$ и θ^A, связанным с $\mathcal{D}$ и d, соответственно. Цель данного раздела – записать формальное решение (3.2.23), используя свойства (3.2.11) и (3.2.24) для d.

Будем обозначать компоненты функций с градуировками n по θ с помощью индекса n: f_n, J_n и т.д. Мы будем предполагать, что когомологии d сконцентрированы в низшей градуировке по θ, как это имеет место для дифференциала де Рама. Поскольку $\mathcal{D}$ несет одну степень $\mathrm{d}x^{\underline{m}}$, тогда как d несет одну степень θ, мы можем решать (3.2.23) последовательно по степеням $\mathrm{d}x^{\underline{m}}$:

$$\mathrm{d}f_m = J_{m+1}, \tag{3.2.26}$$

$$\mathrm{d}f_{m-1} = J_m - \mathcal{D}f_m, \tag{3.2.27}$$

$$\mathrm{d}f_{m-2} = J_{m-1} - \mathcal{D}f_{m-1}, \tag{3.2.28}$$

$$\ldots$$

$$\mathrm{d}f_0 = J_1 - \mathcal{D}f_1, \tag{3.2.29}$$

$$\mathcal{D}g = J_0 - \mathcal{D}f_0., \tag{3.2.30}$$

где g является частью f, лежащей в $H\left(\mathrm{d}\right)$. Используя (3.2.15), можно записать решение (3.2.26)-(3.2.29) в следующем компактном виде (опуская Δ-точные члены)

$$\sum_{n=0}^{m} f_n = \sum_{n=0}^{m} \left(-\mathrm{d}^*\mathcal{D}\right)^n \mathrm{d}^* J = \Delta^* J\,, \qquad \Delta^* J := \mathrm{d}^* \frac{1}{1+\mathcal{D}\mathrm{d}^*} J\,, \tag{3.2.31}$$

где вместо конечной суммы мы устремили $n \to \infty$, поскольку члены с $n > m$ в любом случае отсутствуют.

Теперь рассмотрим (3.2.30). Так как $g \in H\left(\mathrm{d}\right)$, то же верно и для правой части, что позволяет переписать уравнение как $\mathcal{D}g = \hat{h}\left(J_0 - \mathcal{D}f_0\right)$, и, далее, приняв во внимание, что θ-зависимые члены зануляются действием $\hat{h}$, как

$$\mathcal{D}g = \hat{h}\left(J - \mathcal{D}\Delta^* J\right)\,. \tag{3.2.32}$$

Обозначим с помощью $\mathscr{H}$ проектор на «источник когомологий»

$$\mathscr{H} := \hat{h}\left(1 - \mathcal{D}\Delta^*\right) = \hat{h}\frac{1}{1+\mathcal{D}\mathrm{d}^*}. \tag{3.2.33}$$

Тогда (3.2.32) принимает форму

$$\mathcal{D}g = \mathscr{H}(J). \tag{3.2.34}$$

Резюмируя, общее решение (3.2.23) имеет вид

$$f = \Delta^* J + \Delta\epsilon + g, \tag{3.2.35}$$

где Δ^* определен в (3.2.31), $\Delta\epsilon$ представляет собой точную часть решения, а g решает (3.2.34). Задача нахождения g лежит за рамками данного анализа. Поскольку операторы Δ^* и $\mathscr{H}$ представляют собой обобщение d^* и $\hat{h}$ на случай d, обобщенного до $\Delta = \mathrm{d}+\mathcal{D}$, то неудивительно, что для них имеет место аналог (3.2.11)

$$\{\Delta, \Delta^*\} + \mathscr{H} = Id, \tag{3.2.36}$$

обеспечивающий другое разложение единицы. Чтобы проверить его, надо сначала воспользоваться (3.2.11) и, после приведения подобных, (3.2.36) сводится к

$$\mathrm{d}^* \left(\mathrm{d}\frac{1}{1+\mathcal{D}\mathrm{d}^*} - \frac{1}{1+\mathcal{D}\mathrm{d}^*}\mathrm{d} - \frac{1}{1+\mathcal{D}\mathrm{d}^*}\mathcal{D}\right) = 0. \tag{3.2.37}$$

Используя (3.2.24) и соотношение

$$[\mathcal{D}\mathrm{d}^*, \mathrm{d}] = \mathcal{D}\left(1-\hat{h}\right), \tag{3.2.38}$$

следующее из (3.2.24) и (3.2.11), можно привести (3.2.37) к форме, где все слагаемые в скобках содержат $\hat{h}$ и не содержат d. Но из (3.2.11) мы заключаем, что, так как d пропорционально θ, d^*, чем бы оно ни было, должно быть пропорционально $\partial/\partial\theta$. А так как $\hat{h}$ кладет θ в нуль, все слагаемые в (3.2.37) зануляются в результате действия d^* после $\hat{h}$, что, таким образом, доказывает (3.2.36). Более того, указанное свойство d^* показывает также, что $\mathscr{H} = \hat{h}\frac{1}{1+\mathcal{D}\mathrm{d}^*}$ является проектором

$$\mathscr{H}^2 = \mathscr{H} \tag{3.2.39}$$

и что

$$\Delta^*\mathscr{H} = 0. \tag{3.2.40}$$

Тогда из (3.2.11) следует, что

$$\{\Delta, \Delta^*\}^2 = \{\Delta, \Delta^*\}, \tag{3.2.41}$$

$$[\mathscr{H}, \Delta] = [\mathscr{H}, \Delta^*] = 0. \tag{3.2.42}$$

Подчеркнем, что разложение единицы (3.2.36) является центральной формулой в этом анализе. В частности, с помощью (3.2.25) оно приводит к уравнениям (3.2.34), (3.2.35) путем подстановки

$$J \equiv (\{\Delta, \Delta^*\} + \mathscr{H})\, J = \Delta\Delta^* J + \mathscr{H}\, J\,. \tag{3.2.43}$$

Изложенный анализ является общим и не обращается к конкретным свойствам $\mathcal{D}$. Его польза состоит в том, что он аккумулирует в себе все промежуточные манипуляции и вычисления. Теперь мы собираемся вычислить конкретные операторы Δ^* и $\mathscr{H}$, которые появляются в теории высших спинов.

3.3. Операторная последовательность в уравнениях высших спинов

Теперь мы выбираем $\mathrm{d} = -2i\mathrm{d}_Z$ и в качестве $\mathcal{D}$ рассматриваем либо присоединенную, либо твистованную ковариантную производную. Сначала разберем случай присоединенного представления.

3.3.1. Присоединенный случай

Присоединенная AdS-производная имеет вид

$$\mathcal{D}_{ad} = \mathrm{d}_X + [\phi_{AdS}, \bullet]_* = \mathrm{d}_X + \phi^{AB}\left(Y_A - i\frac{\partial}{\partial Z^A}\right)\frac{\partial}{\partial Y^B}, \tag{3.3.1}$$

Так как оператор $Z^A\dfrac{\partial}{\partial\theta^A}$ нильпотентен, в (3.2.31) будут давать вклад только такие члены $\mathcal{D}_{ad}$, которые дифференцируют Z^A в (3.2.22). Ими являются

$$\mathcal{D}_{ad} \sim -i\phi^{AB}\frac{\partial^2}{\partial Y^A \partial Z^B}. \tag{3.3.2}$$

Это позволяет переписать (3.2.31) как

$$\begin{aligned}\Delta^*_{ad}J \;=\; & -\frac{1}{2i}Z^A\frac{\partial}{\partial\theta^A}\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{[0,1]^n} dt_1...dt_n \prod_{k=1}^{n}\frac{1}{(t_k)^k}\left(-\frac{1}{2}\phi^{BC}\frac{\partial^2}{\partial Y^B\partial\theta^C}\right)^{n-1}\cdot\\ & \cdot J\left(t_1\cdot ...\cdot t_n Z; Y; t_1\cdot ...\cdot t_n\theta\right).\end{aligned} \tag{3.3.3}$$

Используя соотношение

$$\int_0^1\int_0^1 dt_1dt_2t_1^pt_2^mf\left(t_1t_2x\right)=\frac{1}{m-p}\int_0^1 dt\left(t^p-t^m\right)f\left(tx\right)\,,\qquad m\neq p, \tag{3.3.4}$$

можно свести повторный интеграл в (3.3.3) к однократному (штрих у $\prod$ означает, что в произведении пропускается член с $p=k$):

$$\begin{gathered}\int\limits_{[0,1]^n} dt_1...dt_n\prod_{k=1}^n\frac{1}{\left(t_k\right)^k}J\left(t_1\cdot...\cdot t_nZ;Y;t_1\cdot...\cdot t_n\theta\right)=\\
=\int_0^1 dt\sum_{k=1}^n\left({\prod_{p=1}^n}'\frac{1}{k-p}\right)t^{-k}J\left(tZ;Y;t\theta\right)=\int_0^1 dt\sum_{k=1}^n\frac{\left(-1\right)^{n-k}t^{-k}}{\left(k-1\right)!\left(n-k\right)!}J\left(tZ;Y;t\theta\right)=\\
=\int_0^1 dt\sum_{k=1}^n\binom{n-1}{k-1}\frac{\left(-1\right)^{n-k}t^{-k}}{\left(n-1\right)!}J\left(tZ;Y;t\theta\right)=\frac{1}{\left(n-1\right)!}\int_0^1\frac{dt}{t}\left(\frac{1}{t}-1\right)^{n-1}J\left(tZ;Y;t\theta\right).\end{gathered} \tag{3.3.5}$$

Подставляя это обратно в (3.3.3), мы приходим к следующему компактному выражению

$$\Delta^*_{ad}J=-\frac{1}{2i}Z^A\frac{\partial}{\partial\theta^A}\int_0^1 dt\frac{1}{t}\exp\left(-\frac{1-t}{2t}\phi^{BC}\frac{\partial^2}{\partial Y^B\partial\theta^C}\right)J\left(tZ;Y;t\theta\right) \tag{3.3.6}$$

или к эквивалентному ему

$$\Delta^*_{ad}J=-\frac{1}{2i}Z^A\frac{\partial}{\partial\theta^A}\int_0^1\frac{dt}{t}J\Big(tZ;Y_B-\frac{1-t}{2t}{\phi_B}^C\frac{\partial}{\partial\theta^C};t\theta\Big). \tag{3.3.7}$$

Отметим, что интеграл в (3.3.6) и (3.3.7) не содержит особенности при $t=0$, так как каждое дифференцирование по θ приносит одну степень t.

Теперь рассмотрим $\mathscr{H}_{ad}$ (3.2.33). Так как Z в конце кладется равным нулю, вклад будет давать только (3.3.2), дифференцируя общий множитель Z в (3.3.6). В результате (3.2.33) можно переписать как

$$\mathscr{H}_{ad}J\left(Z;Y;\theta\right)=\hat{h}\left(J+\frac{1}{2}\phi^{AB}\frac{\partial^2}{\partial Y^A\partial\theta^B}\int_0^1 dt\frac{1}{t}\exp\left(-\frac{1-t}{2t}\phi^{CD}\frac{\partial^2}{\partial Y^C\partial\theta^D}\right)J\left(tZ;Y;t\theta\right)\right). \tag{3.3.8}$$

Соотношение

$$\frac{1}{2}\phi^{AB}\frac{\partial^2}{\partial Y^A\partial\theta^B}\exp\left(-\frac{1}{2}\phi^{CD}\frac{\partial^2}{\partial Y^C\partial\theta^D}\right)=\left[\theta^A\frac{\partial}{\partial\theta^A}+Z^A\frac{\partial}{\partial Z^A},\exp\left(-\frac{1}{2}\phi^{CD}\frac{\partial^2}{\partial Y^C\partial\theta^D}\right)\right] \tag{3.3.9}$$

вместе с (3.2.19) позволяет выполнить интегрирование по t и прийти к окончательному ответу

$$\mathscr{H}_{ad}J\left(Z,Y,\theta\right)=\hat{h}\Big(\exp\left(-\frac{1}{2}\phi^{AB}\frac{\partial^2}{\partial Y^A\partial\theta^B}\right)J\left(Z;Y;\theta\right)\Big)=\hat{h}\Big(J\left(0;Y_A-\frac{1}{2}\phi_A{}^B\frac{\partial}{\partial\theta^B};\theta\right)\Big). \tag{3.3.10}$$

Разложение единицы

$$\{\Delta_{ad},\Delta^*_{ad}\}+\mathscr{H}_{ad}=1 \tag{3.3.11}$$

может быть проверено непосредственно. Для этого заметим, что, благодаря (3.2.19), $1-\mathscr{H}_{ad}$ можно переписать как

$$\left(1-\mathscr{H}_{ad}\right)J\left(Z;Y;\theta\right)=\left(\theta^A\frac{\partial}{\partial\theta^A}+Z^A\frac{\partial}{\partial Z^A}\right)\int\limits_0^1\frac{dt}{t}\exp\left(-\frac{1-t}{2t}\phi^{BC}\frac{\partial^2}{\partial Y^B\partial\theta^C}\right)J\left(tZ;Y;t\theta\right), \tag{3.3.12}$$

а $\{\Delta_{ad},\Delta^*_{ad}\}$ можно упростить с помощью

$$\left\{Z^A\frac{\partial}{\partial\theta^A},\phi^{BC}\frac{\partial^2}{\partial Y^B\partial Z^C}\right\}=\phi^{BC}\frac{\partial^2}{\partial Y^B\partial\theta^C}, \tag{3.3.13}$$

$$\left\{Z^A\frac{\partial}{\partial\theta^A},\theta^B\frac{\partial}{\partial Z^B}\right\}=\theta^A\frac{\partial}{\partial\theta^A}+Z^A\frac{\partial}{\partial Z^A} \tag{3.3.14}$$

и уравнения плоской связности (2.2.4). Альтернативная проверка (3.3.11) может быть осуществлена с помощью интегрирования по частям в $\{\Delta_{ad},\Delta^*_{ad}\}$. Разумеется, все соотношения (3.2.39)-(3.2.42) также выполняются.

Изложенный вывод (3.3.6) и (3.3.10) базировался на прямом вычислении геометрической прогрессии в (3.2.31). Имеется, однако, более простой способ получить эти формулы. Мы рассмотрим его, так как он оказывается наиболее полезным в случае твистованного представления.

Перепишем общее уравнение (3.2.23) для присоединенного случая

$$-2i\theta^A\frac{\partial}{\partial Z^A}f+\mathrm{d}_Xf+\phi^{AB}\left(Y_A-i\frac{\partial}{\partial Z^A}\right)\frac{\partial}{\partial Y^B}f=J \tag{3.3.15}$$

как

$$-2i\left(\theta^A+\frac{1}{2}\phi^{AB}\frac{\partial}{\partial Y^B}\right)\frac{\partial}{\partial Z^A}f=J-\mathcal{D}^Y_{ad}f, \qquad (3.3.16)$$

где $\mathcal{D}^Y_{ad}$ обозначает Z-независимую часть $\mathcal{D}_{ad}$

$$\mathcal{D}^Y_{ad}:=\mathrm{d}_X+\phi^{AB}Y_A\frac{\partial}{\partial Y^B}. \qquad (3.3.17)$$

Воспользовавшись тем, что

$$\left(\theta^A+\frac{1}{2}\phi^{AB}\frac{\partial}{\partial Y^B}\right)\frac{\partial}{\partial Z^A}=\exp\left\{\frac{1}{2}\phi^{BC}\frac{\partial^2}{\partial Y^B\partial\theta^C}\right\}\theta^A\frac{\partial}{\partial Z^A}\exp\left\{-\frac{1}{2}\phi^{BC}\frac{\partial^2}{\partial Y^B\partial\theta^C}\right\} \qquad (3.3.18)$$

и, в силу (2.2.4),

$$\left[\mathcal{D}^Y_{ad},\exp\left\{-\frac{1}{2}\phi^{BC}\frac{\partial^2}{\partial Y^B\partial\theta^C}\right\}\right]=0\,, \qquad (3.3.19)$$

можно привести (3.3.16) к виду

$$\mathrm{d}_Z\tilde{f}=\tilde{J}-\mathcal{D}^Y_{ad}\tilde{f}\,, \qquad (3.3.20)$$

где

$$\tilde{f}:=\exp\left\{-\frac{1}{2}\phi^{AB}\frac{\partial^2}{\partial Y^A\partial\theta^B}\right\}f. \qquad (3.3.21)$$

Условие совместности для (3.3.20) имеет вид

$$\mathrm{d}_Z\tilde{J}+\mathcal{D}^Y_{ad}\tilde{J}=0, \qquad (3.3.22)$$

что, вместе с очевидным соотношением

$$\left\{\mathrm{d}^*_Z,\mathcal{D}^Y_{ad}\right\}=0, \qquad (3.3.23)$$

позволяет записать общее решение (3.3.20) как

$$\tilde{f}=\mathrm{d}^*_Z\tilde{J}+\tilde{g}+\mathrm{d}_Z\tilde{\epsilon}+\mathcal{D}^Y_{ad}\tilde{\epsilon}, \qquad (3.3.24)$$

где $\tilde{\epsilon}$ произвольно, а $\tilde{g}$ решает

$$\mathcal{D}^Y_{ad}\tilde{g}=\hat{h}\tilde{J}. \qquad (3.3.25)$$

Обратное к (3.3.21) преобразование дает общее решение (3.3.15)

$$f = \exp\left\{\frac{1}{2}\phi^{AB}\frac{\partial^2}{\partial Y^A \partial \theta^B}\right\} \mathrm{d}_Z^* \exp\left\{-\frac{1}{2}\phi^{AB}\frac{\partial^2}{\partial Y^A \partial \theta^B}\right\} J + g + \Delta_{ad}\epsilon \qquad (3.3.26)$$

где, как следствие (3.3.25), g решает

$$\mathcal{D}^Y_{ad} g \;=\; \mathscr{H}_{ad} J \qquad (3.3.27)$$

с $\mathscr{H}_{ad}$ (3.3.10). Подставляя (3.2.22) в (3.3.26), мы получаем (3.3.6).

Наконец, разложение единицы (3.3.11) следует из

$$\{d_Z, d_Z^*\}\,\tilde{f} + \hat{h}\tilde{f} = \tilde{f}\,. \qquad (3.3.28)$$

Подчеркнем, что вывод этих формул включает в себя взятие многократных гомотопических интегралов. В обычном подходе, не использующем данную технику, пришлось бы выполнять аналогичные друг другу манипуляции отдельно для каждого конкретного пертурбативного вычисления, что обыкновенно приводит к большим техническим трудностям.

3.3.2. Твистованный случай

Твистованная AdS-производная

$$\mathcal{D}_{tw} = \mathrm{d}_X - \frac{i}{4}\left[\omega^{AB} Y_A Y_B, \bullet\right]_* - \frac{i}{4}\left\{e^{AB} Y_A Y_B, \bullet\right\}_* \qquad (3.3.29)$$

имеет вид

$$\mathcal{D}_{tw} = \mathrm{d}_X + \omega^{AB}\left(Y_A - i\frac{\partial}{\partial Z^A}\right)\frac{\partial}{\partial Y^B} - \frac{i}{2}e^{AB}\left(Y_A Y_B - 2iY_A\frac{\partial}{\partial Z^B} - \frac{\partial^2}{\partial Y^A \partial Y^B} - \frac{\partial^2}{\partial Z^A \partial Z^B}\right). \qquad (3.3.30)$$

В этом случае прямое суммирование геометрической прогрессии в (3.2.31) становится гораздо более сложным, поскольку вместо (3.3.2) $\partial/\partial Z$-зависящая часть $\mathcal{D}_{tw}$ имеет вид

$$\mathcal{D}_{tw} \sim -i\omega^{AB}\frac{\partial^2}{\partial Y^A \partial Z^B} - e^{AB} Y_A \frac{\partial}{\partial Z^B} + \frac{i}{2}e^{AB}\frac{\partial^2}{\partial Z^A \partial Z^B}. \qquad (3.3.31)$$

Она содержит член степени -2 по Z, разрушающий однородность по гомотопическим параметрам t_k, которая в присоединенном случае приводила к компактному коэффициенту $\prod_{k=1}^{n}(t_k)^{-k}$ в (3.3.3). Однако, анализ с помощью преобразования подобия, как мы сейчас продемонстрируем, практически не меняется.

Вновь перепишем исходное уравнение

$$-2i\mathrm{d}_Z f+\mathcal{D}_{tw}f=J \tag{3.3.32}$$

как

$$-2i\left(\theta^A+\frac{1}{2}\omega^{AB}\frac{\partial}{\partial Y^B}-\frac{i}{2}e^{AB}Y_B-\frac{1}{4}e^{AB}\frac{\partial}{\partial Z^B}\right)\frac{\partial}{\partial Z^A}f=J-\mathcal{D}^Y_{tw}f, \tag{3.3.33}$$

где

$$\mathcal{D}^Y_{tw}:=\mathrm{d}_X+\omega^{AB}Y_A\frac{\partial}{\partial Y^B}-\frac{i}{2}e^{AB}\left(Y_AY_B-\frac{\partial^2}{\partial Y^A\partial Y^B}\right). \tag{3.3.34}$$

Вид уравнения (3.3.33) предполагает следующий аналог (3.3.21)

$$\widetilde{f}:=\exp\left\{-\frac{1}{2}\omega^{AB}\frac{\partial^2}{\partial Y^A\partial\theta^B}+\frac{i}{2}e^{AB}Y_A\frac{\partial}{\partial\theta^B}+\frac{1}{4}e^{AB}\frac{\partial^2}{\partial Z^A\partial\theta^B}\right\}f \tag{3.3.35}$$

поскольку

$$\begin{aligned}&\left(\theta^A+\frac{1}{2}\omega^{AB}\frac{\partial}{\partial Y^B}-\frac{i}{2}e^{AB}Y_B-\frac{1}{4}e^{AB}\frac{\partial}{\partial Z^B}\right)\frac{\partial}{\partial Z^A}=\\&=\exp\left\{\frac{1}{2}\omega^{AB}\frac{\partial^2}{\partial Y^A\partial\theta^B}-\frac{i}{2}e^{AB}Y_A\frac{\partial}{\partial\theta^B}-\frac{1}{4}e^{AB}\frac{\partial^2}{\partial Z^A\partial\theta^B}\right\}\theta^C\frac{\partial}{\partial Z^C}\cdot\\&\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}\omega^{AB}\frac{\partial^2}{\partial Y^A\partial\theta^B}+\frac{i}{2}e^{AB}Y_A\frac{\partial}{\partial\theta^B}+\frac{1}{4}e^{AB}\frac{\partial^2}{\partial Z^A\partial\theta^B}\right\}.\end{aligned} \tag{3.3.36}$$

Это упрощает (3.3.32) до

$$d_Z\widetilde{f}=\widetilde{J}-\mathcal{D}^Y_{tw}\widetilde{f} \tag{3.3.37}$$

потому что, аналогично присоединенному случаю,

$$\left[\mathcal{D}^Y_{tw},-\frac{1}{2}\omega^{AB}\frac{\partial^2}{\partial Y^A\partial\theta^B}+\frac{i}{2}e^{AB}Y_A\frac{\partial}{\partial\theta^B}+\frac{1}{4}e^{AB}\frac{\partial^2}{\partial Z^A\partial\theta^B}\right]=0. \tag{3.3.38}$$

Это позволяет немедленно записать общее решение (3.3.32) в терминах f

$$f=\Delta^*_{tw}J+g+\Delta_{tw}\epsilon, \tag{3.3.39}$$

где

$$
\Delta^*_{tw}J = -\frac{1}{2i}Z^C\frac{\partial}{\partial\theta^C}\exp\left\{\frac{1}{2}\omega^{AB}\frac{\partial^2}{\partial Y^A\partial\theta^B} - \frac{i}{2}e^{AB}Y_A\frac{\partial}{\partial\theta^B} - \frac{1}{4}e^{AB}\frac{\partial^2}{\partial Z^A\partial\theta^B}\right\}\cdot
$$
$$
\cdot\int\limits_0^1 \frac{dt}{t}\exp\left\{-\frac{1}{2t}\omega^{AB}\frac{\partial^2}{\partial Y^A\partial\theta^B} + \frac{i}{2t}e^{AB}Y_A\frac{\partial}{\partial\theta^B} + \frac{1}{4t^2}e^{AB}\frac{\partial^2}{\partial Z^A\partial\theta^B}\right\}J\left(tZ;Y;t\theta\right). \tag{3.3.40}
$$

Используя формулу Бейкера–Кэмпбелла–Хаусдорффа, мы находим

$$
\exp\left\{\frac{1}{2}\omega^{AB}\frac{\partial^2}{\partial Y^A\partial\theta^B} - \frac{i}{2}e^{AB}Y_A\frac{\partial}{\partial\theta^B}\right\} =
$$
$$
= \exp\left\{\frac{i}{8}\omega^{AB}\frac{\partial}{\partial\theta^B}e_A{}^C\frac{\partial}{\partial\theta^C} - \frac{i}{2}e^{AB}Y_A\frac{\partial}{\partial\theta^B}\right\}\exp\left\{\frac{1}{2}\omega^{AB}\frac{\partial^2}{\partial Y^A\partial\theta^B}\right\}, \tag{3.3.41}
$$

что позволяет переписать (3.3.40) как

$$
\Delta^*_{tw}J \;=\; -\frac{1}{2i}Z^C\frac{\partial}{\partial\theta^C}\int\limits_0^1 dt\frac{1}{t}\exp\left\{-\frac{i}{8}\left(\frac{1-t}{t}\right)^2\omega^{AB}e_A{}^C\frac{\partial^2}{\partial\theta^B\partial\theta^C} + i\frac{1-t}{2t}e^{AB}Y_A\frac{\partial}{\partial\theta^B}\right\}\cdot
$$
$$
\cdot\exp\left\{-\frac{1-t}{2t}\omega^{AB}\frac{\partial^2}{\partial Y^A\partial\theta^B} + \frac{1-t^2}{4t^2}e^{AB}\frac{\partial^2}{\partial Z^A\partial\theta^B}\right\}J\left(tZ;Y;t\theta\right). \tag{3.3.42}
$$

g в (3.3.39) решает

$$
\mathcal{D}^Y_{tw}g = \mathscr{H}_{tw}J, \tag{3.3.43}
$$

где

$$
\mathscr{H}_{tw}J \;:=\; \hat{h}\exp\left\{-\frac{i}{8}\omega^{AB}e_A{}^C\frac{\partial^2}{\partial\theta^B\partial\theta^C} + \frac{i}{2}e^{AB}Y_A\frac{\partial}{\partial\theta^B}\right\}\cdot
$$
$$
\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}\omega^{AB}\frac{\partial^2}{\partial Y^A\partial\theta^B} + \frac{1}{4}e^{AB}\frac{\partial^2}{\partial Z^A\partial\theta^B}\right\}J\left(Z;Y;\theta\right). \tag{3.3.44}
$$

Точно таким же образом, как и в присоединенном случае, можно проверить, что

$$
\{\Delta_{tw}, \Delta^*_{tw}\} + \mathscr{H}_{tw} = 1. \tag{3.3.45}
$$

Все общие формулы (3.2.39)-(3.2.42) остаются верными для Δ^*_{tw} и $\mathscr{H}_{tw}$.

