

Отзыв

о диссертационной работе
А.А.Морозова «Точные вильсоновские средние в
калибровочной теории Черна-Саймонса»,
представленной на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук.

Диссертация А.А.Морозова посвящена изучению свойств и методов вычисления средних значений петель Вильсона в теории Черна-Саймонса и эквивалентных им полиномиальных инвариантов узлов.

В диссертации рассмотрены различные задачи, связанные со средними значениями петель Вильсона в теории Черна-Саймонса. Эти объекты и их свойства представляют большой интерес для современной теоретической и математической физики. Вильсоновские средние связаны с большим числом различных величин в других областях физики и математики. В частности, вильсоновские средние используются при формулировке критерия конфайнмента кварков в квантовой хромодинамике и при определении дуальных переменных в модели Изинга. К числу таких объектов относятся полиномиальные инварианты узлов, такие как полиномы Джонса и ХОМФЛИ-ПТ, которые равны средним значениям петель Вильсона в теории Черна-Саймонса при конкретном выборе калибровочной группы. Также вильсоновские средние связаны с корреляторами в конформной теории поля, матричными моделями, интегрируемыми системами, а также с различными струнными корреляторами. Таким образом, тема диссертационного исследования А.А.Морозова является актуальной и результаты исследования можно применить к различным областям физики и математики.

Диссертация состоит из Введения, одиннадцати глав, Заключения и списка используемой литературы.

В первых трех главах обоснована актуальность диссертационного исследования, рассмотрен исторический контекст, практическая значимость, даны определения используемых в дальнейшем величин, перечислены основные результаты, выносимые на защиту и приведен список научных публикаций по теме работы.

Четвертая глава посвящена рассмотрению классического подхода к вычислению полиномиальных инвариантов узлов и средних значений петель Вильсона. Этот подход был разработан Н. Решетихиным и В. Тураевым, и его основная идея состоит в применении R -матрицы квантовых групп к вычислению инвариантов узлов. В этой главе определяется универсальная квантовая R -матрица – особое решение квантового уравнения Янга-Бакстера. Такая матрица используется в подходе Решетихина-Тураева, а также другие величины, необходимые для вычисления инвариантов таким способом.

Пятая глава посвящена модификации метода Решетихина-Тураева, предложенной А.А.Морозовым. Согласно такой модификации вместо универсальной R -матрицы рассматривается R -матрица, действующая на пространстве неприводимых представлений соответствующей квантовой группы. В результате получился подход, который позволяет

вычислить полиномиальные инварианты узлов, связанные с произвольной квантовой группой $sl(N)$ – полиномы ХОМФЛИ-ПТ. Такой метод проще всего применять к узлам, представленным в виде косы. При этом согласно предложенному А.А.Морозовым методу для того, чтобы найти выражения для вильсоновских средних и равных им полиномов ХОМФЛИ-ПТ достаточно диагональной формы R -матрицы и матриц Рака, которые описывают повороты базиса в пространстве неприводимых представлений. Выражения для собственных значений R -матрицы хорошо известны и приводятся в пятой главе диссертационной работы. Таким образом, для вычисления и исследования полиномов ХОМФЛИ-ПТ нужны матрицы Рака, обсуждению которых посвящены шестая и седьмая главы.

В шестой главе обсуждаются свойства матриц Рака квантовых групп. Такие матрицы хорошо известны для квантовой группы $sl(2)$, и соответствующее выражение приводится в этой главе. Случай группы $sl(N)$, представляющий интерес в контексте диссертационного исследования, изучен намного хуже и общие ответы в этом случае неизвестны. А.А.Морозовым разработан метод вычисления матриц Рака, основанный на последовательном построении старших векторов соответствующих представлений квантовой группы $sl(N)$. Этот метод позволяет построить произвольную матрицу Рака напрямую и использовать ее в дальнейшем для вычисления полиномов узлов и вильсоновских средних.

В седьмой главе А.А.Морозов предлагает новый метод анализа и вычисления матриц Рака. Этот метод основан на связи между диагональной R -матрицей и матрицей Рака посредством уравнения Янга-Бакстера. Получающееся соотношение, существование которого предполагается А.А.Морозовым, названо в диссертации гипотезой о собственных значениях. Согласно этой гипотезе, матрицы Рака совпадают, если совпадают нормированные собственные значения соответствующих R -матриц. В диссертационной работе получены два важных результата, связанных с сформулированной гипотезой. Во-первых, гипотезу о собственных значениях для матриц малого размера оказывается возможным представить в более явной форме. В диссертационной работе приводятся явные выражения для матриц Рака размером до 5 на 5 через собственные значения R -матрицы. Эти выражения проверены для известных матриц Рака квантовой группы $sl(2)$. Во-вторых, для симметрических представлений группы $sl(N)$ доказано, что матрицы Рака можно с помощью гипотезы о собственных значениях свести к известным матрицам Рака группы $sl(2)$.

