# Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)»

На правах рукописи

#### Трунин Дмитрий Алексеевич

# Нестационарные квантовые системы с некинетическим поведением петлевых поправок

Специальность 01.04.02 — теоретическая физика

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель: д.ф.-м.н., Ахмедов Э.Т.

# Оглавление

1	Введение					
	1.1	Рождение частиц во внешних полях и важность учета взаимодействий	٩			
	1.2	Диаграммная техника Швингера — Келдыша	7			
	1.3	Физический смысл пропагаторов	10			
	1.4	Интеграл по траекториям нестационарных систем	13			
	1.5	Кинетическое приближение	17			
	1.6	Цели и задачи диссертационного исследования	20			
	1.7	7 Результаты, выносимые на защиту диссертации				
	1.8	Содержание диссертации	21			
	1.9	Публикации по теме диссертации	24			
2	Суммирование петель в квантовой механике в пределе больших ${\cal N}$					
	2.1	Введение	26			
	2.2	Разложение квантового поля по модам	29			
	2.3	Эффективный гамильтониан	31			
		2.3.1 Большие $N$	31			
		2.3.2 Одиночный осциллятор	33			
	2.4	Диаграммная техника	35			
3	Динамический эффект Казимира					
	3.1	.1 Введение				
	3.2	Физическая картина скалярного динамического эффекта Казимира	45			
		3.2.1 Редукция электромагнитного поля	45			
		3.2.2 Джозефсоновский метаматериал	46			
		3.2.3 Энергия Казимира в нестационарном случае	48			
	3.3	Петлевые поправки для резонансной полости	49			
		3.3.1 Геометрический метод вычисления мод	50			

	порядка 1						
В	Асимптотическое поведение функций параболического цилиндра большого						
A	Ложный секулярный рост в стационарной теории						
5	Заключение						
		4.4.2	Перенормировки	128			
		4.4.1	Вычисление функционального интеграла в двумерном случае	124			
	4.4	Эффе	ктивное действие	124			
		4.3.3	Петлевые поправки	111			
		4.3.2	Древесный скалярный ток	108			
		4.3.1	Моды	102			
	4.3	пое скалярное поле в двух измерениях	101				
		4.2.3	Точные бозонные пропагаторы	99			
		4.2.2	Диаграммная техника	96			
		4.2.1	Двухточечные функции и квантовые поправки	94			
	4.2		пое скалярное поле в одном измерении	90			
	4.1 Введение						
4	Квантование в фоновых скалярных полях 88						
		3.5.5	Учет нелинейности джозефсоновского метаматериала	84			
		3.5.4	Обобщение на большие $N$	81			
		3.5.3	Редукция до квантовой механики	79			
		3.5.2	Эффективный гамильтониан	76			
		3.5.1	Коэффициенты Боголюбова	73			
	3.5	Суммі	ирование петлевых поправок при слабых отклонениях от стационарности	73			
		3.4.2	Петлевые поправки	69			
		3.4.1	Квантование свободных полей	67			
	3.4	Одино	очное полупрозрачное зеркало	67			
		3.3.5	Резонансная полость	65			
		3.3.4	Синхронизированные толчки	63			
		3.3.3	Одновременные толчки	57			
		3.3.2	Секулярный рост как следствие нарушения конформной инвариантност	и 54			

# Глава 1

# Введение

# 1.1 Рождение частиц во внешних полях и важность учета взаимодействий

Рождение частиц в сильных внешних полях — важный раздел нестационарной квантовой теории поля, включающий в себя множество любопытных явлений. Первый пример такого явления — спотанное рождение электрон-позитронных пар в сильных электрических полях — был теоретически открыт Джулианом Швингером еще в 1951 году [1]. Впоследствии эффект Швингера был дополнен не менее знаменитыми эффектами Хокинга [2–4] и Унру [5–7], а также динамическим эффектом Казимира [8–11]. С одной стороны, все перечисленные эффекты не имеют классических аналогов и отражают наиболее фундаментальные особенности квантовой теории поля. С другой стороны, изучение этих особенностей может подсказать путь к построению более фундаментальной теории, объединяющей квантовые эффекты с классической теорией гравитации [12–14]. По этой причине интерес к указанным эффектам не угасает даже спустя десятки лет после их теоретического открытия.

Стандартный взгляд на вышеупомянутые знаменитые эффекты основан на квазиклассическом (древесном) приближении, в котором считается, что взаимодействие между квантовыми полями приводит к пренебрежимо малым поправкам. В частности, этот подход подробно изложен в учебниках [15–17]. В этом разделе мы кратко обсудим основные идеи, которые лежат в основе стандартного подхода и ограничивают область его применимости. Для этого рассмотрим (d+1)-мерное свободное скалярное поле  $\phi$  на нестационарном фоне:

$$S_0 = \int dt d^d \mathbf{x} \sqrt{|g|} \left[ \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_{\mu} \phi \partial_{\nu} \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 \right]. \tag{1.1}$$

В данной модели нестационарность может возникать за счет изменений метрики, массы или

граничных условий во времени. Как обычно, квантованное поле можно разложить по модам в формализме вторичного квантования:

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \begin{cases} \sum_{n} \left[ a_n^{\text{in}} f_n^{\text{in}}(t, \mathbf{x}) + h.c. \right], & \text{когда} \quad t \to -\infty, \\ \sum_{n} \left[ a_n^{\text{out}} f_n^{\text{out}}(t, \mathbf{x}) + h.c. \right], & \text{когда} \quad t \to +\infty, \end{cases}$$

$$(1.2)$$

где функции  $f_n^{\text{in}}$ ,  $f_n^{\text{out}}$  решают свободные уравнения движения, диагонализуют свободный гамильтониан в указанных пределах<sup>1</sup> и по отдельности образуют полный ортонормированный базис относительно скалярного произведения Клейна-Гордона:

$$(f,g) = -i \int_{\Sigma} d\Sigma^{\mu} \sqrt{|g|} \Big[ f(t,\mathbf{x}) \partial_{\mu} g(t,\mathbf{x}) - g(t,\mathbf{x}) \partial_{\mu} f(t,\mathbf{x}) \Big], \tag{1.3}$$

где  $\Sigma$  — некоторая пространственноподобная поверхность, на которой заданы начальные значения мод (поверхность Коши). Простейшим частным случаем  $\Sigma$  является поверхность t=0 в метрике Минковского.

Как правило, функции  $f_n^{\text{in}}$  и  $f_n^{\text{out}}$  для краткости называют ин- и аут-модами (в дальнейшем мы зачастую для краткости также будем опускать индекс "in" в обозначении ин-мод). Подчеркнем, что во внешних полях уравнения движения могут зависеть от времени, поэтому ин- и аут-моды в общем случае не совпадают. Операторы рождения и уничтожения,  $a_n^{\text{in}}$ ,  $(a_n^{\text{in}})^{\dagger}$  и  $a_n^{\text{out}}$ ,  $(a_n^{\text{out}})^{\dagger}$ , удовлетворяют стандартным коммутационным соотношениям и определяют вакуумные состояния, не содержащие частиц в соответствующих пределах (при этом предполагается, что в указанных пределах внешнее поле выключается). Знак суммы в разложении (1.2) обозначает суммирование по дискретной и интегрирование по непрерывной части спектра.

Вычислим число частиц ( $f_n^{\text{out}}$  мод) в теории (1.2). В представлении Гейзенберга это число определяется следующим выражением:

$$\mathcal{N}_n^{\text{free}} = \langle in | (a_n^{\text{out}})^{\dagger} a_n^{\text{out}} | in \rangle$$
 (сумма не подразумевается). (1.4)

Здесь  $\langle in|\cdots|in\rangle\equiv {\rm tr}\left[\rho_0\cdots\right]$  обознает квантовое среднее по некоторому начальному состоянию теории с матрицей плотности  $\rho_0$ , взятой в начальный момент времени  $t_0$ . Чаще всего в качестве начального состояния выбирают тепловое состояние с температурой  $T,\, \rho_0=e^{-H/T},$  или вакуум,  $\rho_0=|0\rangle\langle 0|$ , где H— начальный гамильтониан, а вакуум определяется как состояние  $a_n^{\rm in}|0\rangle=0$  для всех n.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Подчеркнем, что свободный гамильтониан на нестационарном внешнем фоне не всегда удается свести к диагональному виду [18–22]. В этом случае понятие частицы становится бессмысленным, а обсуждаемый квазиклассический подход не работает. Вместо этого следует сосредоточиться на вычислении корреляционных функций, которые всегда имеют прозрачный физический смысл.

В нестационарной ситуации ин- и аут-моды, а также операторы рождения и уничтожения связаны обобщенным преобразованием Боголюбова (также известном как каноническое преобразование):

$$f_n^{\text{out}} = \sum_k \left[ \alpha_{nk}^* f_k^{\text{in}} - \beta_{nk} (f_k^{\text{in}})^* \right],$$

$$a_n^{\text{out}} = \sum_k \left[ \alpha_{nk} a_k^{\text{in}} + \beta_{nk}^* (a_k^{\text{in}})^\dagger \right],$$

$$(1.5)$$

с ненулевыми коэффициентами Боголюбова  $\alpha_{nk}$  и  $\beta_{nk}$ . Заметим, что функции  $f_n^{\rm in}$  и  $f_n^{\rm out}$  образуют полный базис, поэтому их вид полностью фиксирует коэффициенты Боголюбова. Отсюда следует тождество:

$$\mathcal{N}_{n}^{\text{free}} = \sum_{k,l} \langle in| \left[ \alpha_{nk}^{*} (a_{k}^{\text{in}})^{\dagger} + \beta_{nk} a_{k}^{\text{in}} \right] \left[ \alpha_{nl} a_{l}^{\text{in}} + \beta_{nl}^{*} (a_{l}^{\text{in}})^{\dagger} \right] |in\rangle 
= \sum_{k} |\beta_{kn}|^{2} + \sum_{k,l} \left( \alpha_{kn} \alpha_{ln}^{*} + \beta_{kn} \beta_{ln}^{*} \right) n_{kl} + \sum_{k,l} \alpha_{kn} \beta_{ln} \varkappa_{kl} + \sum_{k,l} \alpha_{kn}^{*} \beta_{ln}^{*} \varkappa_{kl}^{*},$$
(1.6)

где мы ввели краткое обозначение для начальной заселенности квантовых уровней,  $n_{kl}$ , и аномального квантового среднего (плотности скоррелированных пар),  $\varkappa_{kl}$ :

$$n_{kl} = \langle in|(a_n^{\text{in}})^{\dagger} a_n^{\text{in}}|in\rangle, \qquad \varkappa_{kl} = \langle in|a_k^{\text{in}} a_l^{\text{in}}|in\rangle.$$
 (1.7)

В гауссовом приближении, то есть в отсутствие взаимодействий и нелинейностей, рождение частиц связано исключительно с перемешиванием положительно- и отрицательно- частотных мод каноническими преобразованиями (1.5). В простейшем случае, когда начальное квантовое состояние системы близко к вакууму,  $a_n^{\rm in}|in\rangle = 0$  для всех n, все квантовые средние зануляются, а выражение (1.6) существенно упрощается:

$$\mathcal{N}_n^{\text{free}} \approx \sum_k |\beta_{kn}|^2.$$
 (1.8)

В частности, это тождество приближенно выполняется при низких температурах, когда  $n_{kl}$  экспоненциально подавлено по обратной температуре, а  $\varkappa_{kl} = 0$ . Следовательно, на древесном уровне рождение частиц по большей части определяется боголюбовскими коэффициентами  $\beta_{kn}$ . По этой причине большинство работ, посвященных рождению частиц в сильных внешних полях (в частности, учебники [15–17]), ограничиваются вычислением боголюбовских коэффициентов и смотрят на равенство (1.8) как на универсальное соотношение, которое описывает лидирующий вклад в число частиц вне зависимости от природы классического фона и начального состояния квантованного поля.

Тем не менее, свободные системы с квадратичным гамильтонианом являются всего лишь грубым приближением реальных квантовых систем, в которых частицы склонны распадаться и рассеиваться. Поэтому в реальных системах равенство (1.8) может нарушаться, даже

если начальные значения квантовых средних очень малы,  $n_{kl} \approx 0$ ,  $\varkappa_{kl} \approx 0$ . В самом деле, взаимодействие между частицами может сгенерировать нетривиальные квантовые средние:

$$n_{kl}(t, t_0) = \langle in|U^{\dagger}(t, t_0)(a_k^{\text{in}})^{\dagger} a_l^{\text{in}} U(t, t_0)|in\rangle \neq 0,$$
 (1.9)

$$\varkappa_{kl}(t,t_0) = \langle in|U^{\dagger}(t,t_0)a_k^{\text{in}}a_l^{\text{in}}U(t,t_0)|in\rangle \neq 0, \tag{1.10}$$

где  $U(t,t_0)$  обозначает оператор эволюции в представлении взаимодействия, а  $t_0$  и t задают моменты, до и после которых взаимодействие адиабатически включается и выключается.

Более того, в ряде важных нестационарных систем поправки к древесной заселенности уровней и/или аномальному квантовому среднему велики даже тогда, когда взаимодействие между частицами исчезающе мало. Даже если константа взаимодействия стремится к нулю,  $\lambda \to 0$ , на достаточно больших временах эволюции,  $t \to \infty$ , в таких системах поправки к  $n_{kl}$  и  $\varkappa_{kl}$  секулярно растут и остаются конечными; другими словами, в n-ом порядке теории возмущений по  $\lambda$  вклады в квантовые средние выглядят как  $n_{kl}^{(n)} \sim \lambda^n t^{a_n}$  и  $\varkappa_{kl}^{(n)} \sim \lambda^n t^{b_n}$ , с некоторыми не зависящими от времени степенями  $0 < a_n \le n$  и/или  $0 < b_n \le n$ . В частности, подобный секулярный рост был обнаружен в расширяющейся Вселенной [19–29] и сильных электрических полях [30–32], а также на фоне материи, коллапсирующей в черную дыру [33]. Во всех этих случаях прейти к свободной теории с помощью наивного предела  $\lambda \to 0$  нельзя, поэтому приближение (1.8) очевидно неверно. В сущности, это приближение позволяет увидеть только амплификацию нулевых колебаний, но не изменение начального состояния системы и соответствующих квантовых средних.

Таким образом, для описания процессов, которые происходят в сильных внешних полях (и, вообще говоря, не всегда сводятся к рождению частиц) необходимо учесть взаимодействие между квантовыми полями и оценить, как  $n_{kl}$  и  $\varkappa_{kl}$  ведут себя на больших временах эволюции. Один из известных способов провести такую оценку — решить систему уравнений Дайсона — Швингера на точные пропагаторы и вершины [34–36], а потом извлечь из их поведения квантовые средние. Подчеркнем, что сильные внешие поля, вообще говоря, выводят квантовую систему из равновесия, поэтому систему уравнений Дайсона — Швингера необходимо записывать с помощью диаграммной техники Швингера — Келдыша [37–44]. В следующих разделах мы обсудим вывод этой техники и способы вычисления пересуммированных квантовых средних.

#### 1.2 Диаграммная техника Швингера — Келдыша

Чтобы проиллюстрировать диаграммную технику Швингера — Келдыша, выведем ее правила для массивного скалярного поля с квартичным взаимодействием (простейшего обобщения модели (1.1)):

$$S = \int dt d^d \mathbf{x} \sqrt{|g|} \left[ \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_{\mu} \phi \partial_{\nu} \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{4} \phi^4 \right]. \tag{1.11}$$

Для определенности будем считать, что взаимодействие адиабатически включается (выключается) после момента времени  $t_0$  ( $t_\infty$ ). В частности, такое поведение можно смоделировать, варьируя константу связи  $\lambda(t) = \lambda \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh \left( \frac{t-t_0}{T} \right) \right] \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \tanh \left( \frac{t-t_\infty}{T} \right) \right]$ . В представлении взаимодействия квантовое среднее некоторого оператора  $\hat{O}$  (например, оператора, собранного из операторов скалярного поля,  $\hat{O} = \hat{\phi}(t_1, \mathbf{x}_1) \hat{\phi}(t_2, \mathbf{x}_2) \cdots \hat{\phi}(t_n, \mathbf{x}_n)$ ) по начальному состоянию  $|in\rangle$  определяется следующим выражением [21, 22, 43–46]:

$$\langle \hat{O} \rangle (t_1, \dots t_n) = \langle in | U^{\dagger}(t_{\infty}, t_0) \mathcal{T} \left[ \hat{O}_0(t_1, \dots, t_n) U(t_{\infty}, t_0) \right] | in \rangle.$$
 (1.12)

Здесь  $\mathcal{T}$  обозначает временное упорядочение (упорядочение во времени в обратном порядке будем обозначать  $\overline{\mathcal{T}}$ ),  $\hat{O}_0$  — оператор, проэволюционировавший под действием свободного гамильтониана  $\hat{H}_0$ , например:

$$\hat{\phi}_0(t, \mathbf{x}) = U_0^{\dagger}(t, t_0) \hat{\phi}(t_0, \mathbf{x}) U_0(t, t_0),$$

$$U_0(t, t_0) = \mathcal{T} \exp\left[-i \int_{t_0}^t dt' \int d^d \mathbf{x}' \sqrt{|g|} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_{\mu} \hat{\phi} \partial_{\nu} \hat{\phi} + \frac{m^2}{2} \hat{\phi}^2\right)\right],$$
(1.13)

а U(t,t') — оператор эволюции в представлении взаимодействия:

$$U(t,t') = \mathcal{T} \exp\left[-\frac{i\lambda}{4} \int_{t'}^{t} dt'' \int d^d \mathbf{x}'' \sqrt{|g|} \,\hat{\phi}_0^4(t'',\mathbf{x}'')\right]. \tag{1.14}$$

Здесь  $\hat{\phi}$  означает представление оператора поля в виде (1.2). В дальнейшем мы для краткости будем опускать шляпку и индекс "0" у свободных полей.

