

Отзыв

официального оппонента д.ф.-м.н. Ландо Сергея Константиновича
на диссертацию Морозова Андрея Алексеевича
«Точные вильсоновские средние в
калибровочной теории Черна-Саймонса»,
представленную на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук
по специальности 01.04.02 – теоретическая физика

Диссертационное исследование А.А.Морозова посвящено разработке методов вычисления вильсоновских средних в калибровочной теории Черна-Саймонса и их свойствам. С математической точки зрения речь идет о вычислении инвариантов узлов и зацеплений в трехмерной сфере и других трехмерных многообразиях. Несмотря на то, что известны разнообразные конструкции таких инвариантов, нахождение их значений для конкретных узлов является сложной задачей как с вычислительной, так и с концептуальной точки зрения. В диссертации достигнуты существенные продвижения в обоих направлениях, что и определяет ее важность.

Актуальность данного исследования обусловлена активным развитием как этой, так и смежных областей науки. Результаты, полученные в диссертационной работе, имеют непосредственное отношение к таким областям математики и физики, как теория узлов, матричные модели теорий поля, интегрируемые системы, теория струн, конформная теория поля, трехмерная гравитация и квантовые вычисления. Различные величины в этих теориях связаны с вильсоновскими средними теории Черна-Саймонса, и поэтому разработка методов их вычисления и изучение их свойств, которым посвящена диссертационная работа, вносит большой вклад и в развитие этих теорий. Среди связанных с вильсоновскими средними величин стоит отдельно упомянуть полиномиальные инварианты узлов, в особенности инварианты Джонса и ХОМФЛИ-ПТ. Эти полиномы считаются эквивалентными вильсоновским средним в трехмерной теории Черна-Саймонса, и методам вычисления таких полиномов и соответствующих средних посвящена большая часть диссертационной работы.

Диссертация состоит из Введения, одиннадцати глав, Заключение и списка литературы.

Введение посвящено постановке задачи, обсуждению ее актуальности и описанию соответствующего ей контекста в современной физике и математике. Вторая, третья и четвертая главы также носят характер вводных и посвящены описанию используемых в диссертации величин и их свойств. Так, во второй главе рассматриваются основные понятия из математической теории узлов. В частности, в ней определяются полиномиальные инварианты узлов и напоминаются их

известные свойства. Кроме того, в ней же определяются виртуальные узлы — узлы в утолщенных поверхностях. Некоторые из важных результатов диссертационной работы связаны именно с виртуальными узлами.

В третьей главе соискатель напоминает понятие квантовой группы — квантования универсальной обертывающей алгебры. Также в этой главе описываются свойства, коммутационные соотношения и копроизведение для генераторов квантовой группы. Генераторы квантовой группы, а также квантовые размерности ее представлений используются в дальнейшем в диссертационной работе.

Четвертая глава посвящена описанию знаменитого метода вычисления полиномиальных инвариантов узлов, предложенного Н. Решетихиным и В. Тураевым. Этот метод основан на использовании квантовых R -матриц — решений квантового уравнения Янга-Бакстера. Согласно ему узел следует представить в виде замыкания косы, а искомый полином можно получить как след от произведения R -матриц в косе. В диссертационной работе на основе этого подхода разработаны новые методы вычисления инвариантов узлов и вильсоновских средних.

Пятая глава посвящена разработанному соискателем методу вычисления полиномов узлов. В отличие от метода, предложенного Н. Решетихиным и В. Тураевым, в этом случае вместо обычной R -матрицы используется R -матрица, действующая на старшие вектора неприводимых представлений квантовой группы. Помимо R -матриц в этом методе также используются матрицы Рака (G.Racah), описывающие повороты базиса в пространстве неприводимых представлений. Эти матрицы связывают между собой различные матрицы в косе. С помощью метода, предложенного в диссертационной работе, полиномы узлов представляются в виде их разложения по характеристам неприводимых представлений. Важно отметить, что коэффициенты этого разложения зависят от узла, но не зависят от ранга квантовой группы, тогда как сами характеры не зависят от узла. Этот метод позволяет получить полиномиальные инварианты сразу для группы произвольного ранга. Такие полиномиальные инварианты носят название полиномов ХОМФЛИ-ПТ.