3.4. Приложения

Теперь мы рассмотрим некоторые приложения развитой техники, иллюстрирующие, в частности, как с помощью нее немедленно воспроизводятся результаты, для получения которых иначе требовались бы многоэтапные вычисления.

3.4.1. Свободные уравнения

Рассмотрим линейный анализ нерасширенной системы уравнений высших спинов (2.1.18), (2.1.19). В младшем порядке она принимает вид

$$\Delta_{ad}\mathbb{W}_1 = -i\eta B_1 * \gamma - i\bar{\eta} B_1 * \bar{\gamma}, \tag{3.4.1}$$

$$\Delta_{ad} B_1 = 0, \tag{3.4.2}$$

где 1-форма $\mathbb{W}_1$ и 0-форма B_1 представляют собой линейные флуктуации, а для центральных элементов γ и $\bar{\gamma}$ выполняется

$$\Delta_{ad}\gamma = (\Delta_{tw}\varkappa)\,\theta_\alpha\theta^\alpha k = 0, \qquad \Delta_{ad}\bar{\gamma} = (\Delta_{tw}\bar{\varkappa})\,\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\bar{k} = 0. \tag{3.4.3}$$

Эти уравнения следуют из (3.1.7), а также из того факта, что операторы Клейна (2.1.8) коммутируют с лоренцевой частью AdS-связности (3.1.3) и антикоммутируют с AdS-трансляциями (3.1.4), являясь, таким образом, ковариантно-постоянными по отношению к твистованной производной.

Как упоминалось в Главе 2, физическая часть B_1 линейно зависит от k или $\bar{k}$

$$B_1 = Ck + \bar{C}\bar{k}, \tag{3.4.4}$$

$$\Delta_{tw}C = \Delta_{tw}\bar{C} = 0. \tag{3.4.5}$$

Согласно (3.2.35), C и $\bar{C}$ не зависят от Z и удовлетворяют

$$\mathcal{D}_{tw}C\,(y,\bar{y}) = 0\,, \qquad \mathcal{D}_{tw}\bar{C}\,(y,\bar{y}) = 0. \tag{3.4.6}$$

Теперь, в принципе, мы можем найти общее решение для $\mathbb{W}_1$ из (3.4.1), используя (3.2.35). Но так как нас интересует θ-независимая часть уравнений высших спинов, в которой содержатся все динамические степени свободы, мы можем непосредственно искать Z-когомологии уравнений с помощью (3.3.10). Это дает

$$\mathcal{D}_{ad}\omega\left(Y\right)=-i\hat{h}\exp\left(-\frac{1}{2}\phi^{AB}\frac{\partial^2}{\partial Y^A\partial\theta^B}\right)\left(\eta B_1*\gamma+\bar{\eta}B_1*\bar{\gamma}\right) \tag{3.4.7}$$

для Z-независимой пространственно-временной 1-формы ω, описывающей потенциалы высших спинов. Элементарное вычисление с использованием (2.1.10) дает

$$\mathcal{D}_{ad}\omega\left(Y\right)=\frac{i}{4}\eta\bar{H}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}\bar{\partial}_{\dot{\beta}}\left(C\left(0,\bar{y}\right)+\bar{C}\left(0,\bar{y}\right)k\bar{k}\right)+\frac{i}{4}\bar{\eta}H^{\alpha\beta}\partial_{\alpha}\partial_{\beta}\left(C\left(y,0\right)k\bar{k}+\bar{C}\left(y,0\right)\right). \tag{3.4.8}$$

Таким образом, используя результаты Раздела 3.3, мы немедленно приходим к центральной on-mass-shell теореме. Отметим, что при использовании предлагаемой техники не нужно даже знать явную форму $\mathbb{W}_1$.

3.4.2. Старшие порядки

Теперь кратко опишем приложение общей схемы к старшим порядкам.

Во втором порядке уравнения (2.1.18), (2.1.19) сводятся к

$$\Delta_{ad}\mathbb{W}_2+\mathbb{W}_1*\mathbb{W}_1=-i\eta B_2*\gamma-i\bar{\eta}B_2*\bar{\gamma}\,, \tag{3.4.9}$$

$$\Delta_{tw}B_2+\left[\mathbb{W}_1,B_1\right]_*=0\,, \tag{3.4.10}$$

где B_2 и $\mathbb{W}_2$ представляют собой мастер-поля во втором порядке. Уравнения для Z-независимых компонент (когомологий) поля B_2, $C(Y)k$ и $\bar{C}(Y)\bar{k}$, могут быть получены непосредственно с помощью (3.2.34)

$$\mathcal{D}_{tw}C=-\mathscr{H}_{tw}\left(\mathbb{W}_1*C-C*\pi\left(\mathbb{W}_1\right)\right), \tag{3.4.11}$$

где оператор

$$\pi f(y,\bar{y})=f(-y,\bar{y}) \tag{3.4.12}$$

появляется в результате протаскивания внешнего оператора Клейна k и $\mathbb{W}_1$ находится из (3.4.1)

$$\mathbb{W}_1 = \omega\left(Y\right) - i\Delta^*_{ad}\left(\eta B_1 * \gamma + \bar{\eta} B_1 * \bar{\gamma}\right). \tag{3.4.13}$$

Z-зависимая часть B_2

$$B_2\left(Z;Y\right) = -\Delta^*_{tw}\left(\mathbb{W}_1 * B_1 - B_1 * \mathbb{W}_1\right) \tag{3.4.14}$$

позволяет получить уравнение для когомологической части $\mathbb{W}_2$

$$\mathcal{D}_{ad}\omega = -\mathscr{H}_{ad}\left(\mathbb{W}_1 * \mathbb{W}_1 + i\eta B_2 * \gamma + i\bar{\eta} B_2 * \bar{\gamma}\right). \tag{3.4.15}$$

Правые части (3.4.14) и (3.4.15) прямо воспроизводят квадратичные поправки в уравнениях высших спинов, найденные, например, в [122, 204].

Нетрудно записать общую рекуррентную последовательность уравнений высших спинов в любом порядке. Уравнения n-го порядка имеют вид

$$\mathcal{D}_{ad}\omega\left(Y\right) = -\sum_{p=1}^{n-1}\mathscr{H}_{ad}\left(\mathbb{W}_p * \mathbb{W}_{n-p} + i\eta B_n * \gamma + i\bar{\eta} B_n * \bar{\gamma}\right), \tag{3.4.16}$$

$$\mathcal{D}_{tw}\left(Ck + \bar{C}\bar{k}\right)\left(Y\right) = -\sum_{p=1}^{n-1}\mathscr{H}_{tw}\left(\mathbb{W}_p * B_{n-p} - B_{n-p} * \mathbb{W}_p\right), \tag{3.4.17}$$

$$B_n\left(Z;Y\right) = -\sum_{p=1}^{n-1}\Delta^*_{tw}\left(\mathbb{W}_p * B_{n-p} - B_{n-p} * \mathbb{W}_p\right), \tag{3.4.18}$$

$$\mathbb{W}_n\left(Z;Y\right) = -\sum_{p=1}^{n-1}\Delta^*_{ad}\left(\mathbb{W}_p * \mathbb{W}_{n-p} + i\eta B_n * \gamma + i\bar{\eta} B_n * \bar{\gamma}\right). \tag{3.4.19}$$

Эти формулы представляют собой упрощенную версию формул, представленных в [204].

3.4.3. Расширенные уравнения

Другим приложением является расширенная система уравнений высших спинов (3.0.1)-(3.0.3). В качестве пример вычислим вакуумное значение 3-форму Ω, входящей в $\mathcal{W}$. Соответствующее уравнение, получающееся из

(3.0.1), имеет вид

$$\Delta_{ad}\Omega = g\gamma * \bar{\gamma}. \tag{3.4.20}$$

Прежде всего отметим, что правая часть (3.4.20) не дает вклада в когомологии

$$\mathscr{H}_{ad}\left(g\delta^4(\theta) * k\varkappa * \bar{k}\bar{\varkappa}\right) = \hat{h}\Big[\exp\left(-\frac{1}{2}\phi^{AB}\frac{\partial^2}{\partial Y^A \partial\theta^B}\right) g\exp\left(iZ_C Y^C\right)\delta^4(\theta)\Big] = 0. \tag{3.4.21}$$

Поэтому, опуская чисто-калибровочную часть, из (3.2.35) находим

$$\Omega = \Delta^*_{ad}(g\gamma * \bar{\gamma}) = -\frac{g}{2i}Z^A\frac{\partial}{\partial\theta^A}\int_0^1 dt t^3 \exp\left(-\frac{i}{2}(1-t)\phi^{BC}\frac{\partial}{\partial\theta^B}Z_C + itZ_B Y^B\right)\delta^4(\theta)k\bar{k} =$$

$$= -\frac{g}{2i}Z^A\frac{\partial}{\partial\theta^A}\int_0^1 dt\, t^3 e^{itZ_A Y^A}\delta^4(\theta_A - \frac{i}{2}(1-t)\phi_A{}^B Z_B)k\bar{k}\,, \tag{3.4.22}$$

что совпадает с результатом [133]. Предложенная техника значительно упрощает вывод.

3.5. Выводы

Методы, развитые в этой Главе, значительно упрощают пертурбативный анализ уравнений высших спинов. Вместо многократного применения гомотопических формул к уравнениям с дифференциалом де Рама по твисторным переменным мы вывели замкнутую формулу для применения этой процедуры к любой функции. Этот подход значительно упрощает пертурбативные вычисления, обеспечивая систематический анализ системы (3.0.1)-(3.0.3), определяющей инвариантный функционал, анализ которой становится крайне громоздким в стандартном подходе, где линейные возмущения по сложности вычислений сравнимы с возмущениями четвертого порядка в нерасширенной системе.

Предложенный метод основан на применении общей формулы разложения единицы к конкретным ковариантным производным теории высших спинов. Примечательно, что в этом случае удается записать явные выражения, содержащие единственный гомотопический интеграл, вместо формальных операторных рядов гомотопических интегралов для «обратного оператора» и проектора на когомологии. Фактически это означает, что формулы, представленные в этой

Главе, учитывают большинство повторных гомотопических интегрирований, появляющихся в обычных вычислениях. Это обеспечивает эффективный рабочий инструмент, применимый ко множеству задач в том числе за пределами анализа инвариантных функционалов $4d$ теории высших спинов, для которого он изначально был разработан.

В частности, метод применим к моделям высших спинов в трех [195] и произвольном числе [98] измерений. Применение к $d = 3$ уравнениям высших спинов [195] непосредственно. В этом случае структура присоединенного оператора сходна с четырехмерной (3.3.2). Твистованный же оператор, хотя и реализован в $d = 3$ иным образом, все равно действует аналогично своему $d = 4$ аналогу (3.3.29).

В моделях высших спинов в произвольной размерности [98] ситуация, на первый взгляд, иная, поскольку аналогом четырехмерного $\mathrm{d}_Z = \theta^A \frac{\partial}{\partial Z^A}$ является $\hat{\mathrm{d}} = \theta^{I\alpha} \frac{\partial}{\partial Z^{I\alpha}}$, где I – векторный $o(d-1,2)$-индекс, принимающий $d+1$ значение. Введенные дуальным образом к $Y^{I\alpha}$ переменные $Z^{I\alpha}$, однако, оказываются в большинстве своем излишними. Минимальный набор дополнительных Z-переменных – это $z_\alpha = Z_{d+1,\alpha}$. Формально такая редукция может быть легко осуществлена путем фиксации θ-зависимой части W как $W \sim Z_{i\alpha}\theta^{i\alpha}$ во всех порядках, где $i \in I$ принадлежит лоренц-поперечной части. После такой «фиксации калибровки» пертурбативные ряды упорядочиваются аналогично $d = 4$ форме.

ГЛАВА 4. Лоренц-ковариантность расширенных уравнений высших спинов

Развернутые уравнения теории высших спинов [94, 95], имеющие схематический вид

$$\mathrm{d}W(x) = F(W(x))\,, \tag{4.0.1}$$

где $W\,(x)$ – набор дифференциальных форм полей, а d – пространственно-временной дифференциал де Рама, можно воспринимать как обобщение картановской формулировки гравитации Эйнштейна. Развернутый подход естественным образом обобщает 2-форму кривизны спина 2 на высшие спины, в то же время предоставляя порцию новой информации, такой как алгебра симметрий высших спинов и тесно связанный с ней ингредиент – спектр вспомогательных полей. Связь развернутой формулировки с метрическим языком вовлекает локальную лоренцеву симметрию, которая позволяет переписать полевые компоненты из развернутого подхода в метрический и наоборот. (Напомним, что в картановской гравитации принцип эквивалентности обеспечивается как инвариантностью относительно диффеоморфизмов, так и локальной лоренцевой симметрией.)

В ретроспективе руководящими принципами при поиске нелинейных уравнений теории высших спинов были совместность (4.0.1) и правильный линейный предел над AdS-фоном, являющимся точным вакуумным решением. Совместность автоматически гарантирует калибровочную инвариантность. Инвариантность относительно диффеоморфизмов присутствует по построению. Локальная лоренцева симметрия также изначально встроена благодаря рассмотрению задачи в терминах мультиспиноров, являющихся конечномерными лоренцевыми модулями. Все эти свойства были унаследованы нелинейными уравнениями высших спинов [94, 95]. Позднее было установлено [205], что вид уравнений [95] в значительной степени фиксируется принципом локальной лоренцевой ковариантности, которая может быть легко потеряна в совместных во всех иных отношениях деформациях.

Явная локальная лоренц-ковариантность подразумевает, что уравнения имеют вид

$$D^L W = F^L(W)\,, \tag{4.0.2}$$

где $D^L = \mathrm{d} + \omega^L$ – лоренц-ковариантная производная, действующая стандартным образом на любой лоренцев тензор (мультиспинор) при соглашении, что $D^L\omega^L$ отождествляется с лоренцевой кривизной $R^L = \mathrm{d}\omega^L + \omega^L\omega^L$. Тогда локальная лоренц-симметрия требует, чтобы лоренцева связность ω^L не входила в правую часть (4.0.2). На практике более удобно работать с (4.0.1), чем с (4.0.2), так как $(D^L)^2 \neq 0$. Поэтому необходимо проверять, допускают ли развернутые уравнения (4.0.1) переопределение полей к виду (4.0.2), чтобы контролировать локальную лоренц-ковариантность. Существование такого переопределения полей для систем высших спинов во всех порядках по взаимодействиям было показано в [147, 205] (см также [204]).

Как уже упоминалось в Главе 3, в [133] было предложено обобщение $4d$ уравнений высших спинов, содержащее инвариантные функционалы высших спинов. Вычислить инвариантную плотность высших спинов и сравнить ее с корреляционными функциями голографически дуальной теории в граничном пределе – технически сложная задача даже в низших порядках. Главные трудности связаны со сложной природой теории возмущений высших спинов, что было предметом Главы 3, и вопросом правильного выбора полевых переменных, исследованным недавно в [124, 125, 132]. Связанной с этим сложностью является и то, что расширенные уравнения высших спинов написаны в виде (4.0.1), а не (4.0.2), что ведет к нековариантным и крайне громоздким выражениям для инвариантного функционала, требующим дальнейшего переопределения полей для ковариантизации.

Существование лоренц-ковариантной формулировки для расширенных уравнений высших спинов не было ни предъявлено, ни доказано в литературе. В этой Главе мы найдем явно лоренц-ковариантные расширенные уравнения высших спинов в четырех измерениях. Одной из главных трудностей в получении этих уравнений является то, что лоренц-ковариантный дифференциал D^L не допускает звездочно-алгебраической реализации в некоторой части лоренцевой связности. Это усложняет поиск переопределения полей, ведущего к ковариантной форме уравнений. Вместо поиска такого переопределения мы начнем анализ с части уравнений для пространственно-временных 0-форм, которые могут быть ковариантизированы непосредственно. Совместность этих уравнений накладывает определенные ограничения на вид остальных уравнений, все еще не фиксируя их до конца. На этой стадии анализ требует некоторого угадывания. Важное наблюдение состоит в том, что само требование локальной лоренцевой симметрии ограничивает вид поле-независимых центральных членов в уравнениях, определяющих структуру взаимодействий, которые иначе фиксируются достаточно непрямыми аргументами, связанными с функциональными классами. Кроме того, существование лоренц-ковариантной формулировки сильно зависит от существования зависящих от полей лоренцевых генераторов, построенных из твисторного сектора расширенных уравнений высших спинов. Эти генераторы образуют алгебру, которая обобщает реализацию алгебры Лоренца с помощью деформированного осциллятора, лежащую в основе обычных уравнений высших спинов [95] (см. также [205]).

Лоренц-ковариантные уравнения, предложенные в этой Главе, содержат лоренцеву связность отдельно в дополнение к башне калибровочных полей высших спинов. Условие их совместности приводит к переопределенному набору связей, которые, тем не менее, удовлетворяются вследствие спинорных тождеств Фирца (Схоутена). Чтобы показать динамическую эквивалентность предлагаемых уравнений уравнениям [133], мы используем дополнительную штюкельбергову симметрию, обобщающую найденную в [206] для обычных бозонных уравнений высших спинов. Она позволяет положить дополнительную лоренцеву связность равной нулю, таким образом редуцируя уравнения к их обычному развернутому виду, одновременно с этим предъявляя явный вид переопределения полей, связывающего две формулировки. На первый взгляд, штюкельбергова природа дополнительной лоренцевой связности спина два подразумевает, что она калибровочно-эквивалентна нулю. Однако, если требовать отсутствия в секторе спина 2 мастер-поля высших спинов вклада типа лоренцевой связности, то дополнительная лоренцева связность пертурбативно фиксируется с точностью до настоящих калибровочных преобразований высших спинов.

С технической точки зрения преимущество предлагаемых ковариантных уравнений по сравнению с уравнениями [133] заключается в заметном упрощении пертурбативных операторных рядов, которые они порождают в соответствии с результатами Главы 3. Чтобы показать это, мы анализируем пертурбативное разложение над соответствующим вакуумным решением высших спинов в лоренц-ковариантном подходе и заново выводим операторы теории возмущений. Наш результат воспроизводит формулы Главы 3 с той разницей, что они больше не содержат лоренцевой связности, что ведет к существенному упрощению, особенно в твистованном случае.

Глава организована следующим образом. В Разделе 4.1 мы напоминаем способ построения явно лоренц-ковариантной формулировки $4d$ уравнений Васильева, пригодный также и для расширенной системы высших спинов. Затем в Разделе 4.2 мы обращаемся к проблеме ковариантизации расширенных уравнений высших спинов. Для этого мы обсуждаем обобщение алгебры деформированного осциллятора в Разделе 4.2.2. Явно лоренц-ковариантная форма расширенных уравнений высших спинов предъявляется в Разделе 4.2.3. Наконец, в Разделе 4.3 мы разрабатываем ковариантную теорию возмущений для полученных уравнений.

4.1. Лоренц-ковариантная форма уравнений Васильева

Прежде чем начать обсуждение проблемы лоренц-ковариантности уравнений Васильева, напомним, что лоренц-ковариантная производная мультиспинора $\phi_{\alpha_1\ldots\alpha_n,\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_m}$ имеет вид

$$D^L\phi_{\alpha(n),\dot\alpha(m)} = \mathrm{d}\phi_{\alpha(n),\dot\alpha(m)} - n\omega_\alpha{}^\beta\phi_{\beta\alpha(n-1),\dot\alpha(m)} - m\bar\omega_{\dot\alpha}{}^{\dot\beta}\phi_{\alpha(n),\dot\beta\dot\alpha(m-1)}\,, \tag{4.1.1}$$

где $\omega_{\alpha\beta}$ и $\bar\omega_{\dot\alpha\dot\beta}$ суть голоморфная и антиголоморфная части лоренцевой связности $\omega^{AB} = (\omega_{\alpha\beta}, \bar\omega_{\dot\alpha\dot\beta})$. Лоренцева связность порождает 2-форму лоренцевой кривизны через

$$(D^L)^2\phi_{\alpha(n),\dot\alpha(m)} = -nR_\alpha{}^\beta\phi_{\beta\alpha(n-1),\dot\alpha(m)} - m\bar R_{\dot\alpha}{}^{\dot\beta}\phi_{\alpha(n),\dot\beta\dot\alpha(m-1)}\,, \tag{4.1.2}$$

$$R_{\alpha\beta} = \mathrm{d}\omega_{\alpha\beta} - \omega_\alpha{}^\gamma\omega_{\gamma\beta}\,, \qquad \bar R_{\dot\alpha\dot\beta} = \mathrm{d}\bar\omega_{\dot\alpha\dot\beta} - \bar\omega_{\dot\alpha}{}^{\dot\gamma}\bar\omega_{\dot\gamma\dot\beta}\,, \tag{4.1.3}$$

$$D^L R_{\alpha\beta} = D^L\bar R_{\dot\alpha\dot\beta} = 0\,. \tag{4.1.4}$$

В уравнениях высших спинов (2.1.1)-(2.1.5) все спинор-тензоры упакованы в производящие функции W, S и B с помощью твисторных переменных Y^A и Z^A, а также θ^A в случае S-поля. В этих терминах (4.1.1) может быть переписано как

$$D^L f(Z,Y;\theta) = \left(\mathrm{d} + \omega^{AB}\left(Z_A \frac{\partial}{\partial Z^B} + Y_A \frac{\partial}{\partial Y^B} + \theta_A \frac{\partial}{\partial \theta^B}\right)\right) f(Z,Y;\theta)\,. \qquad (4.1.5)$$

Отметим, что дифференциал по отношению к Y и Z операторам в (4.1.5) может быть реализован в терминах звездочного произведения

$$\omega^{AB}\left(Z_A \frac{\partial}{\partial Z^B} + Y_A \frac{\partial}{\partial Y^B}\right) = \omega^{AB}[L_{AB}, f]_*\,, \qquad (4.1.6)$$

$$L_{AB} = -\frac{i}{4}\left(Y_A Y_B - Z_A Z_B\right). \qquad (4.1.7)$$

Очевидно, $L_{\alpha\beta}$ и $\bar{L}_{\dot\alpha\dot\beta}$ образуют $sl_2(\mathbb{C})$ подалгебру Лоренца. Отсюда следует, что если бы не θ-зависимость поля S, локальная лоренцева симметрия на уравнениях высших спинов могла бы быть восстановлена простым переопределением полей $W \to W + \omega^{AB} L_{AB}$. Действительно, в этом случае дифференциал де Рама d в (2.1.1) и (2.1.3) превращается в лоренцев дифференциал D^L после сдвига на $\omega^{AB} L_{AB}$. Однако, этот сдвиг не действует правильным образом на поле S в (2.1.2), которое, будучи θ-зависимым, несет дополнительные лоренцевы индексы $S = S_\alpha \theta^\alpha + \bar{S}_{\dot\alpha} \bar\theta^{\dot\alpha}$, не вращаемые L_{AB}. Именно здесь становится важным последний член в (4.1.5). Поскольку $\theta_A \frac{\partial}{\partial \theta^B}$ не может быть реализовано через звездочное произведение, для существования лоренцевой симметрии должна быть какая-то особенная причина[1]. В [147, 205] показано, что лоренц-ковариантность следует из свойств алгебры деформированных осцилляторов, как мы сейчас напомним.

Для простоты изложения рассмотрим сейчас бозонную редукцию без топологических степеней свободы в (2.1.1)-(2.1.5). Общий случай целиком ухватывается этим примером. Нас интересует θ-сектор, т.е. сектор пространственно-временных 0-форм, называемый твисторным. Соответствующие уравнения имеют вид

[1]Наивное решение состоит в обобщении звездочного произведения, образованного Y и Z, на грассмановы переменные θ. Однако оказывается, что такое обобщение, хотя и делает формулировку явно лоренц-ковариантной, меняет физическое содержание уравнений.

$$[S_\alpha, S_\beta]_* = -2i\epsilon_{\alpha\beta}(1 + \eta B * \varkappa)\,, \tag{4.1.8}$$
$$\{S_\alpha, B * \varkappa\}_* = 0\,, \tag{4.1.9}$$

(аналогично в точечном секторе), где поля S и B теперь не зависят от k и $\bar{k}$. Уравнения (4.1.8)-(4.1.9) имеют вид алгебры деформированных осцилляторов, которая обладает $sp(2)$-симметрией [207, 208]. А именно, генераторы

$$M_{\alpha\beta} = \frac{i}{8}\,\{S_\alpha, S_\beta\}_* \tag{4.1.10}$$

образуют алгебру $sp(2)$ при произвольном B,

$$[M_{\alpha\alpha}, M_{\beta\beta}]_* = 2\epsilon_{\alpha\beta}M_{\alpha\beta}\,. \tag{4.1.11}$$

Вместе с генераторами из антиголоморфного сектора они порождают полную алгебру Лоренца $sl_2(\mathbb{C})$. В частности, согласно (4.1.8), (4.1.10), эти генераторы реализуют преобразования Лоренца поля S через само себя

$$[M_{\alpha\alpha}, S_\beta]_* = \epsilon_{\alpha\beta}S_\alpha\,. \tag{4.1.12}$$

Поскольку (4.1.12) воспроизводит действие θ-слагаемого в (4.1.5), можно ожидать, что поле-зависящие генераторы $M_{\alpha\beta}$ и $\bar{M}_{\dot\alpha\dot\beta}$ лежат в основе переопределения полей, восстанавливающего лоренц-симметрию. Действительно, на нелинейном уровне действие алгебры Лоренца состоит из двух частей (4.1.7) и (4.1.12), предполагая следующее переопределение полей: $W \to W + \omega^{AB}(L_{AB} + M_{AB})$. Правильность этого переопределения может быть проверена непосредственно [204, 205]. Мы, однако, последуем иным путем, который оказывается наиболее полезен в более сложном случае расширенной системы высших спинов.