Разложим по степеням  $\lambda$  операторы эволюции в квантовом среднем (1.12) и предположим, что в начальном состоянии системы отсутствуют корреляции между частицами в разных состояниях (в частности, этому условию удовлетворяют гауссовы начальные состояния). В этом случае многоточечные корреляторы разбиваются на произведение двухточечных функций; иными словами, для таких начальных состояний работает теорема Вика [44–49]. Кроме того, необходимо учитывать, что коррелятор (1.12) содержит как  $\mathcal{T}$ -упорядоченные слагаемые. Следовательно, в общем случае многоточечные корреляторы

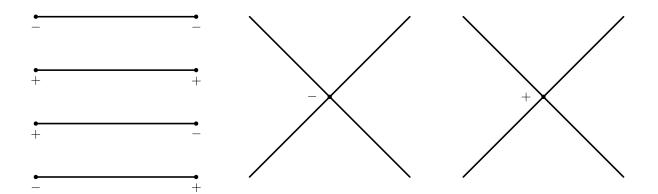


Рис. 1.1: Пропагаторы и вершины в диаграммной технике Швингера — Келдыша для модели (1.11). Линии ставятся в соответствие пропагаторам (1.15). Вершина со знаком  $\pm$  ставится в соответствие интегрированию  $\pm \frac{i\lambda}{4} \int_{t_0}^{t_\infty} dt \int d^d \mathbf{x} \sqrt{|g|}$ .

выражаются через комбинации следующих четырех древесных пропагаторов:

$$iG^{--}(t_1, \mathbf{x}_1; t_2, \mathbf{x}_2) \equiv \langle in | \mathcal{T}\phi(t_1, \mathbf{x}_1)\phi(t_2, \mathbf{x}_2) | in \rangle,$$

$$iG^{++}(t_1, \mathbf{x}_1; t_2, \mathbf{x}_2) \equiv \langle in | \overline{\mathcal{T}}\phi(t_1, \mathbf{x}_1)\phi(t_2, \mathbf{x}_2) | in \rangle,$$

$$iG^{+-}(t_1, \mathbf{x}_1; t_2, \mathbf{x}_2) \equiv \langle in | \phi(t_1, \mathbf{x}_1)\phi(t_2, \mathbf{x}_2) | in \rangle,$$

$$iG^{-+}(t_1, \mathbf{x}_1; t_2, \mathbf{x}_2) \equiv \langle in | \phi(t_2, \mathbf{x}_2)\phi(t_1, \mathbf{x}_1) | in \rangle.$$

$$(1.15)$$

В этих обозначениях знаки "—" и "+" означают, что соответствующие операторы поля пришли из разложения оператора U (то есть части, упорядоченной во времени) и  $U^{\dagger}$  (то есть части, упорядоченной во времени в обратном порядке). Аналогично, можно заметить, что nый порядок разложения оператора прямой (обратной) эволюции приписывает соответствующему коррелятору множитель  $(\mp i\lambda/4)^n$  и интегрирование  $\int_{t_0}^{t_\infty} dt \int d^d\mathbf{x} \sqrt{|g|}$ . Таким образом, пертурбативное разложение коррелятора (1.12) можно представить в виде суммы по всем возможным диаграммам в диаграммной технике Рис. 1.1. В качестве примера рассмотрим первый порядок пертурбативного разложения точного пропагатора  $\tilde{G}^{--}(t_1,\mathbf{x}_1;t_2,\mathbf{x}_2)$ :

$$i\tilde{G}_{12}^{--} = \langle in|U^{\dagger}(t_{\infty}, t_{0})\mathcal{T}\left[\phi_{1}\phi_{2}U(t_{\infty}, t_{0})\right]|in\rangle$$

$$= \langle in|\mathcal{T}\phi_{1}\phi_{2}|in\rangle - \frac{i\lambda}{4} \int_{t_{0}}^{t_{\infty}} dt_{3} \int d^{d}\mathbf{x}_{3}\sqrt{|g|}\langle in|\mathcal{T}\phi_{1}\phi_{2}\phi_{3}\phi_{3}\phi_{3}|in\rangle$$

$$+ \frac{i\lambda}{4} \int_{t_{0}}^{t_{\infty}} dt_{3} \int d^{d}\mathbf{x}_{3}\sqrt{|g|}\langle in|\phi_{3}\phi_{3}\phi_{3}\phi_{3}\mathcal{T}\phi_{1}\phi_{2}|in\rangle + \mathcal{O}(\lambda^{2})$$

$$= iG_{12}^{--} - \frac{i\lambda}{4} \int_{t_{0}}^{t_{\infty}} dt_{3} \int d^{d}\mathbf{x}_{3}\sqrt{|g|} \left[ 3iG_{12}^{--} \left( iG_{33}^{--} \right)^{2} + 12iG_{13}^{--} iG_{33}^{--} iG_{32}^{--} \right]$$

$$+ \frac{i\lambda}{4} \int_{t_{0}}^{t_{\infty}} dt_{3} \int d^{d}\mathbf{x}_{3}\sqrt{|g|} \left[ 3iG_{12}^{--} \left( iG_{33}^{++} \right)^{2} + 12iG_{13}^{-+} iG_{33}^{++} iG_{32}^{+-} \right] + \mathcal{O}(\lambda^{2})$$

$$= iG_{12}^{--} - 3i\lambda \int_{t_{0}}^{t_{\infty}} dt_{3} \int d^{d}\mathbf{x}_{3}\sqrt{|g|} \left[ iG_{13}^{--} iG_{33}^{--} iG_{32}^{--} - iG_{13}^{-+} iG_{33}^{++} iG_{32}^{+-} \right] + \mathcal{O}(\lambda^{2}),$$

$$= iG_{12}^{--} - 3i\lambda \int_{t_{0}}^{t_{\infty}} dt_{3} \int d^{d}\mathbf{x}_{3}\sqrt{|g|} \left[ iG_{13}^{--} iG_{33}^{--} iG_{32}^{--} - iG_{13}^{-+} iG_{33}^{++} iG_{32}^{+-} \right] + \mathcal{O}(\lambda^{2}),$$

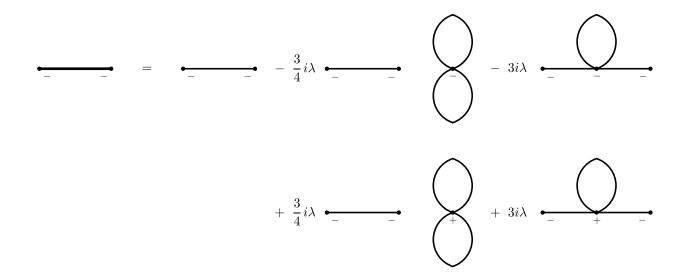


Рис. 1.2: Нулевой и первый порядок разложения точного пропагатора  $i\tilde{G}^{--}$ .

который отвечает диаграммам, изображенным на Рис. 1.2. Здесь мы для краткости ввели обозначение  $G_{ij} = G(t_i, \mathbf{x}_i; t_j, \mathbf{x}_j), \ \phi_i = \phi(t_i, \mathbf{x}_i).$ 

Обратите внимание, что в первом порядке вакуумные пузыри в точности сократились. Более того, легко показать, что в диаграммной технике Швингера — Келдыша вакуумные диаграммы автоматически сокращают друг друга во всех порядках теории возмущений. В самом деле, такие диаграммы отвечают квантовым средним без вставок внешних полей, то есть сводятся с отфакторизованным корреляторам вида  $\langle in|U^{\dagger}(t_{\infty},t_{0})U(t_{\infty},t_{0})|in\rangle=1$ . Следовательно, после суммирования всех вакуумных пузырей должен остаться только исходный древесный пропагатор. Таким образом, в технике Швингера — Келдыша нужно рассматривать только связные диаграммы без вакуумных пузырей.

Кроме того, отметим, что каждую диаграмму необходимо домножить на комбинаторный множитель, который возникает из-за того, что свертки внешних полей с разными полями одной вершины совпадают. Фактически эти множители отражают симметрию диаграммы.

Наконец, покажем, что в стационарном случае техника Швингера — Келдыша воспроизводит стандартную технику Фейнмана. Предположим, что начальное состояние совпадает с основным состоянием свободного гамильтониана,  $|in\rangle = |0\rangle$ . Согласно теореме Гелл-Манна — Лоу, при адиабатическом включении и выключении возмущения основное состояние теории в бесконечном прошлом и будущем совпадает с точностью до фазы, если свободный гамильтониан не зависит от времени, а его спектр ограничен снизу [21, 22, 45, 46, 50]:

$$U(+\infty, -\infty)|0\rangle = e^{i\Phi}|0\rangle, \quad e^{i\Phi} = \langle 0|U(+\infty, -\infty)|0\rangle,$$
 (1.17)

где  $\Phi$  — действительное число. Следовательно, в этом случае квантовое среднее (1.12) можно

переписать следующим образом:

$$\langle O \rangle (t_1, \dots, t_n) = \langle 0 | U^{\dagger}(+\infty, -\infty) \mathcal{T} \left[ O_0(t_1, \dots, t_n) U(+\infty, -\infty) \right] | 0 \rangle$$

$$= \frac{\langle 0 | \mathcal{T} \left[ O_0(t_1, \dots, t_n) U(+\infty, -\infty) \right] | 0 \rangle}{\langle 0 | U(+\infty, -\infty) | 0 \rangle}.$$
(1.18)

Таким образом, в стационарном случае можно ограничиться вычислением  $\mathcal{T}$ -упорядоченных корреляторов. Раскладывая же оператор эволюции и применяя стандартную теорему Вика [51–54] для  $\mathcal{T}$ -упорядоченных корреляторов, получаем диаграммную технику Фейнмана.

#### 1.3 Физический смысл пропагаторов

В исходной формулировке техника Швингера — Келдыша, описанная в предыдущем разделе, довольно громоздка и неудобна; в частности, число диаграмм в ней растет как  $2^n$ , где n — число вершин. Более того, вычисления в этой технике производятся не оптимальным способом: можно заметить, что четыре пропагатора (1.15) на самом деле линейно зависимы:

$$G_{12}^{--} + G_{12}^{++} = G_{12}^{+-} + G_{12}^{-+}. (1.19)$$

Следовательно, удобно перейти к трем линейно независимым пропагаторам:

$$iG_{12}^{K} = \frac{1}{2} \left( iG_{12}^{+-} + iG_{12}^{-+} \right) = \frac{1}{2} \left\langle in \middle| \{\phi_{1}, \phi_{2}\} \middle| in \right\rangle,$$

$$iG_{12}^{R} = iG_{12}^{--} - iG_{12}^{-+} = \theta(t_{1} - t_{2}) \left\langle in \middle| [\phi_{1}, \phi_{2}] \middle| in \right\rangle,$$

$$iG_{12}^{A} = iG_{12}^{--} - iG_{12}^{+-} = -\theta(t_{2} - t_{1}) \left\langle in \middle| [\phi_{1}, \phi_{2}] \middle| in \right\rangle.$$

$$(1.20)$$

Эти пропагаторы принятно называть келдышевским, запаздывающим и опережающим, соответственно.

В дальнейшем нас в основном будет интересовать предел, в котором среднее время пропагаторов (1.20) уводится в будущую бесконечность,  $t = \frac{t_1 + t_2}{2} \to +\infty$ , а разница времен держится примерно постоянной,  $|t_1 - t_2| \ll t$ . Дело в том, что в этом пределе (точный) келдышевский пропагатор выражается через начальные моды квантованного поля и (точные) квантовые средние (1.9) и (1.10):

$$iG^{K}(t_{1}, \mathbf{x}_{1}; t_{2}, \mathbf{x}_{2})\Big|_{t_{1}\approx t_{2}\approx t} \approx \sum_{p,q} \left[ \left( \frac{1}{2} \delta_{p,q} + n_{pq}(t) \right) f_{p}(t_{1}, \mathbf{x}_{1}) f_{q}^{*}(t_{2}, \mathbf{x}_{2}) + \varkappa_{pq}(t) f_{p}(t_{1}, \mathbf{x}_{1}) f_{q}(t_{2}, \mathbf{x}_{2}) + h.c. \right].$$

$$(1.21)$$

Здесь p,q — некоторые квантовые числа (например, импульсы), которые нумеруют ин-моды  $f_p(t,\mathbf{x}).$ 

Таким образом, точный келдышевский пропагатор содержит информацию о состоянии системы в произвольный момент времени<sup>2</sup>. Иными словами, вычисляя келдышевский пропагатор в совпадающих точках, можно оценить квантовые средние  $n_{kl}$  и  $\varkappa_{kl}$ , а также число родившихся частиц (1.6). Примеры подобного вычисления обсуждаются в основном тексте диссертации (главы 2, 3 и 4). Отметим, что зачастую петлевые поправки к келдышевскому пропагатору и квантовым средним неограниченно растут с ростом среднего времени t; в этом случае лидирующие секулярно растущие вклады необходимо пересуммировать.

Кроме того, с помощью точного келдышевского пропагатора можно вычислить непосредственно наблюдаемые величины — например, квантовое среднее потока тензора энергииимпульса. В частности, для модели (1.11)<sup>3</sup>:

$$\langle T_{\mu\nu}\rangle(x) = \left\langle in \left| \frac{1}{2} \partial_{x\mu} \phi(x) \partial_{x\nu} \phi(x) + \frac{m^2}{2} \phi(x) \phi(x) g_{\mu\nu} + \frac{\lambda}{4} \phi(x) \phi(x) \phi(x) \phi(x) g_{\mu\nu} \right| in \right\rangle$$

$$= \left\langle \partial_{x_1^{\mu}} \partial_{x_2^{\nu}} iG^K(x_1, x_2) \right|_{x_1 = x_2 = x} + \frac{m^2}{2} iG^K(x, x) g_{\mu\nu} + \frac{3\lambda}{4} iG^K(x, x) iG^K(x, x) g_{\mu\nu},$$

$$(1.22)$$

где мы для краткости использовали 4-вектора:  $x^0 = t$  и  $x^i = \mathbf{x}$ . Конкретные примеры вычисления тензора энергии-импульса (точнее, гамильтониана  $\langle H \rangle(t) = \int d^d \mathbf{x} \sqrt{|g|} \, \langle T_{00}(t,\mathbf{x}) \rangle$ ) для системы связанных осцилляторов и скалярного поля в одномерной резонансной полости можно найти в разделах 2.1 и 3.2.3 данной диссертации, соответственно. Подчеркнем, что точный тензор энергии-импульса, как и точный келдышевский пропагатор, в общем случае зависит от состояния системы и может получать секулярно растущие петлевые поправки.

В то же время, *древесные* запаздывающий/опережающий пропагаторы не зависят от выбора начального состояния, поскольку коммутатор полей является с-числом (см. определение пропагаторов (1.20)). Следовательно, для любого начального состояния эти пропагаторы однозначно выражаются через ин-моды:

$$G^{R/A}(t_1, \mathbf{x}_1; t_2, \mathbf{x}_2) = \pm i\theta(\pm t_1 \mp t_2) \sum_{p} \left[ f_p(t_1, \mathbf{x}_1) f_p^*(t_2, \mathbf{x}_2) - f_p^*(t_1, \mathbf{x}_1) f_p(t_2, \mathbf{x}_2) \right], \quad (1.23)$$

причем это выражение инвариантно относительно преобразований Боголюбова, то есть не зависит от выбора базиса мод. Чтобы понять физический смысл этих пропагаторов, рассмотрим квазиклассический предел, то есть предположим, что внешние поля медленно меняются по сравнению с длиной волны квантованных полей:  $m\tau_{\rm ext}\gg 1$ , где  $\tau_{\rm ext}$  — характерное время изменения параметров теории. Делая преобразование Фурье по разнице времен пропагато-

 $<sup>^2</sup>$ Также отметим, что *древесный* келдышевский пропагатор содержит информацию только о *начальном* состоянии системы.

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>Вообще говоря, в совпадающих точках келдышевский пропагатор и тензор энергии-импульса могут расходиться. Здесь мы предполагаем, что все подобные расходимости регуляризованы [15].

ров (1.23), получаем следующие функции:

$$G^{R/A}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t, \omega) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega t_{12}} G^{R/A}\left(t + \frac{t_{12}}{2}, \mathbf{x}_1; t - \frac{t_{12}}{2}, \mathbf{x}_2\right),\tag{1.24}$$

где  $t = \frac{t_1 + t_2}{2}$  и  $t_{12} = t_1 - t_2$ . В указанном приближении полюса этих функций определяют массу и ширину распада частиц и античастиц [45,46]. Иными словами, в отличие от келдышевского пропагатора древесный запаздывающий/опережающий пропагаторы содержат информацию о свойствах частиц, но не о состоянии теории.

