

«УТВЕРЖДАЮ»
Директор ИЯИ РАН
Д.ф.-м.н. М.В.Либанов

« 16 » сентября 2021 г.

Отзыв

Ведущей организации
Федерального государственного бюджетного учреждения науки
Института ядерных исследований Российской академии наук (ИЯИ РАН)
на диссертационную работу Морозова Андрея Алексеевича
«Точные вильсоновские средние в калибровочной теории Черна-Саймонса»,
представленную на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук
по специальности 01.04.02 – теоретическая физика.

Теория Черна-Саймонса находится на стыке различных областей физики и математики. Исследования в этой области связаны с различными задачами в трехмерной гравитации, квантовых вычислениях, конформной теории поля, интегрируемых системах, матричных моделях и теории узлов. Со средними значениями петель Вильсона в теории Черна-Саймонса связаны в числе прочих такие величины, как конформные блоки, числа состояний в некоторых моделях теории струн, тау-функции модели КП и полиномы узлов. Работы, посвященные этим величинам и связям между ними, активно публикуются в международных научных журналах. Это обуславливает актуальность исследования, проведенного в диссертации А.А.Морозова.

Диссертационное исследование посвящено изучению методов вычисления вильсоновских средних в теории Черна-Саймонса и связанных с ними инвариантов узлов. Для понимания описанных выше связей необходимо уметь вычислять и знать свойства вильсоновских средних для различных контуров, калибровочных групп и представлений. Изучению таких вильсоновских средних и посвящена диссертационная работа.

Диссертация состоит из Введения, одиннадцати глав, Заключения и списка литературы. Во Введении обоснована актуальность темы исследований, описаны цели и задачи диссертационной работы, сформулированы положения, выносимые на защиту, приведен список публикаций по теме диссертаций.

Вторая глава посвящена обсуждению теории узлов, тесно связанной с трехмерной теорией Черна-Саймонса. В этой главе обсуждаются основные понятия теории узлов, в том числе определяются полиномы узлов Джонса и ХОМФЛИ-ПТ, которые изучаются в диссертационной работе. Эти полиномы равны вильсоновским средним в теории Черна-Саймонса с калибровочными группами $SU(N)$ и $SU(2)$. Также во второй главе определяются виртуальные узлы, которые позволяют обобщить подходы теории узлов и теории Черна-Саймонса со случая трехмерного сферического пространства на пространства нетривиальной топологии.

Третья глава диссертации посвящена определению квантовых групп. Подходы теории квантовых групп лежат в основе большинства результатов, полученных в диссертационной работе. В третьей главе вводятся основные понятия и величины из теории квантовых групп. Четвертая глава диссертации посвящена методу, разработанному Н. Решетихиным и В. Тураевым, для вычисления полиномов узлов и вильсоновских средних. В этом методе для вычислений используются решения уравнения Янга-Бакстера, имеющего простую визуализацию в теории узлов. Эти решения, связанные с квантовыми группами, называются квантовыми R-матрицами.

Пятая глава посвящена новому эффективному методу вычисления вильсоновских средних и инвариантов узлов. В диссертационной работе А.А.Морозов предложил метод, использующий модифицированную квантовую R-матрицу, действующую на старшие вектора неприводимых представлений соответствующей квантовой группы. В этом методе используются диагональные R-матрицы, а также квантовые матрицы Рака, которые описывают повороты базиса в пространстве старших векторов неприводимых представлений. Результатом вычисления является разложение вильсоновского среднего по характерам представлений квантовых групп. Коэффициенты этого разложения при этом не зависят от конкретного параметра N калибровочной группы $SU(N)$. Таким образом, данный метод позволяет относительно просто получить выражения для вильсоновских средних сразу для любого значения N . Получающиеся ответы также равны полиномам ХОМФЛИ-ПТ из математической теории узлов.

Шестая глава посвящена исследованию матриц Рака квантовых групп. В этой главе рассматриваются как известные свойства матриц Рака, так и новый, предложенный в диссертации метод непосредственного вычисления матриц Рака. Этот метод основан на непосредственном вычислении старших векторов неприводимых представлений. Также в этой главе приводится известная формула для матриц Рака квантовой группы $SU(2)$.

В седьмой главе А.А.Морозовым предлагается гипотеза о собственных значениях для матриц Рака. Согласно данной гипотезе матрицы Рака связаны с R-матрицами в соответствующих представлениях квантовой группы и зависят только от нормированного набора собственных значений такой R-матрицы. В этой главе приводятся примеры, подтверждающие эту гипотезу, а также явные выражения для матриц Рака, как функций от собственных значений для матриц размером до 5 на 5. Гипотеза о собственных значениях открывает широкие возможности для дальнейшего исследования свойств и симметрий матриц Рака, которые применяются не только для вычисления вильсоновских средних, но и имеют отношение к физике частиц. С помощью гипотезы о собственных значениях в диссертационной работе показано, что матрицы Рака для всех симметрических представлений группы $SU(N)$ равны некоторым известным матрицам Рака группы $SU(2)$.