Предположим, что в принципе существует переопределение полей, которое делает локальную лоренц-симметрию явной. Так как такое переопределение содержит лоренцеву связность, оно не может влиять на пространственно-временные 0-формы S и B. Это означает, что бозонные уравнения (4.1.8) и (4.1.9) не деформируются. Единственное поле, которое следует переопределить, – это пространственно-временная 1-форма W. Результатом переопределения полей $W \to W' = W + \omega^{AB}(\dots)$ для уравнений

$$\mathrm{d}S_\alpha + [W, S_\alpha]_* = 0\,, \tag{4.1.13}$$

$$\mathrm{d}B + W * B - B * \pi(W) = 0\,, \tag{4.1.14}$$

где $\pi(y, \bar{y}, z, \bar{z}) = (-y, \bar{y}, -z, \bar{z})$ будет ковариантизация вида

$$D^L S_\alpha + [W', S_\alpha]_* = 0\,, \tag{4.1.15}$$

$$D^L B + W' * B - B * \pi(W') = 0\,, \tag{4.1.16}$$

с W', не содержащей лоренцевой связности. Условие совместности (4.1.2)

$$(D^L)^2 S_\alpha = R^{\beta\gamma}[L_{\beta\gamma}, S_\alpha]_* - R_\alpha{}^\beta S_\beta, \tag{4.1.17}$$

при наложении на (4.1.15), означает, вместе с (4.1.10), что

$$[D^L W' + W' * W' + R^{\beta\gamma}(L_{\beta\gamma} - \frac{i}{4} S_\beta * S_\gamma), S_\alpha]_* = 0, \tag{4.1.18}$$

предполагая, в конечном итоге, следующую лоренц-ковариантную систему

$$D^L W' + W' * W' + R^{AB}\left(L_{AB} - \frac{i}{4} S_A * S_B\right) = 0\,, \tag{4.1.19}$$

$$R^{AB} := \mathrm{d}\omega^{AB} + \omega^A{}_C \omega^{BC}\,, \tag{4.1.20}$$

$$D^L S_A + [W', S_A]_* = 0\,, \tag{4.1.21}$$

$$D^L B + W' * B - B * \pi(W') = 0\,, \tag{4.1.22}$$

$$[S_\alpha, S_\beta]_* = -2i\epsilon_{\alpha\beta}(1 + \eta B * \varkappa)\,, \qquad [\bar{S}_{\dot\alpha}, \bar{S}_{\dot\beta}]_* = -2i\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}(1 + \bar\eta B * \bar\varkappa)\,, \tag{4.1.23}$$

$$\{S_\alpha, B * \varkappa\}_* = 0\,, \qquad \{\bar{S}_{\dot\alpha}, B * \bar\varkappa\}_* = 0\,. \tag{4.1.24}$$

Полученные уравнения совместны и обладают явной локальной лоренц-симметрией. Путем переопределения полей

$$W' = W - \omega^{AB}\left(L_{AB} - \frac{i}{4} S_A * S_B\right) \tag{4.1.25}$$

(4.1.19)-(4.1.24) сводится к бозонной версии (2.1.1)-(2.1.5).

Прежде чем перейти к ковариантизации общего случая (2.1.18), (2.1.19), сделаем несколько комментариев. Во-первых, мы видим, что твисторный сектор уравнений высших спинов играет решающую роль для локальной лоренц-симметрии. А именно, возможность записать ковариантные уравнения через переопределение полей основывается на существовании поле-зависимых лоренцевых генераторов (4.1.10), построенных из on-shell твисторных полей. К примеру, как будет показано ниже, можно деформировать (2.1.18), отбросив $\theta^A\theta_A$ слагаемое, что не нарушит совместность, но локальная лоренцева симметрия при этом будет потеряна. Мы будем опираться на анализ твисторного сектора и при анализе более сложных расширенных уравнений высших спинов.

Во-вторых, полученные уравнения (4.1.19)-(4.1.24) не определяют саму по себе лоренцеву связность ω^{AB}. Как показано в [206], где были выписаны лоренц-ковариантные уравнения, эта система обладает штюкельберговой симметрией, позволяющей откалибровать ω^{AB} в нуль. Связность, тем не менее, может быть пертурбативно определена с точностью до калибровочных преобразований высших спинов, если потребовать, чтобы поле W' не содержало компонент типа связности. Это означает, что физическая лоренцева связность, определяемая ω^{AB}, однозначна. Физические поля обычно отождествляют с когомологиями, представляемыми Z-независимыми функциями. Поэтому необходимо, чтобы в W' не было (анти)голоморфных билинейных компонент, которые соответствовали бы еще одному полю типа связности. Таким образом, мы требуем

$$\frac{\partial^2}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} W'\Big|_{Z,Y=0} = \frac{\partial^2}{\partial \bar{y}^{\dot\alpha} \partial \bar{y}^{\dot\beta}} W'\Big|_{Z,Y=0} = 0\,. \tag{4.1.26}$$

Теперь рассмотрим общий случай уравнений высших спинов, содержащих двойной набор физических полей вместе с топологическими, в соответствии с (2.1.18)-(2.1.19). Чтобы сделать их лоренц-ковариантными, используем следующий трюк. Заметим, что S-член в скобках (4.1.19) может быть формально представлен в виде $\dfrac{\partial}{\partial \theta^A}\mathcal{W}$. Этот оператор, однако, нарушает цепное правило для произведения полей из-за зависимости от внешних операторов Клейна k и $\bar{k}$. Чтобы исправить это, введем, аналогично [195], дополнительный оператор ρ, антикоммутирующий с k и коммутирующий со всем остальным, и $\bar\rho$, антикоммутирующий с $\bar{k}$ и коммутирующий со всем остальным,

$$\rho k + k\rho = 0\,, \qquad \rho\theta - \theta\rho = 0\,, \qquad \rho^2 = 1\,. \tag{4.1.27}$$

Эти операторы учитывают смену знака внешних операторов Клейна k и $\bar{k}$ в мастер-полях и позволяют определить производные

$$\nabla_\alpha := \rho \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha}\,, \qquad \bar{\nabla}_{\dot\alpha} := \bar{\rho} \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\dot\alpha}}, \tag{4.1.28}$$

соблюдающие цепное правило

$$\nabla_A (F^{(p)} * G^{(q)}) = \nabla_A F^{(p)} * G^{(q)} + (-)^p F^{(p)} * \nabla_A G^{(q)}\,. \tag{4.1.29}$$

Это дает возможность обобщить исследованный нами бозонный случай до следующих лоренц-ковариантных уравнений высших спинов общего вида

$$D^L \mathbb{W} + \mathbb{W} * \mathbb{W} + R^{AB} \left(L_{AB} - \frac{i}{4} \nabla_A \mathbb{W} * \nabla_B \mathbb{W} \right) = i\theta^A \theta_A + i\eta B * \gamma + i\bar\eta B * \bar\gamma\,, \tag{4.1.30}$$

$$D^L B + [\mathbb{W}, B]_* = 0\,. \tag{4.1.31}$$

Заметим, что зависимость от ρ и $\bar\rho$ выпадает из (4.1.30), порождая лишь некоторые дополнительные знаки. Совместность (4.1.30), (4.1.31) легко проверить, используя

$$(D^L)^2 f(Z, Y; \theta) = R^{AB} [L_{AB}, f]_* + R^{AB} \theta_A \frac{\partial}{\partial \theta^B} f\,, \tag{4.1.32}$$

$$D^L (R^{AB} L_{AB}) = 0\,. \tag{4.1.33}$$

При $\omega_{AB} = 0$ мы возвращаемся к (2.1.18), (2.1.19). При $\omega_{AB} \neq 0$, следуя [206], мы обнаруживаем следующую штюкельбергову симметрию

$$\delta_\xi \omega_{AB} = \xi_{AB}\,, \qquad \delta_\xi B = 0\,, \tag{4.1.34}$$

$$\delta_\xi \mathbb{W} = -\xi^{AB} \left(L_{AB} - \frac{i}{4} \nabla_A \mathbb{W} * \nabla_B \mathbb{W} \right)\,. \tag{4.1.35}$$

Интересно отметить, что простым перемасштабированием θ-переменных и мастер-полей можно привести первый член в правой части (2.1.18) к виду $i\nu\theta^A\theta_A$ с произвольным вещественным числом ν. Такое перемасштабирование модифицирует и соответствующее ковариантное уравнение (4.1.30)

$$D^L \mathbb{W} + \mathbb{W} * \mathbb{W} + R^{AB} \left(L_{AB} - \frac{i}{4\nu} \nabla_A \mathbb{W} * \nabla_B \mathbb{W} \right) = i\nu\theta^A \theta_A + i\eta B * \gamma + i\bar\eta B * \bar\gamma\,, \tag{4.1.36}$$

что делает предел $\nu \to 0$ бессмысленным, в отличие от такого же предела в нековариантной системе[2]. Таким образом, само требование локальной лоренц-симметрии исключает некоторые формально совместные системы.

4.2. Ковариантизация расширенной системы высших спинов

4.2.1. Лоренц-ковариантность в твистованном секторе

Расширенная система $4d$ уравнений высших спинов [133], позволяющая конструировать инвариантные функционалы, была представлена в Главе 3, (3.0.1)-(3.0.3). Она инвариантна относительно калибровочных преобразований

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{W} &= \mathrm{d}\epsilon + [\mathcal{W},\epsilon]_* + i\eta\xi * \gamma + i\bar{\eta}\xi * \bar{\gamma} + \zeta(x)\,, && (4.2.1)\\ \delta\mathcal{B} &= \mathrm{d}\xi + \{\mathcal{W},\xi\}_* + [\mathcal{B},\epsilon]_*\,. && (4.2.2)\\ \delta\mathcal{L} &= \mathrm{d}\zeta(x)\,. && (4.2.3)\end{aligned}$$

Наша цель – доказать, что (3.0.1)-(3.0.3) обладает лоренцевой симметрией, переписав ее в явно лоренц-ковариантной форме. Ключевой факт здесь – это существование лоренцевых генераторов в твисторном секторе (3.0.1), (3.0.2), как мы сейчас покажем.

Прежде всего отметим, что, поскольку плотность инвариантного функционала $\mathcal{L}(x)$ зависит только от пространственно-временных координат и дифференциалов, она является лоренцевым скаляром, и, следовательно, уравнение (3.0.3) уже является лоренц-ковариантным. Поэтому в последующем мы не будем его рассматривать.

Обозначим компоненты твисторных полей следующим образом

$$\mathcal{W}\Big|_{\mathrm{d}x=0} = s_A\theta^A + 2t_\alpha\theta^\alpha\delta^2(\bar{\theta}) + 2\bar{t}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\delta^2(\theta)\,, \qquad (4.2.4)$$

$$\mathcal{B}\Big|_{\mathrm{d}x=0} = B + 2b\delta^2(\theta) + 2\bar{b}\delta^2(\bar{\theta}) + b_{\alpha\dot{\alpha}}\theta^\alpha\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\,. \qquad (4.2.5)$$

Рассматривая для краткости бозонную редукцию с $k\bar{k}=1$, из θ-сектора (3.0.1),

[2]Впрочем, в нековариантной системе предел $\nu\to 0$ неудовлетворителен физически по той причине, что в линейном порядке он не приводит к уравнения Фронсдала.

(3.0.2) мы получаем следующие алгебраические соотношения

$$[s_\alpha, s_\beta]_* = -2i\epsilon_{\alpha\beta}(1 + \eta B * \varkappa)\,, \qquad [s_\alpha, \bar{s}_{\dot\alpha}]_* = 0\,, \tag{4.2.6}$$

$$[t_\alpha, s^\alpha]_* + [\bar{t}_{\dot\alpha}, \bar{s}^{\dot\alpha}]_* = -2i(\eta\bar{b} * \varkappa + \bar\eta b * \bar\varkappa + g\varkappa * \bar\varkappa)\,, \tag{4.2.7}$$

$$s_\alpha * B + B * \pi(s_\alpha) = 0\,, \tag{4.2.8}$$

$$s_\alpha * \bar{b} - \bar{b} * \bar\pi(s_\alpha) + t_\alpha * B + B * \pi(t_\alpha) = 0\,, \tag{4.2.9}$$

$$\frac{1}{2}\left(s_\alpha * b^\alpha{}_{\dot\alpha} + b^\alpha{}_{\dot\alpha} * \pi(s_\alpha)\right) + \bar{t}_{\dot\alpha} * B - B * \pi(\bar{t}_{\dot\alpha}) = 0\,. \tag{4.2.10}$$

Важное наблюдение состоит в том, что уравнения (4.2.6)-(4.2.10) допускают лоренцеву симметрию, которая может быть реализована как калибровочное преобразование (4.2.1). Проще всего это увидеть для случая $\mathcal{B} = 0$. Действительно, из калибровочных преобразований

$$\delta_\Lambda s_\alpha = [s_\alpha, \epsilon]_*\,, \tag{4.2.11}$$

$$\delta t_\alpha = [t_\alpha, \epsilon]_* + [\phi, s_\alpha] + [\psi_\alpha{}^{\dot\beta}, \bar{s}_{\dot\beta}]\,, \tag{4.2.12}$$

$$\delta_\Lambda \bar{t}_{\dot\alpha} = [\bar{t}_{\dot\alpha}, \epsilon]_* + [\bar\phi, \bar{s}_{\dot\alpha}] - [\bar\psi^\beta{}_{\dot\alpha}, s_\beta]\,, \tag{4.2.13}$$

где ϵ, ϕ and $\psi_{\alpha\dot\alpha}$ суть калибровочные параметры, следует, что $\delta_\Lambda s_\alpha = \Lambda_\alpha{}^\beta s_\beta$ и $\delta_\Lambda t_\alpha = \Lambda_\alpha{}^\beta t_\beta$, если

$$\epsilon = -\frac{i}{4}\Lambda^{\alpha\beta} s_\alpha * s_\beta\,, \qquad \phi = \frac{i}{4}\Lambda^{\alpha\beta}\left\{s_\alpha, t_\beta\right\}_*\,, \qquad \psi_{\alpha\dot\alpha} = -\frac{i}{4}\Lambda_\alpha{}^\beta\left\{s_\beta, \bar{t}_{\dot\alpha}\right\}_*\,. \tag{4.2.14}$$

Это указывает на то, что и вся система (3.0.1)-(3.0.2) должна быть лоренц-ковариантой после правильного переопределения полей.

4.2.2. Обобщенная алгебра деформированных осцилляторов

Аналогично исходной конструкции (4.1.8), (4.1.9), лежащей в основе нелинейных уравнений высших спинов, уравнения (4.2.6)-(4.2.10) порождают обобщение алгебры деформированных осцилляторов.

Обычная алгебра осцилляторов (алгебра Вейля) – это обертывающая алгебра соотношений

$$[y_\alpha, y_\beta] = -2i\epsilon_{\alpha\beta}\,. \tag{4.2.15}$$

Она может быть обобщена добавлением внешнего элемента K, антикоммутирующего с y_α, который называется оператором Клейна

$$\{y_\alpha, K\} = 0\,, \qquad KK = 1. \tag{4.2.16}$$

Оператор Клейна порождает однопараметрическую деформацию алгебры

$$[y_\alpha, y_\beta] = -2i\epsilon_{\alpha\beta}(1 + \nu K)\,, \tag{4.2.17}$$

где ν – это произвольная константа (центральный элемент). Тождество Якоби

$$[[y_\alpha, y_\beta]\,, y_\gamma] + \text{цикл.} = 0 \tag{4.2.18}$$

для (4.2.17) удовлетворяется автоматически, если индексы α, β, γ принимают два значения. Как уже подчеркивалось в контексте обсуждения (4.1.10), примечательным свойством (4.2.17) является то, что при любом значении ν билинейные комбинации y образуют алгебру $sp\,(2)$

$$M_{\alpha\beta} = \{y_\alpha, y_\beta\}\;, \qquad [M_{\alpha\alpha}, M_{\beta\beta}] = -16i\epsilon_{\alpha\beta}M_{\alpha\beta}\,. \tag{4.2.19}$$

Добавляя вторую копию деформированного осциллятора $\bar{y}_{\dot\alpha}$ в точечном секторе, мы расширяем эту $sp(2)$ до четырехмерной алгебры Лоренца $sp\,(2|\mathbb{C})$. Уравнения (4.2.6)-(4.2.10) образуют обобщение (4.2.17), которое все еще обладает $sp(2|\mathbb{C})$-симметрией. Простейшее такое расширение возникает, если положить $B = const$ и $b = 0$, когда определяющие соотношения принимают вид

$$[s_\alpha, s_\beta] = -2i\epsilon_{\alpha\beta}(1 + \nu K)\,, \qquad [\bar{s}_{\dot\alpha}, \bar{s}_{\dot\beta}] = -2i\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}(1 + \nu \bar{K})\,, \tag{4.2.20}$$

$$\{s_\alpha, K\} = 0\,, \qquad \{\bar{s}_{\dot\alpha}, \bar{K}\} = 0\,, \tag{4.2.21}$$

$$\{t_\alpha, K\} = 0\,, \qquad \{\bar{t}_{\dot\alpha}, \bar{K}\} = 0\,, \tag{4.2.22}$$

$$[s_\alpha, \bar{s}_{\dot\alpha}] = 0\,, \qquad [t_\alpha, s^\alpha] + [\bar{t}_{\dot\alpha}, \bar{s}^{\dot\alpha}] = 2igK\bar{K}\,. \tag{4.2.23}$$

Поскольку часть $sp(2) \oplus sp(2)$ преобразований Лоренца в (4.2.12) и (4.2.13), связанная с ϕ, $\bar\phi$, ψ и $\bar\psi$, реализуется калибровочными симметриями полей старших дифференциальных форм, можно показать, что $sp(2) \oplus sp(2)$ лоренц-симметрия все еще порождается $M_{\alpha\beta}$ (4.2.19), действующими на фактор-алгебре универсальной обертывающей алгебры (4.2.20)-(4.2.23) по идеалу, порожденному старшими калибровочными преобразованиями.

4.2.3. Лоренц-ковариантные уравнения

Чтобы найти переопределение полей, приводящее (3.0.1) и 3.0.2) к явно лоренц-ковариантной форме, мы вновь используем то обстоятельство, что такое переопределение, содержащее лоренцевы связности $\omega_{\alpha\beta}$, $\bar{\omega}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$, не затрагивает твисторные поля (пространственно-временные 0-формы). Поэтому ковариантизованная версия пространственно-временной эволюции этих полей воспроизводится заменой d на D^L в исходных уравнениях (3.0.1), (3.0.2). Они, в свою очередь, из-за условий совместности (4.1.32) налагают ограничения на остальные уравнения, все еще не фиксируя их полностью. Опуская технические детали, приведем окончательный ответ для явно лоренц-ковариантных расширенных уравнений высших спинов

$$D^L\mathcal{W} + \mathcal{W} * \mathcal{W} + R^{AB}\left(L_{AB} - \frac{i}{4}\nabla_A\mathcal{W} * \nabla_B\mathcal{W}\right) = i\theta^A\theta_A + i\eta\mathcal{B} * \gamma + i\bar{\eta}\mathcal{B} * \bar{\gamma} +$$
$$+ ig\gamma\bar{\gamma} + \mathcal{L} - \frac{\eta}{4}R^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\mathcal{B} * \nabla_\beta\gamma - \frac{\bar{\eta}}{4}\bar{R}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\nabla_{\dot{\alpha}}\mathcal{B} * \nabla_{\dot{\beta}}\bar{\gamma} +$$
$$+ \frac{i\eta}{32}R^{\alpha\alpha}R^{\beta\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta\mathcal{B} * \nabla_\alpha\nabla_\beta\gamma + \frac{i\bar{\eta}}{32}\bar{R}^{\dot{\alpha}\dot{\alpha}}\bar{R}^{\dot{\beta}\dot{\beta}}\nabla_{\dot{\alpha}}\nabla_{\dot{\beta}}\mathcal{B} * \nabla_{\dot{\alpha}}\nabla_{\dot{\beta}}\bar{\gamma}\,, \tag{4.2.24}$$

$$D^L\mathcal{B} + [\mathcal{W}, \mathcal{B}]_* - \frac{i}{4}R^{AB}\left\{\nabla_A\mathcal{B}, \nabla_B\mathcal{W}\right\}_* = 0\,. \tag{4.2.25}$$

Уравнения (4.2.24), (4.2.25) воспроизводят (3.0.1), (3.0.2) при $\omega_{AB} = 0$, причем в этом случае лоренцева связность содержится в $\mathcal{W}$. При $\omega_{AB} \neq 0$ две системы связаны между собой переопределением полей, которое инфинитезимально может быть реализовано как преобразование Штюкельберга

$$\delta_\xi\omega_{AB} = \xi_{AB}\,, \tag{4.2.26}$$

$$\delta_\xi\mathcal{B} = \frac{i}{4}\xi^{AB}\{\nabla_A\mathcal{B}, \nabla_B\mathcal{W}\}_*\,, \tag{4.2.27}$$

$$\delta_\xi\mathcal{W} = -\xi^{\alpha\beta}(L_{\alpha\beta} - \frac{i}{4}\nabla_\alpha\mathcal{W} * \nabla_\beta\mathcal{W}) - \frac{\eta}{4}\xi^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\mathcal{B} * \nabla_\beta\gamma +$$
$$+ \frac{i\eta}{32}(\xi^{\alpha\alpha}R^{\beta\beta} + \xi^{\beta\beta}R^{\alpha\alpha})\nabla_\alpha\nabla_\beta\mathcal{B} * \nabla_\alpha\nabla_\beta\gamma + c.c. \tag{4.2.28}$$

Проверка совместности (4.2.24), (4.2.25) несколько утомительна и требует использования тождеств Фирца. Опишем кратко этот процесс. Действуя производной D^L на (4.2.24), (4.2.25) и пользуясь (4.1.32), мы получаем алгебраические следствия, градуированные по степеням лоренцевой кривизны R_{AB}. Здесь следует помнить, что среди различных билинейных комбинаций полей, входящих в эти уравнения, действительно давать вклад будут только те, чья степень формы не превышет степень $D^L\mathcal{W}$ в (4.2.24) и $D^L\mathcal{B}$ в (4.2.25), остальные же можно отбросить. Таким образом, остается проверить независимые условия совместности с $O(R^0)$, $O(R)$ и $O(R^2)$.

$O(R^0)$ условия удовлетворяются автоматически, так как они соответствуют совместной исходной системе (3.0.1), (3.0.2). Первый нетривиальный вклад, приходящий из $O(R)$-членов, дает

$$\{\mathcal{B}*\nabla_\alpha\gamma,\nabla_\alpha\mathcal{W}\}_* + [\nabla_\alpha\mathcal{B}*\nabla_\alpha\gamma,\mathcal{W}]_* - \nabla_\alpha\,[\mathcal{W},\mathcal{B}]_* * \nabla_\alpha\gamma = 0\,, \tag{4.2.29}$$

(аналогично для антиголоморфной части), что эквивалентно

$$-\left(\mathcal{B}*\nabla_\alpha\gamma*\nabla_\alpha\mathcal{W} + \nabla_\alpha\mathcal{B}*\nabla_\alpha\gamma*\mathcal{W}\right) = \left(\nabla_\alpha\mathcal{B}*\mathcal{W} + \mathcal{B}*\nabla_\alpha\mathcal{W}\right)*\nabla_\alpha\gamma\,. \tag{4.2.30}$$

Глядя на (4.2.30), мы видим, что θ^2-компоненты $\mathcal{W}$ и $\mathcal{B}$ не дают вклада из-за $\theta^3\equiv 0$ и симметризации $\theta_\alpha\theta_\alpha\equiv 0$. $\theta_\alpha\theta_\alpha\equiv 0$ также означает, что члены с обоими полями $\mathcal{W}$ и $\mathcal{B}$, линейными по θ, не дают вклада. Поэтому в левой части (4.2.30) выживет только $\mathcal{W}$, линейное по θ-компонентам в первом члене и θ-независимое во втором. Используя $\nabla_\alpha\gamma*\mathcal{W} = \mathcal{W}(\theta,-\bar{\theta},-\mathrm{d}x)*\nabla_\alpha\gamma = -\mathcal{W}*\nabla_\alpha\gamma$ для θ-независимых компонент и $\nabla_\alpha\gamma*\nabla_\alpha\mathcal{W} = -\nabla_\alpha\mathcal{W}(\theta,-\bar{\theta},-\mathrm{d}x)*\nabla_\alpha\gamma = -\nabla_\alpha\mathcal{W}*\nabla_\alpha\gamma$ для линейных по θ, мы находим, что (4.2.30) выполняется.

Для (4.2.25) $O(R)$-совместность означает

$$[\mathcal{B},\nabla_\alpha\mathcal{B}*\nabla_\alpha\gamma]_* = [\mathcal{B}*\nabla_\alpha\gamma,\nabla_\alpha\mathcal{B}]_*\;, \tag{4.2.31}$$

что также верно в силу схожих аргументов.

Анализируя совместность (4.2.24), (4.2.25) до уровня R^2, необходимо помнить, что только дифференциальные формы степени $\mathrm{d}x^4\theta^A$ могут появиться в $(D^L)^2\mathcal{W}+\ldots$ и $\mathrm{d}x^4$ в $(D^L)^2\mathcal{B}+\ldots$. Действительно, степень $\mathcal{W}$ равна $(p,3-p)$, где $p=0,\ldots,3$ соответствует $\mathrm{d}x^p$. Поэтому $\#(D^L)^2\mathcal{W}=(p+2,3-p)$. Далее, присутствие топ-формы RR означает, что $p=2$, так что единственные члены, которые следует анализировать в условиях совместности, – это $\mathrm{d}x^4\theta^A$. Те же аргументы применимы и к уравнению $(D^L)^2\mathcal{B}+\ldots$. На практике это приводит к тому, что нужно проверять вклад только твисторного сектора. В итоге, условие совместности для (4.2.24), (4.2.25) оказывается выполненным. Изложенный анализ подразумевает, в частности, что если бы система (4.1.30), (4.1.31) содержала старшие дифференциальные формы, она не была бы лоренц-ковариантной без учета правильной деформации в секторе старших дифференциальных форм.

Другой интересный момент заключается в том, что лоренцева симметрия обосновывает выбор 4-формы центрального элемента в (3.0.1) именно в виде $ig\gamma * \bar{\gamma}$, хотя условие совместности требует лишь ее центральности. Чтобы увидеть это, предположим, что вместо $ig\gamma * \bar{\gamma}$ в (3.0.1) стоит произвольный центральный элемент c, являющийся 4-формой. Тогда совместность соответствующего лоренц-ковариантного уравнения (4.2.24) требует, в частности,

$$R^{AB} \{\nabla_A c, \nabla_B \mathcal{W}\}_* \equiv 0\,, \tag{4.2.32}$$

что выполняется для $c = ig\gamma * \bar{\gamma}$, но *не* выполняется для других θ^4-центральных элементов, например, для $c = \theta^\alpha \theta_\alpha \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$. Поэтому (4.2.24), (4.2.25) совместны только для специального центрального элемента $ig\gamma * \bar{\gamma}$, являющегося источником для плотности инвариантного функционала $\mathcal{L}$.

В проведенном анализе расширенных уравнений высших спинов (3.0.1), (3.0.2) мы выбрали их фазу в виде не зависящего от полей комплексного числа η. Обобщение предложенной схемы лоренц-ковариантизации на произвольную $F_*(\mathcal{B})$ не составляет труда, сводясь к незначительной модификации (4.2.24), (4.2.25). А именно, чтобы ввести зависящую от полей фазу лоренц-ковариантным образом, нужно просто заменить $\eta\mathcal{B}$ на $F_*(\mathcal{B})$, $\bar{\eta}\mathcal{B}$ на $\bar{F}_*(\mathcal{B})$ и g на $G_*(\mathcal{B})$ везде в правой части (4.2.24), не меняя (4.2.25). Модифицированные таким образом уравнения остаются совместными.