Разумеется, к *точным* запаздывающему/опережающему пропагатору это утверждение не применимо — даже в квазиклассическом приближении эти пропагаторы начинают зависеть от состояния теории за счет петлевых поправок, содержащих в том числе келдышевский пропагатор. Тем не менее, в интересующем нас пределе  $(t \to +\infty$  и  $|t_{12}| \ll t)$  этими поправками можно пренебречь. В самом деле, из-за причинности диаграммной техники Швингера — Келдыша с пропагаторами (1.20) поправки к запаздывающему и опережающему пропагатору могут идти только от области, зажатой между временами внешних точек. Например, однопетлевая поправка к запаздывающему пропагатору в модели (1.11) выглядит следующим образом:

$$i\tilde{G}_{12}^{R} - iG_{12}^{R} = -3i\lambda \int_{t_{2}}^{t_{1}} dt_{3} \int d^{d}\mathbf{x}_{3} \sqrt{|g|} iG_{13}^{R} iG_{32}^{K} iG_{32}^{R} + \mathcal{O}(\lambda^{2}) = \mathcal{O}(\lambda t_{12}), \tag{1.25}$$

то есть на фоне петлевых поправок к келдышевскому пропагатору, которые могут неограниченно расти вместе со средним временем  $t \gg |t_{12}|$ , эта поправка пренебрежимо мала. Аналогичное утверждение можно доказать и для более высоких поправок в произвольной нестационарной теории, последовательно (петля за петлей) доказывая причинность запаздывающего/опережающего пропагаторов и поправок к собственно-энергетической функции [46].

Как бы то ни было, напомним, что нас в первую очередь интересует эволюция квантового состояния теории, которая связана с учетом взаимодействия между полями и проявляет себя в секулярно растущих петлевых поправках к квантовым средним  $n_{kl}$  и  $\varkappa_{kl}$ , а также в изменении числа родившихся частиц и потока тензора энергии-импульса. Чтобы проследить эти изменения, достаточно оценить точный келдышевский пропагатор в совпадающих точках. Следовательно, для этих целей инфракрасными поправками к запаздывающему и опережающему пропагаторам можно пренебречь. В то же время, мы будем учитывать ультрафиолетовые поправки к пропагаторам (1.20), которые вычисляются аналогично ультрафиолетовым поправкам в стационарной технике и приводят к перенормировке параметров

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>При вычислении этих поправок всегда можно выбрать масштаб, на котором характерное расстояние между точками (или обратный импульс) пропагатора много меньше характерного времени изменения параметров теории. Следовательно, в этих вычислениях всегда можно ограничиться квазиклассическим приближением.

теории (массы, константы связи и т.д.). Иными словами, во всех вычислениях мы будем предполагать, что параметры теории являются физическими, то есть уже содержат в себе лидирующие ультрафиолетовые перенормировки от всех петель.

#### 1.4 Интеграл по траекториям нестационарных систем

Более наглядный вывод техники Швингера — Келдыша, позволяющий легко получить диаграммные правила и переключиться между пропагаторами (1.15) и (1.20), основан на вычислении корреляционных функций (1.12) с помощью интеграла по траекториям (функционального интеграла) [40, 46–49]. Как и в разделе 1.2, проиллюстрируем этот вывод на примере модели (1.1). Прежде всего, рассмотрим производящий функционал этой модели:

$$Z[J_{+}, J_{-}; \rho_{0}] = \operatorname{tr}\left[\rho_{0}\overline{\mathcal{T}}e^{i\int_{t,\mathbf{x}}\left(\frac{1}{2}\partial_{\mu}\phi\partial^{\mu}\phi + \frac{m^{2}}{2}\phi^{2} + J_{+}\phi\right)}\mathcal{T}e^{-i\int_{t,\mathbf{x}}\left(\frac{1}{2}\partial_{\mu}\phi\partial^{\mu}\phi + \frac{m^{2}}{2}\phi^{2} + J_{-}\phi\right)}\right]$$

$$= \operatorname{tr}\left[\rho_{0}\mathcal{T}_{\mathcal{C}}e^{-i\int_{\mathcal{C}}dt'\int d^{d}\mathbf{x}'\sqrt{|g|}\left(\frac{1}{2}\partial_{\mu}\phi\partial^{\mu}\phi + \frac{m^{2}}{2}\phi^{2} + J\phi\right)}\right],$$
(1.26)

где мы явно расписали квантовое среднее по начальному состоянию с матрицей  $\rho_0$  и для краткости ввели обозначение  $\int_{t,\mathbf{x}} = \int_{t_0}^{\infty} dt' \int d^d\mathbf{x}' \sqrt{|g|}$ . Во второй строке мы ввели келдышевский контур  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_- \cup \mathcal{C}_+$ , где  $\mathcal{C}_- = [t_0 - i\epsilon, \infty)$ ,  $\mathcal{C}_+ = (\infty, t_0 + i\epsilon]$  и  $\epsilon \to +0$  (Рис. 1.3), а также объединили источники для полей, которые сидят на верхней/нижней части контура (то есть приходят из операторов прямой/обратной эволюции):  $J(t,\mathbf{x}) = J_\pm(t,\mathbf{x})$ , если  $t \in \mathcal{C}_\pm$ . В дальнейшем мы также будем использовать краткое обозначение для таких полей:  $\phi_\pm(t,\mathbf{x}) = \phi(t \pm i\epsilon,\mathbf{x})$ . Наконец, оператор  $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}$  обозначает упорядочивание вдоль контура  $\mathcal{C}$ ; на нижней части контура этот оператор совпадает со стандартным  $\mathcal{T}$ -упорядочением, на верхней части — с  $\overline{\mathcal{T}}$ -упорядочением. При этом очевидно, что древесные пропагаторы (1.15) непосредственно следуют из (1.26) при вариации по соответствующим источникам:

$$iG^{\pm\pm}(t_1, \mathbf{x}_1; t_2, \mathbf{x}_2) = \frac{\delta^2 Z[J_+, J_-; \rho_0]}{i\delta J_{\pm}(t_1, \mathbf{x}_1)i\delta J_{\pm}(t_2, \mathbf{x}_2)} \bigg|_{J_+ = J_- = 0}.$$
 (1.27)

Теперь перепишем след (1.26) через интеграл по собственным состояниям оператора поля в момент времени  $t_0$ ,  $\hat{\phi}_{\pm}(t_0, \mathbf{x})|\phi_{\pm}^0\rangle = \phi_{\pm}^0(\mathbf{x})|\phi_{\pm}^0\rangle$ :

$$Z[J_{+}, J_{-}; \rho_{0}] = \int \mathcal{D}\phi_{-}^{0}(\mathbf{x}) \langle \phi_{-}^{0} | \rho \mathcal{T}_{\mathcal{C}} e^{-i\int_{\mathcal{C}} dt' \int d^{d}\mathbf{x}'} \sqrt{|g|} \left(\frac{1}{2}\partial_{\mu}\phi\partial^{\mu}\phi + \frac{m^{2}}{2}\phi^{2} + J\phi\right) |\phi_{-}^{0}\rangle$$

$$= \int \mathcal{D}\phi_{-}^{0}(\mathbf{x}) \int \mathcal{D}\phi_{+}^{0}(\mathbf{x}) \langle \phi_{-}^{0} | \rho |\phi_{+}^{0}\rangle \langle \phi_{+}^{0} | \mathcal{T}_{\mathcal{C}} e^{-i\int_{\mathcal{C}} dt' \int d^{d}\mathbf{x}'} \sqrt{|g|} \left(\frac{1}{2}\partial_{\mu}\phi\partial^{\mu}\phi + \frac{m^{2}}{2}\phi^{2} + J\phi\right) |\phi_{-}^{0}\rangle$$

$$= \underbrace{\int \mathcal{D}\phi_{-}^{0}(\mathbf{x}) \int \mathcal{D}\phi_{+}^{0}(\mathbf{x}) \langle \phi_{-}^{0} | \rho |\phi_{+}^{0}\rangle}_{\text{начальные условия}} \underbrace{\int_{\text{н.у.}} \mathcal{D}\phi'(t, \mathbf{x}) e^{-i\int_{\mathcal{C}} dt' \int d^{d}\mathbf{x}'} \sqrt{|g|} \left(\frac{1}{2}\partial_{\mu}\phi'\partial^{\mu}\phi' - \frac{m^{2}}{2}\phi^{2} + J\phi'\right)}_{\text{квантовая динамика}},$$

$$(1.28)$$

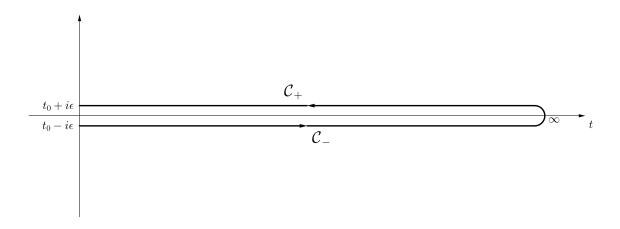


Рис. 1.3: Келдышевский контур  $\mathcal{C}$ , объединяющий отрезки прямой  $(\mathcal{C}_{-})$  и обратной  $(\mathcal{C}_{+})$  эволюции.

где "н.у." в последней строке означает, что поле  $\phi'(t, \mathbf{x})$  удовлетворяет начальным условиям  $\phi'(t_0 - i\epsilon, \mathbf{x}) = \phi_-^0$  и  $\phi'(t_0 + i\epsilon, \mathbf{x}) = \phi_+^0$ . Чтобы перейти от первой строки ко второй, мы вставили в интеграл полный набор состояний поля в момент времени  $t_0$ :  $1 = \int \mathcal{D}\phi_+^0 |\phi_+^0\rangle \langle \phi_+^0|$ . Чтобы перейти от второй строки к третьей, мы разбили контур  $\mathcal{C}$  на  $N \to \infty$  отрезков, вставили полные наборы состояний поля во всех внутренних точках и взяли интегралы по импульсам [40, 46].

На практике часть функционального интеграла (1.28), которая зависит от начального состояния, часто включают в начальные условия и для краткости опускают, а поля на прямой и обратной части контура явным образом разделяют:

$$Z[J_{+}, J_{-}] = \int_{\text{H.y.}} \mathcal{D}\phi_{-}(t, \mathbf{x}) \mathcal{D}\phi_{+}(t, \mathbf{x}) e^{iS_{0}[\phi_{-}] - iS_{0}[\phi_{+}] + i\int_{t, \mathbf{x}} (J_{+}\phi_{+} - J_{-}\phi_{-})}, \qquad (1.29)$$

где  $S_0[\phi]$  — обычное действие свободной теории:

$$S_0[\phi] = \int_{t_0}^{\infty} dt \int d^d \mathbf{x} \sqrt{|g|} \left[ \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_{\mu} \phi \partial_{\nu} \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 \right]. \tag{1.30}$$

Варьируя производящий функционал по источникам  $J_{\pm}$ , получаем, что в новых обозначениях пропагаторы (1.15) описывают корреляции между полями на верхней и нижней части контура C:

$$iG^{\pm\pm}(t_1, \mathbf{x}_1; t_2, \mathbf{x}_2) = \langle \phi_{\pm}(t_1, \mathbf{x}_1)\phi_{\pm}(t_2, \mathbf{x}_2)\rangle_0,$$
 (1.31)

где корреляционные функции вычисляются с помощью функционального интеграла на келдышевском контуре:

$$\langle O \rangle_0 = \int_{\text{H.V.}} \mathcal{D}\phi_- \mathcal{D}\phi_+ O e^{iS_0[\phi_-] - iS_0[\phi_+]}.$$
 (1.32)

В теории со взаимодействием свободное действие в функциональном интеграле (1.32) нужно заменить на полное действие:

$$S[\phi] = \int_{t_0}^{\infty} dt \int d^d \mathbf{x} \sqrt{|g|} \left[ \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_{\mu} \phi \partial_{\nu} \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{4} \phi^4 \right]. \tag{1.33}$$

Раскладывая функциональный интеграл по степеням  $\lambda$  и используя теорему Вика, получаем диаграммную технику (Рис. 1.1). Например, для точного "——" пропагатора получаем следующее разложение:

$$i\tilde{G}_{12}^{--} = \langle \phi_{-}(x_{1})\phi_{-}(x_{2})\rangle = \int_{\text{H.y.}} \mathcal{D}\phi_{-}\mathcal{D}\phi_{+} \phi_{-}(x_{1})\phi_{-}(x_{2})e^{iS[\phi_{-}]-iS[\phi_{+}]}$$

$$= \int_{\text{H.y.}} \mathcal{D}\phi_{-}\mathcal{D}\phi_{+} \phi_{-}(x_{1})\phi_{-}(x_{2}) \left[1 - \frac{i\lambda}{4} \int_{t,\mathbf{x}} \phi_{-}^{4}(x') + \frac{i\lambda}{4} \int_{t,\mathbf{x}} \phi_{+}^{4}(x') + \cdots \right] e^{iS_{0}[\phi_{-}]-iS_{0}[\phi_{+}]}$$

$$= iG_{12}^{--} - 3i\lambda \int_{t_{0}}^{t_{\infty}} dt_{3} \int d^{d}\mathbf{x}_{3}\sqrt{|g|} \left[iG_{13}^{--}iG_{33}^{--}iG_{32}^{--} - iG_{13}^{-+}iG_{33}^{++}iG_{32}^{+-}\right] + \cdots,$$

$$(1.34)$$

которое, разумеется, совпадает с разложением (1.16).

Подчеркнем, что для произвольного начального состояния теорема Вика, вообще говоря, не работает; в этом случае диаграммную технику Швингера — Келдыша необходимо дополнить более сложными корреляционными функциями [44,55,56]. Тем не менее, для гауссовых начальных состояний (например, вакуумного или теплового состояния) многоточечные корреляции отсутствуют, и диаграммная техника имеет вид (Рис. 1.1) [39–44].

Чтобы получить диаграммную технику на пропагаторы (1.20), имеющие прозрачный физический смысл, сделаем замену переменных в функциональных интегралах (1.28) и (1.32) и перейдем от "±" компонент к "классической" и "квантовой" компоненте поля:

$$\begin{pmatrix} \phi_{cl} \\ \phi_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left( \phi_- + \phi_+ \right) \\ \phi_- - \phi_+ \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \phi_- \\ \phi_+ \end{pmatrix} \quad \text{с матрицей поворота} \quad R = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.35}$$

Это тот же самый поворот, который приводит (1.15) к (1.20). При этом стоит учитывать, что аналогичную замену также нужно сделать в части интеграла, которая содержит начальную матрицу плотности. В результате получим следующее выражение для производящего функционала [40,47–49] (обратите внимание, что источники для удобства тоже повернуты к новому базису  $J_{cl} = J_- - J_+$ ,  $J_q = \frac{1}{2}(J_- + J_+)$ ):

$$Z[J_{cl}, J_q; \rho_0] = \int \mathcal{D}\varphi(\mathbf{x})\pi(\mathbf{x})W\left[\varphi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{x})\right] \int_{\mathbf{H}.\mathbf{y}.} \mathcal{D}\phi_{cl}(t, \mathbf{x})\mathcal{D}\phi_q(t, \mathbf{x})e^{iS_K[\phi_{cl}, \phi_q] - i\int_{t, \mathbf{x}}(J_{cl}\phi_{cl} + J_q\phi_q)}.$$
(1.36)

Здесь W обозначает функцию Вигнера, которая зависит от состояния системы, а также от значения поля  $\varphi(\mathbf{x})$  и обобщенного импульса  $\pi(\mathbf{x})$  в момент времени  $t_0$ :

$$W\left[\varphi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{x})\right] = \int \mathcal{D}\alpha(\mathbf{x}) \, e^{i \int d^d \mathbf{x} \, \alpha(\mathbf{x}) \pi(\mathbf{x})} \left\langle \varphi(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \alpha(\mathbf{x}) \middle| \rho_0 \middle| \varphi(\mathbf{x}) - \frac{1}{2} \alpha(\mathbf{x}) \right\rangle, \tag{1.37}$$

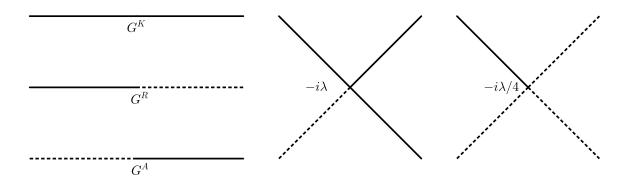


Рис. 1.4: Пропагаторы и вершины в диаграммной технике Швингера — Келдыша в модели (1.11) после келдышевского поворота (1.35). Сплошные линии отвечают классическим компонентам поля,  $\phi_{\rm cl}$ , пунктирные линии — квантовым компонентам,  $\phi_{\rm q}$ .

