

Отзыв официального оппонента

Чехова Леонида Олеговича

на диссертацию

Белавина Владимира Александровича

Интегрируемость и дуальности двумерной конформной теории поля

представленную на соискание ученой степени  
доктора физико-математических наук  
по специальности 01.04.02 – теоретическая физика

Диссертационная работа Владимира Александровича Белавина представляет собой фундаментальный труд, объединяющий такие, на первый взгляд различные области знания, как топологические модели, матричные модели, интегрируемые иерархии и исследования структур фробениусовых многообразий. Результаты диссертации естественным образом вплетаются в общую картину теорий двумерной гравитации и двумерных суперсимметричных конформных теорий и внесли весомый вклад в развитие этой области знания, уже более двадцати лет находящейся на острие научного прогресса, что связано не в последнюю очередь с тем, что эта дисциплина с завидной регулярностью производит все новые и новые нетривиальные и зачастую научные результаты. Значительная часть этих результатов охвачена в диссертации.

Ценность теории лиувиллевской гравитации для современной теоретической физики трудно переоценить – во-многом теоретическая физика на настоящем этапе развития и есть лиувиллевская гравитация. В самом деле, одно перечисление направлений, использующих элементы теории Лиувилля, звучит как перечисление секций на конгрессе математической физики: интегрируемые системы, геометрические системы с кроссинг-симметрией – фробениусовы многообразия, двумерная квантовая теория поля, матричные модели, конформные и логарифмические конформные теории поля, квантовые римановы поверхности, квантовые спектральные кривые, бутстрап, соответствие АГТ между конформными теориями и полями Янга—Миллса, подсчет инстантонных вкладов в суперсимметричной теории Янга—Миллса – функции Некрасова, – и это только области, знакомые оппоненту. Ниже будет приведено описание вклада диссертанта в некоторые из упомянутых областей.

Задачи, обсуждаемые и полностью или частично решенные в работе, охватывают различные области знания, относящиеся как к теоретической физике, так и к смежным областям математики.

В первой главе приводится явная конструкция четырехточечной корреляционной функции в суперсимметричной теории поля Лиувилля, для которой проверяется свойство кроссингсимметрии, что является доказательством самосогласованности конформного бутстрапа и гипотезы о структуре операторного разложения теории. Для произведения такого вычисления применяется специальная техника сингулярных векторов. Задача вычисления полной амплитуды рассеяния четырех частиц даже в случае бозонной квантовой теории Лиувилля исключительно сложна, и полного

ответа в случае т.н. “жесткого” асимптотического предела при больших значениях величин полей не имеет. Имеется точный ответ для трехточечной корреляционной функции – формула Дорна—Отто—Замолодчикова—Замолодчикова, которая сама по себе крайне сложна технически и получается с учетом симметрий модели, достаточных, чтобы фиксировать все “динамические” параметры. Автор продемонстрировал недюжинное умение в обращении с весьма громоздкими выражениями, выписываемыми в обобщениях функций Барнса, или квантовых дилогарифмов. Метод, позволяющий получить ответы для несравненно более сложного случая четырехточечной корреляционной функции, основан на применении сингулярных векторов из теории минимальных моделей конформной теории поля: ввиду того, что эти вектора удовлетворяют определенным дифференциальным уравнениям, те же уравнения зануляют корреляционные функции с вставками таких векторов; при этом нетривиальная часть задачи состоит в выражении соответствующего конформного блока в терминах инвариантов конформных преобразований для суперсимметричной теории, что и порождает в итоге обыкновенные дифференциальные уравнения, которым удовлетворяет искомая корреляционная функция – формула 1.35. Крайне интересно сравнить эти ОДУ с очень похожими дифференциальными уравнениями Харера--Цагира, возникающими в подходе матричных моделей, что может быть продуктивным направлением дальнейших исследований. Далее автор показал, что указанное ОДУ имеет вид уравнения Доценко—Фатеева, решение которого задается набором двукратных интегралов. Для четырехточечной корреляционной функции общего вида из подхода сингулярных векторов с применением формулы Каца удалось произвести рекурсивные вычисления с помощью эллиптического представления конформных блоков---в пертурбативном режиме по переданному импульсу, что уже представляется глубоко нетривиальной задачей. Более того, впервые удалось явно проверить выполнение кроссинг-симметрии на нескольких первых членах пертурбативного разложения.

Во второй главе приводится явная конструкция физических амплитуд в минимальных моделях супергравитации Лиувилля. Исследована связь между кохомологиями с духовым числом, равным единице, и логарифмическими полями в теории Лиувилля, позволяющая вычислять эти амплитуды.