4.3. Ковариантная теория возмущений

Уравнения (3.0.1)-(3.0.2) естественным образом обобщают уравнения высших спинов (2.1.18)-(2.1.19) в том смысле, что все добавленные старшие формы вкладываются в структуру исходных уравнений. Новым ингредиентом является центральный элемент $ig\gamma * \bar{\gamma}$, пертурбативно порождающий нетривиальный инвариантный функционал. Он также обеспечивает ненулевоевакуумное значение для поля $\mathcal{W}_0$, которое теперь оказывается неполиномиальным по осцилляторам. Однако самым существенным усложнением теории возмущений является то, что, во-первых, число элементарных гомотопий в уравнениях высших спинов растет комбинаторно со степенью дифференциальных форм, а, во-вторых, ответы оказываются громоздкими из-за членов, содержащих фоновую лоренцеву связность ω_{AB}.

Как обсуждалось в Главе 3, можно справиться с первой проблемой, отыскав явные выражения для операторов, возникающих из повторяющихся гомотопических интегрирований. Полученные формулы автоматически учитывают комбинаторные вклады членов, приходящих из различных дифференциальных форм. Вторая же проблема связана с тем, что лоренцева симметрия в (3.0.1)-(3.0.2) реализована неявно. Нековариантные члены могут быть устранены путем переопределения полей (4.2.26)-(4.2.28). Однако гораздо более простой способ, который мы рассмотрим в этом Разделе, состоит в том, чтобы перенести теорию возмущений Главы 3 в новую лоренц-ковариантную систему (4.2.24)-(4.2.25).

Начнем с подходящего вакуумного решения (4.2.24)-(4.2.25), соответствующего AdS_4 пространству–времени,

$$\mathcal{W}_0=\frac{i}{2}e^{\alpha\dot\alpha}y_\alpha\bar y_{\dot\alpha}+\theta^A Z_A+\Omega\,,\qquad R_0^{\alpha\beta}=-e^{\alpha}{}_{\dot\beta}e^{\beta\dot\beta}\,,\qquad \mathcal{B}_0=0\,,\tag{4.3.1}$$

где $e^{\alpha\dot\alpha}$ – поле AdS_4-тетрады, а Ω – вакуумное значение 3-формы, конкретный вид которого сейчас не важен и будет уточнен впоследствии. Используя (4.3.1) как фон для теории возмущений, мы видим, что и (4.2.24), и (4.2.25) ведут к сходным уравнениям

$$D^L f+[S_0,f]_*+[W_0,f]_*-\frac{i}{4}R^{AB}\left\{\nabla_A f,\nabla_B S_0\right\}_*=J\,.\tag{4.3.2}$$

Здесь $S_0=\theta^A Z_A$, $W_0=\frac{i}{2}e^{\alpha\dot\alpha}y_\alpha\bar y_{\dot\alpha}$ и f – либо $\mathcal{W}$, либо $\mathcal{B}$, тогда как J обозначает оставшиеся в (4.2.24) или (4.2.25) члены. Зависимость от внешних операторов Клейна в f, как обычно, ведет к различным реализациям коммутатора $[W_0,f]_*$: присоединенному либо твистованному. Отметим также, что все остальные члены в левой части (4.3.2) в обоих случаях реализуются одинаковым образом. Рассмотрим два случая более подробно.

4.3.1. Присоединенный случай

В этом случае f либо не зависит от k и $\bar{k}$, либо билинейно по ним. Вынесем наружу зависимость от операторов Клейна, чтобы f их не содержало. Тогда имеем

$$\mathcal{D}_{ad} f - 2i\theta^A \frac{\partial}{\partial Z^A} f = J\,, \tag{4.3.3}$$

где

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{ad} =& \mathrm{d} + \omega_L^{AB}\left(Y_A \frac{\partial}{\partial Y^B} + Z_A \frac{\partial}{\partial Z^B} + \theta_A \frac{\partial}{\partial \theta^B}\right) - \frac{i}{2} R^{AB}\left(Z_A \frac{\partial}{\partial \theta^B} + i \frac{\partial}{\partial Y^A}\frac{\partial}{\partial \theta^B}\right) - \\ & - e^{AB}\left(Y_A \frac{\partial}{\partial Y^B} - i \frac{\partial}{\partial Z^A}\frac{\partial}{\partial Y^B}\right)\,.\end{aligned} \tag{4.3.4}$$

Эффективный способ получения гомотопий для операторных последовательностей уравнений высших спинов, основанный на преобразованиях (3.3.21), (3.3.35), рассматривался в Главе 3. Кратко сформулируем использованную там схему в более общем и полезном для лоренц-ковариантной задачи виде. Итак, нас интересует общее решение уравнения вида

$$\Delta f := \mathrm{d} f + \mathcal{D} f = J\,, \tag{4.3.5}$$

где

$$\Delta^2 = 0\,, \quad \mathrm{d}^2 = 0\,, \quad \Delta J = 0. \tag{4.3.6}$$

Если известно разложение единицы для d

$$\{\mathrm{d}, \mathrm{d}^*\} + \hat{h} = Id \tag{4.3.7}$$

и выполняется соотношение

$$\{\mathrm{d}^*, \mathcal{D}\} = 0 \tag{4.3.8}$$

(из которого, с учетом (4.3.7), следует, в частности, $\left[\hat{h}, \mathcal{D}\right] = 0$), то общее решение (4.3.5) можно записать в виде

$$f = \mathrm{d}^* J + g + \Delta\epsilon + \chi\,, \tag{4.3.9}$$

где произвольная функция ϵ и общая когомология $\chi \in H(\Delta)$ образуют общее решение однородного уравнения, а $g \in H(\mathrm{d})$ разрешает часть уравнения, лежащую в когомологиях d,

$$\mathcal{D}g = \hat{h}J\,. \tag{4.3.10}$$

Таким образом, единственным условием, определяющим возможность записи общего решения для операторной последовательности (напомним, что задача решения когомологического уравнения (4.3.10) не рассматривается) на основе разложения единицы (4.3.7), является соотношение (4.3.8). Фактически, роль использованных в Главе 3 преобразований (3.3.21), (3.3.35) заключалась в том, что для уравнений на преобразованные функции выполнялось 4.3.8, в отличие от исходных.

Воспользуемся этой схемой для построения гомотопии оператора из (4.3.3). Здесь у нас $\Delta_{ad} = \mathcal{D}_{ad} - 2i\mathrm{d}_Z$, где $\mathrm{d}_Z = \theta^A \dfrac{\partial}{\partial Z^A}$. Для d_Z, как обычно, выбираем

$$\mathrm{d}^* f(Z,Y;\theta) = Z^A \frac{\partial}{\partial \theta^A} \int_0^1 \frac{dt}{t} f(tZ,Y;t\theta) \tag{4.3.11}$$

$$\hat{h} f(Z,Y;\theta) = f(0,Y;0)\,. \tag{4.3.12}$$

Однако в данном случае (4.3.8) не выполняется из-за членов $\frac{1}{2}R^{AB}\frac{\partial^2}{\partial Y^A \partial \theta^B}$ и $ie^{AB}\frac{\partial^2}{\partial Z^A \partial Y^B}$ в (4.3.4), которые не антикоммутируют с d^*.

Чтобы обойти это препятствие, выполним преобразование на изучаемом пространстве функций

$$f\left(Z;Y;\theta\right) \longrightarrow \tilde{f}\left(Z;Y;\theta\right) = \exp\left\{-e^{AB}\frac{\partial^2}{\partial Y^A \partial \theta^B}\right\} f\left(Z;Y;\theta\right)\,. \tag{4.3.13}$$

В терминах новых функций (4.3.3) превращается в

$$D^L \tilde{f} - e^{AB} Y^A \frac{\partial}{\partial Y^B}\tilde{f} - 2i\mathrm{d}_Z \tilde{f} + R^{AB} Z_A \frac{\partial}{\partial \theta^B}\tilde{f} = \tilde{J}\,. \tag{4.3.14}$$

Теперь, хотя и включая в себя (Z,θ)-зависимый R-член, оператор $\mathcal{D}$ в (4.3.14) удовлетворяет (4.3.8), и общее решение дается выражением (4.3.9). Выполняя обратное к (4.3.13) преобразование, находим

$$f = \exp\left\{e^{AB}\frac{\partial^2}{\partial Y^A \partial \theta^B}\right\} \mathrm{d}^* \exp\left\{-e^{AB}\frac{\partial^2}{\partial Y^A \partial \theta^B}\right\} J + g + \Delta_{ad}\epsilon + \chi\,, \tag{4.3.15}$$

где $g(Y)$ решает

$$D^L g + e^{AB} Y_A \frac{\partial}{\partial Y^B} g = \hat{h}\left(\exp\left\{-e^{AB}\frac{\partial^2}{\partial Y^A \partial \theta^B}\right\} J\right). \tag{4.3.16}$$

Подставляя (4.3.11) и упрощая, получаем следующие выражения для лоренц-ковариантных пертурбативных операторов в присоединенном представлении

$$\Delta^*_{ad} J\left(Z, Y; \theta\right) = -\frac{1}{2i} Z^A \frac{\partial}{\partial \theta^A} \int_0^1 \frac{dt}{t} \exp\left\{\frac{1-t}{2t} e^{BC} \frac{\partial^2}{\partial Y^B \partial \theta^C}\right\} J\left(tZ, Y; t\theta\right) \tag{4.3.17}$$

$$\mathcal{H}_{ad} J\left(Z, Y; \theta\right) = \hat{h} \exp\left\{\frac{1}{2} e^{BC} \frac{\partial^2}{\partial Y^B \partial \theta^C}\right\} J\left(Z, Y; \theta\right). \tag{4.3.18}$$

Применяя разложение единицы (4.3.7) к некоторому $\tilde{f}$, находим, что в терминах соответствующего f оно сводится к

$$\{\Delta_{ad}, \Delta^*_{ad}\} + \mathcal{H}_{ad} = Id\,. \tag{4.3.19}$$

Примечательно, что член с R-кривизной вообще не входит в пертурбативные операторы (4.3.17), (4.3.18), так что воспроизводятся формулы из Главы 3 с приравненной нулю лоренцевой связностью.

Формула (4.3.17) позволяет завершить нахождение вакуумного решения (4.3.1). Действительно, в низшем порядке имеем

$$\Delta_{ad} \Omega = ig\gamma * \bar{\gamma}, \tag{4.3.20}$$

и, поскольку $\mathcal{H}_{ad}(\gamma * \bar{\gamma}) = 0$, из (4.3.17) находим

$$\Omega = -2gZ^A \frac{\partial}{\partial \theta^A} \int_0^1 dt t^3 \exp\left\{itZ_B Y^B + \frac{i}{2}\left(1-t\right) e^{BC} Z_B \frac{\partial}{\partial \theta^C}\right\} \delta^4(\theta) k\bar{k}. \tag{4.3.21}$$

Формально это выражение для вакуумной 3-формы совпадает с (3.4.22) с лоренцевой связностью ω^L_{AB}, приравненной нулю. Но два эти выражения представляют частные решения для двух различных систем уравнений, связанных преобразованием Штюкельберга (4.2.26)-(4.2.28). Таким образом, в общем случае можно было бы ожидать что, к примеру, в (4.3.21) появится кривизна R^{AB}, так как она входит в (4.2.28). Однако, этого не происходит, поскольку, как мы показали, R-зависимые члены не дают вклада в гомотопии. Так что члены с лоренцевой кривизной могут появиться в вакуумной 3-форме только в виде Δ_{ad}-точных добавок к (4.3.21). Можно показать, тем не менее, что (4.3.21) буквально воспроизводится из (3.4.22) после преобразования Штюкельберга (4.2.28).

Аналогично, и в твистованном случае пертурбативные операторы повторяют операторы из Главы 3 с $\omega^L_{AB} = 0$, что, как мы сейчас увидим, ведет к значительному их упрощению.

4.3.2. Твистованный случай

В этом случае $f \sim f_1 k + f_2 \bar{k}$. Вновь отделяя зависимость по k и $\bar{k}$ и упрощая обозначения переименованием $f_{1,2} \to f$, находим, что коммутатор $[W_0, f]_*$ превращается в антикоммутатор, так что

$$\mathcal{D}_{tw} = \mathrm{d} + \omega_L^{AB}\left(Y_A \frac{\partial}{\partial Y^B} + Z_A \frac{\partial}{\partial Z^B} + \theta_A \frac{\partial}{\partial \theta^B}\right) - \frac{i}{2} R^{AB}\left(Z_A \frac{\partial}{\partial \theta^B} + i \frac{\partial^2}{\partial Y^A \partial \theta^B}\right) + \\ + \frac{i}{2} e^{AB}\left(Y_A Y_B - \frac{\partial^2}{\partial Y^A \partial Y^B} - 2i Y_A \frac{\partial}{\partial Z^B} - \frac{\partial^2}{\partial Z^A \partial Z^B}\right). \tag{4.3.22}$$

Здесь вклад, который не антикоммутирует с d^*_Z, равен

$$\mathcal{D}_{tw} \sim e^{AB}\left(Y_A \frac{\partial}{\partial Z^B} - \frac{i}{2}\frac{\partial^2}{\partial Z^A \partial Z^B}\right) + \frac{1}{2} R^{AB} \frac{\partial^2}{\partial \theta^A \partial Y^B} \tag{4.3.23}$$

и может быть компенсирован следующим преобразованием

$$f(Z;Y;\theta) \longrightarrow \tilde{f}(Z;Y;\theta) = \exp\left\{ i e^{AB} Y_A \frac{\partial}{\partial \theta^B} + \frac{1}{2} e^{AB} \frac{\partial^2}{\partial Z^A \partial \theta^B}\right\} f(Z;Y;\theta)\,. \tag{4.3.24}$$

Для новых функций имеем

$$D^L \tilde{f} + \frac{i}{2} e^{AB}\left(Y_A Y_B - \frac{\partial^2}{\partial Y^A \partial Y^B}\right)\tilde{f} - 2i \mathrm{d}_Z \tilde{f} - \frac{i}{2} R^{AB} Z_A \frac{\partial}{\partial \theta^B}\tilde{f} = \tilde{J}\,, \tag{4.3.25}$$

что удовлетворяет (4.3.8) и, таким образом, решается с помощью (4.3.9).

Обращение (4.3.24) ведет к следующим пертурбативным операторам

$$\Delta^*_{tw} J = -\frac{1}{2i} Z^A \frac{\partial}{\partial \theta^A} \int_0^1 \frac{dt}{t} \exp\left\{ -i\frac{1-t}{2t} e^{BC} Y_B \frac{\partial}{\partial \theta^C} - \frac{1-t^2}{4t^2} e^{BC} \frac{\partial^2}{\partial Z^B \partial \theta^C} \right\} J\left(tZ, Y; t\theta\right), \tag{4.3.26}$$

$$\mathcal{H}_{tw} J = \hat{h} \exp\left\{ -\frac{i}{2} e^{BC} Y_B \frac{\partial}{\partial \theta^C} - \frac{1}{4} e^{BC} \frac{\partial^2}{\partial Z^B \partial \theta^C} \right\} J\left(Z, Y; \theta\right), \tag{4.3.27}$$

которые образуют разложение единицы

$$\{\Delta_{tw}, \Delta^*_{tw}\} + \mathcal{H}_{tw} = Id, \tag{4.3.28}$$

определяющее пертурбативное разложение в твистованном секторе.

4.4. Выводы

В этой Главе мы показали, что расширенные уравнения высших спинов [133] обладают локальной лоренцевой симметрией. Эта симметрия становится явной после переопределения полей, ведущего к явно лоренц-ковариантной форме уравнений высших спинов. В процессе получения лоренцевой системы мы обнаружили, что для нее условие совместности более жестко, чем в стандартном развернутом подходе, и запрещает некоторые системы высших спинов, которые в других отношениях формально совместны.

Существование лоренцевой формулировки для системы (3.0.1)-(3.0.3) хотя и обязательно в силу принципа эквивалентности, не вполне тривиально, так как налагает переопределенное множество связей, которые тем не менее удовлетворяются. В частности, в то время как расширение старшими формами уравнений [95] допускает некоторую свободу в выборе центрального элемента с точки зрения формальной совместности, лишь один из них совместим с полученными лоренц-ковариантными уравнениями.

Ключевым элементом конструкции, по существу отвечающим за лоренцеву симметрию, является твисторный сектор (алгебраические связи для пространственно-временных 0-форм полей) расширенных уравнений высших спинов. Известно, что твисторный сектор исходных уравнений высших спинов порождает лоренцеву симметрию через деформированные осцилляторы. То же самое, как мы показали, имеет место и для расширенного твисторного сектора (4.2.6)-(4.2.10). Обеспечивая лоренцеву симметрию, он представляет собой многомерное обобщение деформированных осцилляторов, лежащих в основе нелинейных уравнений высших спинов, которое заслуживает особого внимания в контексте моделей типа Калоджеро и, возможно, многомерных уравнений высших спинов.

Побочным результатом полученной лоренцевой схемы является значительное упрощение теории возмущений высших спинов, вопреки кажущейся сложности ковариантных уравнений. Мы продолжили анализ Главы 3 и нашли, что ковариантные версии пертурбативных операторных рядов имеют более простой вид в новом подходе. Это существенно упрощает вычисление 4-формы плотности инвариантного функционала, по крайней мере, в младших порядках.

ГЛАВА 5. Заряды в нелинейной теории высших спинов

В этой Главе мы исследуем замкнутую 2-форму, определенную на уравнениях Васильева в [133]. При интегрировании по двумерному циклу она порождает заряд, сохраняющийся на решениях уравнений высших спинов. Кроме того, эта конструкция допускает непосредственное включение топологических полей высших спинов, введенных в [95], которые можно отождествить с различными химическими потенциалами. Мы проанализируем вклад топологических модулей в первом порядке линеаризованного приближения.

Мы покажем, как полученные формулы воспроизводят асимптотические заряды, связанные с параметрами модулей различных рангов. В общем случае это ведет к выражению для замкнутой 2-формы со старшими производными, которое сложно получить, пользуясь стандартными методами общей теории относительности. Также мы рассмотрим пример гравитации, для которой воспроизводятся асимптотические заряды типа рассмотренных в [209].

Чтобы проиллюстрировать основную идею нашего подхода, мы напомним производящую конструкцию чернодырных решений ОТО в AdS вместе с их обобщениями на высшие спины, сформулированную в терминах параметра глобальной симметрии AdS [135], а затем покажем, что заряд, вычисленный таким образом для случая черной дыры Керра, параметрически согласуется со стандартным асимптотическим АДМ-подобным поведением.

Глава организована следующим образом. В Разделе 5.1 вводится 2-форма инвариантного функционала. В Разделе 5.2 определяется понятие асимптотической симметрии в теории высших спинов, рассматриваются заряды и статсуммы с учетом топологического сектора высших спинов, а также вычисляется линейная вакуумная статсумма и простейшие поправки к ней. В Разделе 5.3 напоминается, как черные дыры и их аналоги в теории высших спинов возникают из параметра глобальной симметрии AdS [135], после чего вычисляются заряды черной дыры Керра с высшими спинами.

5.1. Заряды и топологические поля высших спинов

Как уже обсуждалось в Главе 2, в силу (2.1.12) зависимость W и B в уравнениях Васильева (2.1.1)-(2.1.5) от внешних операторов Клейна K не более чем билинейная (2.1.13)

$$W = \sum_{i,j=0,1} W_{i,j} k^i \bar{k}^j, \qquad B = \sum_{i,j=0,1} B_{i,j} k^i \bar{k}^j, \tag{5.1.1}$$

причем при разложении над AdS-вакуумом поля $W_{i,i}$ и $B_{i,1-i}$ являются физическими (распространяющимися), а $W_{i,1-i}$ и $B_{i,i}$ – топологическими (нераспространяющимися). Утверждение о том, что топологический сектор не содержит распространяющихся полей, следует из анализа 0-форм на свободном уровне, поскольку все физические (калибровочно-инвариантные) степени свободы содержатся в 0-формах. После разрешения зависимости по (Z, θ)-переменным линейные уравнения в топологическом секторе принимают вид

$$\mathcal{D}^Y_{ad} C_{i,i}(Y|x) = 0, \tag{5.1.2}$$

т.е. представляют собой условие присоединенно-ковариантного постоянства. Присоединенно-ковариантная производная (2.2.10) действует на конечномерных модулях, образованных однородными полиномами по Y, и поэтому эти уравнения описывают бесконечное множество топологических систем, каждая из которых содержит не более конечного числа степеней свободы. Напротив, для физического сектора $C_{i,1-i}$ соответствующие уравнения имеют вид (2.2.6), где твистованная производная (2.2.11) действует на бесконечномерных модулях, содержащих, следовательно, бесконечное число степеней свободы (релятивистские поля). Отметим, однако, что полное число степеней свободы в топологическом и динамическом секторах одинаково, определяясь парой произвольных функций от Y^A. Такое равенство имеет место из-за того, что теория высших спинов содержит бесконечно много топологических полей.

В принципе, топологические поля могут быть редуцированы в $4d$ уравнениях высших спинов путем наложения условий $B_{ii} = \mathbb{W}_{i,1-1} = 0$ [1]. Это, однако, эквивалентно редукции пространства теорий высших спинов, поскольку, как

[1]Отметим, что такая редукция невозможна в $d = 3$ теории [195].

было отмечено в [210], топологические поля фактически являются модулями, характеризующими различные теории. В этой Главе они также будут играть центральную роль, отождествляясь с химическими потенциалами, сопряженными зарядам высших спинов.

Мы будем рассматривать бозонные теории высших спинов, содержащие поля только целых спинов, что отвечает наложению условий

$$\mathbb{W}\left(-z,\bar{z};-y,\bar{y}|K|x|-\theta,\bar{\theta},\mathrm{d}x^{\underline{m}}\right)=\mathbb{W}\left(z,-\bar{z};y,-\bar{y}|K|x|\theta,-\bar{\theta},\mathrm{d}x^{\underline{m}}\right) \quad (5.1.3)$$

$$B\left(-z,\bar{z};-y,\bar{y}|K|x\right)=B\left(z,-\bar{z};y,-\bar{y}|K|x\right), \quad (5.1.4)$$

после чего можно считать, что $k\bar{k}=1$.

Расширенные уравнения высших спинов [133], позволяющие ввести плотности инвариантных функционалов $\mathcal{L}\left(x\right)$, имеют вид (3.0.1)-(3.0.3). Заметим, однако, что если нас интересует только 2-форма $\mathcal{L}_2$, то новые поля старших рангов – 3-форма Ω и 2-форма Φ, а также новый центральный элемент $g\gamma*\bar{\gamma}$ оказываются излишними, поскольку дают вклад только в 4-форму on-shell лагранжиана $\mathcal{L}_4$, но не в $\mathcal{L}_2$. Поэтому $\mathcal{L}_2$ может быть непосредственно введена в правую часть нерасширенных уравнений Васильева (2.1.18)-(2.1.19). С другой стороны, как станет ясно ниже, для описания зарядов всех спинов и включения топологических полей необходимо рассматривать функцию $F_*\left(B\right)$ общего вида, а не (2.1.14), выбранную в (2.1.18)-(2.1.19).

В итоге, мы рассматриваем следующий вариант расширенных уравнений Васильева

$$\mathrm{d}\mathbb{W}+\mathbb{W}*\mathbb{W}=i\theta^A\theta_A+iF_*(B)*\gamma+i\bar{F}_*(B)*\bar{\gamma}+\mathcal{L}_2, \quad (5.1.5)$$

$$\mathrm{d}B+\left[\mathbb{W},B\right]_*=0, \quad (5.1.6)$$

$$\mathrm{d}\mathcal{L}_2\left(x\right)=0. \quad (5.1.7)$$

Согласно (5.1.5) и (5.1.7) пространственно-временная 2-форма $\mathcal{L}_2$ отвечает за следующее калибровочное преобразование

$$\delta\mathcal{L}_2(x)=\mathrm{d}\epsilon(x),\qquad \delta\mathbb{W}\left(Z;Y|K|x|\theta^A,\mathrm{d}x^{\underline{m}}\right)=\epsilon(x), \quad (5.1.8)$$

где калибровочный параметр $\epsilon(x)$ представляет собой пространственно-временную 1-форму.

Таким образом, в силу (5.1.7) и (5.1.8) $\mathcal{L}_2$ при интегрировании по 2-циклу Σ порождает калибровочно-инвариантный поверхностный заряд

$$Q = \int_{\Sigma} \mathcal{L}_2(x). \qquad (5.1.9)$$

Здесь $\mathcal{L}_2$ выражена через поля высших спинов $\mathbb{W}$ и B с помощью (5.1.5). $\mathcal{L}_2$ по построению не зависит от Y и Z. На линейном уровне это означает, что вклад в сохраняющийся заряд может давать только поле спина 1, а вклады всех других спинов придут только через нелинейные взаимодействия. Это обстоятельство отражает существенное различие между (5.1.9) и каноническими конструкциями для зарядов гравитации и высших спинов, основанными на принципе наименьшего действия и либо воспроизводящими асимптотические заряды (т.е., фактически, точно сохраняющиеся заряды всех спинов, но в свободной теории), либо опирающимися на наличие некоторой глобальной симметрии. Подчеркнем, что (5.1.9) сохраняется точно и вне зависимости от наличия каких-либо глобальных симметрий частного решения теории.

В свете сказанного может показаться, что простейшие заряды высших спинов, заряды свободных полей Фронсдала, выпадают из схемы (5.1.9). Как мы покажем, на самом деле они воспроизводятся из (5.1.9) при помощи топологического сектора уравнений (5.1.5)-(5.1.7). Фактически, топологические поля играют роль производящих параметров, которые сворачивают индексы полей высших спинов и собирают их в единую замкнутую форму спина 1. Свободные уравнения для 0-форм топологических полей – это просто уравнения тензоров Киллинга (5.1.2). Поэтому, если речь идет об асимптотических зарядах, необязательно учитывать отклик топологических полей на физические. Вместо этого, как показано ниже, достаточно подставить тензоры Киллинга в формулы топологических полей, что ведет к стандартным асимптотическим зарядам, определенным в обычной теории высших спинов без топологического сектора.

Однако, чтобы использовать предлагаемую конструкцию для глобально замкнутых форм, нужно полностью учитывать отклик физических полей на топологические. Это значит, что неясно, как определить замкнутые формы спинов больше 1, если в теорию не включены топологические поля. Как обсуждается в конце Раздела 5.4, этот факт может иметь отношение к проблеме информационного парадокса.