 $S_K$  обозначает так называемое действие Келдыша:

$$S_K[\phi_{cl}, \phi_q] = \int_{t_0}^{\infty} dt \int d^d \mathbf{x} \sqrt{|g|} \left[ g^{\mu\nu} \partial_{\mu} \phi_{cl} \partial_{\nu} \phi_q - m^2 \phi_{cl} \phi_q - \lambda \phi_{cl}^3 \phi_q - \frac{\lambda}{4} \phi_{cl} \phi_q^3 \right], \tag{1.38}$$

а буквы "н.у." означают, что на классическое поле  $\phi_{cl}$  накладываются начальные условия:  $\phi_{cl}(t_0, \mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x})$  и  $\partial_t \phi_{cl}(t_0, \mathbf{x}) = \pi(\mathbf{x})$  (начальные значения квантового поля  $\phi_q(t, \mathbf{x})$  могут быть произвольными). Полагая  $\lambda = 0$  и варьируя производящий функционал по источникам, находим древесный келдышевский, запаздывающий и опережающий пропагаторы, которые воспроизводят определение (1.20):

$$iG^{K}(t_{1}, \mathbf{x}_{1}; t_{2}, \mathbf{x}_{2}) = \langle \phi_{cl}(t_{1}, \mathbf{x}_{1})\phi_{cl}(t_{2}, \mathbf{x}_{2})\rangle_{0},$$

$$iG^{R}(t_{1}, \mathbf{x}_{1}; t_{2}, \mathbf{x}_{2}) = \langle \phi_{cl}(t_{1}, \mathbf{x}_{1})\phi_{q}(t_{2}, \mathbf{x}_{2})\rangle_{0},$$

$$iG^{A}(t_{1}, \mathbf{x}_{1}; t_{2}, \mathbf{x}_{2}) = \langle \phi_{q}(t_{1}, \mathbf{x}_{1})\phi_{cl}(t_{2}, \mathbf{x}_{2})\rangle_{0},$$

$$(1.39)$$

где корреляционные функции вычисляются с помощью функционального интеграла со свободным келдышевским действием:

$$\langle O \rangle_0 = \int_{\text{H.V.}} \mathcal{D}\phi_{cl} \mathcal{D}\phi_q O e^{iS_K[\phi_{cl},\phi_q]_{\lambda=0}}.$$
 (1.40)

Если же подставить в определение (1.40) полное действие (1.38) и разложиться по степеням константы связи  $\lambda$ , получим диаграммную технику для вычисления точного келдышевского, запаздывающего и опережающего (а также многоточечных) пропагаторов (Рис. 1.4). В частности, однопетлевая поправка к запаздывающему пропагатору выглядит следующим образом:

$$i\tilde{G}_{12}^{R} = \langle \phi_{cl}(x_{1})\phi_{q}(x_{2})\rangle = \int_{\text{H.y.}} \mathcal{D}\phi_{cl}\mathcal{D}\phi_{q} \,\phi_{cl}(x_{1})\phi_{q}(x_{2})e^{iS_{K}[\phi_{cl},\phi_{q}]}$$

$$= \int_{\text{H.y.}} \mathcal{D}\phi_{cl}\mathcal{D}\phi_{q} \,\phi_{cl}(x_{1})\phi_{q}(x_{2}) \left[1 - i\lambda \int_{t,\mathbf{x}} \phi_{cl}^{3}(x')\phi_{q}(x') - \frac{i\lambda}{4} \int_{t,\mathbf{x}} \phi_{cl}(x')\phi_{q}^{3}(x') + \cdots \right] e^{iS_{K}[\phi_{cl},\phi_{q}]_{\lambda=0}}$$

$$= iG_{12}^{R} - 3i\lambda \int_{t_{2}}^{t_{1}} dt_{3} \int d^{d}\mathbf{x}_{3}\sqrt{|g|} \, iG_{13}^{R}iG_{33}^{K}iG_{32}^{R} + \cdots$$
(1.41)

Отметим, что корреляции между квантовыми компонентами поля отсутствуют, то есть соответствующая корреляционная функция в точности равна нулю:  $\langle \phi_q(t_1, \mathbf{x}_1) \phi_q(t_2, \mathbf{x}_2) \rangle = 0$ . В то же время, корреляции между классическими компонентами поля отличны от нуля и, более того, содержат информацию о начальном состоянии системы.

#### 1.5 Кинетическое приближение

Как мы уже неоднократно отмечали в предыдущих разделах, в сильных внешних полях нелинейности системы (то есть взаимодействия) могут приводить к секулярному росту петлевых поправок к корреляционным функциям, квантовым средним и другим наблюдаемым величинам. Очевидно, при наличие подобного секулярного роста не работает ни древесное (квазиклассическое) приближение, ни пертурбативный подход — поскольку в разложении корреляционных функций степени малой константы связи умножаются на степени большого времени эволюции, ограничиться вычислением первых нескольких порядков теории возмущений не получится. Чтобы ухватить изменение состояния теории и корректно оценить наблюдаемые величины, нужно решить уравнения Дайсона — Швингера, то есть просуммировать хотя бы лидирующие секулярные вклады в корреляционные функции. В этом разделе мы обсудим один из примеров такого суммирования, который имеет простой физический смысл, однако работает далеко не для всех нестационарных систем. В частности, он хорошо работает для сильных электрических полей [31,32] и тяжелых полей в пространстве де Ситтера [22–27], однако неприменим для суммирования секулярно растущих вкладов для динамического эффекта Казимира [62] и легких полей в пространстве де Ситтера [28, 29].

Как и в предыдущих разделах, рассмотрим нестационарную теорию скалярного поля с квартичным взаимодействием (1.11) и выпишем уравнения Дайсона — Швингера на двухточечные корреляторы в обозначениях КRA. Поскольку нас интересуют только лидирующие секулярно растущие вклады, будем работать в пределе  $\lambda \to 0$ ,  $T \to \infty$  и  $\lambda^2 T = {\rm const.}$  где T — среднее время внешних точек корреляционной функции (причины, по которым мы потребовали последнее условие, станут ясны позднее). Как мы обсуждали в разделе 1.3, в этом

пределе поправками к запаздывающему и опережающему пропагаторам можно пренебречь. Более того, можно показать, что петлевые поправки к четырехточечным (и другим многоточечным) функциям также растут не быстрее чем  $(\lambda^2 T)^n$ ; следовательно, в указанном пределе ими тоже можно пренебречь. В результате от всей системы уравнений Дайсона — Швингера остается только одно уравнение на келдышевский пропагатор [46]:

$$\tilde{G}_{12}^{K} = G_{12}^{K} - \lambda^{2} \int_{t_{0}}^{\infty} dt_{3} \int d^{d}\mathbf{x}_{3} \sqrt{|g|} \int_{t_{0}}^{\infty} dt_{4} \int d^{d}\mathbf{x}_{4} \sqrt{|g|} \Big[ G_{13}^{R} \tilde{G}_{34}^{K} \tilde{G}_{34}^{K} \tilde{G}_{34}^{K} G_{42}^{A}$$

$$+3G_{13}^{R} G_{34}^{R} \tilde{G}_{34}^{K} \tilde{G}_{34}^{K} G_{42}^{R} + 3\tilde{G}_{13}^{K} \tilde{G}_{34}^{K} \tilde{G}_{34}^{K} G_{34}^{A} G_{42}^{A}$$

$$+\frac{3}{4} G_{13}^{R} G_{34}^{R} G_{34}^{R} \tilde{G}_{34}^{K} G_{42}^{A} + \frac{3}{4} G_{13}^{R} \tilde{G}_{34}^{K} G_{34}^{A} G_{34}^{A} G_{42}^{A}$$

$$+\frac{1}{4} G_{13}^{R} G_{34}^{R} G_{34}^{R} G_{34}^{R} \tilde{G}_{42}^{K} + \frac{1}{4} \tilde{G}_{13}^{K} G_{34}^{A} G_{34}^{A} G_{34}^{A} G_{42}^{A} \Big],$$

$$(1.42)$$

где мы обозначили "точные", пересуммированные пропагаторы как  $\tilde{G}_{ab}^K = \tilde{G}^K(t_a, \mathbf{x}_a; t_b, \mathbf{x}_b)$ , а древесные — как  $G_{ab}^K = G^K(t_a, \mathbf{x}_a; t_b, \mathbf{x}_b)$ . Теперь подставим в это уравнение келдышевский пропагатор (1.21), переписанный через квантовые средние, и предположим, что аномальное квантовое среднее равно нулю<sup>5</sup>. Кроме того, будем работать в кинетическом приближении, в котором можно считать, что  $n_{pq}(T)$  меняется медленно по сравнению с гармониками. Также мы для простоты рассмотрим плоское пространство-время. В этом случае уравнение на точный келдышевский пропагатор сводится к следующему уравнению на заселенность квантовых уровней [46]:

$$\tilde{n}_{pp'}(T) = n_{pp'}(T) + \lambda^{2} \int_{t_{2} \leq t} d^{d+1}x_{2} \int_{t_{3} \leq t} d^{d+1}x_{3} \int \frac{d^{d}\mathbf{q}}{(2\pi)^{d}} \frac{d^{d}\mathbf{k}}{(2\pi)^{d}} \prod_{i=1}^{3} \frac{d^{d}\mathbf{p}_{i}}{(2\pi)^{d}} \frac{d^{d}\tilde{\mathbf{p}}_{i}}{(2\pi)^{d}} f_{q}(x_{2}) f_{k}^{*}(x_{3}) \times \left\{ 3\delta_{kp'}\delta_{pq}G_{p_{1}\tilde{p}_{1}}^{ac}(x_{2}, x_{3}) G_{p_{2}\tilde{p}_{2}}^{c}(x_{2}, x_{3}) G_{p_{3}\tilde{p}_{3}}^{c}(x_{2}, x_{3}) + \delta_{kp'}\delta_{pq} \prod_{i=1}^{3} G_{p_{j}\tilde{p}_{j}}^{ac}(x_{2}, x_{3}) + \left[ \theta(t_{2} - t_{3}) \delta_{kp'}(\delta_{pq} + 2\tilde{n}_{pq}) + \delta_{qp}\theta(t_{3} - t_{2}) (\delta_{kp'} + 2\tilde{n}_{kp'}) \right] \times \left\{ \prod_{j=1}^{3} G_{p_{j}\tilde{p}_{j}}^{c}(x_{2}, x_{3}) + 3G_{p_{1}\tilde{p}_{1}}^{c}(x_{2}, x_{3}) G_{p_{2}\tilde{p}_{2}}^{ac}(x_{2}, x_{3}) G_{p_{3}\tilde{p}_{3}}^{ac}(x_{2}, x_{3}) \right\} \right\},$$

$$(1.43)$$

где мы ввели обозначения для коммутатора полей  $G^c_{ab}(x_1,x_2)=\delta_{ab}\left[f_a(x_1)f_a^*(x_2)-f_a^*(x_1)f_a(x_2)\right]$  и антикоммутатора  $G^{ac}_{ab}(x_1,x_2)=\frac{1}{2}\delta_{ab}f_a(x_1)f_a^*(x_2)+\tilde{n}_{ab}f_a(x_1)f_b^*(x_2)+h.c.$ . Подставляя в полученное уравнение плоские гармоники (напомним, что в этом разделе мы ограничиваемся плоским пространством) и пользуясь кинетическим приближением, можно показать, что интегралы в правой части линейно растут со временем,  $\tilde{n}_{pp'}(T)-n_{pp'}(T)\sim\lambda^2 T$  (по этой причине мы рассматривали предел  $\lambda\to 0, T\to\infty, \lambda^2 T={\rm const}$ ), а пересуммированное квантовое

 $<sup>^{5}</sup>$ В рассматриваемой модели аномальное квантовое среднее экспоненциально быстро затухает, поэтому на больших временах эволюции его действительно можно считать нулевым [46, 57].

среднее близко к диагональному виду,  $\tilde{n}_{pp'} \approx n_p \delta_{pp'}$ . Наконец, учитывая упомянутые выше следствия, дифференцируя (1.43) по времени и преобразуя получившееся выражение, получаем стандартное кинетическое уравнение для бозонов с квартичным взаимодействием [46]:

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{n}_{p}(t,\mathbf{x}) + \mathbf{v}\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\tilde{n}_{p}(t,\mathbf{x}) \approx \frac{\lambda^{2}}{2} \int \frac{d^{d}\mathbf{p}_{1}}{(2\pi)^{d}2\omega_{1}} \int \frac{d^{d}\mathbf{p}_{2}}{(2\pi)^{d}2\omega_{2}} \int \frac{d^{d}\mathbf{p}_{3}}{(2\pi)^{d}2\omega_{3}} \delta^{(d+1)}\left(p + p_{1} - p_{2} - p_{3}\right) \times \left[\left(1 + \tilde{n}_{p}\right)\left(1 + \tilde{n}_{p_{1}}\right)\tilde{n}_{p_{2}}\tilde{n}_{p_{3}} - \tilde{n}_{p}\tilde{n}_{p_{1}}\left(1 + \tilde{n}_{p_{2}}\right)\left(1 + \tilde{n}_{p_{3}}\right)\right],$$
(1.44)

где  $\mathbf{v} = \partial \omega(\mathbf{p})/\partial \mathbf{p}$  — групповая скорость. Первое выражение в квадратных скобках описывает процессы рассеяния, приносящие частицы в ячейку фазового пространства с импульсом  $\mathbf{p}$ , тогда как второе выражение описывает обратные процессы. Аналогичные уравнения также возникают при суммировании петлевых поправок к корреляционным функциям заряженных скаляров в сильном электрическом поле [31, 32] и тяжелых скалярных полей в пространстве де Ситтера [22–27]. При этом в виду нестационарности указанных систем кинетическое уравнение также содержит дополнительные члены, описывающие не только рассеяние, но и рождение частиц внешними полями.

К сожалению, далеко не во всех нестационарных ситуациях систему уравнений Дайсона — Швингера удается свести к аналогу кинетического уравнения. Основным препятствием на пути такого сведения, как правило, стоит секулярный рост многоточечных корреляционных функций, который не позволяет ограничиться уравнением на келдышевский пропагатор (1.42). В частности, эта проблема возникает для легких полей в пространстве де Ситтера: чем меньше становится масса поля, тем более высокие корреляционные функции необходимо включать в самосогласованную систему уравнений Дайсона — Швингера [28, 29]. К настоящему моменту решить такую систему удалось только для O(N)-симметричной теории в пределе большого числа полей  $N \to \infty$  и только для состояния Банча — Дэвиса [58–61]. Аналогичные проблемы также возникают и для динамического эффекта Казимира с двумерным безмассовым скалярным полем [62]. В этом случае п-петлевая поправка к практически любой многоточечной корреляционной функции растет со средним временем как  $(\lambda T)^n$ ; это не только не позволяет обрезать систему уравнений Дайсона — Швингера на каком-то конечном числе внешних точек корреляционной функции, но и в принципе делает невозможным получение уравнения типа (1.44). Чтобы понять, как изменяется состояние таких систем, и вычислить для них наблюдаемые величины вроде числа родившихся частиц и потока тензора энергии-импульса, необходимо разработать альтернативный подход к решению нестационарных уравнений Дайсона — Швингера.

# 1.6 Цели и задачи диссертационного исследования

В этой диссертации мы рассмотрим ряд нестационарных систем, в которых эволюцию квантовых средних нельзя описать с помощью аналога кинетического уравнения (1.44). А именно, в работе рассматриваются следующие вопросы:

- Разработка способа суммирования поправок в нестационарных системах с некинетическим поведением петлевых поправок к корреляционным функциям и квантовым средним.
- Вычисление пересуммированных корреляционных функций, квантовых средних и средней энергии возбуждений в простейшем примере нестационарной квантовой теории поля— нестационарной квантовой механике.
- Изучение нелинейного скалярного динамического эффекта Казимира на фоне резонансной полости и полупрозрачного зеркала.
- Изучение сильных скалярных полей на примере (0+1) и (1+1)-мерной модели Юкавы.

# 1.7 Результаты, выносимые на защиту диссертации

- Просуммированы лидирующие секулярно растущие вклады в корреляционные функции и квантовые средние в нестационарной квантовой механике системе N связанных осцилляторов с переменной частотой и O(N)-симметричным квартичным взаимодействием.
- Суммирование выполнено двумя способами: с помощью эффективного гамильтонинана, позволяющего оценить квантовые средние в пределе слабых отклонений от стационарности, и с помощью диаграммной техники Швингера Келдыша в пределе  $N \gg 1$ .
- Показано, что при сильных отклонениях от стационарности (например, при резонансной накачке энергии) вклад петлевых поправок можно интерпретировать как  $\mathcal{O}(1)$  дополнительных степеней свободы, входящих в выражения для средней энергии и числа возбуждений осцилляторов.
- Показано, что в скалярном динамическом эффекте Казимира с двумерным безмассовым полем на фоне резонансной полости (двух идеально отражающих зеркал) и полупрозрачного зеркала (дельта-функционального барьера) возникают секулярно расту-

щие петлевые поправки, причем двухпетлевые поправки квадратично растут вместе со временем эволюции.

- Установлено, что секулярно растущие поправки возникают за счет нарушения конформной инвариантности членом взаимодействия и нарушения закона сохранения энергии из-за неоднородности движения зеркал.
- Показано, что секулярно растущие петлевые поправки могут играть важную роль в том числе в экспериментах по моделированию динамического эффекта Казимира с помощью сверхпроводящих квантовых контуров.
- Рассмотрена (0+1) и (1+1)-мерная теория Юкавы на фоне линейно растущего скалярного поля  $\phi_{cl} = Et$ .
- Для (0+1)-мерной теории корреляционные функции полей вычислены точно в этой теории многоточечные функции просто распадаются на произведение одноточечных корреляторов.
- Для (1+1)-мерной теории вычислены точные моды и древесный скалярный ток, а также петлевые поправки к корреляционным функциям. Показано, что на указанном фоне корреляционные функции ограничены даже в пределе бесконечно большого времени эволюции.
- Показано, что выражение для древесного скалярного тока можно обобщить на произвольные сильные скалярные поля, если эти поля достаточно медлено изменяются. Для этого необходимо рассмотреть эффективное действие теории.

#### Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения (Глава 1), трех глав основного текста (Главы 2–4), заключения (Глава 5) и двух приложений (А и В). Общий объем диссертации составляет 152 страницы, включая 19 рисунков. Список литературы содержит 156 ссылок.

### 1.8 Содержание диссертации

В главе 2 обсуждается простейший пример нестационарной квантовой теории поля — система N связанных квантовомеханических осцилляторов с одинаковой частотой, изменя-

ющейся во времени по некоторому закону, и O(N)-симметричным квартичным взаимодействием. Поскольку данная система может служить "игрушечной" моделью динамического эффекта Казимира и легких полей в пространстве де Ситтера, ее изучение помогает лучше понять динамику полей в указанных сложных ситуациях.

В разделе 2.1 вводятся обозначения и кратко обсуждаются основные подходы, которые в дальнейшем используются в этой главе. Кроме того, в данном разделе вводится понятие среднего числа возбуждений, аналогичное среднему числу родившихся частиц в квантовых теориях более высокой размерности, а также обсуждается связь среднего числа и энергии возбуждений.