Шестая глава посвящена описанию свойств матриц Рака. В этой главе описаны известные симметрии матриц Рака, а также известные ранее явные выражения для матриц Рака квантовой группы $sl(2)$. Помимо этого, соискателем разработан метод вычисления произвольной матрицы Рака квантовой группы $sl(N)$. Этот метод основан на вычислении векторов старшего веса различных неприводимых представлений и построении соответствующей матрицы поворота.

Седьмая глава диссертации посвящена описанию особого свойства матриц Рака, обнаруженного соискателем. Матрицы Рака и R -матрицы связаны между собой

уравнением Янга-Бакстера. Из этого уравнения можно предположить, что матрицы Рака выражаются через собственные значения R -матриц, входящих в такое уравнение. Это свойство в диссертационном исследовании было названо гипотезой о собственных значениях. А.А.Морозов приводит явные выражения для матриц Рака малого размера, а также рассматривает примеры, которые подтверждают данную гипотезу. Кроме того, с помощью гипотезы о собственных значениях получены выражения для матриц Рака симметрических представлений квантовой группы $sl(N)$.

В восьмой главе предложенный соискателем подход применяется к вычислению инвариантов двухмостовых и древоподобных узлов. Для двухмостовых узлов подход, описанный в пятой главе диссертационного исследования, нужно немного модифицировать, так как в этом случае набор R -матриц и матриц Рака отличается от рассмотренного ранее. А.А.Морозов также предложил применить к вычислению полиномов древоподобных узлов величины, которые используются для вычисления полиномов двухмостовых узлов. Принципиальным достоинством предложенного подхода является то, что он позволяет вычислять полиномиальные инварианты, отвечающие представлениям квантовой группы $sl(N)$, отличным от симметрического и антисимметрического. Такие полиномы особенно интересны тем, что только они могут различать узлы-мутанты. Значения соответствующих полиномов на некоторых парах узлов-мутантов также приведены в диссертационной работе.

Девятая глава посвящена определению полинома ХОМФЛИ-ПТ виртуальных узлов — узлов в утолщенных поверхностях — и описанию методов его вычисления. Ранее для виртуальных узлов были определены Л.Кауффманом только менее общие полиномы Джонса. А.А.Морозов предложил модификацию подхода Л.Кауффмана, которая позволяет также определить и найти полиномы ХОМФЛИ-ПТ виртуальных узлов. В диссертационном исследовании детально описан предлагаемый подход, а также доказывается его топологическая инвариантность.

Десятая глава посвящена распространению описанных ранее методов вычисления инвариантов отдельных узлов на семейства узлов специального вида. Для серии узлов, которая получается из исходного повторением некоторого фрагмента узла, полиномы можно представить, как ряд по собственным значениям такого фрагмента. В диссертационном исследовании такой подход назван методом эволюции. Соискатель с помощью такого метода исследовал свойства полиномов различных серий узлов и зацеплений. Такой анализ, в частности, позволил А.А. Морозову получить выражения для полиномов ХОМФЛИ-ПТ скрученных узлов и узлов, представимых в виде двойной косы в различных представлениях квантовой группы $sl(N)$.

В одиннадцатой главе рассматривается еще одно свойство инвариантов узлов, обнаруженное А.А.Морозовым. Полиномы ХОМФЛИ-ПТ, согласно методам, описанным в диссертационной работе, связаны с представлениями квантовых групп. Как показано в одиннадцатой главе, эти полиномы обладают свойствами, аналогичными характерам таких представлений. В частности, некоторые представления групп различного ранга могут совпадать, что находит отражение и в свойствах полиномов узлов. Хорошим инструментом использования этих свойств является описанное соискателем дифференциальное разложение, разделяющее вклады в полином, отвечающие различным значениям ранга группы. С помощью такого разложения А.А.Морозов, в частности, получил явные выражения для полиномов скрученных узлов во всех симметрических представлениях.