Разрешение (Z,θ)-зависимости в (5.1.5)-(5.1.6) ведет к уравнениям схематического вида

$$\mathcal{R}(Y|x) := \mathrm{d}\omega + \omega * \omega = \mathcal{L}_2\,(x) - \Upsilon(\omega,\omega,C) - \Upsilon(\omega,\omega,C,C) - \ldots\,, \tag{5.1.10}$$

$$\mathrm{d}C + [\omega, C]_* = -\Upsilon(\omega,C) - \Upsilon(\omega,C,C) - \ldots\,, \tag{5.1.11}$$

где Υ – вершины взаимодействий, которые восстанавливаются из пертурбативного разложения, рассмотренного в Главе 3.

Член $\omega * \omega$ в левой части (5.1.10) не дает вклада в $\mathcal{L}_2$, т.к. при $Y = 0$ он может быть представлен в виде $\mathrm{tr}(\omega * \omega) \equiv 0$ (напомним, что ω является 1-формой). Действительно, для звездочного произведения определена операция суперследа, которая в бозонном случае обладает свойством обычного следа

$$\mathrm{tr} f(Y) := f(0)\,, \quad \mathrm{tr}(f(Y) * g(Y)) = \mathrm{tr}(g(Y) * f(Y))\,. \tag{5.1.12}$$

Таким образом, имеется следующее уравнение, определяющее $\mathcal{L}_2$,

$$\mathcal{L}_2\,(x) = (\mathrm{d}\omega + \Upsilon\,(\omega,\omega,C) + \Upsilon\,(\omega,\omega,C,C) + \ldots)\,|_{Y=0}. \tag{5.1.13}$$

Далее, используя калибровочную симметрию (5.1.8), можно наложить *каноническую калибровку* $\omega\,(0|K|x) = 0$ [133]. Тогда $\mathcal{L}_2$ может быть выражена как

$$\mathcal{L}_2\,(x) = (\Upsilon\,(\omega,\omega,C) + \Upsilon\,(\omega,\omega,C,C) + \ldots)\,|_{Y=0}. \tag{5.1.14}$$

Будучи замкнутой по построению, $\mathcal{L}_2$ может являться или не являться точной. Первый вариант приводит к нулевому значению заряда (5.1.9). Это происходит, если (5.1.13), рассматриваемое как уравнение на $\omega\,(0|K|x)$, допускает решения с $\mathcal{L}_2 = 0$ и $\omega\,(0|K|x)$, регулярной на цикле интегрирования Σ. Напротив, если $\omega\,(0|K|x)$ при $\mathcal{L}_2 = 0$ становится сингулярной на Σ, то заряд (5.1.9) может быть нетривиальным.

Эта ситуация аналогична задаче о монополе Дирака. Там из-за дираковской струны векторный потенциал плохо определен на любой поверхности, окружающей монополь. Однако напряженность магнитного поля остается регулярной и дает магнитный заряд после интегрирования по поверхности. Здесь же мы имеем плохо определенный абелев потенциал спина 1 $\omega\,(0|K|x)$ и хорошо определенную «напряженность поля» $(\Upsilon\,(\omega,\omega,C) + \ldots)\,|_{Y=0}$. Наложение канонической калибровки позволяет работать целиком в терминах последней, хотя, конечно, это и не является обязательным: в качестве альтернативы, как и в задаче о магнитном монополе, можно использовать язык расслоенных пространств, покрывая пространство–время несколькими картами. Нетривиальность $\mathcal{L}_2$ в этом случае обеспечивается условиями склейки. Однако, поскольку такой анализ несколько более сложен, мы будем работать в канонической калибровке.

Связанный вопрос, который следует упомянуть, относится к возможности решения уравнения (2.1.1) в виде чистой калибровки, предполагая, что любая плоская $W(Z,Y|K|x)$ калибровочно-эквивалентна $W=0$. Это, опять же, немедленно влечет за собой $Q=0$. Такая эквивалентность, однако, не должна являться глобальной, что, в совокупности с другими похожими вопросами, составляет актуальную проблему определения допустимых калибровочных преобразований и классов функций в теории высших спинов [119–121, 123, 126, 195].

Самый существенный новый результат данной Главы, который хотелось бы подчеркнуть, состоит в том, что конструкция инвариантного функционала $\mathcal{L}_2$ [133] допускает естественное обобщение, включающее различные химические потенциалы ξ, связанные с топологическими полями высших спинов. Соответствующая статсумма

$$Z=\exp\{-\int_{\Sigma}\mathcal{L}_2\,(\xi)\} \tag{5.1.15}$$

оказывается независящей от вариаций 2-цикла интегрирования Σ. В асимптотическом пределе, когда Σ стремится к бесконечности и теория становится почти свободной, эта конструкция, как будет обосновано, воспроизводит обычные асимптотические заряды ОТО [211–215] и их обобщения на высшие спины (исследовавшиеся в [216–220]). Хотя провести прямое сравнение зарядов, построенных в данной Главе, и канонических асимптотических зарядов, основанных на принципе наименьшего действия и метрическом подходе, непросто, существует простой аргумент в пользу их эквивалентности. Наши выводы находятся в полном соответствии с результатами [215], поскольку, как мы показываем, асимптотически сохраняющиеся заряды представляются on-shell замкнутыми 2-формами, выраженными через динамические поля теории, эквивалентные полям Фронсдала в метрическом подходе. Полный набор этих

2-форм, выраженных через (обобщенные) тензоры Вейля, одинаков в метрическом и тетрадном подходах. Следовательно, они с необходимостью совпадают.

5.2. Заряды и статсуммы в уравнениях высших спинов

5.2.1. Асимптотические заряды

В эйнштейновском пространстве (тензор Риччи равен нулю) с некоторой 1-формой Киллинга $\xi = \xi_{\underline{m}} \mathrm{d}x^{\underline{m}}$ существует сохраняющийся заряд, выражаемый через интеграл Комара [221]

$$Q = \int\limits_{\Sigma} \mathcal{K}, \tag{5.2.1}$$

где $\mathcal{K}$ – это 2-форма, определяемая через ξ

$$\mathcal{K} = \star \mathrm{d}\xi \tag{5.2.2}$$

и замкнутая на уравнениях движения. При ненулевой космологической постоянной $\Lambda \neq 0$ формула Комара больше не работает и необходимо либо вычитать в (5.2.1) бесконечности, связанные с объемом, пропорциональным Λ [222], либо использовать другие усовершенствованные методы (например, [214, 215, 223]).

В частности, в [209] 2-форма, порождающая сохраняющийся заряд ОТО, была выражена через тензор Вейля, свернутый с векторными полями, описывающими асимптотические симметрии. Теория высших спинов допускает естественное обобщение этой конструкции. На линейном уровне аналогом изометрий ОТО в теории высших спинов являются глобальные симметрии, т.е. остаточные симметрии $\epsilon\,(Y|x)$ вакуумного решения, такие что $\delta_\epsilon \omega = \delta_\epsilon C = 0$. Рассмотрим следующую точную 2-форму

$$\mathrm{d}\,\mathrm{tr}(\xi * \widehat{n}\omega). \tag{5.2.3}$$

Здесь $\xi\,(Y|x)$ – это AdS тензор Киллинга, т.е.

$$\mathrm{d}\xi + [\phi_{AdS}, \xi]_* = 0. \tag{5.2.4}$$

$\omega(Y|x)$ – связность высших спинов в линейном порядке, удовлетворяющая центральной on-mass-shell теореме (2.2.5), причем каждое слагаемое в (2.2.7) представляет собой независимую $\mathcal{D}^Y_{ad}$-когомологию. Оператор $\widehat{n}$ определен как

$$\widehat{n}F(Y) = \begin{cases} F(Y), & N_y > \bar{N}_{\bar{y}}, \\ 0, & N_y = \bar{N}_{\bar{y}}, \\ -F(Y), & N_y < \bar{N}_{\bar{y}}, \end{cases} \tag{5.2.5}$$

где N_y и $\bar{N}_{\bar{y}}$ считают степени y и $\bar{y}$, соответственно,

$$y^\alpha \partial_\alpha F(Y) = N_y F(Y), \quad \bar{y}^{\dot\alpha}\bar{\partial}_{\dot\alpha} F(Y) = \bar{N}_{\bar{y}} F(Y). \tag{5.2.6}$$

Используя (5.2.4)-(5.2.6), находим, что

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\,\mathrm{tr}(\xi * \widehat{n}\omega_1) \;=\; & \mathrm{tr}\Big\{\xi * e^{\alpha\dot\beta}\bar{y}_{\dot\beta}\partial_\alpha(\widehat{c}_2 + 2\widehat{c}_1 + \widehat{c}_0)\omega - \\ & -\xi * e^{\alpha\dot\beta} y_\alpha \bar{\partial}_{\dot\beta}(\widehat{c}_{-2} + 2\widehat{c}_{-1} + \widehat{c}_0)\omega + \xi * \widehat{n}\mathcal{D}^Y_{ad}\omega\Big\}, \end{aligned} \tag{5.2.7}$$

где $\widehat{c}_n$ – это проектор на соответствующую (под)диагональ в $(y, \bar{y})$-пространстве

$$\widehat{c}_n F(Y) := \begin{cases} F(Y), & N_y - \bar{N}_{\bar{y}} = n, \\ 0, & N_y - \bar{N}_{\bar{y}} \neq n. \end{cases} \tag{5.2.8}$$

Компоненты $\omega(Y|x)$ с $N_y = \bar{N}_{\bar{y}}$ – это бозонные поля Фронсдала, а с $N_y = \bar{N}_{\bar{y}} \pm 1$ – фермионные. Т.е. $\widehat{c}_0\omega$ выделяет бозонные поля Фронсдала, а $\widehat{c}_{\pm 2n}\omega$, в силу (2.2.5), – их n-ые производные. Для фермионов то же осуществляется с помощью $\widehat{c}_{\pm 1}\omega$ и $\widehat{c}_{\pm(2n+1)}\omega$, соответственно.

Определим теперь замкнутую неточную 2-форму, соответствующую последнему слагаемому в правой части (5.2.7),

$$\mathcal{R}_\xi := \mathrm{tr}\left(\xi * \widehat{n}\mathcal{D}^Y_{ad}\omega\right), \tag{5.2.9}$$

которая согласно (2.2.5) равна

$$\mathcal{R}_\xi = \mathrm{tr}\left\{\xi * \left(\frac{i\lambda}{4}\eta\bar{H}^{\dot\alpha\dot\beta}\bar{\partial}_{\dot\alpha}\bar{\partial}_{\dot\beta}C(0,\bar{y}|K|x)\,k - \frac{i\lambda}{4}\bar{\eta}H^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta C(y,0|K|x)\,\bar{k}\right)\right\}. \tag{5.2.10}$$

Замкнутость $\mathcal{R}_\xi$ следует из уравнений движения $C(Y|x)$ (2.2.6), кодирующих тождества Бьянки и уравнения Максвелла. $\mathcal{R}_\xi$ порождает асимптотический заряд при интегрировании по двухмерному циклу Σ^2,

$$Q_\xi = \int\limits_{\Sigma^2} \mathcal{R}_\xi . \tag{5.2.11}$$

Заряд (5.2.11) представляет собой обобщение сохраняющихся величин в асимптотическом AdS, определенных в [209], на высшие спины. Аналогия прямолинейна, так как заряды в [209] возникают после интегрирования 2-формы, составленной из тензора Вейля и параметра симметрии. В нашем подходе обобщенные тензоры Вейля высших спинов $C(y,0|x)$, $C(0,\bar{y}|x)$ естественным образом возникают при пертурбативном разложении теории над AdS.

Обобщенные тензоры Вейля высших спинов $C(y,0|x)$, $C(0,\bar{y}|x)$, из которых построен заряд (5.2.11), соответствуют s-ым производным полей Фронсдала спина s. В то же время, известны канонические асимптотические заряды Фронсдала первого порядка по производным [216]. Связь между этими двумя конструкциями обеспечивается уравнением (5.2.7), показывающим, что

$$\mathcal{R}_\xi = \mathrm{tr}\left\{\xi * \left(e^{\alpha\dot{\beta}} y_\alpha \bar{\partial}_{\dot{\beta}} (\widehat{c}_{-2} + 2\widehat{c}_{-1} + \widehat{c}_0)\omega - e^{\alpha\dot{\beta}} \bar{y}_{\dot{\beta}} \partial_\alpha (\widehat{c}_2 + 2\widehat{c}_1 + \widehat{c}_0)\omega\right)\right\} + \mathrm{d}\,\mathrm{tr}\,(\xi * \widehat{n}\omega)\,. \tag{5.2.12}$$

Так как d-точный член не дает вклада в заряд, (5.2.11) может быть эквивалентно выражен через поля Фронсдала и их первые производные. Это также объясняет специфику поля спина 1. Оно описывается Y-независимой связностью $\omega\,(x)$ и поэтому выпадает из (5.2.9). Однако, спин 1 вносит ненулевой вклад в (5.2.10) через $C_{AB}Y^AY^B$. Кажущееся несоответствие объясняется тем, что уже первые производные $\omega\,(x)$ описываются калибровочно-инвариантной 0-формой $C_{AB}Y^AY^B$, представляющей собой тензор Максвелла, поэтому для тока спина 1 не существует представления в виде (5.2.12), а соотношение (5.2.7) становится тождеством 0=0.

Асимптотически ковариантно-постоянный параметр $\xi(Y|x)$, $\mathcal{D}^Y_{ad}\xi_{z\to 0} = 0$ порождает асимптотически d-замкнутую $\mathcal{R}_\xi$ и, следовательно, асимптотически сохраняющийся заряд (5.2.11). В данном случае ξ играет вспомогательную роль, не имеющую отношения к рассматриваемому решению теории высших спинов. Эта простая конструкция ведет к интересной возможности изучения зарядов черных дыр в теории высших спинов.

Появление параметра ξ, стремящегося к параметру AdS глобальной симметрии (высших спинов), естественно в системе уравнений высших спинов

(5.1.5)-(5.1.7) с топологическим сектором. Ключевое наблюдение состоит в том, что вид линеаризованных уравнений в топологическом секторе (5.1.2) в точности совпадает с уравнением на параметр асимптотической симметрии (5.2.4). Это наводит на мысль, что топологические поля могут играть роль обобщенных химических потенциалов ξ, сопряженных зарядам высших спинов.

На нелинейном уровне секторы перепутываются и топологические поля начинают возбуждать физические (и наоборот). 2-форма $\mathcal{L}_2$, определенная как (5.1.14), остается замкнутой в присутствии топологических полей. Это позволяет ввести статсумму (5.1.15), зависящую от модулей выбранного решения (типа массы черной дыры) и химических потенциалов ξ, отождествляемых с топологическими полями. Статсумма инвариантна относительно локальных вариаций цикла интегрирования, имея одинаковое значение при интегрировании по бесконечности, где она должна сводиться к асимптотическим зарядам, и по любому другому циклу в том же гомотопическом классе, включая горизонт событий.

На первый взгляд, существование замкнутой формы $\mathcal{L}_2$ в нелинейной теории и поверхностно-независимого представления статсуммы (5.1.15) выглядит неожиданным и даже невозможным. Здесь, однако, следует принять во внимание следующие два факта. Во-первых, $\mathcal{L}_2\,(\xi)$ является нелокальным функционалом физических и топологических полей, включая в себя бесконечные разложения по производным полей в AdS_4. Во-вторых, ненулевые топологические поля ξ изменят форму исходного (при $\xi = 0$), к примеру, чернодырного решения. Таким образом, чтобы найти полную статсумму (5.1.15) для каких-либо химических потенциалов ξ, необходимо найти соответствующее решение теории при $\xi \neq 0$.

В этой Главе мы найдем вакуумное (т.е. при $\xi = 0$) значение $\mathcal{L}_2$, чтобы проиллюстрировать способ вычислений, а также определим линейный по ξ вклад в $\mathcal{L}_2\,(\xi)$, который связан, в частности, с асимптотическими зарядами.

5.2.2. Вакуумная статсумма

Чтобы определить первый нетривиальный вклад в вакуумное значение $\mathcal{L}_2$, мы отбрасываем топологический сектор и рассматриваем соответствующее значение (5.1.14) в младших порядках пертурбативного разложения над AdS_4. Само фоновое решение AdS_4 (2.2.3), очевидно, не дает вклада в (5.1.14) в силу (2.2.4) (тензор Вейля пустого AdS равен нулю). В линейном порядке уравнения физического сектора имеют вид центральной on-mass-shell теоремы (2.2.5)-(2.2.7), поэтому вакуумный вклад в $\mathcal{L}_2$ на свободном уровне есть

$$\mathcal{L}_2 = -\frac{i\lambda}{4}\left(\eta \bar{H}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}\bar{\partial}_{\dot{\beta}}C\left(0,\bar{y}|K|x\right)k + \bar{\eta}H^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta C\left(y,0|K|x\right)\bar{k}\right)|_{Y=0}. \qquad (5.2.13)$$

Как обсуждалось в Главе 2, мастер-поле $C\left(y,\bar{y}|K|x\right)$ (которое представляет собой компоненту поля B при $Z=0$) описывает все калибровочно-инвариантные степени свободы фронсдаловских полей. Вклад спина s заключен в компонентах

$$\left(N_y - \bar{N}_{\bar{y}}\right)C\left(y,\bar{y}|K|x\right) = \pm 2sC\left(y,\bar{y}|K|x\right). \qquad (5.2.14)$$

В частности, чисто (анти)голоморфные компоненты, собранные в $C\left(y,0|K|x\right)$ ($C\left(0,\bar{y}|K|x\right)$), представляют собой так называемые обобщенные тензоры Вейля высших спинов $C_{\alpha(2s)}$ и $\bar{C}_{\dot{\alpha}(2s)}$. К примеру, для $s=1$ имеем $C_{\alpha\beta}$ и $\bar{C}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$, являющиеся спинорными эквивалентами тензора Максвелла $C_{ab}=-C_{ba}$. Для $s=2$ $C_{\alpha_1\ldots\alpha_4}$ и $\bar{C}_{\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_4}$ являются спинорными компонентами обычного тензора Вейля гравитации. Действительно, будучи полностью симметричными, спинор-тензоры $C_{\alpha_1\ldots\alpha_4}$ и $\bar{C}_{\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_4}$ эквивалентны, на языке лоренцевых тензоров, бесследовой диаграмме Юнга типа окошка $C_{ab,cd}$. Для целых $s>2$ $C_{\alpha(2s)}$ и $\bar{C}_{\dot{\alpha}(2s)}$ кодируют лоренц-тензора, которые представляют собой бесследовые двухрядные прямоугольные диаграммы Юнга, описывающие обобщенные тензоры Вейля спина s. На все эти компоненты для любого $s\geq 1$ наложены обобщенные тождества Бьянки, возникающие из развернутых уравнений (5.1.2). Все остальные смешанные компоненты $C_{\alpha(m),\dot{\alpha}(n)}$ выражаются через производные обобщенных тензоров Вейля опять же с помощью (5.1.2).

Таким образом, единственный ненулевой вклад в $\mathcal{L}_2$ на свободном уровне приходит из тензора Максвелла $C_{\alpha\beta}$ и $\bar{C}_{\dot\alpha\dot\beta}$ абелевого поля спина 1

$$\mathcal{L}^2 = \frac{i\lambda\eta}{4} e_\gamma{}^{\dot\alpha} e^{\gamma\dot\beta} \bar{C}_{\dot\alpha\dot\beta}(x) + \frac{i\lambda\bar\eta}{4} e^\alpha{}_{\dot\gamma} e^{\beta\dot\gamma} C_{\alpha\beta}(x) \,. \tag{5.2.15}$$

Пространственно-временной вклад в (5.2.15) можно разделить на локальную и нелокальную (с точки зрения границы AdS) части. Действительно, расслаивая четырехмерное пространство анти-де Ситтера на граничные координаты $\vec{x}$ и радиальное направление z как $x^{\underline{m}} = (z, \vec{x})$, мы видим, что 2-форма ee имеет следующие схематичные компоненты: нелокальные $e_z e_{\vec{x}}$ и локальные $e_{\vec{x}} e_{\vec{x}}$. Более точно, каждый вклад можно легко выделить в Пуанкаре-координатах

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{1}{z^2}\left(4\lambda^2 \mathrm{d}z^2 + \mathrm{d}x_i \mathrm{d}x^i\right). \tag{5.2.16}$$

Удобно выбрать следующие значения фоновых полей

$$\omega_{\alpha\beta} = \frac{i\lambda}{2z}\mathrm{d}x_{\alpha\beta}\,, \quad \bar\omega_{\dot\alpha\dot\beta} = -\frac{i\lambda}{2z}\mathrm{d}x_{\dot\alpha\dot\beta}\,, \quad e_{\alpha\dot\beta} = \frac{1}{2z}\left(-\mathrm{d}x_{\alpha\gamma}\delta_{\dot\beta}{}^\gamma + i\lambda^{-1}\epsilon_{\alpha\dot\beta}\mathrm{d}z\right), \tag{5.2.17}$$

где введены граничные координаты $x_{\alpha\beta} = x_{\beta\alpha}$ и антисимметричный тензор $\epsilon_{\alpha\dot\beta} = -\epsilon_{\dot\beta\alpha}$, явно нарушающий лоренцеву симметрию $X_{\alpha\dot\beta} = \left(iz\epsilon_{\alpha\dot\beta}, x_{\alpha\gamma}\delta_{\dot\beta}{}^\gamma\right)$. Подставляя тетраду из (5.2.17) в (5.2.15), находим

$$\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_2^{loc} + \mathcal{L}_2^{nloc}, \tag{5.2.18}$$

где

$$\mathcal{L}_2^{loc} = -\frac{i}{16z^2}\mathrm{d}x_\gamma{}^\alpha \mathrm{d}x^{\gamma\beta}\left(\eta\bar{C}_{\alpha\beta} + \bar\eta C_{\alpha\beta}\right), \tag{5.2.19}$$

$$\mathcal{L}_2^{nloc} = \frac{1}{8\lambda z^2}\mathrm{d}x^{\alpha\beta}\mathrm{d}z\left(\eta\bar{C}_{\alpha\beta} - \bar\eta C_{\alpha\beta}\right). \tag{5.2.20}$$

Как отмечалось в [133], нелокальный вклад зануляется в четно-инвариантной A-модели с $\eta = 1$: в этом случае $\mathcal{L}_2^{nloc}$ остается инвариантной относительно преобразования четности, тогда как правая часть (5.2.20) меняет свой знак, так что $\mathcal{L}^2_{nloc} = 0$ в A-модели. Чтобы удержать нелокальный вклад в вакуумный заряд в этом случае, следует вначале считать фазу $\eta = \exp(i\varphi)$ произвольной и затем определить

$$L_2^{nlocA} := \frac{1}{2}\frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial\varphi}|_{\varphi=0}. \tag{5.2.21}$$

Такая процедура в значительной степени аналогична рассмотрению вариации по топологическим полям, таким образом указывая, что полная статсумма, вероятно, нетривиальна даже в ситуациях с нулевой вакуумной статсуммой. Заметим, что эффект от дифференцирования здесь тот же, что и от вставки оператора $\widehat{n}$ в (5.2.7).

5.2.3. Вклад топологического сектора

Рассмотрим теперь эффект, оказываемый топологическим сектором теории высших спинов на статсумму. Наиболее общая бозонная теория дается уравнениями (5.1.5)-(5.1.7) с некоторой произвольной комплексной функцией

$$F_*(B) = \eta B + \mu B * B + ..., \tag{5.2.22}$$

где η и μ – произвольные комплексные параметры и мы полагаем

$$B = B^{phys}\left(k+\bar{k}\right) + B^{top}, \qquad W = W^{phys} + W^{top}\left(k+\bar{k}\right) \tag{5.2.23}$$

(напомним, что в бозонной теории можно считать $k\bar{k}=1$). Замкнутая 2-форма $\mathcal{L}_2$, определенная в (5.1.5)-(5.1.7), зависит теперь не только от физических полей высших спинов ω и C, но также и от топологических модулей ξ, собранных в C^{top}. На свободном уровне топологический сектор отщепляется и поэтому не дает вклада в (5.1.14), т.к. соответствующие уравнения имеют вид (2.2.6) и (5.1.2), но, начиная со второго порядка, топологический вклад становится нетривиальным и переплетается с физическим.

Члены, билинейные по C и $C^{top}(\xi)$, появляются в простой форме

$$\mathcal{L}_2(\xi) = -\frac{i}{4}\left(\mu e_\gamma{}^{\dot\alpha} e^{\gamma\dot\beta}\bar{\partial}_{\dot\alpha}\bar{\partial}_{\dot\beta}\left(C^{top}(\xi) * C + C * \pi\left(C^{top}\right)\right) + c.c.\right)|_{Y=0}, \tag{5.2.24}$$

приходящей из квадратичной части $F_*(B)$ (оператор π определен в (3.4.12)). Более точно, выбрав $F_*(B)$ в форме (5.2.22) и учтя, что $B \sim C \oplus C^{top}$, мы видим, что центральная on-mass-shell теорема (2.2.5) в этом случае дополняется пропорциональным μ перекрестным слагаемым $C \times C^{top}$. Уравнение (5.2.24) дает пертурбативный билинейный по C и C^{top} вклад в сохраняющийся заряд. Он, таким образом, может рассматриваться как асимптотическая 2-форма, порождаемая параметрами Киллинга ξ, собранными в $C^{top}(\xi)$, в теории высших спинов без отклика топологического сектора. Действительно, уравнение (5.2.24), по сути, утверждает, что для свободных (или, эквивалентно, асимптотических) уравнений высших спинов существует 2-форма, которая d-замкнута на свободных уравнениях движения.

Покажем теперь, как таким способом воспроизводится асимптотический заряд гравитации, аналогичный конструкции Аштекара–Даса [209], где замкнутая $(d-2)$-форма строилась из перемасштабированного тензора Вейля и конформного вектора Киллинга. Для этого выберем C^{top} следующим образом

$$C^{top} = \xi_{AB} Y^A Y^B, \tag{5.2.25}$$

где $\mathrm{d}\xi_{AB} + \phi_{AC}\xi^C{}_B = 0$ (ϕ_{AC} определена в (3.1.2)), так что C^{top} удовлетворяет (5.1.2). Хотя в случае чистой гравитации следует ограничиться сектором спина $s = 2$, будем удерживать все спины, чтобы установить, какие из них дадут вклад в (5.2.24). Простое вычисление (5.2.24) с C^{top} вида (5.2.25) дает

$$\mathcal{L}_2(\xi) = \mathcal{L}_2^{s=0}(\xi) + \mathcal{L}_2^{s=2}(\xi), \tag{5.2.26}$$

где

$$\mathcal{L}_2^{s=0}(\xi) = -i\mu e_\gamma{}^{\dot\alpha} e^{\gamma\dot\alpha}\left(\bar\xi_{\dot\alpha\dot\alpha} C(x) - 2i\xi^\beta{}_{\dot\alpha} C_{\beta\dot\alpha}(x) - \frac{1}{2}\xi^{\beta\beta} C_{\beta\beta,\dot\alpha\dot\alpha}(x)\right) + c.c., \tag{5.2.27}$$

$$\mathcal{L}_2^{s=2}(\xi) = -\frac{i\mu}{2} e_\gamma{}^{\dot\alpha} e^{\gamma\dot\alpha} \bar\xi^{\dot\alpha\dot\alpha} \bar C_{\dot\alpha(4)}(x) + c.c. \tag{5.2.28}$$

Мы видим, что в этом случае 2-форма получает вклады только от спина 0 и спина 2. Вклад спина 1 сокращается из-за оператора π в (5.2.24). Вклады высших спинов отсутствуют из-за того, что производящий параметр ξ_{AB} несет только два индекса. Если бы мы рассматривали спинор-тензоры старших рангов $\xi_{A_1\ldots A_n}$, то в 2-форме (5.2.24) появились бы ненулевые вклады и от высших спинов. Выражение (5.2.28) воспроизводит результат Аштекара–Даса [209] с той разницей, что тензор Вейля в (5.2.28) не подвергается конформному растяжению, а конформный вектор Киллинга заменен параметром Киллинга ξ_{AB}.