В разделе 2.2 система связанных осцилляторов обсуждается с точки зрения (0+1)-мерной квантовой теории поля — выписываются моды, решающие уравнения движения, и вычисляются коэффициенты Боголюбова в предположении, что частота осцилляторов слабо изменяется около некоторого постоянного значения. В частности, показано, что в резонансном случае боголюбовские коэффициенты экспоненциально растут вместе с продолжительностью колебаний.

В разделе 2.3 вычисляется эффективный гамильтониан модели в пределе малой константы связи  $\lambda \to 0$ , большого времени эволюции  $t \to \infty$  и постоянного произведения  $\lambda t = \mathrm{const.}$  Вычислены поправки к частоте и коэффициентам боголюбова, связанные с квадратичной частью члена взаимодействия. При дополнительном условии слабых отклонений от стационарности приближенно найдены проэволюционировавшая заселенность уровней, аномальное квантовое среднее и среднее число возбуждений. Рассмотрены случаи как большого числа осцилляторов  $(N \gg 1)$ , так и одиночного осциллятора (N = 1).

В разделе 2.4 результаты предыдущего раздела обобщены на произвольные отклонения от стационарности с помощью диаграммной техники Швингера — Келдыша. Вычислены лидирующие пересуммированные корреляционные функции и вершины в пределе  $N \to \infty$ . Кроме того, оценена сублидирующая поправка к келдышевскому пропагатору и квантовым средним, пропорциональная 1/N. Показано, что эту поправку можно интерпретировать как  $\mathcal{O}(1)$  дополнительных степеней свободы, изменяющих выражения для средней энергии и числа возбуждений системы.

В главе 3 обсуждаются петлевые поправки в нелинейном динамическом эффекте Казимира с двумерным безмассовым скалярным полем.

В **разделе 3.1** перечисляются основные модели, которые будут рассмотрены в этой главе, и кратко обсуждаются основные результаты.

В разделе 3.2 обсуждается физическая картина динамического эффекта Казимира со

скалярным безмассовым полем. Рассмотрен вывод этого эффекта как приближенной модели электромагнитного поля на фоне релятивистского зеркала или джозефсоновского метаматериала — квантового контура со вставками сверхпроводящих интерферометров. Оценены такие физические параметры теории, как характерный масштаб энергий, на котором зеркало можно считать идеально отражающим, и характерная константа связи теории с квартичным взаимодействием. Кроме того, обсуждается, как энергия скалярного поля в резонансной полости (энергия Казимира) изменяется в нестационарном случае.

В разделе 3.3 вычисляются двухпетлевые поправки к корреляционным функциям и квантовым средним скалярного поля на фоне резонансной полости — двух идеально отражающих зеркал. Кратко обсуждается геометрический способ построения мод и связь двухпетлевых поправок с нарушениями конформной инвариантности и закона сохранения энергии. Рассматриваются случаи одновременных и синхронизированных "сломанных" траекторий зеркал, а также случай резонансных осцилляций с деструктивной интерференцией. Во всех перечисленных случаях, исключая случай синхронизированных траекторий, петлевые поправки к квантовым средним квадратично растут со временем эволюции и не сводятся к диагональному виду. Кроме того, в пределе бесконечно удаленных зеркал воспроизведен случай одиночного идеального зеркала.

В разделе 3.4 рассматривается случай одиночного полупрозрачного зеркала, смоделированного дельта-функциональным потенциалом. Обсуждается вывод мод скалярного поля на фоне такого зеркала и приближение, в котором упрощаются коэффициенты прохождения и отражения. Оцениваются петлевые поправки к квантовым средним, показывается, что эти поправки квадратично растут вместе со временем эволюции.

В разделе 3.5 петлевые поправки к корреляционным функциям суммируются в приближении слабых отклонений от стационарности, то есть при условии малой закачки энергии в систему. Рассматривается случай нелинейной резонансной полости с нелинейностями вида  $\lambda \phi^4$  и  $\lambda (\partial_x \phi)^4$ ; последний случай отвечает эффективной теории, возникающей в джозефсоновском метаматериале. С помощью метода, аналогичного методу главы 2, показывается, что лидирующие секулярно растущие петлевые поправки собираются в осциллирующую функцию, амплитуда которой сравнима с древесным вкладом, а частота определяется константой связи теории. Оценивается время, на котором петлевые поправки могут проявиться в экспериментах по проверке динамического эффекта Казимира с помощью джозефсоновского метаматериала.

В главе 4 рассматривается нестационарная теория Юкавы в (0+1) и (1+1)-мерном пространстве на фоне линейно растущего со временем классического скалярного поля.

В разделе 4.1 вводятся обозначения новой главы и кратко обсуждаются основные результаты.

В разделе 4.2 обсуждается (0+1)-мерный случай на фоне произвольного классического скалярного поля (впрочем, в одномерном случае классические уравнения движения решает только линейно растущее во времени поле). Показывается, что скалярный ток и фермионные корреляционные функции в этом случае тривиальны. Вычисляются бозонные корреляционные функции и доказывается, что вне зависимости от состояния теории точные корреляционные функции расщепляются на произведение одноточечных.

В разделе 4.3 рассматривается (1 + 1)-мерный случай на фоне линейно растущего во времени скалярного поля. Находятся точные моды с правильным ультрафиолетовым поведением. Вычисляется скалярный ток и петлевые поправки к корреляционным функциям бозонов и фермионов. Устанавливается, что для обоих типов функций петлевые поправки отличны от нуля, однако ограничены даже для бесконечно большого времени эволюции. Это поведение петлевых поправок существенно отличает скалярное поле от сильного электрического или гравитационного поля.

В разделе 4.4 вычисляется эффективное действие теории и обсуждаются его перенормировки. Показывается, что минимум эффективного потенциала лежит в  $\phi \neq 0$ . С помощью результатов этого раздела выражение для скалярного тока обобщается на произвольные сильные ( $\phi \gg 1$ ), но медленно изменяющиеся ( $|\partial \phi| \ll \lambda \phi^2$ ) поля. Примечательно, что в отличие от сильных электрических и гравитационных полей, эффективное действие скалярного поля не содержит мнимой части.

В главе 5 (заключении) сформулированы основные результаты диссертации, выносимые на защиту.

#### 1.9 Публикации по теме диссертации

- D. A. Trunin. Comments on the Adiabatic Theorem // Int. J. Mod. Phys. A 33, no. 24, 1850140 (2018).
- E. T. Akhmedov, E. N. Lanina, D. A. Trunin. Quantization in background scalar fields // Phys. Rev. D 101, 025005 (2020).
- 3. E. N. Lanina, D. A. Trunin, E. T. Akhmedov. On the Decay of a Strong Scalar Field in QM and QFT // Phys. Atom. Nuclei 83, 1660 (2020).

- 4. L. A. Akopyan, D. A. Trunin. Dynamical Casimir effect in nonlinear vibrating cavities // Phys. Rev. D **103**, 065005 (2021).
- 5. D. A. Trunin. Particle creation in nonstationary large N quantum mechanics // Phys. Rev. D **104**, 045001 (2021).

# Глава 2

# Суммирование петель в квантовой механике в пределе больших N

#### 2.1 Введение

В этой главе мы рассмотрим один из простейших примеров нестационарной квантовой системы — систему N связанных квантовомеханических осцилляторов с переменной частотой и O(N)-симметричным квартичным взаимодействием $^1$ :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{\phi}_i\dot{\phi}_i - \frac{\omega^2(t)}{2}\phi_i\phi_i - \frac{\lambda}{4N}(\phi_i\phi_i)^2, \tag{2.1}$$

где мы предполагаем суммирование по повторяющимся индексам и вводим константу связи 'т Хоофта  $\lambda = gN$ . В бесконечном прошлом и будущем частота осцилляторов стремится к постоянным (возможно, не совпадающим) значениям,  $\omega(t) \to \omega_{\pm}$  при  $t \to \pm \infty$ , а константа связи адиабатически включается после времени  $t_0$ . Поскольку множество систем (например, электромагнитные резонансные полости [70–81] или электрические контуры со вставками кубитов [82–86]) в некотором приближении сводятся к набору связанных осцилляторов, эта задача является фундаментальной для исследования неравновесных явлений.

Отметим, что в квантовой механике обычно рассматривают измерения, то есть воздействуют на систему внешним макроскопическим прибором и измеряют сколлапсировавшее состояние. Другими словами, обычно рассматривают волновую функцию системы и вычис-

 $<sup>^{1}</sup>$ Отметим, что в последние годы значительный интерес привлекла другая квантовомеханическая модель с большим числом частиц — так называемая модель Сачдева — Йе — Китаева (SYK) [63–67]; в том числе недавно было рассмотрено нестационарное обобщение этой модели [68,69]. Как и в O(N) модели, в модели SYK в пределе больших N доминирует строго определенный тип диаграмм, что позволяет явно оценить точные корреляционные функции и наблюдаемые величины.

ляют вероятности перехода между ее собственными состояниями [87–89]. Тем не менее, в этой главе мы рассмотрим квантовую механику с точки зрения (0+1)-мерной квантовой теории поля и будем вычислять корреляционные функции скалярных полей  $\phi_i$  (то есть координат осцилляторов). При этом мы будем работать с квази-замкнутой квантовомеханической системой, в которой взаимодействие со внешним миром моделируется с помощью изменения частоты (в квантовых теориях поля более высокой размерности этот параметр играет роль массы).

Аналогично квантовым теориям более высокой размерности, в нестационарной системе связанных квантовомеханических осцилляторов корреляционные функции получают петлевые поправки, степенным образом растущие вместе со временем эволюции системы (аналогичные эффекты для одиночного осциллятора были ранее обнаружены в [90]). Более того, в квантовой механике инфракрасные расходимости оказываются сильнее, чем в квантовых теориях более высокой размерности [19–33]; это обычная ситуация для маломерных систем. В результате кинетический подход, обсуждавшийся в разделе 1.5, оказывается неприменим, и суммирование петлевых поправок необходимо проводить неким иным образом.

В этой главе мы обсудим два подхода, позволяющих пересуммировать лидирующие секулярно растущие вклады в корреляционные функции нестационарной системы N связанных осцилляторов. Первый подход работает при слабых отклонениях от стационарности, то есть при небольших нерезонансных модуляциях частоты осцилляторов. В основе этого подхода лежит тот факт, что в указанном приближении процессы, нарушающие закон сохранения энергии, подавлены малым параметром нестационарности; в результате поправки к квантовым средним  $n_{kl}$  и  $\varkappa_{kl}$  можно явно вычислить. Второй подход основан на решении системы уравнений Дайсона — Швингера на пропагаторы и вершины в лидиующем порядке разложения по 1/N в пределе большого числа осцилляторов,  $N\gg 1$ . Этот подход одинаково хорошо работает как при малых, так и при больших отклонениях от стационарности. Аналогично квантовым теориям более высокой размерности, в обоих случаях мы будем работать в пределе малой константы связи и большого времени эволюции,  $\lambda\to 0$ ,  $t\to\infty$ ,  $\lambda t={\rm const.}$ , который выделяет лидирующие секулярно растущие вклады в корреляторы и квантовые средние.

Кроме того, отметим, что для системы связанных квантовых осцилляторов можно определить аналог среднего числа "частиц" (точнее, возбуждений)  $\mathcal{N}$ , которое вычисляется аналогично квантовой теории поля по формуле (1.6):

$$\mathcal{N}/N = |\beta|^2 + (|\alpha|^2 + |\beta|^2) n + \alpha \beta \varkappa + \alpha^* \beta^* \varkappa^*. \tag{2.2}$$

Здесь мы учли, что нестационарность теории приводит к ненулевым коэффициентам Бого-

любова  $\alpha$  и  $\beta$  (см. раздел 2.2), а пересуммированные квантовые средние имеют диагональный вид:  $n_{ij} = n\delta_{i,j}$  и  $\varkappa_{ij} = \varkappa\delta_{i,j}$  (см. раздел 2.4). Покажем, что выражение (2.2) действительно имеет смысл среднего числа возбуждений осцилляторов. Для этого воспользуемся выражением для точного келдышевского пропагатора:

$$iG_{nk}^{K}(t_1, t_2) \approx \left[ \left( \frac{1}{2} \delta_{nk} + n_{nk}(t) \right) f_n^{\text{in}}(t_1) \left( f_k^{\text{in}}(t_2) \right)^* + \varkappa_{nk}(t) f_n^{\text{in}}(t_1) f_k^{\text{in}}(t_2) + h.c. \right],$$
 (2.3)

и оценим квантовое среднее проэволюционировавшего гамильтониана взаимодействующей теории,  $\langle H \rangle(t) = \langle in|U^{\dagger}(t,t_0)H(t_0)U(t,t_0)|in\rangle$ , в пределе  $t \to +\infty$ . Здесь мы обозначили  $t = \frac{t_1+t_2}{2}$ , а квантовые средние  $n_{nk}(t)$ ,  $\varkappa_{nk}(t)$  определяются выражениями (1.9), (1.10). Прежде всего, рассмотрим свободный гамильтониан модели (2.1):

$$\langle H_{0}\rangle(x) = \frac{1}{2}\partial_{t_{1}}\partial_{t_{2}}\sum_{n=1}^{N}iG_{nn}^{K}(t_{1},t_{2})\Big|_{t_{1}=t_{2}=t} + \frac{\omega^{2}(t)}{2}\sum_{n=1}^{N}iG_{nn}^{K}(t,t) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n,k=1}^{N}\left[\left(\frac{1}{2}\delta_{nk} + n_{nk}\right)\dot{f}^{\text{in}}(t)\left(\dot{f}^{\text{in}}(t)\right)^{*} + \varkappa_{nk}\dot{f}^{\text{in}}(t)\dot{f}^{\text{in}}(t) + h.c.\right] +$$

$$+ \frac{\omega^{2}(t)}{2}\sum_{n,k=1}^{N}\left[\left(\frac{1}{2}\delta_{nk} + n_{nk}\right)f^{\text{in}}(t)\left(f^{\text{in}}(t)\right)^{*} + \varkappa_{nk}f^{\text{in}}(t)f^{\text{in}}(t) + h.c.\right].$$
(2.4)

Подставляя будущую асимптотику ин-мод (2.10) и удерживая только неосциллирующие вклады, получаем следующее выражение для гамильтониана:

$$\langle H_0 \rangle(x) = \sum_{n,k} \omega_+ \left[ \left( \frac{1}{2} \delta_{nk} + n_{nk} \right) \left( |\alpha|^2 + |\beta|^2 \right) + \alpha \beta \varkappa_{nk} + \alpha^* \beta^* \varkappa_{nk}^* \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \omega_+ N + \omega_+ \mathcal{N}, \qquad (2.5)$$

где  $\mathcal N$  определяется равенством (2.2) и мы использовали свойство коэффициентов Боголюбова,  $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$ . Заметим, что слагаемое  $\frac{1}{2}\omega_+ N$  отвечает энергии нулевых колебаний N свободных осцилляторов.

Наконец, учтем квартичный член, сдвигающий потенциальную энергию взаимодействия осцилляторов:

$$\langle H \rangle = \langle H_0 \rangle + \langle H_{\rm int} \rangle, \quad \langle H_{\rm int} \rangle(t) \equiv \frac{\lambda}{4N} \langle in|\phi_i(t)\phi_i(t)\phi_j(t)\phi_j(t)|in\rangle.$$
 (2.6)

В пределе  $t \to +\infty$  этот член также пропорционален N:

$$\langle H_{\rm int} \rangle = \frac{\lambda}{4N} i G_{ii}^K(t,t) i G_{jj}^K(t,t) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right) \approx \frac{\lambda N}{16\omega_+^2} \left(|\alpha|^4 + 4|\alpha|^2|\beta|^2 + |\beta|^4\right) + \mathcal{O}\left(1\right). \tag{2.7}$$

Более того, в пределе больших  $\beta$  он пропорционален  $|\beta|^4$  и на первый взгляд превосходит поправку, возникающую за счет генерации  $\mathcal{N}$ . Тем не менее, напомним, что мы работаем

в пределе  $\lambda \to 0$ ,  $t \to \infty$ ,  $\lambda t = {\rm const.}$  Поскольку вклад  $H_{\rm int}$  пропорционален константе связи, всегда можно выбрать достаточно малую  $\lambda \ll \omega_+^3$ , чтобы этим вкладом можно было пренебречь.

Таким образом, в рассматриваемом пределе равенство (2.5) приближенно определяет полный гамильтониан модели (2.1) в бесконечном будущем. Это подтверждает, что при указанных предположениях  $\mathcal{N}$  играет роль среднего числа возбуждений над вакуумом в полной взаимодействующей теории. Поскольку эта величина имеет простой физический смысл и является непосредственно измеримой на практике, мы будем вычислять ее наравне с корреляторами и квантовыми средними  $n_{kl}$  и  $\varkappa_{kl}$ .

