

ОТЗЫВ

официального оппонента доктора физико-математических наук, профессора Исаева Алексея Петровича о диссертационной работе Андрея Алексеевича Морозова «Точные вильсоновские средние в калибровочной теории Черна-Саймонса», представленной на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.04.02 – «Теоретическая физика».

Диссертация А.А.Морозова посвящена интересной и актуальной проблеме изучения средних значений петель Вильсона в теории Черна-Саймонса. Эти величины представляют большой интерес и чрезвычайно важны в контексте различных математических и физических теорий, среди которых можно упомянуть топологию трехмерных многообразий, теорию узлов, интегрируемые и матричные модели, теорию струн и конформную теорию поля. Эти области активно развиваются и поэтому разработка методов вычисления, а также изучение свойств вильсоновских средних и полиномиальных инвариантов узлов представляет несомненную научную ценность. Кроме того, следует отметить, что некоторые методы вычисления вильсоновских средних основываются на применении матриц Рака ($6-j$ символов Вигнера) для групп высших рангов. Важность изучения матриц Рака в квантовой и ядерной физике хорошо известна, и это также указывает на актуальность темы представленной диссертации.

Диссертация состоит из Введения, 11 глав, Заключения и списка литературы, который содержит 159 наименований.

В первой части диссертации, включающей три главы, вводятся основные понятия, используемые в диссертации. Во второй главе объясняются основные задачи и идеи теории узлов, связанной с трехмерной топологической теорией Черна-Саймонса, изучаемой в работе. В частности, даются определения и описываются некоторые свойства инвариантов узлов, которые равны вильсоновским средним в теории Черна-Саймонса. Наиболее важным инвариантом в контексте диссертационной работы является полином ХОМФЛИ-ПТ, равный вильсоновскому среднему в теории Черна-Саймонса с калибровочной группой $SU(N)$. Представленная диссертация в большей своей части посвящена изучению свойств именно таких инвариантов и соответствующих вильсоновских средних.

Также в первой части диссертации описываются некоторые свойства узлов и их полиномиальных инвариантов, которые далее применяются в вычислениях. Среди этих свойств наиболее важными оказываются движения Редемейстера, сохраняющие узел, и

скейн-соотношения, которые используют для определения большого набора полиномиальных инвариантов узлов, равных вильсоновским средним в теории Черна-Саймонса. Также вводится понятие виртуальных узлов, связанных с пространствами, обладающими нетривиальной топологией. С виртуальными узлами непосредственно связан один из основных результатов диссертационной работы.

В третьей главе кратко изложены некоторые понятия из теории квантовых групп, которые используются в следующих главах. Квантовые группы и их представления непосредственно связаны с предложенными в диссертации методами вычисления вильсоновских средних теории Черна-Саймонса. В четвертой главе конспективно описаны идеи подхода, предложенного Н.Ю. Решетихиным и В.Г. Тураевым для вычисления полиномиальных инвариантов узлов и соответственно вильсоновских средних в теории Черна-Саймонса. Этот метод основан на применении к вычислению вильсоновских средних квантовых R-матриц – объектов, непосредственно связанных с квантовыми группами.

В пятой главе приводится описание разработанного А.А.Морозовым метода вычисления вильсоновских средних в теории Черна-Саймонса. Этот метод основан на использовании R-матриц в пространстве сплетающих операторов, то есть R-матриц, действующих на старшие вектора неприводимых представлений квантовых групп. Отличительной особенностью такого подхода является построение разложения для вильсоновских средних по характерам неприводимых представлений. При этом ответ по построению оказывается универсальным для любой группы $SU(N)$ в следующем смысле – коэффициенты разложения универсальны и совпадают для всех значений N , а сами характеры могут быть относительно легко получены для любого значения N и слабо зависят от конкретного контура, для которого вычисляется вильсоновское среднее. Данный метод наиболее удобен при вычислении вильсоновских средних для узлов, представленных в виде косы.