Восьмая глава посвящена методу вычисления вильсоновских средних для контура, представленного 4-нитевой косой, которая замкнута с концов. В диссертации изучается обобщение данного метода на древоподобные узлы, которые представляются, как дерево, построенное из таких кос. Среди узлов, относящихся к древоподобным, встречаются узлы-мутанты, интересные тем, что соответствующие вильсоновские средние совпадают во всех симметрических представлениях группы $SU(N)$. В диссертационном исследовании

получены выражения для вильсоновских средних таких узлов в более сложных представлениях и исследованы их свойства.

Девятая глава посвящена методу вычисления вильсоновских средних для виртуальных узлов – узлов на толстых поверхностях нетривиальной топологии. Для таких узлов нарушается структура теории представлений квантовых групп и потому R-матричные подходы к таким узлам не позволяют вычислить соответствующие вильсоновские средние. А.А.Морозовым предложен новый подход к вычислению таких вильсоновских средних. Этот метод основан на построении разрешений узла и соответствующих им квантовых размерностей, комбинация которых позволяет получить соответствующие вильсоновские средние и полиномы ХОМФЛИ-ПТ.

Десятая глава посвящена методу эволюции, который позволяет исследовать свойства вильсоновских средних для серий узлов. Этот подход, предложенный в диссертации, основан на том, что такие средние связаны с произведением R-матриц. Таким образом, если серия узлов получается многократным повторением некоторого фрагмента, то соответствующие средние можно разложить в ряд по собственным значениям этого фрагмента. Такой метод позволяет исследовать и обобщать вычисленные с помощью других методов вильсоновские средние.

В одиннадцатой главе обсуждается дифференциальное разложение для вильсоновских средних. Это разложение описывает связь между вильсоновскими средними и представлениями квантовых групп. Такое разложение позволило построить выражения для вильсоновских средних скрученных узлов в произвольном симметрическом представлении квантовой группы.

Двенадцатая глава посвящена связи между теорией Черна-Саймонса и топологическим квантовым компьютером. Состояния в таком квантовом компьютере должны быть топологическими, и теория Черна-Саймонса в этом случае является естественной для построения такого компьютера. В диссертационной работе рассматривается возможность использования квантовых R-матриц и матриц Рака в качестве базовых операций в таком квантовом компьютере. Также приводится пример использования таких базовых операций в случае однокубитного квантового компьютера.

Результаты, полученные в работе, вносят значительный вклад в описание и понимание свойств вильсоновских средних в теории Черна-Саймонса. Таким образом, полученные в диссертационном исследовании результаты находят широкое применение, как в данной области теоретической физики, так и во многих других областях, как физики, так и математики.

Есть к работе и некоторые замечания:

1. Во введении к диссертации упоминается возможность находить полиномиальные инварианты узлов из теорий с различными калибровочными группами, в частности, полиномы Кауфмана для группы $SO(N)$. Однако, в диссертационном исследовании рассмотрены узлы только в представлениях группы $SU(N)$. По другим группам в диссертации никаких результатов не содержится, и даже не упоминаются известные.
2. В работе в некоторых местах упоминаются полиномы ХОМФЛИ, а в некоторых местах полиномы ХОМФЛИ-ПТ.

3. Понятие факториала квантовых чисел нигде в работе не вводится, но относительно часто используется.
4. В девятой главе у квантовых чисел, входящих в выражения, отсутствует индекс q . Это приводит к некоторой путанице и не согласуется с обозначениями в других главах, в том числе в третьей главе, где они вводились.
5. Ссылки [81] и [115] совпадают.
6. В работе есть некоторое количество опечаток и пропущенных запятых.

Эти замечания, однако, не снижают научной ценности и масштаба проделанной работы.

Работы автора диссертации опубликованы в ведущих отечественных и зарубежных научных журналах из списка ВАК, в том числе в журналах первого квартиля, неоднократно докладывались на международных научных конференциях. Автореферат полностью отражает содержание диссертации. Диссертационная работа является научной квалификационной работой и удовлетворяет требованиям «Положения о присуждении ученых степеней», утвержденного постановлением Правительства РФ, предъявляемым к докторским диссертациям, а ее автор, Морозов Андрей Алексеевич, заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.04.02 - теоретическая физика.

Доклад по материалам диссертации был представлен А.А. Морозовым 26 апреля 2021 года на семинаре теоретического отдела ИЯИ РАН. Отзыв на диссертацию был подготовлен доктором физико-математических наук, академиком РАН В.А.Рубаковым и утвержден на семинаре теоретического отдела ИЯИ РАН 13 сентября 2021 года.

Отзыв составил

Главный научный сотрудник ОТФ

Доктор физико-математических наук

Академик РАН

В.А.Рубаков

Рубаков Валерий Анатольевич

ИЯИ РАН, 117312, Москва, проспект 60-летия Октября, 7а

8(903)723-01-94, rubakov@inr.ac.ru

Подпись В.А.Рубакова заверяю

Ученый секретарь Федерального государственного бюджетного учреждения науки

Институт ядерных исследований Российской академии наук

Кандидат физ.-мат. наук

А.В.Вересникова

Заместитель директора по научной работе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Институт ядерных исследований Российской академии наук
доктор физ.-мат. наук



Г.И. Рубцов