Двенадцатая глава посвящена обсуждению возможных применений разработанных методов к квантовым вычислениям. Теория квантовых вычислений активно развивается в настоящее время, и некоторые из рассматриваемых моделей квантового компьютера подразумевают построение топологического квантового компьютера, связанного с теорией Черна-Саймонса и теорией узлов. А.А.Морозов рассматривает возможности применения рассмотренных в предыдущих главах величин в качестве элементарных операций такого компьютера.

Соискатель освоил большой пласт современной литературы, посвященной квантовым инвариантам узлов и зацеплений.

Отмечу ряд недостатков диссертации.

В противоречии с утверждением соискателя, предлагаемая им конструкция многочлена HOMFLYPT для виртуальных узлов не является исторически первой. Так, в статье S.Chmutov, M.Polyak, *Elementary combinatorics of the HOMFLYPT polynomial*. International Mathematics Research Notices, **2010** (3) (2010) 480--495 предложено две возможные конструкции. Было бы интересно сравнить их с предлагаемой соискателем.

В тексте диссертации можно отметить целый ряд небрежностей. В некотором числе мест (например, на стр. 77, 96, 103, 108) не разрешены литературные ссылки, что не позволяет посмотреть цитируемую работу. Имеются случаи некорректного использования русской терминологии: «оснащение» узла названо «обрамлением» (стр. 41 и ниже).

Впрочем, упомянутые недостатки не снижают научной ценности диссертации и не могут служить препятствием к присвоению ее автору степени доктора физико-математических наук.

Знание конкретных значений полиномиальных инвариантов узлов представляется мне важным, поскольку я подозреваю существование интегрируемых систем, независимые переменные в которых индексируются простыми узлами. Классические и квантовые полиномиальные инварианты узлов должны порождать решения таких гипотетических систем, подобно тому как некоторые функции на разбиениях натуральных чисел (partition functions) порождают решения иерархии Кадомцева-Петвиашвили. Предлагаемые в рецензируемой диссертации методы вычислений инвариантов могут давать полезные подсказки о возможной форме уравнений этих систем.

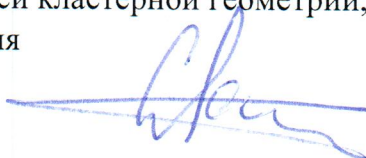
В ходе диссертационного исследования А.А.Морозовым проделана большая работа. Результаты, полученные в диссертации, представляют значительный интерес с научной точки зрения и могут быть использованы для дальнейших исследований в различных областях науки. В диссертации достаточно подробно описаны методы, разработанные автором, и полученные результаты. Результаты, полученные в ходе диссертационного исследования, опубликованы в ведущих научных журналах, входящих в список ВАК и неоднократно представлялись на международных научных конференциях. Автореферат полностью отражает содержание диссертации.

Диссертация «Точные вильсоновские средние в калибровочной теории Черна-Саймонса» удовлетворяет всем требованиям «Положения о присуждении научных степеней», утвержденного Постановлением Правительства РФ №842 от 24 сентября 2013 года, предъявляемым к работам такого уровня, а ее автор, Морозов Андрей Алексеевич, заслуживает присуждения ему степени доктора физико-математических наук по специальности 01.04.02 – Теоретическая физика.

23 сентября 2021 г.

Официальный оппонент

Ландо Сергей Константинович – доктор физико-математических наук
Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”,
заведующий Международной лабораторией кластерной геометрии,
г. Москва, ул. Усачёва, д. 6, 119048, Россия
lando@hse.ru
+7 (495) 772-95-90



Подпись Ландо С.К. заверяю

Генеральный секретарь ИЧУ ВШЭ
Н. Ю. Есвельский