В пятой главе также предложен универсальный метод вычисления вильсоновских средних, использующий разложение по характерам. Этот метод основан на применении R-матриц в пространстве сплетающих операторов и матриц Рака. Матрицы Рака описывают повороты базиса в пространстве неприводимых представлений, возникающих в разложении тензорного произведения трех представлений. Таким образом, с помощью матриц Рака можно диагонализировать некоторые R-матрицы, составляющие представление косы. Если матрицы Рака известны, то для вычисления вильсоновских средних достаточно только знание собственных значений R-матриц. Выражение для таких собственных значений также приводится в этой главе.

В шестой главе исследуются свойства матриц Рака квантовых групп $U_q(\mathfrak{sl}(N))$ для всех N . Отметим, что явный вид для матриц Рака известен только для квантовой группы $U_q(\mathfrak{sl}(2))$ и был получен Кирилловым и Решетихиным в 1989 году. В этой главе предложен конструктивный метод построения матриц Рака квантовых групп с помощью вычисления векторов старшего веса различных представлений квантовой группы и приведены

примеры явных вычислений для некоторых матриц Рака квантовых групп $U_q(\mathfrak{sl}(N))$ при $N > 2$.

Седьмая глава диссертации посвящена обсуждению открытого А.А. Морозовым свойства матриц Рака, названного в диссертации гипотезой о собственных значениях. Это свойство во многих случаях позволяет выразить матрицы Рака через собственные значения R-матриц. В диссертации обсуждаются различные аргументы в пользу данного свойства и рассматриваются некоторые примеры матриц Рака, удовлетворяющих такому свойству. Также в седьмой главе приводятся явные выражения для матриц Рака, имеющих размер от (1×1) до (5×5) , которые получены с помощью явного решения уравнения, связывающего R-матрицы и матрицы Рака. Эти решения подтверждают гипотезу о собственных значениях. Для симметрических представлений квантовой группы с помощью гипотезы о собственных значениях оказывается возможным свести $U_q(\mathfrak{sl}(N))$ матрицы Рака к известным выражениям Кириллова-Решетихина для $U_q(\mathfrak{sl}(2))$ матриц Рака.

В восьмой главе обсуждается еще один подход к вычислению полиномов узлов с помощью R-матриц. В этом подходе узел представляется не как обычное замыкание косы (коса располагается горизонтально), при котором правый край косы соединяется с левым, а как диаграмма-плетенка – коса, у которой левые (правые) концы замыкаются сами на себя. При этом возникают R-матрицы и матрицы Рака другого типа. В диссертации предложено обобщение метода вычисления полиномов узлов (вильсоновских средних) со случая диаграммы-плетенки и так называемых двухмостовых узлов на более общие древоподобные узлы. В число таких узлов входят узлы-мутанты – узлы, связанные специальным преобразованием, мутацией. Такие узлы интересны тем, что соответствующие вильсоновские средние совпадают во всех симметрических представлениях. В работе предложен метод вычисления таких вильсоновских средних для более сложных представлений и приведены выражения для этих средних.

В девятой главе предлагается альтернативный метод вычисления вильсоновских средних в фундаментальном представлении группы $U_q(\mathfrak{sl}(N))$. Этот метод, названный в диссертации методом гиперкуба, основан на рассмотрении специальных разрешений узла. Разрешением называется замена пересечения в узле на непересекающиеся линии. Каждому разрешению в узле сопоставляется некоторая величина, называемая размерностью. В диссертации предложены методы вычисления таких размерностей и соответствующих вильсоновских средних. Особенностью данного метода является то, что он применим не только к вычислению вильсоновских средних в пространстве топологии трехмерной сферы, но и в пространствах более сложной топологии – для виртуальных узлов.

Вильсоновские средние и полиномиальные инварианты для виртуальных узлов были ранее определены Л. Кауффманом в случае группы $U_q(\mathfrak{sl}(2))$. Для группы $U_q(\mathfrak{sl}(N))$ при $N > 2$ эти величины впервые определены А.А. Морозовым и это является важным результатом данной диссертации.