#### 2.2 Разложение квантового поля по модам

Рассмотрим систему N связанных квантовомеханических осцилляторов с переменной частотой и квартичным O(N)-симметричным взаимодействием, описываемую лагранжианом (2.1). Аналогично теориям более высокой размерности, разложим оператор квантованного скалярного поля (координаты осциллятора) по операторам рождения и уничтожения:

$$\phi_i(t) = a_i f(t) + a_i^{\dagger} f^*(t). \tag{2.8}$$

Здесь операторы  $a_i^\dagger$  и  $a_i$  удовлетворяют стандартным бозонным коммутационным соотношениям,  $[a_i,a_j^\dagger]=\delta_{ij},$  а моды f(t) решают классические уравнения движения:

$$\ddot{f}(t) + \omega^2(t)f(t) = 0. {(2.9)}$$

Поскольку в бесконечном прошлом и будущем частота осцилляторов стремится к постоянным значениям, в этих пределах любое решение уравнения (2.9) может быть представлено в виде суммы двух осциллирующих экспонент, причем с помощью боголюбовского поворота всегда можно добиться, чтобы в каком-то пределе оставалась только одна экспонента. Потребуем, чтобы это условие выполнялось в бесконечном прошлом<sup>2</sup>:

$$f(t) \approx \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{-}}} e^{-i\omega_{-}t}, & \text{при} \quad t \to -\infty, \\ \frac{\alpha}{\sqrt{2\omega_{+}}} e^{-i\omega_{+}t} + \frac{\beta}{\sqrt{2\omega_{+}}} e^{i\omega_{+}t}, & \text{при} \quad t \to +\infty, \end{cases}$$
(2.10)

где комплексные числа  $\alpha$  и  $\beta$  удовлетворяют соотношению  $|\alpha|^2-|\beta|^2=1$  как следствие канонических коммутационных соотношений  $[\phi_i,\pi_i]=[\phi_i,\dot{\phi}_i]=i.$  Заметим, что эти числа

 $<sup>^2</sup>$ Напомним, что определенные таким образом функции называются ин-модами. Впрочем, в этой главе мы для краткости не будем писать индекс "in":  $f(t) = f^{\rm in}(t)$ .

фактически играют роль коэффициентов Боголюбова (1.5) между ин- и аут-модами, если выбрать  $f^{\text{out}}(t) \approx \frac{1}{\sqrt{2\omega_+}} e^{-i\omega_+ t}$  при  $t \to +\infty$ . Также заметим, что ин-моды (2.10) диагонализуют свободный гамильтониан в бесконечном прошлом:

$$H_{\text{free}} = \frac{1}{2}\dot{\phi}_i\dot{\phi}_i + \frac{\omega^2(t)}{2}\phi_i\phi_i \approx \omega_-\left(a_i^{\dagger}a_i + \frac{N}{2}\right), \quad \text{при} \quad t \to -\infty.$$
 (2.11)

Для простоты в этой главе мы будем считать, что начальное состояние поля совпадало с основным состоянием этого гамильтониана в бесконечном прошлом,  $|in\rangle = |0\rangle$ ,  $a_i|0\rangle = 0$  для всех i.

Вообще говоря, коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  можно однозначно восстановить по виду функции  $\omega(t)$ , хотя для произвольных функций эта задача может быть очень сложной. Тем не менее, при малых вариациях частоты, то есть в случае  $\omega(t) = \omega + \delta\omega(t)$  с  $\omega = \text{const}$  and  $\delta\omega(t) \ll \omega$ , эта задача существенно упрощается. С одной стороны, в нерезонансном случае коэффициент  $\beta$  может быть вычислен в борновском приближении [91]:

$$|\beta|^2 \approx \frac{|\beta|^2}{|\alpha|^2} \approx \left| \int_{-\infty}^{\infty} \delta\omega(t) e^{-2i\omega t} dt \right|^2 \ll 1.$$
 (2.12)

Подчеркнем, что при таких вариациях частоты амплитуда отраженной от потенциала волны много меньше единицы, и подобное поведение можно интерпретировать как следствие адиа-батической теоремы [90,92,93]. В этом случае система практически не обменивается энергией с внешним полем, отвечающим за изменение частоты со временем; следовательно, среднее число и энергия возбуждений осцилляторов малы,  $\mathcal{N}_{\text{free}}/N = |\beta|^2 \ll 1$ . Более того, в следующем разделе мы покажем, что петлевые поправки к квантовым средним, корреляционным функциям и средней энергии возбуждений в этом случае дополнительно подавлены малым параметром  $\beta$ .

В то же время, при неадиабатическом изменении частоты, например, в резонансном случае  $\omega(t) = \omega \left[1 + 2\gamma \cos(2\omega t)\right], \ \gamma \ll 1$ , оба коэффициента экспоненциально растут со временем [72,79]:

$$\alpha = \cosh(\omega \gamma t_R), \quad \beta = -i \sinh(\omega \gamma t_R),$$
(2.13)

где  $t_R$  — продолжительность резонансных осцилляций. Эти оценки для коэффициентов легко получить непосредственно из уравнения (2.9), если подставить в него анзац  $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \left[\alpha(t)e^{-i\omega t} + \beta(t)e^{i\omega t}\right]$  и усреднить равенство по быстрым колебаниям.

При неадиабатическом изменении частоты петлевыми поправками к корреляционным функциям и наблюдаемым величинам, вообще говоря, пренебречь нельзя, поскольку взаимодействие между осцилляторами заметно сдвигает основное состояние системы. В разделе 2.4

мы покажем, что в этом случае и пересуммированный петлевой вклад, и древесное выражение для квантовых средних, корреляционных функций и среднего числа возбуждений имеют одинаковый порядок по  $\beta$ . Впрочем, в модели (2.1) петлевые поправки остаются подавлены по 1/N.

#### 2.3 Эффективный гамильтониан

#### **2.3.1** Большие N

Воспользуемся асимптотическим поведением функций (2.10), чтобы оценить свободный,

$$H_{\text{free}} = \left( |\alpha|^2 + |\beta|^2 \right) \omega_+ \left( a_i^{\dagger} a_i + \frac{N}{2} \right) + \alpha \beta \omega_+ a_i a_i + \alpha^* \beta^* \omega_+ a_i^{\dagger} a_i^{\dagger}, \tag{2.14}$$

и взаимодействующий,

$$H_{\text{int}} \approx \frac{\lambda}{16N\omega_{+}^{2}} \left( |\alpha|^{4} + 4|\alpha|^{2}|\beta|^{2} + |\beta|^{4} \right) \left( a_{i}^{\dagger} a_{i}^{\dagger} a_{j} a_{j} + 2 a_{i}^{\dagger} a_{j}^{\dagger} a_{i} a_{j} \right) + \frac{3\lambda\alpha\beta}{4N\omega_{+}^{2}} \left( |\alpha|^{2} + |\beta|^{2} \right) a_{i}^{\dagger} a_{i} a_{j} a_{j} + \frac{3\lambda\alpha^{2}\beta^{2}}{8N\omega_{+}^{2}} a_{i} a_{i} a_{j} a_{j} + h.c. + \delta H_{\text{free}},$$
(2.15)

гамильтонианы в представлении взаимодействия в пределе больших времен эволюции  $(t \to +\infty)$ . Здесь мы явно выделили квадратичную часть взаимодействующего гамильтониана:

$$\delta H_{\text{free}} \approx \frac{3\lambda(N+2)}{8N\omega_{+}^{2}} \alpha\beta \left( |\alpha|^{2} + |\beta|^{2} \right) a_{i} a_{i} + \frac{\lambda(N+2)}{8N\omega_{+}^{2}} \left( |\alpha|^{4} + 4|\alpha|^{2}|\beta|^{2} + |\beta|^{4} \right) \left( a_{i}^{\dagger} a_{i} + \frac{N}{2} \right) + h.c..$$
(2.16)

Чтобы получить эти выражения, мы подставили в гамильтонианы операторы поля, разложенные по модам, и пренебрегли быстро осциллирующими членами, которые в пределе больших времен эволюции дают пренебрежимо малый вклад в корреляционные функции и среднюю энергию возбуждений. Другими словами, мы удерживали только такие члены, которые дают лидирующий вклад в оператор  $\int_{t_0}^t H_{\rm int}(t')dt'$  в пределе  $\lambda \to 0$ ,  $t \to \infty$ ,  $\lambda t = {\rm const}^3$ . При этом мы считаем, что коэффициенты Боголюбова перестают изменяться после некоторого конечного момента времени  $t_*$ , так что  $\lambda(t_*-t_0) \ll 1$ , и для удобства переносим начало отсчета времени в этот момент, то есть полагаем  $t_*=0$ .

Отметим, что пренебрежение быстро осциллирующими членами в пределе  $\lambda \to 0, t \to \infty$ ,  $\lambda t = {\rm const}$  отдаленно напоминает приближение вращающейся волны (RWA) из квантовой оптики [70,94,95]. Тем не менее, подчеркнем, что в рассматриваемом нами пределе гамильтониан содержит члены с разным числом операторов рождения и уничтожения. Такие вклады

 $<sup>^3</sup>$  Эта постоянная имеет размерность длины $^{-2},$  то есть,  $\lambda t \sim \omega_+^2$  при  $t \to \infty.$ 

появляются из-за интерференции положительно- и отрицательно-частотных волн в будущей асимптотике ин-мод (2.10).

Кроме того, заметим, что квадратичная часть гамильтониана, уравнение (2.16), имеет такой же вид, что и свободный гамильтониан, а потому ее вклад просто сводится к перенормировке  $\omega_+$ ,  $\alpha$  и  $\beta$ :

$$\omega_{+} \to \omega_{+} + \frac{\lambda(N+2)}{4N\omega_{+}^{2}} \left( |\alpha|^{2} + |\beta|^{2} \right), \quad \alpha \to \alpha + \frac{\lambda(N+2)}{8N\omega_{+}^{3}} |\beta|^{2} \alpha, \quad \beta \to \beta + \frac{\lambda(N+2)}{8N\omega_{+}^{3}} |\alpha|^{2} \beta.$$
 (2.17)

Такая перенормировка отвечает суммированию "кактусовых" диаграмм (сравните с разделом 2.4). Подчеркнем, что в общем случае частоту нельзя сдвинуть независимо от  $\alpha$  и  $\beta$  из-за сильной обратной связи, вызванной низкой размерностью системы. Также заметим, что такая перенормировка предполагает, что исходная константа связи была мала, то есть  $\lambda |\beta|^2 \ll \omega_+^3$ .

Отбрасывая квадратичный и постоянный члены, пренебрегая осцилляциями и раскладывая (2.15) до второго порядка по  $\beta$ , находим приближенное выражение для гамильтониана:

$$H_{\text{int}} \approx \frac{\lambda}{8N\omega_{+}^{2}} a_{i}^{\dagger} a_{i}^{\dagger} a_{j} a_{j} + \frac{\lambda}{4N\omega_{+}^{2}} a_{i}^{\dagger} a_{j}^{\dagger} a_{i} a_{j} + \frac{3\lambda\beta}{4N\omega_{+}^{2}} a_{i}^{\dagger} a_{i} a_{j} a_{j} + \frac{3\lambda\beta^{*}}{4N\omega_{+}^{2}} a_{i}^{\dagger} a_{i}^{\dagger} a_{j}^{\dagger} a_{j} + + \frac{3\lambda|\beta|^{2}}{4N\omega_{+}^{2}} a_{i}^{\dagger} a_{i}^{\dagger} a_{j} a_{j} + \frac{3\lambda|\beta|^{2}}{2N\omega_{+}^{2}} a_{i}^{\dagger} a_{j}^{\dagger} a_{i} a_{j} + \frac{3\lambda\beta^{2}}{8N\omega_{+}^{2}} a_{i} a_{i} a_{j} a_{j} + \frac{3\lambda(\beta^{*})^{2}}{8N\omega_{+}^{2}} a_{i}^{\dagger} a_{i}^{\dagger} a_{j}^{\dagger} a_{j}^{\dagger} + \mathcal{O}\left(|\beta|^{3}\right).$$

$$(2.18)$$

Учитывая нормально-упорядоченный вид этого выражения, можно возвести его в степень и оценить, как оператор эволюции действует на начальное вакуумное состояние (напомним, что мы учитываем только лидирующие секулярно растущие вклады в оператор эволюции в пределе  $\lambda \to 0$ ,  $t \to \infty$ ,  $\lambda t = {\rm const}$ ):

$$|\Psi(t)\rangle = \mathcal{T}e^{-i\int_{t_0}^t H_{\text{int}}(t')dt'}|0\rangle \approx e^{-itH_{\text{int}}}|0\rangle =$$

$$= |0\rangle + 18\frac{\beta^*|\beta|^2}{N} \left[ \exp\left(\frac{-i\lambda t}{4\omega_+^2}\right) - 1 \right]^2 a_i^{\dagger} a_i^{\dagger}|0\rangle +$$

$$+ \frac{3}{4} \frac{(\beta^*)^2}{N} \left[ \exp\left(\frac{-i\lambda t}{2\omega_+^2}\right) - 1 \right] a_i^{\dagger} a_i^{\dagger} a_j^{\dagger} a_j^{\dagger}|0\rangle + \mathcal{O}\left(|\beta|^4\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right).$$
(2.19)

Лидирующий вклад в это выражение обеспечивают просуммированные степени самого первого члена гамильтониана (2.18), которые собираются в осциллирующие экспоненты. Вклады, в которые входит второй член, подавлены степенями 1/N, а вклады всех остальных членов подавлены степенями  $\beta$ .

Подставляя это выражение в равенства (1.9) и (1.10), находим лидирующую поправку к начальной заселенности уровней и аномальному квантовому среднему:

$$n_{ij}(t) = \langle \Psi(t) | a_i^{\dagger} a_j | \Psi(t) \rangle = \frac{\delta_{ij}}{N} \cdot 72 |\beta|^4 \sin^2 \left( \frac{\lambda t}{4\omega_+^2} \right) + \mathcal{O}\left( |\beta|^6 \right) + \mathcal{O}\left( \frac{1}{N^2} \right), \tag{2.20}$$

$$\varkappa_{ij}(t) = \langle \Psi(t) | a_i a_j | \Psi(t) \rangle = \frac{\delta_{ij}}{N} \cdot 36\beta^* |\beta|^2 \left[ \exp\left(\frac{-i\lambda t}{4\omega_+^2}\right) - 1 \right]^2 + \mathcal{O}\left(|\beta|^4\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right). \tag{2.21}$$

Таким образом, полное число возбуждений системы осцилляторов приобретает следующий вид:

$$\mathcal{N} = \sum_{i=1}^{N} \left[ |\beta|^2 \delta_{ii} + \left( |\alpha|^2 + |\beta|^2 \right) n_{ii} + \alpha \beta \varkappa_{ii} + \alpha^* \beta^* (\varkappa_{ii})^* \right] = 
= N|\beta|^2 + 36|\beta|^4 \left[ 3 + \cos\left(\frac{\lambda t}{2\omega_+^2}\right) - 4\cos\left(\frac{\lambda t}{4\omega_+^2}\right) \right] + \mathcal{O}\left(|\beta|^5\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right) \approx 
\approx N|\beta|^2 + 108|\beta|^4 + \mathcal{O}\left(|\beta|^5\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right).$$
(2.22)

В последней строке мы заменили осциллирующие вклады их средними значениями. Заметим, что поправка к числу возбуждений в свободной системе всегда не отрицательна, хотя и обращается в ноль при некоторых значениях t.

Подчеркием, что оценки этого раздела справедливы только при малых отклонениях от стационарности,  $|\beta| \ll 1$ , при которых недиагональные вклады в эффективный гамильтониан пренебрежимо малы. К сожалению, это приближение не выполняется в наиболее физически интересном случае резонансных осцилляций (2.13). Чтобы описать этот случай, необходимо учесть недиагональные вклады и обобщить оценки (2.20), (2.21) и (2.22) на большие  $\beta$ .

Также подчеркнем, что при слабых отклонениях от стационарности, то есть при (практически) адиабатическом изменении частоты осцилляторов, суммарный вклад петлевых поправок в среднюю энергию возбуждений дважды подавлен по сравнению с древесным выражением — как по  $\beta \ll 1$ , так и по  $1/N \ll 1$ . При этом отметим, что даже при слабых отклонениях от стационарности петлевые поправки к корреляционным функциям могут испытывать нефизический секулярный рост, который убирается незначительным переопределением вакуумного состояния, в бесконечном прошлом и будущем воспроизводящим стандартный вакуум теории. Более подробно причины такого секулярного роста рассмотрены в [90].

Наконец, забегая вперед, отметим, что при слабых отклонениях от стационарности эффективный гамильтониан (2.18) очень похож на эффективный гамильтониан скалярного поля в нелинейной резонансной полости с идеально отражающими стенками (см. раздел 3.5.2). Следовательно, в этом приближении на систему осцилляторов с переменной частотой (или просто на одиночный нестационарный осциллятор) можно смотреть как на "игрушечную" моделью нелинейного динамического эффекта Казимира.