Подчеркнем, что наша конструкция является общей, позволяя воспроизводить вклады и для параметров старших рангов $\xi_{A_1\ldots A_n}$ непосредственным и универсальным образом. К примеру, сохраняющийся заряд спина $s = 4$ возникает при введении параметра $C^{top} = \xi_{A_1 \dots A_6} Y^{A_1} \dots Y^{A_6}$, в случае чего непосредственное вычисление (5.2.24) дает

$$\mathcal{L}^2_{s=4}(\xi) = -\frac{i\mu}{2} e_{\gamma}{}^{\dot\alpha} e^{\gamma\dot\alpha} \bar\xi^{\dot\alpha(6)} \bar C_{\dot\alpha(8)}(x) + c.c. \tag{5.2.29}$$

Здесь стоит сделать следующее замечание. Может показаться странным, что для того, чтобы воспроизвести заряд свободного фронсдаловского поля, приходится расширять минимальную модель высших спинов путем включения топологического сектора. На самом деле, существуют разные способы получения асимптотических зарядов. Простейший из них заключается во взятии следа от произведения кривизны высших спинов с внешними параметрами, как в (5.2.9), (5.2.11), что не требует расширения уравнений высших спинов. Эти внешние параметры, однако, могут быть сделаны частью пространства модулей теории путем включения их через топологическое расширение, что позволяет трактовать их как химические потенциалы. С формальной стороны такое расширение позволяет порождать линеаризованные заряды минимальной теории, где μ в (5.2.22) играет роль параметра связи, не имеющего, однако, независимого значения. А именно, его произведение с топологическим полем следует отождествлять с обобщенным асимптотическим тензором Киллинга, возникающим в обычном подходе к асимптотическим симметриям. Однако за пределами линейного приближения эти члены позволяют сделать зависящую от тензора Киллинга 2-форму $\mathcal{L}_2$ замкнутой всюду, чего уже невозможно добиться, если оставаться в рамках исходной минимальной модели высших спинов без топологического сектора.

Вновь подчеркнем, что система (5.1.5)-(5.1.7) допускает единственный точно сохраняющийся заряд (5.1.9), в отличие от асимптотического.

Теперь мы переходим к вычислению различных вкладов в заряд (5.1.9) для конкретного решения теории высших спинов, отвечающего вращающейся черной дыре Керра.

5.3. Черные дыры в ОТО и теории высших спинов

Замечательной особенностью всех $4d$ эйнштейновских черных дыр (включая случай ненулевой космологической постоянной Λ) является их «линеаризованная» природа. А именно, тензор Вейля черной дыры одновременно удовлетворяет как линеаризованным, так и полным нелинейным уравнениям Эйнштейна. Это свойство становится явным в известном разложении Керра–Шилда

$$g_{\underline{mn}} = g^0_{\underline{mn}} + \frac{M}{U} k_{\underline{m}} k_{\underline{n}}, \tag{5.3.1}$$

где $g^0_{\underline{mn}}$ – это фоновая $(A)\,dS$-метрика, M – параметр массы, U – некоторая функция и $k_{\underline{m}}$ – вектор Керра–Шилда, который сводит уравнения Эйнштейна к линеаризованным уравнениям Фирца–Паули.

На уровне тензора кривизны такие черные дыры и их аналоги D-типа по Петрову, а также обобщения на высшие спины, порождаются единственным параметром глобальной симметрии $(A)\,dS$ [135]. Напомним вкратце эту конструкцию. Рассмотрим d-мерное пространство $(A)\,dS$, описываемое структурными уравнениями Картана

$$\mathrm{d}\omega_{a,b} + \omega_a{}^c \omega_{c,b} = \Lambda e_a e_b, \tag{5.3.2}$$

$$De_a = de_a + \omega_a{}^b e_b = 0, \tag{5.3.3}$$

где $\omega_{a,b} = -\omega_{b,a}$ и e_a – 1-формы лоренцевой связности и тетрады, соответственно. Уравнения (5.3.2)-(5.3.3) обладают локальной калибровочной симметрией

$$\delta\omega_{a,b} = D\varkappa_{a,b} + \Lambda\left(v_a e_b - v_b e_a\right), \qquad \delta e_a = Dv_a - \varkappa_{a,b} e^b \tag{5.3.4}$$

с произвольными 0-формами $\varkappa_{a,b} = -\varkappa_{b,a}$ и v_a, что позволяет зафиксировать глобальные симметрии $(A)dS$ требованием $\delta\omega_{a,b} = \delta e_a = 0$, ведущим к

$$Dv_a = \varkappa_{a,b} e^b, \tag{5.3.5}$$

$$D\varkappa_{a,b} = -\Lambda(v_a e_b - v_b e_a). \tag{5.3.6}$$

Теперь видно, что v_a – это просто вектор Киллинга, так как из (5.3.5) следует, что $D_a v_b + D_b v_a = 0$, тогда как $\varkappa_{a,b} = -\varkappa_{b,a}$ есть его ковариантная производная.

$\varkappa_{ab}$ и v_a можно объединить в $(d+1)\times(d+1)$-матрицу, принадлежащую $o(d-1,2)$ при $\Lambda < 0$ или $o(d,1)$ при $\Lambda > 0$. Будем называть эту матрицу параметром глобальной симметрии $(A)dS$. Оказывается [135], что система (5.3.5)-(5.3.6) порождает точные решения уравнений Эйнштейна и высших спинов в терминах $\varkappa_{ab}$ и v_a, в том числе все черные дыры ОТО. Рассмотрим более подробно случай AdS_4, следуя [135].

5.3.1. Особенности $4d$ пространства–времени

В случае AdS_4 хорошо известный изоморфизм $o(3,2) \approx sp(4)$ позволяет перейти к языку двухкомпонентных спиноров, что значительно упрощает анализ. Вводя $\varkappa_{\alpha\beta} = \varkappa_{\beta\alpha}$, $\bar{\varkappa}_{\dot\alpha\dot\beta} = \bar{\varkappa}_{\dot\beta\dot\alpha}$ и $v_{\alpha\dot\alpha}$ как спинорные эквиваленты полей $\varkappa_{ab}$ и v_a, находим для них аналоги (5.3.5)-(5.3.6)

$$D^L \varkappa_{\alpha\beta} = -\lambda^2 \left(e_\alpha{}^{\dot\gamma} v_{\beta\dot\gamma} + e_\beta{}^{\dot\gamma} v_{\alpha\dot\gamma} \right) , \tag{5.3.7}$$

$$D^L v_{\alpha\dot\alpha} = -e^\gamma{}_{\dot\alpha} \varkappa_{\gamma\alpha} - e_\alpha{}^{\dot\gamma} \bar{\varkappa}_{\dot\gamma\dot\alpha} , \tag{5.3.8}$$

где $\Lambda = -4\lambda^2$ и $D^L A_{\alpha\dot\alpha} = \mathrm{d}A_{\alpha\dot\alpha} + \omega_\alpha{}^\beta A_{\beta\dot\alpha} + \bar{\omega}_{\dot\alpha}{}^{\dot\beta} A_{\alpha\dot\beta}$. Вводя далее спинорный параметр глобальной симметрии

$$K_{AB} = \begin{pmatrix} \varkappa_{\alpha\beta} & \lambda v_{\alpha\dot\beta} \\ \lambda v_{\beta\dot\alpha} & \bar{\varkappa}_{\dot\alpha\dot\beta} \end{pmatrix}, \tag{5.3.9}$$

перепишем уравнение (2.2.4) для AdS_4-связности (3.1.2) и уравнения глобальной симметрии (5.3.7)-(5.3.8) для K_{AB}

$$\mathrm{d}\phi_{AB} + \phi_A{}^C \phi_{CB} = 0 , \tag{5.3.10}$$

$$\mathrm{d}K_{AB} + \phi_A{}^C K_{CB} + \phi_B{}^C K_{AC} = 0. \tag{5.3.11}$$

В соответствии с тем, что $\mathrm{rank}\,(sp\,(4)) = 2$, имеется два $sp\,(4)$-инварианта

$$C_2 = TrK^2, \quad C_4 = 4TrK^4. \tag{5.3.12}$$

Важное наблюдение, сделанное в [134], заключается в том, что (5.3.7)-(5.3.8) порождает башню решений свободных бозонных уравнений Фронсдала со следующими обобщенными тензорами Вейля высших спинов

$$C_{\alpha(2s)} = \frac{m_s \lambda^{-2s}}{2^s s! q^{2s+1}} \left(\varkappa_{\alpha\alpha}\right)^s, \qquad \bar{C}_{\dot{\alpha}(2s)} = \frac{\bar{m}_s \lambda^{-2s}}{2^s s! \bar{q}^{2s+1}} \left(\bar{\varkappa}_{\dot{\alpha}\dot{\alpha}}\right)^s, \tag{5.3.13}$$

где

$$q = \frac{1}{2\lambda^2}\sqrt{-\frac{\varkappa_{\alpha\beta}\varkappa^{\alpha\beta}}{2}}, \qquad \bar{q} = \frac{1}{2\lambda^2}\sqrt{-\frac{\bar{\varkappa}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\varkappa}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}}{2}} \tag{5.3.14}$$

и m_s – произвольные (комплексные) константы.

Чтобы увидеть, как решения (5.3.13) могут быть воспроизведены из (5.1.2), удобно переписать уравнение (5.3.11) через звездочное произведение как

$$\mathcal{D}^Y_{ad}\left(K_{AB}\left(x\right) Y^A Y^B\right) = 0. \tag{5.3.15}$$

Так как $\mathcal{D}^Y_{ad}$ (2.2.10) представляет собой дифференциальный оператор первого порядка и по x и по Y, любая функция от $\xi = K_{AB}(x) Y^A Y^B$ также удовлетворяет условию ковариантного постоянства

$$\mathcal{D}^Y_{ad} f\left(\xi\right) = 0. \tag{5.3.16}$$

Решение же твистованно-ковариантного условия (5.1.2) может быть получено преобразованием Фурье [136]

$$C\left(y, \bar{y}|x\right) = f(\xi) * 2\pi\delta^2\left(y\right). \tag{5.3.17}$$

В общем случае (5.3.17) не удовлетворяет условию вещественности, но, тем не менее, позволяет выделить обобщенные тензоры Вейля высших спинов, удовлетворяющие этому условию

$$C\left(y, 0|x\right) = f(\xi) * 2\pi\delta^2\left(y\right)|_{\bar{y}=0}, \quad C\left(0, \bar{y}|x\right) = f(\xi) * 2\pi\delta^2\left(\bar{y}\right)|_{y=0}. \tag{5.3.18}$$

Прямое вычисление гауссова интеграла

$$F\left(y, \bar{y}\right) * 2\pi\delta^2\left(y\right) = \int \mathrm{d}^2 u F\left(u, \bar{y}\right) e^{-i u_\alpha y^\alpha} \tag{5.3.19}$$

дает (5.3.13), где конкретные значения m_s зависят от $f(\xi)$.

Решения, возникающие из этой конструкции, принадлежат к типу D по Петрову в том смысле, что все поля $s \geq 1$ построены из двух главных спиноров, являющихся нулевыми направлениями $\varkappa_{\alpha\beta}$. Множество неэквивалентных решений представлено классами сопряженностей по отношению к $Sp(4)$-присоединенному действию

$$K_{AB} \sim \left(U^{-1}KU\right)_{AB}\,, \tag{5.3.20}$$

где $U_A{}^B \in Sp(4)$. В частности, различные значения (5.3.12) соответствуют различным $Sp(4)$-орбитам. Заметим, однако, что с помощью нормировки K_{AB} всегда можно положить один из инвариантов, скажем C_2, равным ± 1 или 0. Всего имеется девять классов сопряженности $o(3,2)$, перечисленных, к примеру, в [224]. Наконец, хотя и не очевидно (см. [135]), для $s=2$ множество полученных таким образом решений покрывается метрикой Картера–Плебански, которая описывает все решения ОТО типа D, включая все черные дыры (за исключением ускоренных систем отсчета). Тут можно провести интересную параллель с черной дырой БТЗ, чей тип определяется классом сопряженности $o(2,2)$-параметра [225]. Эта аналогия, однако, не является прямой, поскольку рассматриваемые нами $d=4$ решения не являются топологическими.

5.3.2. Черная дыра Керра в теории высших спинов

Рассмотрим конкретное решение, описывающее аналог вращающейся черной дыры Керра в теории высших спинов. Для этого выберем AdS_4-метрику Бойера–Линдквиста, описывающую вращающуюся систему отсчета

$$\mathrm{d}s^2 = -\frac{\Delta_r}{\rho^2}\left(\mathrm{d}t - \frac{a}{\Xi}\sin^2\theta\mathrm{d}\phi\right)^2 + \frac{\rho^2}{\Delta_r}\mathrm{d}r^2 + \frac{\rho^2}{\Delta_\theta}\mathrm{d}\theta^2 + \frac{\Delta_\theta\sin^2\theta}{\rho^2}\left(a\mathrm{d}t - \frac{r^2+a^2}{\Xi}\mathrm{d}\phi\right)^2, \tag{5.3.21}$$

где

$$\rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta, \quad \Delta_r = (r^2+a^2)(1-\Lambda r^2), \quad \Delta_\theta = 1 + \Lambda a^2\cos^2\theta, \quad \Xi = 1 + \Lambda a^2. \tag{5.3.22}$$

Поля тетрады удобно зафиксировать следующим образом

$$e^0 = \frac{\sqrt{\Delta_r}}{\rho}\left(\mathrm{d}t - \frac{a}{\Xi}\sin^2\theta \mathrm{d}\phi\right), \qquad e^1 = \frac{\rho}{\sqrt{\Delta_r}}\mathrm{d}r \tag{5.3.23}$$

$$e^2 = \frac{\rho}{\sqrt{\Delta_\theta}}\mathrm{d}\theta, \qquad e^3 = \frac{\sqrt{\Delta_\theta}\sin\theta}{\rho}\left(a\mathrm{d}t - \frac{r^2+a^2}{\Xi}\mathrm{d}\phi\right). \tag{5.3.24}$$

Выбрав вектор Киллинга

$$v^{\underline{m}} = (1,0,0,0) = \frac{\partial}{\partial t}, \tag{5.3.25}$$

находим компоненты $sp(4)$-параметра глобальной симметрии

$$\varkappa_{\alpha\beta} = 2\lambda^2\,(r - ia\cos\theta)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{5.3.26}$$

$$v_{\alpha\dot\beta} = \frac{1}{\rho}\begin{pmatrix} -\sqrt{\Delta_r} + a\sqrt{\Delta_\theta}\sin\theta & 0 \\ 0 & -\sqrt{\Delta_r} - a\sqrt{\Delta_\theta}\sin\theta \end{pmatrix}. \tag{5.3.27}$$

Для спина $s = 2$ формула (5.3.13) при подстановке (5.3.26) воспроизводит стандартный тензор Вейля черной дыры Керра с

$$q = r - ia\cos\theta, \quad \bar q = r + ia\cos\theta. \tag{5.3.28}$$

5.3.3. Заряды черной дыры Керра

Теперь мы можем получить явные выражения для сохраняющихся зарядов (5.1.9) решения высших спинов типа черной дыры Керра.

Вначале рассмотрим вакуумный вклад на свободном уровне. Он равен (5.2.15) для керровского тензора Максвелла (5.3.13)

$$C_{\alpha\beta} = \frac{m_1\varkappa_{\alpha\beta}}{2\lambda^2 q^3}, \tag{5.3.29}$$

где $\varkappa_{\alpha\beta}$ и q даны в (5.3.26) и (5.3.28). В этом случае (5.2.15) можно преобразовать к следующему простому виду

$$\mathcal{L}_2 = -i\left(\frac{m_1\bar\eta}{q^2} + \frac{\bar m_1\eta}{\bar q^2}\right)e^0e^1 - \left(\frac{m_1\bar\eta}{q^2} - \frac{\bar m_1\eta}{\bar q^2}\right)e^2e^3. \tag{5.3.30}$$

Соответствующий заряд (5.1.9) можно вычислить путем интегрирования

(5.3.30) по поверхности $t = const$, $r \to \infty$, что дает

$$Q = 4\pi \frac{m_1\bar{\eta} - \bar{m}_1\eta}{1 + \Lambda a^2}. \tag{5.3.31}$$

Как и ожидалось, полученный таким образом заряд равен нулю при $\eta = \bar{\eta}$ для керровского случая с $m_1 = \bar{m}_1$. Он, однако, нетривиален в случае теорий с нарушенной четностью. Заметим также, что в этом случае Q согласуется, с точностью до числового множителя, со стандартным $s = 1$ зарядом AdS-черной дыры Керра–Ньюмена, см., например, [226]. В четно-инвариантных случаях для получения заряда следует пользоваться (5.2.21).

Теперь вычислим первый нетривиальный топологический вклад в заряд спина 2, даваемый (5.2.28). Для этого отождествим параметр Киллинга $\xi_{\alpha\beta}$ в (5.2.28) с $\varkappa_{\alpha\beta}$ из (5.3.26) и подставим туда $s = 2$ тензор Вейля (5.3.13), построенный из того же $\varkappa_{\alpha\beta}$,

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{m_2}{8\lambda^4 q^5} \varkappa_{(\alpha\beta}\varkappa_{\gamma\delta)}. \tag{5.3.32}$$

Это дает

$$\mathcal{L}_2^{s=2} = 3i\lambda^2 \left(\frac{m_2\bar{\mu}}{q^2} + \frac{\bar{m}_2\mu}{\bar{q}^2} \right) e^0 e^1 + 3\lambda^2 \left(\frac{m_2\bar{\mu}}{q^2} - \frac{\bar{m}_2\mu}{\bar{q}^2} \right) e^2 e^3. \tag{5.3.33}$$

Чтобы вычислить заряд мы опять интегрируем это выражение по $t = const$, $r \to \infty$, получая

$$Q_{s=2} = 3\pi\Lambda \frac{m_2\bar{\mu} - \bar{m}_2\mu}{1 + \Lambda a^2}. \tag{5.3.34}$$

Теперь можно подобрать параметры μ и $\bar{\mu}$ так, чтобы воспроизвести соответствующий заряд черной дыры.

5.4. Выводы

В этой Главе выдвинута и обоснована гипотеза, что статсуммы теории высших спинов определяются замкнутой 2-формой, связанной с уравнениями высших спинов с топологическим сектором, который с термодинамической точки зрения представляет собой химические потенциалы, сопряженные различным зарядам всех спинов. Предложенная конструкция не только правильно воспроизводит асимптотические заряды, но также допускает нелинейную деформацию в балк.

В частности, в этой Главе вычислены вакуумные вклады в статсумму при нулевых химических потенциалах на свободном уровне, а также вклад первого порядка по химическим потенциалам, что позволяет извлечь в низшем порядке сохраняющийся заряд черной дыры при надлежащем выборе параметров модулей.

Показано, что 2-форма инвариантного функционала, определенная on-shell, обеспечивает нетривиальную вакуумную статсумму. Причина ее нетривиальности когомологическая. Если решения глобально хорошо определены, то соответствующий функционал тривиален. Если же имеются глобальные особенности, он может быть ненулевым. То, что это действительно имеет место, проиллюстрировано на примере черной дыры Керра с высшими спинами в AdS_4 на линейном уровне. Соответствующий глобальный заряд оказывается ненулевым и согласующимся с асимптотическим АДМ-поведением. Подчеркнем, что как раз те решения, которые не являются всюду хорошо определенными, зачастую и представляют физический интерес, например, черные дыры, потенциал Кулона, струна Дирака и ее гравитационный аналог, решение Тауба–НУТ.

Мы также проанализировали лидирующий вклад в асимптотический заряд химических потенциалов, собранных в топологическом секторе теории. Их эффект легко извлекается в первом порядке по физическим полям и дается простой формулой, воспроизводящей известный результат [209] для случая гравитации. Но при этом полученный результат непосредственно применим и к асимптотическим зарядам произвольных спинов, связанных с параметрами произвольных рангов. Таким образом, мы предлагаем эффективный инструмент для извлечения асимптотических зарядов высших спинов. В качестве побочного результат нашей конструкции мы также получили явную формулу (5.2.12), связывающую между собой асимптотические заряды, выраженные через обобщенные тензоры Вейля высших спинов, с каноническими асимптотическими зарядами, выраженными через поля Фронсдала. Было бы интересно изучить, как предлагаемый подход может быть применен к другим лагранжевым системам высших спинов, вроде [113].

Наконец, можно ожидать, что предлагаемый подход не только сделает возможным вычисление нетривиальных зарядов для чернодырных решений высших спинов [136, 206], начиная с линейного отклика на различные химические потенциалы, но, в конце концов, прольет свет на проблему информационного парадокса в черных дырах. Наиболее существенная черта развитого формализма состоит в том, что заряды не зависят от цикла интегрирования и, следовательно, могут быть одинаково успешно вычисляться как на бесконечности, так и на горизонте событий. Это, в частности, открывает путь к аналогам термодинамических формул Смарра в теории высших спинов. Другой потенциально связанный с этим вопрос относится к интерпретации полей теории как физических или же топологических, что, в принципе, определяется поведением вакуумного решения в различных областях пространства–времени. Все это делает теорию высших спинов исключительно интересной в контексте изучения физики черных дыр.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Кратко перечислим основные результаты диссертационной работы:

1. Найдена развернутая off-shell система уравнений, описывающая $4d$ $\mathcal{N}=1$ модель Весса–Зумино. Путем изучения соответствующих Q-когомологий найдены все ее развернутые суперполевые лагранжианы в классах суперформ, интегральных форм и киральных интегральных форм, установлены явные соответствия между ними. Предложен способ интегрирования суперформ, соответствующих развернутым лагранжианам, что позволяет определить развернутые суперполевые действия.

2. Исходя из квадратичных членов в уравнениях Васильева в локальной формулировке [132], получены квадратичные поправки к уравнениям Фронсдала, описывающие токовые взаимодействия полей высших спинов. Для случая P-четных теорий результаты совпадают с известными в литературе выражениями, что, таким образом, доказывает правильность локальной формулировки [132]. Для случая P-нечетных теорий найдена зависимость квадратичных поправок от фазового множителя в уравнениях Васильева. Обнаружено, что $\varphi = \frac{\pi}{4}$ модель нарушает четность максимальным образом (ведущая по производным вершина пропорциональна символу Леви-Чивиты).

3. Разработана пертурбативная техника для (расширенных) уравнений высших спинов: построены операторы, полностью разрешающие всю зависимость по вспомогательным (Z,θ)-переменным для двух типов уравнений (в присоединенном и твистованном секторах), возникающих в теории возмущений для (расширенных) уравнений Васильева; найдены порождаемые ими разложения единицы.

4. Найдена явно лоренц-ковариантная форма расширенных уравнений высших спинов. Показано, что пертурбативная техника для лоренц-ковариантных уравнений имеет более простой вид по сравнению с нековариантным случаем: операторы ковариантной теории возмущений могут быть получены из

нековариантных путем простого приравнивания нулю лоренцевой связности. Установлено, что лоренцева симметрия, в нерасширенных уравнениях реализуемая алгеброй деформированных осцилляторов, после расширения реализуется в виде некоторого нетривиального обобщения этой алгебры.

5. Предложена конструкция для сохраняющихся зарядов в нелинейной теории высших спинов с топологическими полями. В этом контексте топологические поля могут быть интерпретированы как химические потенциалы, сопряженные различным зарядам. В качестве примера вычислены в низших порядках по полям заряды черной дыры Керра с высшими спинами. В линейном приближении предлагаемая конструкция согласуется с каноническими асимптотическими зарядами высших спинов: найдена явная формула, связывающая асимптотические заряды, выраженные через обобщенные тензоры Вейля, с зарядами, выраженными через фронсдаловские поля.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Weinberg S*. Photons and Gravitons in S-Matrix Theory: Derivation of Charge Conservation and Equality of Gravitational and Inertial Mass // *Phys. Rev.* – 1964. – Vol. 135. – Pp. B1049–B1056.

2. *Coleman S., Mandula J.* All Possible Symmetries of the S Matrix // *Phys. Rev.* – 1967. – Vol. 159. – Pp. 1251–1256.

3. *Weinberg S., Witten E*. Limits on Massless Particles // *Phys. Lett.* – 1980. – Vol. 96B. – Pp. 59–62.

4. *Golfand Yu.A., Likhtman E.P.* Extension of the Algebra of Poincare Group Generators and Violation of p Invariance // *JETP Lett.* – 1971. – Vol. 13. – Pp. 323–326, *Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* – 1971. – Vol. 13. – Pp. 452–455.

5. *Gervais J.-L., Sakita B*. Field Theory Interpretation of Supergauges in Dual Models // *Nucl. Phys.* – 1971. – Vol. B34. – Pp. 632–639.

6. *Ramond P*. Dual Theory for Free Fermions // *Phys. Rev.* – 1971. – Vol. D3. – Pp. 2415–2418.

7. *Volkov D.V., Akulov V.P.* Is the Neutrino a Goldstone Particle? // *Phys. Lett.* – 1973. – Vol. 46B. – Pp. 109–110.

8. *Volkov D.V., Akulov V.P.* Possible universal neutrino interaction // *JETP Lett.* – 1972. – Vol. 16. – Pp. 438–440, *Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* – 1972. – Vol. 16. – Pp. 621–624.

9. *Wess J., Zumino B.* A Lagrangian Model Invariant Under Gauge Transformations // *Phys. Lett.* – 1974. – Vol. 49B. – Pp. 52–54.

10. *Wess J., Zumino B*. Supergauge Transformations in Four-Dimensions // *Nucl. Phys.* – 1974. – Vol. B70. – Pp. 39–49.

11. *Mandelstam S*. Light Cone Superspace and the Ultraviolet Finiteness of the N=4 Model // *Nucl. Phys.* – 1983. – Vol. B213. – Pp. 149–168.