В третьей главе исследуется специальный класс точно решаемых моделей некритической теории струн, описывающих взаимодействие минимальных моделей конформной теории поля, играющих роль полей материи, и поля Лиувилля, индуцирующего гравитацию. Такая теория обладает настолько обширной БРСТ симметрией, что оказывается возможным вычислить с ее помощью корреляционные функции с помощью сведения интеграла по пространству модулей к учету граничных членов. Более того, для данных моделей имеется в наличии альтернативное вычисление – не вполне строго обоснованное – базирующееся на матричных моделях. В диссертации показано, что результаты обоих подходов согласуются в пределах погрешности вычислений, что подтверждает применимость обеих техник в вычислениях в рамках минимальной лиувиллевской гравитации.

В контексте теории минимальной лиувиллевской гравитации установленная при активном участии соискателя связь с фробениусовыми многообразиями приводит к формулировке нового метода, который позволяет эффективно исследовать корреляционные числа. Четвертая глава диссертационной работы посвящена

дальнейшему развитию этого направления. Соискатель описывает подход, позволяющий связать производящую функцию корреляционных чисел с решением струнного уравнения Дугласа, которое в совокупности с дифференциальным уравнением на свободную энергию позволяет найти ее явное интегральное представление, а также демонстрирует, что специальное решение струнного уравнения, порождающее корреляционные числа с заданными свойствами и связанные с этим решением резонансные соотношения в общем случае минимальной  $(q,p)$  гравитации, задается плоскими координатами на фробениусовом многообразии.

Связь структуры фробениусовых многообразий и метода топологической рекурсии остается не до конца изученной и представляет собой направление, активно развивающееся в настоящее время. Эта связь, а также альтернативная техника реконструкции Гивенталя, направленная на восстановление информации о геометрии пространства модулей кривых, исходя из алгебраической конструкции фробениусовых многообразий, остаются за рамками диссертационной работы, что указывается автором.

Последняя часть диссертации посвящена построению соответствия Алдая—Гайотто—Тачикавы в конформных теориях поля с  $N=1$  и  $N=2$  суперсимметриями и минимальными моделями конформной теории поля. В рамках исследования АГТ соответствия получены соотношения дуальности между двумерной конформной теорией с  $N=1$  суперконформной киральной алгеброй и специальным классом четырехмерных калибровочных теорий, определенных на  $Z_2$ -орбифолде.

Получение приведенных выше результатов потребовало глубокого знания как теории фробениусовых многообразий, так и теории модулярных форм и интегрируемых систем. Производит впечатление та, разумеется кажущаяся легкость, с которой автор обращается с понятиями и объектами, приходящими из самых разных областей теоретической физики и математики.

Новизна полученных результатов позволила продвинуться в понимании структуры конформной теории поля, двумерной минимальной теории гравитации Лиувилля, в анализе алгебраической структуры двух независимых подходов к теории двумерной квантовой гравитации, изучении связи конформной теории поля с четырехмерными калибровочными теориями. Эти результаты регулярно используются российскими и зарубежными научными группами для дальнейших исследований в соответствующих областях. Вклад автора во всех полученных результатах в работах с соавторами является определяющим как при формулировке задач, так и при поиске их решения. Все конкретные вычисления проведены автором независимо.

Все заявленные результаты оригинальны, интересны, и внесли весомый вклад в развитие теории лиувиллевской гравитации. Соискатель проявил себя как зрелый исследователь, диссертационная работа которого не только представляет собой фундаментальный труд, отражающий современное состояние дел в области минимальной лиувиллевской гравитации, но и создает хороший задел для дальнейших исследований и установления взаимосвязей этой теории с другими, родственными ей областями знания, прежде всего, с теорией топологической рекурсии, которой, возможно, не было уделено должного внимания в данной работе. Но это всего лишь пожелание на будущее, несколько не снижающее самой высокой оценки представленной работы. Обнаруженные микроскопические недостатки -- в

основном опечатки (которых на удивление мало, принимая в расчет существенный объем работы: “четырёхточечной” стр.280, “голоморфной сектор” стр. 94, аббревиация минимальной лиувиллевской гравитации – встречается как русская МЛГ, так и английская MLG). В смысле подачи материала возможно было бы более естественно начать с главы 3, перекликающейся с первой главой (и содержащей, например, формулу ДОЗЗ для трёхточечной корреляционной функции), а затем уже представить результаты вычисления четырёхточечной корреляционной функции. Это все сущие мелочи, никоим образом не снижающие высочайшей оценки данной работы, автор которой, Владимир Александрович Белавин, бесспорно заслуживает присуждения искомой степени доктора физико-математических наук.

Доктор физико-математических наук  
в.н.с. Математического института им. В.А.Стеклова РАН,  
119991, г. Москва, ул. Губкина, д. 8,  
e-mail:chekhov@mi.ras.ru

Леонид Олегович Чехов

Подпись Л.О.Чехова заверяю



Зав. Отдела кадров МИАН  
В. И. Высоцкая