#### 2.3.2 Одиночный осциллятор

Заметим, что для вычислений предыдущего раздела предел большого числа осцилляторов,  $N \to \infty$ , фактически не нужен. Поэтому в этом разделе мы повторим вычисления для

N=1 версии модели (2.1), то есть для одиночного нестационарного квартичного осциллятора:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{\omega^2(t)}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4}\phi^4,$$
 (2.23)

где  $\omega(t) \to \omega_{\pm}$  при  $t \to \pm \infty$ . Подставляя квантованное поле (заметим, что свободные моды совпадают с модами модели при больших N, поскольку свободные осцилляторы независимы) в гамильтонианы и рассматривая предел  $\lambda \to 0, t \to \infty, \lambda t = \mathrm{const},$  получаем следующие выражения для взаимодействующего гамильтониана:

$$H_{\text{int}} \approx \frac{3\lambda \left(|\alpha|^4 + 4|\alpha|^2|\beta|^2 + |\beta|^4\right)}{16\omega_+^2} \left(a^{\dagger}\right)^2 a^2 + \frac{3\lambda\alpha\beta \left(|\alpha|^2 + |\beta|^2\right)}{4\omega_+^2} a^{\dagger} a^3 + \frac{3\lambda\alpha^2\beta^2}{8\omega_+^2} a^4 + h.c. \approx \\ \approx \frac{3\lambda}{16\omega_+^2} \left(a^{\dagger}\right)^2 a^2 + \frac{3\lambda\beta}{4\omega_+^2} a^{\dagger} a^3 + \frac{9\lambda|\beta|^2}{8\omega_+^2} \left(a^{\dagger}\right)^2 a^2 + \frac{3\lambda\beta^2}{8\omega_+^2} a^4 + \mathcal{O}\left(|\beta|^3\right) + h.c.,$$
(2.24)

и перенормированных параметров теории:

$$\omega_{+} \to \omega_{+} + \frac{3\lambda}{4\omega_{+}^{2}} \left( |\alpha|^{2} + |\beta|^{2} \right), \quad \alpha \to \alpha + \frac{3\lambda}{8\omega_{+}^{3}} |\beta|^{2} \alpha, \quad \beta \to \beta + \frac{3\lambda}{8\omega_{+}^{3}} |\alpha|^{2} \beta. \tag{2.25}$$

Экспоненциируя гамильтониан (2.24) и удерживая только лидирующие степени по  $\beta$ , получаем приближенное выражение для проэволюционировавшего квантового состояния:

$$|\Psi(t)\rangle \approx |0\rangle + 2\beta^* |\beta|^2 \left[ \frac{1}{5} \exp\left(\frac{-9i\lambda t}{2\omega_+^2}\right) - \frac{6}{5} \exp\left(\frac{-3i\lambda t}{4\omega_+^2}\right) + 1 \right] (a^{\dagger})^2 |0\rangle +$$

$$+ \frac{(\beta^*)^2}{12} \left[ \exp\left(\frac{-9i\lambda t}{2\omega_+^2}\right) - 1 \right] (a^{\dagger})^4 |0\rangle + \mathcal{O}\left(|\beta|^4\right).$$
(2.26)

Это выражение приводит к следующим выражениям для пересуммированных заселенности уровней и аномального квантового среднего:

$$n(t) = \langle \Psi(t) | a^{\dagger} a | \Psi(t) \rangle \approx \frac{8}{3} |\beta|^4 \sin^2 \left( \frac{9\lambda t}{4\omega_+^2} \right) + \mathcal{O}\left( |\beta|^6 \right), \tag{2.27}$$

$$\varkappa(t) = \langle \Psi(t) | aa | \Psi(t) \rangle \approx 4\beta^* |\beta|^2 \left[ \frac{1}{5} \exp\left(\frac{-9i\lambda t}{2\omega_+^2}\right) - \frac{6}{5} \exp\left(\frac{-3i\lambda t}{4\omega_+^2}\right) + 1 \right] + \mathcal{O}\left(|\beta|^4\right), \quad (2.28)$$

а также пересуммированного числа возбуждений осцилляторов:

$$\mathcal{N} = |\beta|^2 + (|\alpha|^2 + |\beta|^2)n + \alpha\beta\varkappa + \alpha^*\beta^*\varkappa^* =$$

$$\approx |\beta|^2 + |\beta|^4 \left[ \frac{28}{3} + \frac{4}{15}\cos\left(\frac{9\lambda t}{2\omega_+^2}\right) - \frac{48}{5}\cos\left(\frac{3\lambda t}{4\omega_+^2}\right) \right] + \mathcal{O}\left(|\beta|^5\right). \tag{2.29}$$

Подчеркнем, что петлевая поправка к числу возбуждений свободной теории всегда положительна. Также заметим, что полученный результат в общих чертах очень похож на выражение (2.22) из модели с N осцилляторами, хотя средние значения поправок и формы осциллирующих кривых в этих моделях отличаются.

#### 2.4 Диаграммная техника

Обобщим результаты раздела 2.3.1 на сильные отклонения от стационарности с помощью диаграммной техники Швингера — Келдыша, обсуждавшейся в разделах 1.2–1.4 главы 1. Для модели (2.1) келдышевское действие (1.38) приобретает следующий вид (в этой модели пространственных координат нет):

$$S_K = -\int_{t_0}^{\infty} dt \left[ \phi_{i,q} \left( \partial_t^2 + \omega^2(t) \right) \phi_{i,cl} + \frac{\lambda}{N} \phi_{i,cl} \phi_{i,cl} \phi_{j,q} \phi_{j,q} + \frac{\lambda}{4N} \phi_{i,cl} \phi_{i,q} \phi_{j,q} \phi_{j,q} \right]$$
(2.30)

Как и в скалярной квантовой теории поля с квартичным взаимодействием, рассмотренной в главе 1, правила диаграммной техники для модели (2.1) имеют вид (Рис. 1.4) со следующими древесными пропагаторами:

$$iG_{0,ij}^{K}(t_{1},t_{2}) = \frac{1}{2} \langle 0 | \{ \phi_{i}(t_{1}), \phi_{j}(t_{2}) \} | 0 \rangle = \frac{1}{2} [f(t_{1})f^{*}(t_{2}) + f^{*}(t_{1})f(t_{2})] \delta_{i,j},$$

$$iG_{0,ij}^{R}(t_{1},t_{2}) = \theta(t_{1}-t_{2}) \langle 0 | [\phi_{i}(t_{1}), \phi_{j}(t_{2})] | 0 \rangle = \theta(t_{1}-t_{2}) [f(t_{1})f^{*}(t_{2}) - f^{*}(t_{1})f(t_{2})] \delta_{i,j},$$

$$iG_{0,ij}^{A}(t_{1},t_{2}) = \theta(t_{2}-t_{1}) \langle 0 | [\phi_{j}(t_{2}), \phi_{i}(t_{1})] | 0 \rangle = \theta(t_{2}-t_{1}) [f^{*}(t_{1})f(t_{2}) - f(t_{1})f^{*}(t_{2})] \delta_{i,j},$$

$$(2.31)$$

где мы для простоты взяли вакуумное начальное состояние.

Напомним, что в пределе  $t=\frac{t_1+t_2}{2}\gg |t_1-t_2|$  точный келдышевский пропагатор в совпадающих точках выражается через точные квантовые средние:

$$iG_{ij}^{K}(t_1, t_2) = f(t_1)f^*(t_2) \left(\frac{1}{2}\delta_{ij} + n_{ij}(t)\right) + f(t_1)f(t_2)\varkappa_{ij}(t) + h.c.,$$
(2.32)

где  $n_{ij}$  и  $\varkappa_{ij}$  вычисляются по формулам (1.9) и (1.10). Следовательно, чтобы оценить эти квантовые средние и среднюю энергию возбуждений в бесконечном будущем, нам нужно просуммировать лидирующие секулярно растущие петлевые поправки к келдышевскому пропагатору. Как и в предыдущих разделах, мы выделяем такие вклады с помощью предела малой константы связи и большого времени эволюции системы,  $\lambda \to 0$ ,  $t \to \infty$ ,  $\lambda t = {\rm const.}$  Кроме того, мы будем рассматривать предел большого числа осцилляторов,  $N \gg 1$ , и вычислим поправку к келдышевскому пропагатору порядка 1/N.

Прежде всего, рассмотрим диаграммы порядка  $\mathcal{O}(1)$ , которые в O(N) модели разбиваются на два типа [96–98]. Первый тип — так называемые "кактусовые" диаграммы (Рис. 2.1) — описывают поправки к пропагаторам. Впрочем, в этих диаграммах петлевые поправки локальны и могут быть легко просуммированы с помощью соответствующих уравнений Дайсона — Швингера (уравнение на запаздывающий пропагатор совпадает с уравнением на опережающий пропагатор):

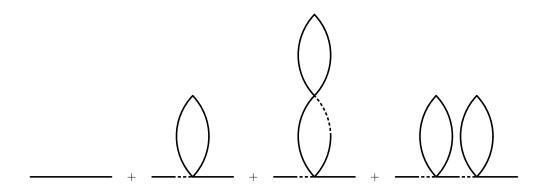


Рис. 2.1: Примеры петлевых поправок к келдышевскому пропагатору порядка  $\mathcal{O}(1)$ . Запаздывающий и опережающий пропагатор, а также все внутренние линии указанных пропагаторов, также получают аналогичные поправки.

$$\tilde{G}_{ij}^{R}(t_{1}, t_{2}) = G_{0,ij}^{R}(t_{1}, t_{2}) - \frac{i\lambda}{N} \int_{t_{0}}^{\infty} dt G_{0,ik}^{R}(t_{1}, t) \tilde{G}_{kk}^{K}(t, t) \tilde{G}_{kj}^{R}(t, t_{2}),$$

$$\tilde{G}_{ij}^{K}(t_{1}, t_{2}) = G_{0,ij}^{K}(t_{1}, t_{2}) - \frac{i\lambda}{N} \int_{t_{0}}^{\infty} dt \left[ G_{0,ik}^{R}(t_{1}, t) \tilde{G}_{kk}^{K}(t, t) \tilde{G}_{kj}^{K}(t, t_{2}) + G_{0,ik}^{K}(t_{1}, t) \tilde{G}_{kk}^{K}(t, t) \tilde{G}_{kj}^{A}(t, t_{2}) \right].$$
(2.33)

Применяя к этим уравнениям оператор  $\partial_{t_1}^2 + \omega^2(t_1)$ , подставляя  $\tilde{G}^K(t,t) \equiv \tilde{G}_{kk}(t,t)/N$  и используя свойства древесных пропагаторов, мы легко получаем следующие уравнения на пересуммированные пропагаторы:

$$\left[\partial_{t_1}^2 + \omega^2(t_1)\right] \tilde{G}_{ij}^R(t_1, t_2) = -i\delta(t_1 - t_2) - \lambda \tilde{G}^K(t_1, t_1) \tilde{G}_{ij}^R(t_1, t_2),$$

$$\left[\partial_{t_1}^2 + \omega^2(t_1)\right] \tilde{G}_{ij}^K(t_1, t_2) = 0 - \lambda \tilde{G}^K(t_1, t_1) \tilde{G}_{ij}^K(t_1, t_2),$$
(2.34)

которые означают простую перенормировку древесной частоты:

$$\omega^2(t) \to \omega^2(t) + \lambda \tilde{G}^K(t,t) \approx \omega_+^2 + \frac{\lambda}{2\omega_+} \left( |\alpha|^2 + |\beta|^2 \right) + \mathcal{O}(\lambda^2) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right), \quad \text{при} \quad t \to +\infty. \tag{2.35}$$

Как и следовало ожидать, этот результат воспроизводит равенство (2.17) в лидирующем порядке по 1/N и  $\lambda$ . Напомним, что в нестационарной квантовой механике перенормировка частоты также влечет перенормировку коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$ .

Фактически этот результат означает, что "кактусовые" диаграммы можно не учитывать, если предположить, что мы сразу работаем с перенормированной теорией. Кроме того, он означает, что петлевые поправки к квантовым средним  $n_{ij}$  и  $\varkappa_{ij}$ , а также к среднему числу возбуждений  $\mathcal{N}$ , возникают только в следующем порядке по 1/N.

Другой тип диаграмм порядка  $\mathcal{O}(1)$  — это "пузырьковые" диаграммы, которые описывают поправки к вершинам (Рис. 2.2). Эти диаграммы также можно просуммировать с помощью

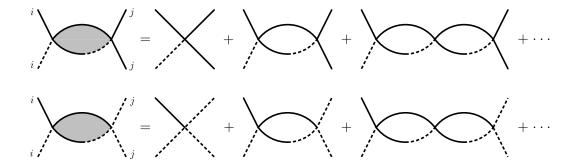


Рис. 2.2: Петлевые поправки к вершинам порядка  $\mathcal{O}(1)$ . Заметим, что мы включили "однопузырьковую" диаграмму (голую вершину) в определение пересуммированной цепочки пузырьков (серый овал), хотя в уравнении Дайсона — Швингера (2.36) мы предполагали, что разложение начинается с одного пузырька. Такое обозначение принято, чтобы упростить Рис. 2.3. Также отметим, что после пересуммирования поправок к вершинам могут возникнуть новые типы вершин (например, вершина  $\phi_{i,cl}\phi_{i,cl}\phi_{j,q}\phi_{j,q}$ ), однако они легко сводятся к диаграммам, изображенным на этом рисунке. На Рис. 2.3 все такие поправки фактически учтены.

похожих уравнений Дайсона — Швингера:

$$\tilde{B}(t_1, t_2) = 2G_{0,kl}^R(t_1, t_2)G_{0,kl}^K(t_1, t_2) - \frac{2i\lambda}{N} \int_{t_0}^{\infty} dt_3 G_{0,kl}^R(t_1, t_3)G_{0,kl}^K(t_1, t_3)\tilde{B}(t_3, t_2), \tag{2.36}$$

где  $\tilde{B}(t_1, t_2)$  обозначает бесконечную сумму цепочек "пузырьков" с отрезанными внешними ногами. На Рис. 2.2 такая цепочка обозначается серым овалом<sup>4</sup>. Обратите внимание, что уравнение (2.36) содержит комбинаторные множители, отражающие симметрию диаграммы [90].

Уравнение (2.36) удобно решать с помощью следующего анзаца, вдохновленного структурой келдышевского и опережающего пропагаторов:

$$\tilde{B}(t_{1}, t_{2}) = A(f^{*}(t_{1}))^{2} f^{2}(t_{2}) + Bf^{2}(t_{1})(f^{*}(t_{2}))^{2} + Cf^{2}(t_{1})f^{2}(t_{2}) + D(f^{*}(t_{1}))^{2}(f^{*}(t_{2}))^{2} = \\
= \begin{pmatrix} f^{2}(t_{1}) \\ (f^{*}(t_{1}))^{2} \end{pmatrix}^{\dagger} \begin{pmatrix} A(t_{1}, t_{2}) & D(t_{1}, t_{2}) \\ C(t_{1}, t_{2}) & B(t_{1}, t_{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^{2}(t_{2}) \\ (f^{*}(t_{2}))^{2} \end{pmatrix},$$
(2.37)

где  $A,\,B,\,C$  и D — некоторые функции, которые мы скоро вычислим. Во второй строке мы

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{\phi}_i\dot{\phi}_i - \frac{\omega^2(t)}{2}\phi_i\phi_i - \frac{1}{\sqrt{N}}\sigma\phi_i\phi_i + \frac{1}{\lambda}\sigma^2.$$

 $<sup>^4</sup>$ Отметим, что такая пересуммированная цепочка фактически отвечает запаздывающему пропагатору лагранжевых полей  $\sigma$  в модели (2.1) после преобразования Хаббарда — Стратоновича (сравните с [99–105]):

рассматриваем моды в качестве координат векторов, чтобы переписать анзац в виде, более удобном для дальнейшего анализа. Напомним, что мы рассматриваем предел  $t_1 - t_2 \ll t = \frac{t_1 + t_2}{2}$  и  $\lambda \to 0, t \to \infty, \lambda t = \text{const}$ , чтобы выделить лидирующие секулярно растущие петлевые вклады.

Подставляя указанный аназац в уравнение (2.36), удерживая только лидирующие неосциллирующие члены подынтегрального выражения, отбрасывая внешние вектора и дифференцируя равенство по  $t_1$ , получаем следующее матричное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d}{dt_1} \begin{pmatrix} A & D \\ C & B \end{pmatrix} = \frac{\delta(t_1 - t_2)}{(2\omega_+)^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \frac{i\lambda}{(2\omega_+)^2} \begin{pmatrix} 1 + 6|\beta|^2 + 6|\beta|^4 & 6\alpha^2\beta^2 \\ -6(\alpha^*)^2(\beta^*)^2 & -1 - 6|\beta|^2 - 6|\beta|^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & D \\ C & B \end{pmatrix}.$$
(2.38)

Решением этого уравнения является матричная экспонента:

$$\begin{pmatrix} A & D \\ C & B \end{pmatrix} = \frac{\theta(t_{12})}{(2\omega_{+})^{2}} \exp \left[ -\frac{i\lambda t_{12}}{(2\omega_{+})^{2}} \begin{pmatrix} 1+6|\beta|^{2}+6|\beta|^{4} & 6\alpha^{2}\beta^{2} \\ -6(\alpha^{*})^{2}(\beta^{*})^{2} & -1-6|\beta|^{2}-6|\beta|^{4} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 
= \frac{\theta(t_{12})}{(2\omega_{+})^{2}} \begin{pmatrix} \cos\frac{\lambda R t_{12}}{4\omega_{+}^{2}} - i\frac{1+6|\beta|^{2}+6|\beta|^{4}}{R}\sin\frac{\lambda R t_{12}}{4\omega_{+}^{2}} & i\frac{6\alpha^{2}\beta^{2}}{R}\sin\frac{\lambda R t_{12}}{4\omega_{+}^{2}} \\ i\frac{6(\alpha^{*})^{2}(\beta^{*})^{2}}{R}\sin\frac{\lambda R t_{12}}{4\omega_{+}^{2}} & -\cos\frac{\lambda R t_{12}}{4\omega_{+}^{2}} - i\frac{1+6|\beta|^{2}+6|\beta|^{4}}{R}\sin\frac{\lambda R t_{12}}{4\omega_{+}^{2}} \end{pmatrix}, \tag{2.39}$$

где мы ввели краткое обозначение для разницы времен,  $t_{12} \equiv t_1 - t_2$ , и положительного собственного значения производящей матрицы:

$$R \equiv \sqrt{1 + 12|\beta|^2 + 12|\beta|^4}. (2.40)$$

Заметим, что при слабых отклонениях от стационарности,  $|\beta| \ll 1$ , производящая матрица близка к диагональной. Это связано с тем, что в этом пределе лидирующий вклад в "пузырьковые" диаграммы связан с диагональной частью эффективного гамильтониана (2.15).