12. *Brink L., Lindgren O., Nilsson B.E.W.* The Ultraviolet Finiteness of the N=4 Yang-Mills Theory // *Phys. Lett.* – 1983. – Vol. 123B. – Pp. 323–328.

13. *Seiberg N.* Supersymmetry and Nonperturbative beta Functions // *Phys. Lett.* – 1988. – Vol. B206. – Pp. 75–80.

14. *Galperin A., Ivanov E., Kalitsyn S., Ogievetsky V., Sokatchev E.* Unconstrained N=2 Matter, Yang-Mills and Supergravity Theories in Harmonic Superspace // *Class. Quant. Grav.* – 1984. – Vol. 1. – Pp. 469–498, Erratum: *Class. Quant. Grav.* – 1985. – Vol. 2. – P. 127.

15. *Galperin A., Ivanov E., Kalitsyn S., Ogievetsky V., Sokatchev E.* Unconstrained Off-Shell N=3 Supersymmetric Yang-Mills Theory // *Class. Quant. Grav.* – 1985. – Vol. 2. – Pp. 155–170.

16. *Galperin A., Ivanov E., Ogievetsky V., Sokatchev E.* Harmonic Supergraphs. Green Functions // *Class. Quant. Grav.* – 1985. – Vol. 2. – Pp. 601–624.

17. *Galperin A., Ivanov E., Ogievetsky V., Sokatchev E.* Harmonic Supergraphs. Feynman Rules and Examples // *Class. Quant. Grav.* – 1985. – Vol. 2. – Pp. 617–636.

18. *Seiberg N., Witten E.* Monopoles, duality and chiral symmetry breaking in N=2 supersymmetric QCD // *Nucl. Phys.* – 1994. – Vol. B431. – Pp. 484–550.

19. *Seiberg N., Witten E.* Electric - magnetic duality, monopole condensation, and confinement in N=2 supersymmetric Yang-Mills theory // *Nucl. Phys.* – 1994. – Vol. B426. – Pp. 19–52, Erratum: *Nucl. Phys.* – 1994. – Vol. B430. – Pp. 485–486.

20. *Seiberg N.* Electric - magnetic duality in supersymmetric nonAbelian gauge theories // *Nucl. Phys.* – 1995. – Vol. B435. – Pp. 129–146.

21. *Nekrasov N.A.* Seiberg-Witten prepotential from instanton counting // *Adv. Theor. Math. Phys.* – 2003. – Vol. 7, no.5. – Pp. 831–864.

22. *Pestun V.* Localization of gauge theory on a four-sphere and supersymmetric Wilson loops // *Commun. Math. Phys.* – 2012 – Vol. 313. – Pp. 71–129.

23. *Kapustin A., Willett B., Yaakov I.* Exact Results for Wilson Loops in Superconformal Chern-Simons Theories with Matter // *JHEP*. – 2010. – Vol. 1003. – P. 089.

24. *Pestun V. et al.* Localization techniques in quantum field theories // *J. Phys.* – 2017. – Vol. A50, no.44. – P. 440301.

25. *Marshakov A., Mironov A., Morozov A.* On non-conformal limit of the AGT relations // *Phys. Lett.* – 2009. – Vol. B682. – Pp. 125–129.

26. *Alday L.F., Gaiotto D., Gukov S., Tachikawa Y., Verlinde H.* Loop and surface operators in N=2 gauge theory and Liouville modular geometry // *JHEP*. – 2010. – Vol. 1001. – P. 113.

27. *Alday L.F., Gaiotto D., Tachikawa Y.* Liouville Correlation Functions from Four-dimensional Gauge Theories // *Lett. Math. Phys.* – 2010. – Vol. 91. – Pp. 167–197.

28. *Mironov A., Morozov A.* On AGT relation in the case of U(3) // *Nucl. Phys.* – 2010. – Vol. B825. – Pp. 1–37.

29. *Mironov A., Morozov A.* Nekrasov Functions and Exact Bohr-Zommerfeld Integrals // *JHEP*. – 2010. – Vol. 1004. – P. 040.

30. *Alba V.A., Fateev V.A., Litvinov A.V., Tarnopolskiy G.M.* On combinatorial expansion of the conformal blocks arising from AGT conjecture // *Lett. Math. Phys.* – 2011. – Vol. 98. – Pp. 33–64.

31. *Freedman D.Z., van Nieuwenhuizen P., Ferrara S.* Progress Toward A Theory Of Supergravity // *Phys. Rev.* – 1976. – Vol. D13. – Pp. 3214–3218.

32. *van Nieuwenhuizen P.* Supergravity // *Phys. Rept.* – 1981. – Vol. 68 – Pp. 189–398.

33. *Bern Z., Carrasco J.J., Forde D., Ita H., Johansson H.* Unexpected Cancellations in Gravity Theories // *Phys. Rev.* – 2008. – Vol. D77. – P. 025010.

34. *Bern Z., Carrasco J.J., Dixon L.J., Johansson H., Roiban R.* The Ultraviolet Behavior of N=8 Supergravity at Four Loops // *Phys. Rev. Lett.* – 2009. –Vol. 103. – P. 081301.

35. *Beisert N., Elvang H., Freedman D.Z., Kiermaier M., Morales A., Stieberger S.* E7(7) constraints on counterterms in N=8 supergravity // *Phys.Lett.* – 2011. – Vol. B694. – Pp. 265–271.

36. *Green M., Schwarz J., Witten E.* Superstring Theory. – Cambridge University Press, 1987.

37. *Witten E.* Noncommutative Geometry and String Field Theory // *Nucl. Phys.* – 1986. – Vol. B268. – Pp. 253–294.

38. *Preitschopf C., Thorn C., Yost S.* Superstring Field Theory // *Nucl. Phys.* – 1990. – Vol. B337. – Pp. 363–433.

39. *Aref'eva I., Medvedev P., Zubarev A.* New Representation for String Field Solves the Consistency Problem for Open Superstring Field Theory // *Nucl. Phys.* – 1990. – Vol. B341. – Pp. 464–498.

40. *Berkovits N.* Super-Poincare Invariant Superstring Field Theory // *Nucl. Phys.* – 1995. – Vol. B450. – Pp. 90–102, Erratum: *Nucl. Phys.* – 1996. – Vol. B459. – Pp. 439–451.

41. *Michishita Y.* A covariant action with a constraint and Feynman rules for fermions in open superstring field theory // *JHEP.* – 2005. – Vol. 0501. – P. 012.

42. *Berkovits N., Echevarria C. T.* Four Point Amplitudes from Open Superstring Field Theory // *Phys. Lett.* – 2000. – Vol. B478 – Pp. 343–350.

43. *Berkovits N.* Pure spinor formalism as an N=2 topological string // *JHEP.* – 2005. – Vol. 0510. – P. 089.

44. *Saadi M., Zwiebach B.* Closed String Field Theory from Polyhedra // *Annals Phys.* – 1989. – Vol. 192. – Pp. 213–232.

45. *Sonoda H., Zwiebach B.* Covariant Closed String Theory Cannot Be Cubic // *Nucl. Phys.* – 1990. – Vol. B336. – Pp. 185–221.

46. *Kugo T., Suehiro K.* Nonpolynomial Closed String Field Theory // *Phys.Lett.* – 1989. – vol. B226. – Pp. 48–54.

47. *Kugo T., Suehiro K.* Nonpolynomial Closed String Field Theory: Action and Its Gauge Invariance // *Nucl. Phys.* – 1990. – Vol. B337. – Pp. 434–466.

48. *Zwiebach B.* Closed string field theory: Quantum action and the B-V master equation // *Nucl. Phys.* – 1993. – Vol. B390. – Pp. 33–152.

49. *Gaiotto D., Rastelli L., Sen A., Zwiebach B.* Ghost structure and closed strings in vacuum string field theory // *Adv. Theor. Math. Phys.* – 2003. – Vol. 6. – Pp. 403–456.

50. *Moeller N.* Closed Bosonic String Field Theory at Quintic Order: Five-Tachyon Contact Term and Dilaton Theorem // *JHEP*. – 2007. – Vol. 0703. – P. 043.

51. *Moeller N*. Closed Bosonic String Field Theory at Quintic Order. II. Marginal Deformations and Effective Potential // *JHEP*. – 2007. – Vol. 0709. – P. 118.

52. *Susskind L.* The Anthropic landscape of string theory. – In **Carr B. (ed.)* Universe or multiverse?* – Cambridge University Press, 2009. – Pp. 247–266.

53. *Gross D.J.* High-Energy Symmetries of String Theory // *Phys. Rev. Lett.* – 1988. – Vol. 60. – Pp. 1229–1238.

54. *Maldacena J.M.* The Large N limit of superconformal field theories and supergravity // *Adv. Theor. Math. Phys.* – 1998. – Vol. 2. – Pp. 231–252, *Int. J. Theor. Phys.* – 1999. – Vol. 38. – Pp. 1113–1133.

55. *Gubser S.S., Klebanov I.R., Polyakov A.M.* Gauge theory correlators from noncritical string theory // *Phys. Lett.* – 1998. – Vol. B428. – Pp. 105–114.

56. *Witten E.* Anti-de Sitter space and holography // *Adv. Theor. Math. Phys.* – 1998. – Vol. 2. – Pp. 253–291.

57. *Klebanov I.R., Polyakov A.M.* AdS dual of the critical O(N) vector model // *Phys. Lett.* – 2002. – Vol. B550. – Pp. 213–219.

58. *Leigh R.G., Petkou A.C.* Holography of the N=1 higher spin theory on AdS(4) // *JHEP*. – 2003. – Vol. 0306. – P. 011.

59. *Sezgin E., Sundell P.* Holography in 4D (super) higher spin theories and a test via cubic scalar couplings // *JHEP*. – 2005. – Vol. 0507. – P. 044.

60. *Aharony O., Gur-Ari G., Yacoby R.* d=3 Bosonic Vector Models Coupled to Chern-Simons Gauge Theories // *JHEP*. – 2012. – Vol. 1203. – P. 037.

61. *Giombi S., Minwalla S., Prakash S., Trivedi S.P., Wadia S.R., Yin X.* Chern-Simons Theory with Vector Fermion Matter // *Eur. Phys. J.* – 2012. – Vol. C72. – Pp. 2112–2234.

62. *Vasiliev M.A.* Holography, Unfolding and Higher-Spin Theory // *J. Phys.* – 2013. – Vol. A46. – P. 214013.

63. *Giombi S., Yin X.* Higher Spin Gauge Theory and Holography: The Three-Point Functions // *JHEP.* – 2010. – Vol. 1009. – P. 115.

64. *Giombi S., Yin X.* Higher Spins in AdS and Twistorial Holography // *JHEP.* – 2011. – Vol. 1104. – P. 086.

65. *de Mello Koch R., Jevicki A., Jin K., Rodrigues J.P.* AdS_4/CFT_3 Construction from Collective Fields // *Phys. Rev.* – 2011. – Vol. D83. – P. 025006.

66. *Giombi S., Yin X.* On Higher Spin Gauge Theory and the Critical O(N) Model // *Phys. Rev.* – 2012. – Vol. D85. – P. 086005.

67. *Giombi S., Yin X.* The Higher Spin/Vector Model Duality // *J. Phys.* – 2013. – Vol. A46. – P. 214003.

68. *Maldacena J., Zhiboedov A.* Constraining Conformal Field Theories with A Higher Spin Symmetry // *J. Phys.* – 2013. – Vol. A46. – P. 214011.

69. *Tseytlin A.A.* On partition function and Weyl anomaly of conformal higher spin fields // *Nucl. Phys.* – 2013. – Vol. B877. – Pp. 598–631.

70. *Giombi S., Klebanov I.R.* One Loop Tests of Higher Spin AdS/CFT // *JHEP.* – 2013. – Vol. 1312. – P. 068.

71. *Giombi S., Klebanov I.R., Pufu S.S., Safdi B.R., Tarnopolsky G.* AdS Description of Induced Higher-Spin Gauge Theory // *JHEP.* – 2013. – Vol. 1310. – P. 016.

72. *Giombi S., Klebanov I.R., Tseytlin A.A.* Partition Functions and Casimir Energies in Higher Spin AdS_{d+1}/CFT_d // *Phys. Rev.* – 2014. – Vol. D90, no.2. – P. 024048.

73. *Giombi S., Klebanov I.R., Safdi B.R.* Higher Spin AdS_{d+1}/CFT_d at One Loop // *Phys. Rev.* – 2014. – Vol. D89, no.8. – P. 084004.

74. *Didenko V.E., Vasiliev M.A.* Test of the local form of higher-spin equations via AdS/CFT // *Phys. Lett.* – 2017. – Vol. B775. – Pp. 352–360.

75. *Majorana E.* Relativistic theory of particles with arbitrary intrinsic angular momentum // *Nuovo Cim.* – 1932. – Vol. 9. – Pp. 335–344.

76. *Dirac P.A.M.* Relativistic wave equations // *Proc. Roy. Soc. Lond.* – 1936. – Vol. A155. – Pp. 447–459.

77. *Fierz M., Pauli W.* On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field // *Proc. Roy. Soc. Lond.* – 1939. – Vol. A173. – Pp. 211–232.

78. *Wigner E.P.* On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group // *Annals Math.* – 1939. – Vol. 40. – Pp. 149–204.

79. *Fronsdal C.* Massless Fields with Integer Spin // *Phys. Rev.* – 1978. – Vol. D18. – P. 3624.

80. *Fang J., Fronsdal C.* Massless Fields with Half Integral Spin // *Phys. Rev.* – 1978. – Vol. D18. – P. 3630.

81. *Singh L.P.S., Hagen C.R.* Lagrangian formulation for arbitrary spin. 1. The boson case // *Phys. Rev.* – 1974. – Vol. D9. – Pp. 898–909.

82. *Singh L.P.S., Hagen C.R.* Lagrangian formulation for arbitrary spin. 2. The fermion case // *Phys. Rev.* – 1974. – Vol. D9. – Pp. 910–920.

83. *Fronsdal C.* Singletons and Massless, Integral Spin Fields on de Sitter Space // *Phys. Rev.* – 1979. – Vol. D20. – Pp. 848–856.

84. *Fang J., Fronsdal C.* Massless, Half Integer Spin Fields in de Sitter Space // *Phys. Rev.* – 1980. – Vol. D22. – P. 1361.

85. *Bengtsson A.K.H., I. Bengtsson I., Brink L.* Cubic interaction terms for arbitrary spin // *Nucl. Phys.* – 1983. – Vol. B227. – Pp. 31–40.

86. *Bengtsson A.K.H., I. Bengtsson I., Brink L.* Cubic interaction terms for arbitrarily extended Supermultiplets // *Nucl. Phys.* – 1983. – Vol. B227. – Pp. 41–49.

87. *Berends F.A., Burgers G.J.H., Van Dam H.* On Spin Three Selfinteractions // *Z. Phys.* – 1984. – Vol. C24. – Pp. 247–254.

88. *Berends F.A., Burgers G.J.H., Van Dam H.* On the Theoretical Problems in Constructing Interactions Involving Higher Spin Massless Particles // *Nucl. Phys.* – 1985. – Vol. B260. – Pp. 295–322.

89. *Berends F.A., Burgers G.J.H., Van Dam H.* Explicit Construction of Conserved Currents for Massless Fields of Arbitrary Spin // *Nucl. Phys.* – 1986. – Vol. B271. – Pp. 429–441.

90. *Aragone C., Deser S.* Consistency Problems of Hypergravity // *Phys. Lett.* – 1979. – Vol. B86. – Pp. 161–163.

91. *Berends F.A., van Holten J.W., de Wit B., van Nieuwenhuizen P.* On spin 5/2 gauge fields // *J. Phys.* – 1980. – Vol. A13. – Pp. 1643–1649.

92. *Fradkin E.S., Vasiliev M.A.* On the Gravitational Interaction of Massless Higher Spin Fields // *Phys. Lett.* – 1987. – Vol. B189. – Pp. 89–95.

93. *Fradkin E.S., Vasiliev M.A.* Cubic Interaction in Extended Theories of Massless Higher Spin Fields // *Nucl. Phys.* – 1987. – Vol. B291. – Pp. 141–171.

94. *Vasiliev M.A.* Consistent equation for interacting gauge fields of all spins in (3+1)-dimensions // *Phys. Lett.* – 1990. – Vol. B243. – Pp. 378–382.

95. *Vasiliev M.A.* More on equations of motion for interacting massless fields of all spins in (3+1)-dimensions // *Phys. Lett.* – 1992. – Vol. B285. – Pp. 225–234.

96. *Vasiliev M.A.* Equations of motion of interacting massless fields of all spins as a free differential algebra // *Phys. Lett.* – 1988. – Vol. B209. – Pp. 491–497.

97. *Vasiliev M.A.* Consistent equations for interacting massless fields of all spins in the first order in curvatures // *Annals Phys.* – 1989. – Vol. 190. – Pp. 59–106.

98. *Vasiliev M.A.* Nonlinear equations for symmetric massless higher spin fields in (A)dS(d) // *Phys. Lett.* – 2003. – Vol. B567. – Pp. 139–151.

99. *Alkalaev K.B., Shaynkman O.V., Vasiliev M.A.* On the frame-like formulation of mixed symmetry massless fields in (A)dS(d) // *Nucl. Phys.* – 2004. – Vol. B692. – Pp. 363–393.

100. *Alkalaev K.B., Shaynkman O.V., Vasiliev M.A.* Lagrangian formulation for free mixed-symmetry bosonic gauge fields in (A)dS(d) // *JHEP*. – 2005. – Vol. 0508. – P. 069.

101. *Buchbinder I.L., Krykhtin V.A., Takata H.* Gauge invariant Lagrangian construction for massive bosonic mixed symmetry higher spin fields // *Phys. Lett*. – 2007. – Vol. B656. – Pp. 253–264.

102. *Skvortsov E.D.* Mixed-Symmetry Massless Fields in Minkowski space Unfolded // *JHEP*. – 2008. – Vol. 0807. – P. 004.

103. *Skvortsov E.D.* Frame-like Actions for Massless Mixed-Symmetry Fields in Minkowski space // *Nucl. Phys*. – 2009. – Vol. B808. – Pp. 569–591.

104. *Zinoviev Yu.M.* Frame-like gauge invariant formulation for mixed symmetry fermionic fields // *Nucl. Phys*. – 2009. – Vol. B821.– Pp. 21–47.

105. *Boulanger N., Iazeolla C., Sundell P.* Unfolding Mixed-Symmetry Fields in AdS and the BMV Conjecture: I. General Formalism // *JHEP*. – 2009. – Vol. 0907. – P. 013.

106. *Boulanger N., Iazeolla C., Sundell P.* Unfolding Mixed-Symmetry Fields in AdS and the BMV Conjecture. II. Oscillator Realization Nicolas Boulanger, Carlo Iazeolla, Per Sundell // *JHEP*. – 2009. – Vol. 0907. – P. 014.

107. *Alkalaev K.B., Grigoriev M.A.* Unified BRST description of AdS gauge fields // *Nucl. Phys*. – 2010. – Vol. B835. – Pp. 197–220.

108. *Boulanger N., Skvortsov E.D., Zinoviev Yu.M.* Gravitational cubic interactions for a simple mixed-symmetry gauge field in AdS and flat backgrounds // *J. Phys*. – 2011. – Vol. A44 – P. 415403.

109. *Skvortsov E.D., Zinoviev Yu.M.* Frame-like Actions for Massless Mixed-Symmetry Fields in Minkowski space. Fermions // *Nucl. Phys*. – 2011. – Vol. B843. – Pp. 559–569.

110. *Metsaev R.R.* Cubic interaction vertices for fermionic and bosonic arbitrary spin fields // *Nucl. Phys*. – 2012. – Vol. B859. – Pp. 13–69.

111. *Buchbinder I.L., Reshetnyak A.* General Lagrangian Formulation for Higher Spin Fields with Arbitrary Index Symmetry. I. Bosonic fields // *Nucl. Phys.* – 2012. – Vol. B862. – Pp. 270–326.

112. *Reshetnyak A.* General Lagrangian Formulation for Higher Spin Fields with Arbitrary Index Symmetry. 2. Fermionic fields // *Nucl. Phys.* – 2013. – Vol. B869. – Pp. 523–597.

113. *Boulanger N., Sundell P.* An action principle for Vasiliev's four-dimensional higher-spin gravity // *J. Phys.* – 2011. – Vol. A44. – P. 495402.

114. *Cartan E.* Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée. (première partie) // *Annales Sci. Ecole Norm. Sup.* – 1923. – Vol. 40. – Pp. 325–412.

115. *Cartan E.* Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée. (première partie) (Suite). // *Annales Sci. Ecole Norm. Sup.* – 1924. – Vol. 41. – Pp. 1–25.

116. *Weyl H.* A Remark on the coupling of gravitation and electron Hermann // *Phys. Rev.* – 1950. – Vol. 77. – Pp. 699–701.

117. *Salam A., Strathdee J.A.* Supergauge Transformations // *Nucl. Phys.* – 1974. – Vol. B76. – Pp. 477–482.

118. *Ponomarev D.S., Vasiliev M.A.* Unfolded Scalar Supermultiplet // *JHEP.* – 2012. – Vol. 1201. – P. 152.

119. *Vasiliev M.A.* Star-Product Functions in Higher-Spin Theory and Locality // *JHEP.* – 2015. – Vol. 1506. – P. 031.

120. *Bekaert X., Erdmenger J., Ponomarev D., Sleight C.* Quartic AdS Interactions in Higher-Spin Gravity from Conformal Field Theory // *JHEP.* – 2015. – Vol. 1511. – P. 149.

121. *Skvortsov E.D., Taronna M.* On Locality, Holography and Unfolding // *JHEP.* – 2015. – Vol. 1511. – P. 044.

122. *Boulanger N., Kessel P., Skvortsov E.D., Taronna M.* Higher spin interactions in four-dimensions: Vasiliev versus Fronsdal // *J. Phys.* – 2016. – Vol. A49, no.9. – P. 095402.

123. *Taronna M.* A note on field redefinitions and higher-spin equations // *J. Phys.* – 2017. – Vol. A50, no.7. – P. 075401.

124. *Vasiliev M.A.* Current Interactions and Holography from the 0-Form Sector of Nonlinear Higher-Spin Equations // *JHEP*. – 2017. – Vol. 1710. – P. 111.

125. *Vasiliev M.A.* On the Local Frame in Nonlinear Higher-Spin Equations // *JHEP*. – 2018. – Vol. 1801. – P. 062.

126. *Ponomarev D.* A Note on (Non)-Locality in Holographic Higher Spin Theories // *Universe.* – 2018. – Vol. 4, no.1. – P. 2.

127. *Metsaev R.R.* Poincare invariant dynamics of massless higher spins: Fourth order analysis on mass shell // *Mod. Phys. Lett.* – 1991. – Vol. A6. – Pp. 359–367.

128. *Metsaev R.R.* S-matrix approach to massless higher spins theory. II: The Case of internal symmetry // *Mod. Phys. Lett.* – 1991. – Vol. A6. – Pp. 2411–2421.

129. *Ponomarev D., Skvortsov E.D.* Light-Front Higher-Spin Theories in Flat Space // *J. Phys.* – 2017. – Vol. A50, no.9. – P. 095401.

130. *Ponomarev D.* Off-Shell Spinor-Helicity Amplitudes from Light-Cone Deformation Procedure // *JHEP*. – 2016. – Vol. 1612. – Pp. 117.

131. *Ponomarev D.* Chiral Higher Spin Theories and Self-Duality // *JHEP*. – 2017. – Vol. 1712. – P. 141.

132. *Gelfond O.A., Vasiliev M.A.* Current Interactions from the One-Form Sector of Nonlinear Higher-Spin Equations // *Nucl. Phys.* – 2018. – Vol. B931. – Pp. 383–417.

133. *Vasiliev M.A.* Invariant Functionals in Higher-Spin Theory // *Nucl. Phys.* – 2017. – Vol. B916. – Pp. 219–253.

134. *Didenko V.E., Matveev A.S., Vasiliev M.A.* Unfolded Description of AdS(4) Kerr Black Hole // *Phys. Lett.* – 2008. – Vol. B665. – Pp. 284–293.

135. *Didenko V.E., Matveev A.S., Vasiliev M.A.* Unfolded Dynamics and Parameter Flow of Generic AdS(4) Black Hole. – 2009. – arXiv:0901.2172 [hep-th].

136. *Didenko V.E., Vasiliev M.A.* Static BPS black hole in 4d higher-spin gauge theory // *Phys. Lett.* – 2009. – Vol. B682. – Pp. 305–315, Erratum: *Phys. Lett.* – 2013. –Vol. B722. – P. 389.

137. *Bekenstein J.D.* Black holes and entropy // *Phys. Rev.* – 1973. – Vol. D7. – Pp. 2333–2346.

138. *Strominger A., Vafa C.* Microscopic origin of the Bekenstein-Hawking entropy // *Phys. Lett.* – 1996. – Vol. B379. – Pp. 99–104.

139. *Hawking S.W.* Breakdown of Predictability in Gravitational Collapse // *Phys. Rev.* – 1976. – Vol. D14. – Pp. 2460–2473.

140. *Chadha S., Nielsen H.B.* Lorentz Invariance As A Low-energy Phenomenon // *Nucl. Phys.* – 1983. – Vol. B217. – Pp. 125–144.

141. *Hořava P.* Membranes at Quantum Criticality // *JHEP*. – 2009. – Vol. 0903. – P. 020.

142. *Hořava P.* Quantum Gravity at a Lifshitz Point // *Phys. Rev.* – 2009. – Vol. D79. – P. 084008.

143. *Blas D., Pujolas O., Sibiryakov S.* On the Extra Mode and Inconsistency of Hořava Gravity // *JHEP*. – 2009. – Vol. 0910. – P. 029.

144. *Blas D., Pujolas O., Sibiryakov S.* Consistent Extension of Hořava Gravity // *Phys. Rev. Lett.* – 2010. – Vol. 104. – P. 181302.

145. *Blas D., Pujolas O., Sibiryakov S.* Models of non-relativistic quantum gravity: The Good, the bad and the healthy // *JHEP*. – 2011. – Vol. 1104. – P. 018.

146. *Barvinsky A.O., Blas D., Herrero-Valea M., Sibiryakov S.M., Steinwachs C.F.* Renormalization of Hořava gravity // *Phys. Rev.* – 2016. – Vol. D93, no.6. – P. 064022.

147. *Vasiliev M.A.* Properties of equations of motion of interacting gauge fields of all spins in (3+1)-dimensions // *Class. Quant. Grav.* – 1991. – Vol. 8. – Pp. 1387–1417.

148. *Misuna N.G., Vasiliev M.A.* Off-Shell Scalar Supermultiplet in the Unfolded Dynamics Approach // *JHEP*. – 2014. – Vol. 1405. – P. 140.