В восьмой главе рассматривается метод вычисления полиномиальных инвариантов узлов и вильсоновских средних для так называемых двухмостовых узлов. Эти узлы получаются посредством альтернативного замыкания косы, при котором каждый конец косы замыкается с собой. Полиномы таких узлов также можно вычислить с помощью R -матриц и матриц Рака. А.А.Морозовым предложено обобщение данного метода на древоподобные узлы.

В девятой главе рассматривается подход к вычислению полиномиальных инвариантов узлов и соответствующих вильсоновских средних, не использующий R -матрицы. Этот

метод, разработанный А.А.Морозовым, состоит в разложении полиномиального инварианта в сумму по разрешениям узла. Каждому разрешению отвечает некоторая размерность и методы вычисления таких размерностей описаны в диссертационном исследовании.

Преимущества данного метода состоят в том, что он применим в том числе в тех случаях, когда R-матричный подход неприменим. Наиболее интересен в этом контексте случай виртуальных узлов – одной из реализаций узлов в пространстве нетривиальной топологии. Для таких узлов нельзя построить полиномиальные инварианты стандартными способами, которые используются для обычных узлов. А.А.Морозов определил полиномы ХОМФЛИ-ПТ для таких узлов и описал метод их вычисления.

В десятой главе рассматривается метод эволюции, который позволяет исследовать полиномиальные инварианты и вильсоновские средние для серий узлов. Идея этого метода, предложенного А.А.Морозовым, основана на связи между инвариантами узлов и R-матрицами. При построении серии узлов повторением некоторого фрагмента, полиномы соответствующей серии можно разложить в ряд по собственным значениям данного фрагмента. Также в диссертационном исследовании показано, что этот метод можно использовать и для виртуальных узлов. С помощью данного метода в диссертационном исследовании получены выражения для некоторых серий узлов, например, для скрученных узлов.

В одиннадцатой главе обсуждается дифференциальное разложение для вильсоновских средних и полиномиальных инвариантов узлов. Это особое свойство полиномов ХОМФЛИ-ПТ, существование которого предложено А.А.Морозовым. Оказывается, что эти полиномы можно разложить в ряд, описывающий их связь с представлениями квантовых групп. Наличие такого разложения позволяет исследовать свойства получающихся полиномов. В диссертационном исследовании показано как устроено дифференциальное разложение для узлов в симметрических представлениях, а также для двух- и трехкомпонентных зацеплений.

Двенадцатая глава посвящена обсуждению связи между инвариантами узлов, вильсоновскими средними и квантовым компьютером. Обсуждается при этом так называемый топологический квантовый компьютер, вероятность ошибки в таком компьютере мала. А.А.Морозовым предложена идея использования R-матрицы, действующей на старшие вектора неприводимых представлений, в качестве базовых операций в квантовом компьютере. В диссертационном исследовании рассматриваются свойства таких операций и примеры их применения для однокубитного квантового компьютера.

В заключении сформулированы положения, выносимые на защиту.

Положения, выносимые А.А.Морозовым на защиту, являются новыми и актуальными. Они неоднократно докладывались на международных конференциях и семинарах и опубликованы в рецензируемых научных журналах, в том числе, в журналах первого

квартиля. Результаты А.А.Морозова получили признание специалистов и активно цитируются.

Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

В качестве замечаний к диссертационной работе А.А. Морозова, отмечу, что было бы желательно видеть обсуждения большего числа моделей, непосредственно имеющих физические применения. Также было бы интересно установить связь развиваемых в диссертации методов с подходом к теории узлов при помощи матричных моделей, развитого, в частности, в работах рецензента. Тем не менее, данные замечания никак не влияют на высокую оценку диссертации.

На основании вышесказанного можно сказать, что диссертация несомненно удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, утвержденным Постановлением Правительства РФ №842 от 24 сентября 2013 г., а ее автор заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.04.02-теоретическая физика.

Отзыв составил:

Официальный оппонент,
заведующий отделом математической физики,
Математического института им. В.А.Стеклова РАН
доктор физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН



Волович Игорь Васильевич

г. Москва, ул. Губкина, д. 8, Россия, 119991
Тел. +7 (495) 984 81 41
e-mail: volovich@mi-ras.ru

Подпись И.В. Воловича заверяю

Ученый секретарь МИАН,

Кандидат физико-математических наук С.А. Поликарпов

21 сентября 2021 г.