Десятая глава посвящена разработке метода, позволяющего обобщать ответы для вильсоновских средних и анализировать их структуру. Так как инварианты узлов, и соответственно вильсоновские средние, можно получить с помощью R-матричных представлений для кос, то выражения для вильсоновских средних серий узлов или зацеплений можно представить, как ряд по собственным значениям повторяющихся фрагментов кос в R-матричном представлении. Коэффициенты этого ряда можно найти, проанализировав ответы для некоторых узлов из серии. Так как этот метод связывает между собой серию узлов, которая получается повторением некоторого фрагмента, этот метод, разработанный в диссертации, назван методом эволюции. С помощью данного метода в диссертации получены выражения для различных серий узлов и зацеплений.

В одиннадцатой главе рассматривается свойство вильсоновских средних, связывающее между собой вильсоновские средние, полученные в различных представлениях. Это свойство, описанное А.А.Морозовым, носит название дифференциального разложения. Вильсоновские средние оказывается возможным разложить в ряд по величинам, напоминающим конечноразностные дифференциальные операторы, и длина этого ряда зависит от представления. Коэффициенты ряда зависят от узла, но некоторые коэффициенты входят в выражения для вильсоновских средних в различных представлениях. С помощью дифференциального разложения в диссертации получены выражения для вильсоновских средних скрученных узлов в симметрических представлениях группы $U_q(\mathfrak{sl}(N))$. Также рассмотрена структура дифференциального разложения для двух- и трехкомпонентных зацеплений.

В двенадцатой главе рассматривается связь квантовых вычислений с теорией Черна-Саймонса и квантовыми группами. А именно, R-матрицы используются в качестве операций, вентилей (от английского -- gates), в топологическом квантовом компьютере. Такие операции должны быть унитарными матрицами и R-матрицы, рассмотренные в диссертации унитарны. В диссертации, таким образом, описана связь между вильсоновскими средними и вычислениями в топологическом квантовом компьютере. Также в диссертации приведены примеры такой связи для однокубитных операций.

В заключении сформулированы положения, выносимые на защиту.

Диссертант выносит на защиту семнадцать научных результатов, опубликованных в 22 статьях в рецензируемых журналах, в том числе, в журналах первого квартиля. Все работы выполнены при непосредственном участии диссертанта, и его вклад в эти работы является определяющим.

Оценивая работу в целом можно сказать, что диссертация А.А. Морозова является важным исследованием в актуальной области теоретической физики, выполненным на высоком научном уровне.

В качестве замечания стоит отметить отсутствие обсуждения в диссертации полиномиальных инвариантов узлов и вильсоновских средних в случае, когда параметр деформации q равен корням из единицы. Оставляет желать лучшего также оформление диссертации. Например, главы вторая, третья и четвертая являются вводными и очень

короткими и не содержат оригинальных результатов, их следовало бы объединить с введением. Также в работе присутствуют опечатки. Эти замечания, однако, не снижают ценности полученных в диссертации результатов.

Диссертационная работа удовлетворяет всем требованиям «Положения о присуждении ученых степеней», утвержденного Постановлением Правительства РФ №842 от 24 сентября 2013 года, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. Автореферат диссертации соответствует содержанию диссертации и опубликованным статьям.

Диссертант Андрей Алексеевич Морозов заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.04.02 – «Теоретическая физика».

Официальный оппонент,
заместитель директора лаборатории по научной работе
Лаборатория теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова,
Объединенный институт ядерных исследований,
доктор физико-математических наук, профессор

А.П. Исаев

141980, г. Дубна, Московская область, ОИЯИ, ЛТФ
Тел. +749621 63024
e-mail: isaevap@theor.jinr.ru

Подпись А.П. Исаева заверяю:
Ученый секретарь ЛТФ им. Н.Н. Боголюбова,
Объединенного института ядерных исследований,
кандидат физико-математических наук



А.В. Андреев

10 сентября 2021 г.