149. *Didenko V.E., Misuna N.G., Vasiliev M.A.* Perturbative analysis in higher-spin theories // *JHEP*. – 2016. – Vol. 1607. – P. 146.

150. *Didenko V.E., Misuna N.G., Vasiliev M.A.* Charges in nonlinear higher-spin theory // *JHEP*. – 2017. – Vol. 1703. – P. 164.

151. *Misuna N.G.* On current contribution to Fronsdal equations // *Phys. Lett.* – 2018. – Vol. B778. – Pp. 71–78.

152. *Didenko V.E., Misuna N.G., Vasiliev M.A.* Lorentz covariant form of extended higher-spin equations // *JHEP*. – 2018. – Vol. 1807. – P. 133.

153. *Bekaert X., Cnockaert S., Iazeolla C., Vasiliev M.A.* Nonlinear higher spin theories in various dimensions // Higher spin gauge theories. Proceedings, 1st Solvay Workshop, Brussels, Belgium, 12-14 May, 2004. – 2004. – Pp.132–197.

154. *Vasiliev M.A.* Actions, charges and off-shell fields in the unfolded dynamics approach // *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* – 2006. – Vol. 3. – Pp. 37–80.

155. *Bernstein J., Leites D.A.* Integral forms and the Stokes formula on supermanifolds // *Funktsional. Anal. i Prilozhen.* – 1977. – Vol. 11, no.1. – Pp. 55–56, *Funct. Anal. Appl.* – 1977. – Vol. 11, no.1. – Pp. 45–47.

156. *Howe P.S., Lindström U., Wulff L.* Kappa-symmetry for coincident D-branes // *JHEP*. – 2007. – Vol. 0709. – P. 010.

157. *Weinberg S.* The quantum theory of fields. Volume III: Supersymmetry. – Cambridge University Press, 2000.

158. *Antoniadis I., Dudas E., Ghilencea D.M.* Supersymmetric models with higher dimensional operators // *JHEP*. – 2008. – Vol. 0803. – P. 045.

159. *Khoury J., Lehners J.-L., Ovrut B.* Supersymmetric $P(X,\phi)$ and the ghost condensate // *Phys. Rev.* – 2011. – Vol. D83. – P. 125031.

160. *Gallegos E.A., Senise Jr. C.R., da Silva A.J.* Higher-derivative Wess-Zumino model in three dimensions // *Phys. Rev.* – 2013. – Vol. D87. – P. 085032.

161. *Gama F.S., Nascimento J.R., Petrov A.Y.* Effective superpotential in the generic higher-derivative three-dimensional scalar superfield theory // *Phys. Rev.* – 2013. – Vol. D88. – P. 065029.

162. *D'Adda A., D'Auria R., Fré P., Regge T.* Geometrical formulation of supergravity theories on orthosymplectic supergroup manifolds // *Riv. Nuovo Cim.* – 1980. – Vol. 3, no.6. – Pp. 1–81.

163. *Castellani L., Fré P., van Nieuwenhuizen P.* A review of the group manifold approach and its application to conformal supergravity // *Annals Phys.* – 1981. – Vol. 136. – P. 398–434.

164. *Gates Jr. S.J.* Ectoplasm has no topology: the prelude // Supersymmetries and Quantum Symmetries (SQS'97). Proceedings, 2nd International Seminar, dedicated to the Memory of V.I. Ogievetsky, Dubna, Russia, July 22-26, 1997. – 1999. – Pp. 46–57.

165. *Gates Jr. S.J., Grisaru M.T., Knutt-Wehlau M.E., Siegel W.* Component actions from curved superspace: Normal coordinates and ectoplasm // *Phys. Lett.* – 1998. – Vol. B421. – Pp. 203–210.

166. *Gates Jr. S.J., Kuzenko S.M., Tartaglino-Mazzucchelli G.* Chiral supergravity actions and superforms // *Phys. Rev.* – 2009. – Vol. D80. – P. 125015.

167. *Howe P.S., Raetzel O., Sezgin E.* On brane actions and superembeddings // *JHEP.* – 1998. – Vol. 9808. – P. 011.

168. *Shaynkman O.V., Vasiliev M.A.* Scalar field in any dimension from the higher spin gauge theory perspective // *Theor. Math. Phys.* – 2000. – Vol. 123. – 683–700, *Teor. Mat. Fiz.* – 2000. – Vol. 123. – Pp. 323–344.

169. *Berkovits N., Howe P.S.* The cohomology of superspace, pure spinors and invariant integrals // *JHEP.* – 2008. – Vol. 0806. – P. 046.

170. *Bossard G., Howe P.S., Stelle K.S.* The ultra-violet question in maximally supersymmetric field theories // *Gen. Rel. Grav.* – 2009. – Vol. 41. – Pp. 919–981.

171. *Bossard G., Howe P.S., Lindström U., Stelle K.S., Wulff L.* Integral invariants in maximally supersymmetric Yang-Mills theories // *JHEP.* – 2011. – Vol. 1105. – P. 021.

172. *Movshev M., Schwarz A.* Supersymmetric deformations of maximally supersymmetric gauge theories // *JHEP.* – 2012. – Vol. 1209. – P. 136.

173. *Chang C.-M., Lin Y.-H., Wang Y., YinX.* Deformations with maximal supersymmetries. Part 1: On-shell formulation. – 2014. – arXiv:1403.0545 [hep-th].

174. *Chang C.-M., Lin Y.-H., Wang Y., YinX.* Deformations with maximal supersymmetries. Part 2: Off-shell formulation. – 2014. – arXiv:1403.0709 [hep-th].

175. *Vasiliev M.A.* Conformal higher spin symmetries of 4D massless supermultiplets and osp(L, 2M) invariant equations in generalized (super)space // *Phys. Rev.* – 2002. – Vol. D66. – P. 066006.

176. *Engquist J., Sezgin E., Sundell P.* Superspace formulation of 4D higher spin gauge theory // *Nucl. Phys.* – 2003. – Vol. B664. – Pp. 439–456.

177. *Gelfond O.A., Vasiliev M.A.* Higher rank conformal fields in the Sp(2M) symmetric generalized space-time // *Theor. Math. Phys.* – 2005. – Vol. 145. – Pp. 1400–1424, *Teor. Mat. Fiz.* – 2005. – Vol. 145. – Pp. 35–65.

178. *Vasiliev M.A.* Cubic vertices for symmetric higher-spin gauge fields in $(A)\,dS_d$ // *Nucl. Phys.* – 2012. – Vol. B862. – Pp. 341–408.

179. *Barnich G., Grigoriev M., Semikhatov A., Tipunin I.* Parent field theory and unfolding in BRST first-quantized terms // *Commun. Math. Phys.* – 2005. – Vol. 260. – Pp. 147–181.

180. *Gelfond O.A., Vasiliev M.A.* Sp(8) invariant higher spin theory, twistors and geometric BRST formulation of unfolded field equations // JHEP. – 2009. – Vol. 0912. – P. 021.

181. *Gelfond O.A., Vasiliev M.A.* Unfolding Versus BRST and Currents in Sp(2M) Invariant Higher-Spin Theory. – 2010. – arXiv:1001.2585 [hep-th].

182. *Bengtsson A.K.H.* BRST Approach To Interacting Higher Spin Gauge Fields // *Class. Quant. Grav.* – 1988. – Vol. 5. – Pp. 437–452.

183. *Pashnev A., M. Tsulaia M.* Description of the higher massless irreducible integer spins in the BRST approach // *Mod. Phys. Lett.* – 1998. – Vol. A13. – Pp. 1853–1864.

184. *Buchbinder I.L., Krykhtin V.A. Pashnev A.* BRST approach to Lagrangian construction for fermionic massless higher spin fields // *Nucl. Phys.* – 2005. – Vol. B711. – Pp. 367–391.

185. *Buchbinder I.L., Fotopoulos A., Petkou A.C., Tsulaia M.* Constructing the cubic interaction vertex of higher spin gauge fields // *Phys. Rev.* – 2006. – Vol. D74. – P. 105018.

186. *Buchbinder I.L., Krykhtin V.A., Lavrov P.M.* Gauge invariant Lagrangian formulation of higher spin massive bosonic field theory in AdS space // *Nucl. Phys.* – 2007. – Vol. B762. – Pp. 344-376.

187. *Buchbinder I.L., Krykhtin V.A., Reshetnyak A.A.* BRST approach to Lagrangian construction for fermionic higher spin fields in (A)dS space // *Nucl. Phys.* – 2007. – Vol. B787. – Pp. 211–240.

188. *Fotopoulos A., Tsulaia M.* Gauge Invariant Lagrangians for Free and Interacting Higher Spin Fields. A Review of the BRST formulation // *Int. J. Mod. Phys.* – 2009. – Vol. A24. – Pp. 1-60.

189. *Buchbinder I.L., Krykhtin V.A., Lavrov P.M.* On manifolds admitting the consistent Lagrangian formulation for higher spin fields // *Mod. Phys. Lett.* – 2011. – Vol. A26. – Pp. 1183–1196.

190. *Metsaev R.R.* BRST-BV approach to cubic interaction vertices for massive and massless higher-spin fields // *Phys. Lett.* – 2013. – Vol. B720. – Pp. 237–243.

191. *Witten E.* Notes on supermanifolds and integration. – 2012. – arXiv:1209.2199 [hep-th].

192. *van Nieuwenhuizen P.* Supergravity as a Yang-Mills theory. – In **'t Hooft G. (ed.)* 50 Years of Yang-Mills Theory*. – World Scientific, 2005. – Pp. 433–456.

193. *Vasiliev M.A.* Higher spin superalgebras in any dimension and their representations // *JHEP.* – 2004. – Vol. 0412. – P. 046.

194. *Henneaux M., Teitelboim C.* Quantization of gauge systems. – Princeton University Press, 1992.

195. *Prokushkin S.F., Vasiliev M.A.* Higher-spin gauge interactions for massive matter fields in 3D AdS space-time // *Nucl. Phys.* – 1999. – Vol. B545. – Pp. 385–433.

196. *Prokushkin S.F., Vasiliev M.A.* Cohomology of arbitrary spin currents in AdS_3 // *Theor. Math. Phys.* – 2000. – Vol. 123. – Pp. 415–435, *Teor. Mat. Fiz.* – 2000. – Vol. 123. – Pp. 3–25.

197. *Kessel P., Gómez G.L., Skvortsov E., Taronna M.* Higher Spins and Matter Interacting in Dimension Three // *JHEP.* – 2015. – Vol. 1511. – P. 104.

198. *Sezgin E., Skvortsov E.D., Zhu Y.* Chern-Simons Matter Theories and Higher Spin Gravity // *JHEP.* – 2017. – Vol. 1707. – P. 133.

199. *Sleight C., Taronna M.* Higher Spin Interactions from Conformal Field Theory: The Complete Cubic Couplings // *Phys. Rev. Lett.* – 2016. – Vol. 116, no.18. – P. 181602.

200. *Gelfond O.A., Vasiliev M.A.* Symmetries of higher-spin current interactions in four dimensions // *Theor. Math. Phys.* – 2016. – Vol. 187, no.3. – Pp. 797–812, *Teor. Mat. Fiz.* – 2016. – Vol. 187, no.3. – Pp. 401–420.

201. *Boulanger N., Leclercq S., Sundell P.* On The Uniqueness of Minimal Coupling in Higher-Spin Gauge Theory // *JHEP.* – 2008. – Vol. 0808. – P. 056.

202. *Metsaev R.R.* Cubic interaction vertices of massive and massless higher spin fields // *Nucl. Phys.* – 2006. – Vol. B759. – Pp. 147–201.

203. *Francia D., Lo Monaco G., Mkrtchyan K.* Cubic interactions of Maxwell-like higher spins // *JHEP.* – 2017. – Vol. 1704. – P. 068.

204. *Sezgin E., Sundell P.* Analysis of higher spin field equations in four-dimensions // *JHEP.* – 2002. – Vol. 0207. – P. 055.

205. *Vasiliev M.A.* Higher spin gauge theories: Star product and AdS space. – In **Shifman M.A. (ed.)* The many faces of the superworld. Yuri Golfand Memorial Volume.* – World Scientific, 1999. – Pp. 533–610.

206. *Iazeolla C., Sundell P.* Families of exact solutions to Vasiliev's 4D equations with spherical, cylindrical and biaxial symmetry // *JHEP*. – 2011. – Vol. 1112. – P. 084.

207. *Vasiliev M.A.* Quantization on sphere and high spin superalgebras // *JETP Lett.* – 1989. – Vol. 50. – 374–377, *Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* – 1989. – Vol. 50. – Pp. 344–347.

208. *Vasiliev M.A.* Higher Spin Algebras and Quantization on the Sphere and Hyperboloid // *Int. J. Mod. Phys.* – 1991. – Vol. A6. – Pp. 1115–1135.

209. *Ashtekar A., Das S.* Asymptotically Anti-de Sitter Space-times: Conserved Quantities // *Class. Quant. Grav.* – 2000. – Vol. 17. – L17–L30.

210. *Vasiliev M.A.* Higher-Spin Theory and Space-Time Metamorphoses // *Lect. Notes Phys.* – 2015. – Vol. 892. – Pp. 227–264.

211. *Bondi H., van der Burg M.G.J., Metzner A.W.K.* Gravitational waves in general relativity, VII. Waves from axi-symmetric isolated system // *Proc. Roy. Soc. Lond.* – 1962. – Vol. A269. – Pp. 21–52.

212. *Sachs R.K.* Gravitational waves in general relativity VIII. Waves in asymptotically flat space-time // *Proc. Roy. Soc. Lond.* – 1962. – Vol. A270. – Pp. 103–126.

213. *Sachs R.* Asymptotic symmetries in gravitational theory // *Phys. Rev.* – 1962. – Vol. 128. – Pp. 2851–2864.

214. *Barnich G., Leclercq S., Spindel P.* Classification of surface charges for a spin two field on a curved background solution // *Lett. Math. Phys.* – 2004. – Vol. 68. – Pp. 175–181.

215. *Barnich G., Brandt F.* Covariant theory of asymptotic symmetries, conservation laws and central charges // *Nucl. Phys.* – 2002. – Vol. B633. – Pp. 3–82.

216. *Barnich G., Bouatta N., Grigoriev M.* Surface charges and dynamical Killing tensors for higher spin gauge fields in constant curvature spaces // *JHEP*. – 2005. – Vol. 0510. – P. 010.

217. *Henneaux M., Perez A., Tempo D., Troncoso R.* Chemical potentials in three-dimensional higher spin anti-de Sitter gravity // *JHEP*. – 2013. – Vol. 1312. – P. 048.

218. *Bunster C., Henneaux M., Perez A., Tempo D., Troncoso R.* Generalized Black Holes in Three-dimensional Spacetime // *JHEP*. – 2014. – Vol. 1405. – P. 031.

219. *Campoleoni A., Henneaux M.* Asymptotic symmetries of three-dimensional higher-spin gravity: the metric approach // *JHEP*. – 2015. – Vol. 1503. – P. 143.

220. *Campoleoni A., Gonzalez H.A., Oblak B., Riegler M.* Rotating Higher Spin Partition Functions and Extended BMS Symmetries // *JHEP*. – 2016. – Vol. 1604. – P. 034.

221. *Komar A.* Covariant Conservation Laws in General Relativity // *Phys. Rev.* – 1959. – Vol. 113. – Pp. 934–936.

222. *Magnon A.* On Komar integrals in asymptotically anti-de Sitter space-times // *J. Math. Phys.* – 1985. – Vol. 26. – Pp. 3112–3117.

223. *Kastor D.* Komar Integrals in Higher (and Lower) Derivative Gravity // *Class. Quant. Grav.* – 2008. – Vol. 25. – P. 175007.

224. *Holst S., Peldan P.* Black Holes and Causal Structure in Anti-de Sitter Isometric Spacetimes // *Class. Quant. Grav.* – 1997. – Vol. 14. – Pp. 3433–3452.

225. *Banados M., Henneaux M., Teitelboim C., Zanelli J.* Geometry of the (2+1) black hole // *Phys. Rev.* – 1993. – Vol. D48. – Pp. 1506–1525, Erratum: *Phys. Rev.* – 2013. – Vol. D88. – P. 069902.

226. *Caldarelli M.M., Cognola G., Klemm D.* Thermodynamics of Kerr-Newman-AdS Black Holes and Conformal Field Theories // *Class. Quant. Grav.* – 2000. – Vol. 17. – P. 399–420.

ПРИЛОЖЕНИЕ А. Обозначения и соглашения

В Диссертации приняты следующие индексные обозначения. Строчные латинские буквы $a, b, c, ... = 0, ..., 3$ являются индексами лоренцевых тензоров в плоском касательном 4-мерном пространстве–времени. Подчеркнутые латинские буквы $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, ... = 0, ..., 3$ являются тензорными индексами в 4-мерном базовом пространстве–времени. Греческие строчные буквы $\alpha, \beta, \gamma, ... = 1, 2$ и $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, ... = 1, 2$ являются (вейлевскими) $sp\,(2)$-спинорными индексами. Заглавные латинские буквы $A, B, C, ... = 1, ..., 4$ являются (майорановскими) $sp\,(4)$-спинорными индексами, отвечающими двум типам $sp\,(2)$-спиноров, $A = \{\alpha, \dot{\alpha}\}$. В Главе 1 используется также суперпространство Минковского $\mathbb{R}^{4|4}$ с координатами $z^{\underline{M}} = \left(x^{\underline{m}}, \theta^{\mu}, \bar{\theta}^{\dot{\mu}}\right)$; $\underline{m} = 0...3$; $\mu, \dot{\mu} = 1, 2$, где координаты θ являются грассмановыми переменными.

Метрика касательного пространства Минковского выбрана в виде $\eta_{ab} = diag\,\{1, -1, -1, -1\}$. Используются конденсированные тензорные обозначения: $a(k)$ обозначает k симметризованных индексов $(a_1...a_k)$ (круглые скобки означают симметризацию). Индексы в квадратных скобках $[a_1...a_k]$ являются антисимметризованными. Спинорная метрика выбрана в виде

$$\epsilon^{\alpha\beta} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad \epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad \epsilon_{AB} = \begin{Vmatrix} \epsilon_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \end{Vmatrix} \tag{A.1}$$

и поднимает/опускает спинорные индексы по следующим правилам

$$\xi^{\alpha} = \epsilon^{\alpha\beta}\xi_{\beta}, \quad \xi_{\alpha} = \epsilon_{\beta\alpha}\xi^{\beta}, \quad \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\xi}_{\dot{\beta}}, \quad \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} = \epsilon_{\dot{\beta}\dot{\alpha}}\bar{\xi}^{\dot{\beta}} \quad \xi^{A} = \epsilon^{AB}\xi_{B}, \quad \xi_{A} = \epsilon_{BA}\xi^{B}. \tag{A.2}$$

σ-матрицы выбраны в виде

$$\left(\sigma^0\right)_{\alpha\dot{\beta}} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \ \left(\sigma^1\right)_{\alpha\dot{\beta}} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \ \left(\sigma^2\right)_{\alpha\dot{\beta}} = \begin{Vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{Vmatrix}, \ \left(\sigma^3\right)_{\alpha\dot{\beta}} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}. \tag{A.3}$$

Также используются антиэрмитовы матрицы

$$\left(\sigma_{ab}\right)_{\alpha}{}^{\beta}=\frac{1}{2}\left(\left(\sigma_{a}\right)_{\alpha\dot{\alpha}}\left(\bar{\sigma}_{b}\right)^{\dot{\alpha}\beta}-\left(\sigma_{b}\right)_{\alpha\dot{\alpha}}\left(\bar{\sigma}_{a}\right)^{\dot{\alpha}\beta}\right),\ \left(\bar{\sigma}_{ab}\right)^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}=\frac{1}{2}\left(\left(\bar{\sigma}_{a}\right)^{\dot{\alpha}\alpha}\left(\bar{\sigma}_{b}\right)_{\alpha\dot{\beta}}-\left(\bar{\sigma}_{a}\right)^{\dot{\alpha}\alpha}\left(\bar{\sigma}_{b}\right)_{\alpha\dot{\beta}}\right). \tag{A.4}$$

Их тензорные индексы поднимаются/опускаются символом Леви-Чивиты

$$\left(\sigma^{ab}\right)_{\alpha}{}^{\beta}=\frac{i}{2}\epsilon^{abcd}\left(\sigma_{cd}\right)_{\alpha}{}^{\beta},\qquad \left(\bar{\sigma}^{ab}\right)^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}=-\frac{i}{2}\epsilon^{abcd}\left(\bar{\sigma}_{cd}\right)^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}. \tag{A.5}$$

Применяются следующие хорошо известные соотношения

$$T_{\alpha\beta\gamma\ldots}-T_{\beta\alpha\gamma\ldots}=\epsilon_{\alpha\beta}T^{\delta}{}_{\delta\gamma\ldots}, \tag{A.6}$$

$$\left(\sigma^{a}\right)_{\alpha\dot{\alpha}}\left(\bar{\sigma}_{a}\right)^{\beta\dot{\beta}}=2\delta_{\alpha}{}^{\beta}\delta_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}}, \tag{A.7}$$

$$\left(\sigma_{a}\bar{\sigma}_{b}\right)_{\alpha}{}^{\beta}=\eta_{ab}\delta_{\alpha}{}^{\beta}+\left(\sigma_{ab}\right)_{\alpha}{}^{\beta}. \tag{A.8}$$

С помощью них можно доказать следующие формулы

$$\left(\sigma_{a}\right)_{\alpha\dot{\alpha}}\left(\sigma_{b}\right)_{\beta\dot{\beta}}-\left(\sigma_{b}\right)_{\alpha\dot{\alpha}}\left(\sigma_{a}\right)_{\beta\dot{\beta}}=\left(\sigma_{ab}\right)_{\alpha\beta}\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}+\left(\bar{\sigma}_{ab}\right)_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\epsilon_{\alpha\beta}, \tag{A.9}$$

$$\left(\sigma_{a}\right)_{\alpha\dot{\alpha}}\left(\sigma_{b}\right)_{\beta\dot{\beta}}+\left(\sigma_{b}\right)_{\alpha\dot{\alpha}}\left(\sigma_{a}\right)_{\beta\dot{\beta}}=\eta_{ab}\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}+\left(\sigma_{ca}\right)_{\alpha\beta}\left(\bar{\sigma}_{cb}\right)_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}, \tag{A.10}$$

$$\left(\sigma^{a}\bar{\sigma}^{b}\sigma^{c}\right)_{\alpha\dot{\alpha}}-\left(\sigma^{c}\bar{\sigma}^{b}\sigma^{a}\right)_{\alpha\dot{\alpha}}=2i\epsilon^{abcd}\left(\sigma_{d}\right)_{\alpha\dot{\alpha}}. \tag{A.11}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б. Уравнения Q-замкнутости из Главы 1

Разложение уравнения $\hat{Q}\mathcal{L} = 0$ для (1.6.1) и (1.5.4) по G-градуировкам приводит к следующей цепочке уравнений

$$G = 9: \quad Q_3 \left[E_a E_b \left(\bar{\sigma}^{ab}\right)^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{E}_{\dot{\alpha}} \bar{E}_{\dot{\beta}} \ell_6\right] = 0, \tag{Б.1}$$

$$Q_3 \left[E_a E_b \left(\sigma^{ab}\right)^{\alpha\beta} E_\alpha E_\beta \bar{\ell}_6\right] = 0. \tag{Б.2}$$

$$G = 8: \quad Q_2^- \left[E_a E_b \left(\bar{\sigma}^{ab}\right)^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{E}_{\dot{\alpha}} \bar{E}_{\dot{\beta}} \ell_6\right] = 0, \tag{Б.3}$$

$$Q_2^+ \left[E_a E_b \left(\sigma^{ab}\right)^{\alpha\beta} E_\alpha E_\beta \bar{\ell}_6\right] = 0, \tag{Б.4}$$

$$Q_3 \left[\epsilon^{abcd} E_a E_b E_c \bar{E}_{\dot{\alpha}} \left(\bar{\sigma}_d\right)^{\dot{\alpha}\alpha} \ell_{5\alpha}\right] + Q_2^+ \left[E_a E_b \left(\bar{\sigma}^{ab}\right)^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{E}_{\dot{\alpha}} \bar{E}_{\dot{\beta}} \ell_6\right] = 0, \tag{Б.5}$$

$$Q_3 \left[\epsilon^{abcd} E_a E_b E_c E^\alpha \left(\sigma_d\right)_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\ell}_5^{\dot{\alpha}}\right] + Q_2^- \left[E_a E_b \left(\sigma^{ab}\right)^{\alpha\beta} E_\alpha E_\beta \bar{\ell}_6\right] = 0. \tag{Б.6}$$

$$G = 7: \quad Q_2^- \left[\epsilon^{abcd} E_a E_b E_c \bar{E}_{\dot{\alpha}} \left(\bar{\sigma}_d\right)^{\dot{\alpha}\alpha} \ell_{5\alpha}\right] + Q_1 \left[E_a E_b \left(\bar{\sigma}^{ab}\right)^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{E}_{\dot{\alpha}} \bar{E}_{\dot{\beta}} \ell_6\right] = 0, \tag{Б.7}$$

$$Q_2^+ \left[\epsilon^{abcd} E_a E_b E_c E^\alpha \left(\sigma_d\right)_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\ell}_5^{\dot{\alpha}}\right] + Q_1 \left[E_a E_b \left(\sigma^{ab}\right)^{\alpha\beta} E_\alpha E_\beta \bar{\ell}_6\right] = 0, \tag{Б.8}$$

$$Q_2^- \left[\epsilon^{abcd} E_a E_b E_c E^\alpha \left(\sigma_d\right)_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\ell}_5^{\dot{\alpha}}\right] + Q_2^+ \left[\epsilon^{abcd} E_a E_b E_c \bar{E}_{\dot{\alpha}} \left(\bar{\sigma}_d\right)^{\dot{\alpha}\alpha} \ell_{5\alpha}\right] + \\ + Q_3 \left[E_a E_b E_c E_d \epsilon^{abcd} \ell_4\right] = 0. \tag{Б.9}$$

$$G = 6: \quad Q_2^- \left[E_a E_b E_c E_d \epsilon^{abcd} \ell_4\right] + Q_1 \left[\epsilon^{abcd} E_a E_b E_c \bar{E}_{\dot{\alpha}} \left(\bar{\sigma}_d\right)^{\dot{\alpha}\alpha} \ell_{5\alpha}\right] = 0, \tag{Б.10}$$

$$Q_2^+ \left[E_a E_b E_c E_d \epsilon^{abcd} \ell_4\right] + Q_1 \left[\epsilon^{abcd} E_a E_b E_c E^\alpha \left(\sigma_d\right)_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\ell}_5^{\dot{\alpha}}\right] = 0. \tag{Б.11}$$

$$G = 5: \quad Q_1 \left[E_a E_b E_c E_d \epsilon^{abcd} \ell_4\right] = 0. \tag{Б.12}$$