Наконец, оценим сублидирующие, порядка  $\mathcal{O}(1/N)$ , поправки к келдышевскому пропагатору. Подставляя пересуммированные "пузырьковые" диаграммы в двухпетлевую поправку к келдышевскому пропагатору (Рис. 2.3) и проделывая утомительные, однако прямолинейные вычисления, получаем поправку к келдышевскому пропагатору вида (2.32) со следующими квантовыми средними:

$$n_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{N} \cdot 72 \frac{|\alpha|^4 |\beta|^4}{R^2} \sin^2\left(\frac{\lambda t}{4\omega_+^2} R\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right),$$

$$\varkappa_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{N} \cdot 36 \frac{\alpha^* \beta^* |\alpha|^2 |\beta|^2 (|\alpha|^2 + |\beta|^2)}{R^2} \left[ \frac{1 + 6|\beta|^2 + 6|\beta|^4}{R^2} \cos\left(\frac{\lambda t}{2\omega_+^2} R\right) - \frac{i}{R} \sin\left(\frac{\lambda t}{2\omega_+^2}\right) - \frac{2}{R^2} \cos\left(\frac{\lambda t}{4\omega_+^2} R\right) + \frac{2i}{R} \sin\left(\frac{\lambda t}{4\omega_+^2} R\right) + \frac{1 - 6|\beta|^2 - 6|\beta|^4}{R^2} \right] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right).$$
(2.41)

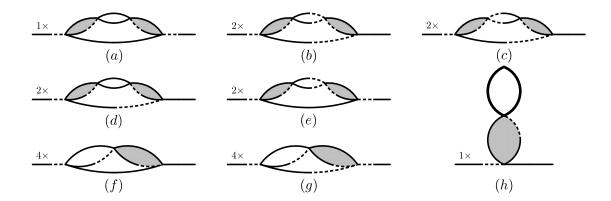


Рис. 2.3: Петлевые поправки к келдышевскому пропагатору порядка  $\mathcal{O}(1/N)$  и соответствующие комбинаторные множители. Серые овалы отвечают пересуммированным цепочкам "пузырьков" с Рис. 2.2. Жирная сплошная линия в диаграмме (h) обозначают сумму диаграмм (a)-(g). Для каждой диаграммы, изображенной на рисунке, также существует аналогичная сопряженная диаграмма.

Подчеркнем, что оба квантовых средних конечны даже при очень больших временах эволюции, хотя каждый член их разложения по  $\lambda$  секулярно растет и стремится к бесконечности в пределе  $t \to \infty$ . Кроме того, оба средних подавлены по 1/N по сравнению с древесным вкладом в (2.32).

При малых  $\beta$  равенства (2.41) и (2.42) очевидно воспроизводят выражения (2.20) и (2.21), полученные в разделе 2.3.1. В то же время, в отличие от результатов раздела 2.3.1, эти равенства также справедливы при больших  $\beta$ . Более того, на первый взгляд лидирующие вклады в  $n_{ij}$  и  $\varkappa_{ij}$  доминируют при больших  $\beta$ ; например, в резонансном случае (2.13) они экспоненциально растут вместе с продолжительностью осцилляций:

$$n_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{N} \cdot \frac{3}{4} e^{4\gamma\omega_{+}t_{R}} \sin^{2}\left(\frac{\lambda t\sqrt{3}}{8\omega_{+}^{2}} e^{2\gamma\omega_{+}t_{R}}\right) + \mathcal{O}\left(e^{2\gamma\omega_{+}t_{R}}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right),$$

$$\varkappa_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{N} \cdot \frac{3i}{4} e^{4\gamma\omega_{+}t_{R}} \sin^{2}\left(\frac{\lambda t\sqrt{3}}{8\omega_{+}^{2}} e^{2\gamma\omega_{+}t_{R}}\right) + \mathcal{O}\left(e^{2\gamma\omega_{+}t_{R}}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right),$$
(2.43)

и превосходят древесные вклады в келдышевский пропагатор при достаточно большой продолжительности резонансных осцилляций,  $t_R \gg \frac{\log N}{4\gamma\omega_+}$  (напомним, что продолжительность осцилляций  $t_R$  не следует путать со временем эволюции t, для которого мы вычисляем петлевые поправки и которое много больше  $t_R$ ). Впрочем, после подстановки квантовых средних

в келдышевский пропагатор (2.32) лидирующие вклады (2.43) сокращают друг друга:

$$iG_{ij}^{K}(t_{1}, t_{2}) = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{N} \frac{288|\alpha|^{4}|\beta|^{4}}{R^{4}} \sin^{4}\left(\frac{\lambda t}{8\omega_{+}^{2}}R\right)\right] (|\alpha|^{2} + |\beta|^{2}) \delta_{ij} \frac{e^{-i\omega_{+}(t_{1}-t_{2})}}{2\omega_{+}} + \left[1 + \frac{1}{N} \frac{36|\alpha|^{2}|\beta|^{2}}{R^{3}} \left(\frac{1}{R} + \frac{1 + 8|\alpha|^{2}|\beta|^{2}}{R} \cos\left(\frac{\lambda t}{2\omega_{+}^{2}}R\right) - i(|\alpha|^{2} + |\beta|^{2}) \sin\left(\frac{\lambda t}{2\omega_{+}^{2}}R\right) - 2\frac{(|\alpha|^{2} + |\beta|^{2})^{2}}{R} \cos\left(\frac{\lambda t}{4\omega_{+}^{2}}R\right) + 2i(|\alpha|^{2} + |\beta|^{2}) \sin\left(\frac{\lambda t}{4\omega_{+}^{2}}R\right)\right] \alpha\beta^{*} \delta_{ij} \frac{e^{-i\omega_{+}(t_{1}+t_{2})}}{2\omega_{+}} + h.c. + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right).$$

$$(2.44)$$

Как следствие, эти вклады также сокращаются в выражении для среднего числа возбуждений:

$$\mathcal{N} = N|\beta|^2 + 36 \frac{|\alpha|^4|\beta|^4 \left(|\alpha|^2 + |\beta|^2\right)}{R^4} \left[ 3 + \cos\left(\frac{\lambda t}{2\omega_+^2}R\right) - 4\cos\left(\frac{\lambda t}{4\omega_+^2}R\right) \right] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right). \quad (2.45)$$

Такое сокращение отдаленно напоминает сокращение лидирующих двухпетлевых поправок к келдышевскому пропагатору легких скалярных полей в пространстве де Ситтера [26, 28].

Как бы то ни было, заметим, что плотность уровней и аномальное квантовое среднее нельзя непосредственно измерить, хотя их и можно извлечь из измеримых величин (например, средней энергии или числа возбуждений). В свою очередь, непосредственно измеримые величины можно получить из пересуммированного келдышевского пропагатора (пример такого вычисления можно найти в разделе 2.1). Как было показано в (2.44), в этом пропагаторе лидирующие вклады в  $n_{kl}$  и  $\varkappa_{kl}$ , которые на первый взгляд доминируют над древесными выражениями, сокращаются после явной подстановки ин-мод. Следовательно, кажущееся усиление квантовых средних (2.43) за счет больших степеней  $|\beta|$  не может непосредственно наблюдаться и потому является нефизическим.

Таким образом, в сильно нестационарном случае,  $|\beta| \gg 1$ , вклад петлевых поправок пропорционален той же степени  $\beta$ , что и древесный вклад, однако подавлен по 1/N:

$$\mathcal{N}(t) = N|\beta|^2 + \frac{1}{2}|\beta|^2 \left[ 3 + \cos\left(\frac{\lambda t}{\omega_+^2}|\beta|^2\sqrt{3}\right) - 4\cos\left(\frac{\lambda t}{2\omega_+^2}|\beta|^2\sqrt{3}\right) \right] + \mathcal{O}\left(|\beta|^0\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right) \approx N|\beta|^2 + \frac{3}{2}|\beta|^2 + \mathcal{O}\left(|\beta|^0\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right).$$

$$(2.46)$$

В последнем равенстве мы пренебрегли быстро осциллирующими вкладами. Поскольку частота этих осцилляций быстро растет вместе с  $\beta$ , на практике петлевой вклад будет быстро усредняться, и увидеть отклонения от среднего значения будет сложно.

Отметим, что в резонансном случае (2.13) и древесный, и петлевой вклад экспоненциально растут вместе с продолжительностью осцилляций  $t_R$ . Основным источником этого роста

является перемешивание положительно- и отрицательно-частотных мод, которое описывается коэффициентом Боголюбова  $\beta$  (напомним, что в резонансном случае  $\alpha \sim \beta \sim e^{\omega \gamma t_R}$ ). Другими словами, этот рост связан с вариацией частоты и потому присутствует уже на древесном уровне. Помимо этого, взаимодействие между осцилляторами генерирует ненулевые квантовые средние  $n_{ij}$  и  $\varkappa_{ij}$ , лидирующий физический вклад в которые прямо пропорционален  $|\beta|^0$  и обратно пропорционален N. В результате оказывается, что петлевые поправки модифицируют префактор экспоненциального роста по  $t_R$ , но качественное поведение числа и энергии возбуждений в среднем остается прежним.

Грубо говоря, вклад петлевых поправок можно интерпретировать как  $\mathcal{O}(1)$  дополнительных степеней свободы,  $N \to N + \frac{3}{2}$ , которые проявляются при измерении среднего числа и энергии возбуждений во взаимодействующей системе спустя большое время после прекращения резонансных осцилляций (то есть накачки энергии). При этом подчеркнем, что полученный вклад связан с изменением состояния системы, вызванным взаимодействием между осцилляторами.

Наконец, напомним, что этот результат был получен в пределе малой константы связи  $\lambda \ll \omega_+^3$ , и большого времени эволюции,  $\omega_+^2/\lambda \ll t \ll \omega_+^5/\lambda^2$ .

## Глава 3

## Динамический эффект Казимира

### 3.1 Введение

Теоретически предсказано, что ускоренное зеркало способно рождать частицы (то есть излучать) за счет возбуждения флуктуаций вездесущих квантовых полей. Впервые этот эффект был теоретически выведен около пятидесяти лет назад Дж. Т. Муром [8] и впоследствии стал широко известен под названием динамического (или нестационарного) эффекта Казимира [8–11, 79–82]. С одной стороны, физика динамического эффекта Казимира очень напоминает другие знаменитые нестационарные эффекты, такие как эффект Хокинга [2–4] и Унру [5–7]. В сущности, все эти эффекты связаны с изменением квантового состояния системы из-за взаимодействия с сильными внешними полями; единственное отличие — разная природа взаимодействий и внешних полей. С другой стороны, динамический эффект Казимира гораздо легче поддается теоретическим и экспериментальным исследованиям (краткую выжимку подходов и экспериментов, использовавшихся для изучения этого эффекта, можно найти в обзорах [80–82]). В частности, около десяти лет назад динамический эффект Казимира удалось смоделировать и экспериментально измерить с помощью массива сверхпроводящих квантовых интерферометров [82–86]. Указанные свойства превращают динамический эффект Казимира в идеальную модель для изучения нестационарной квантовой теории поля.

В основном исследования динамического эффекта Казимира, включая экспериментальные реализации, ограничиваются упрощенной двумерной моделью, которая описывает свободное скалярное поле с идеально отражающими граничными условиями (здесь мы полагаем  $\hbar=c=1$ ):

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2) \phi(t, x) = 0, \quad \phi[t, L(t)] = \phi[t, R(t)] = 0,$$
 (3.1)

где траектории зеркал, L(t) и R(t), стационарны в асимптотическом прошлом и будущем, то

есть  $L(t) \approx L_{\pm} + \beta_{\pm}t$  и  $R(t) \approx L_{\pm} + \Lambda_{\pm} + \beta_{\pm}t$  при  $t \to \pm \infty$ . Здесь  $\Lambda_{\pm} > 0$  — это расстояния между зеркалами, а  $\beta_{\pm}$  — их скорости в соответствующих пределах (в лабораторной системе отсчета). Для физически осмысленных траекторий зеркал скорость всегда должна быть меньше скорости света, L(t) < R(t), и  $|\dot{L}(t)| < 1$ ,  $|\dot{R}(t)| < 1$  для всех t. Как правило, для удобства также делают лоренцевский буст, сдвигают начало координат и без ограничения общности работают в системе отсчета с L(t < 0) = 0,  $R(t < 0) = \Lambda_{-}$ . Примеры подходов, с помощью которых можно оценить число частиц, рождающихся в модели (3.1), приводятся в работах [79, 106–118]; обобщение (3.1) на полупрозрачные зеркала было рассмотрено, например, в [119–122].

Подчеркием, что во всех перечисленных работах исследователи пренерегают взаимодействием между квантовыми полями, то есть рассматривают только квазиклассические (древесные) вклады в число родившихся частиц. В то же время, недавно было показано, что это приближение не совсем правомерно — как и в ряде других нестационарных систем, в динамическом эффекте Казимира наблюдается секулярный рост петлевых поправок к квантовым средним, числу родившихся частиц, корреляционным функциям и потоку тензора энергии-импульса [62]. При этом в работе [62] был рассмотрен только случай одиночного идеально отражающего зеркала<sup>1</sup> и вычислены только двухпетлевые поправки. Физически более интересный случай резонансной полости (квантовой теории поля, зажатой между двумя зеркалами), а также влияние полупрозрачности зеркала на петлевые поправки в этой работе не исследовались. Более того, очевидно, что для учета взаимодействия установить секулярный рост нескольких петлевых поправок недостаточно, поскольку более высокие поправки имеют тот же порядок для достаточно большого времени эволюции; вместо этого необходимо просуммировать хотя бы лидирующие секулярные вклады из всех порядков теории возмущений.

 $<sup>^1</sup>$ Отметим кстати, что модель безмассового скалярного поля на фоне одиночного зеркала, рассмотренная в работе [62], не имеет естественного инфракрасного обрезания. Из-за этого нельзя явно отделить физический секулярный рост и стандартные инфракрасные расходимости петлевых интегралов. В самом деле, подобные инфракрасные расходимости возникают даже в чисто стационарной теории на малых временах эволюции (см. приложение A). В разделе 3.3 мы регуляризуем инфракрасные расходимости, переходя от одиночного зеркала к резонансной полости конечной ширины, то есть рассматривая систему двух идеальных зеркал, расположенных на конечном расстоянии друг от друга. Другой способ регуляризации инфракрасных расходимостей, рассмотренный в [123], заключается во введении конечной физической массы свободного поля. К сожалению, уравнения движения массивного поля на фоне неоднородно движущегося зеркала оказываются слишком сложными, в результате чего явно их решить не удается. В результате найти моды свободного квантованного поля и аналитически вычислить петлевые поправки к  $n_{pq}$  и  $\varkappa_{pq}$  в этом случае также невозможно.

В этой главе мы ответим на вопросы, поставленные в предыдущем абзаце. Для простоты будем рассматривать скалярный динамический эффект Казимира, то есть различные обобщения модели (3.1). Во-первых, мы рассмотрим модель резонансной полости, ограниченной двумя идеально отражающими зеркалами:

$$\left(\partial_t^2 - \partial_x^2\right)\phi = 0, \quad \phi\left[t, L(t)\right] = \phi\left[t, R(t)\right] = 0. \tag{3.2}$$

В отличие от модели с одним зеркалом, в этой модели присутствует естественный инфракрасный масштаб (расстояние между зеркалами), что упрощает анализ секулярно растущих петлевых поправок. Как и в случае одиночного зеркала, для этой модели мы вычислим двухпетлевые поправки к корреляционным функциям и квантовым средним.

Во-вторых, мы вычислим двухпетлевые поправки для одиночного полупрозрачного зеркала, смоделированного дельта-функциональным барьером:

$$\left[\partial_t^2 - \partial_x^2 + \alpha \delta \left(\frac{x - x(t)}{\sqrt{1 - \dot{x}^2(t)}}\right)\right] \phi(t, x) = 0, \tag{3.3}$$

и подтвердим, что полупрозрачность зеркала слабо сказывается на петлевых поправках. Это связано с тем, что высокочастотные виртуальные кванты практически не влияют на секулярный рост петлевых поправок, тогда как при низких энергиях зеркало можно считать практически идеальным.

Наконец, мы просуммируем лидирующие секулярно растущие петлевые поправки к корреляционным функциям полей в одномерной идеальной резонансной полости при слабых отклонениях от стационарности, то есть для небольшого числа родившихся частиц. Для этого мы воспользуемся методами предыдущей главы. Для наглядности мы в основном будем рассматривать модель с квартичным потенциалом:

$$\left(\partial_t^2 - \partial_x^2\right)\phi(t, x) = \lambda\phi^3(t, x), \quad \phi[t, L(t)] = \phi[t, R(t)] = 0. \tag{3.4}$$

Кроме того, мы также просуммируем петлевые поправки для другой, физически более осмысленной, модели, которая возникает как эффективная теория квантованных колебаний электрического контура со вставками СКВИДов (сверхпроводящих квантовых интерферометров) [86]:

$$\left[\frac{1}{v^2(t,x)}\partial_t^2 - \partial_x^2\right]\phi(t,x) = -\lambda \partial_x \left[\partial_x \phi(t,x)\right]^3, \quad \phi(t,0) = \phi(t,\Lambda) = 0.$$
(3.5)

При малых отклонениях от стационарности обе этих модели очень похожи, и в обоих случаях петлевые поправки к квантовым средним и числу родившихся частиц оказываются сравнимы с древесными (квазиклассическими) величинами.

# 3.2 Физическая картина скалярного динамического эффекта Казимира

### 3.2.1 Редукция электромагнитного поля

Для дальнейших целей будет полезно держать в уме, как модель скалярного динамический эффекта Казимира (и ее нелинейные обобщения) возникает на практике. Прежде всего, рассмотрим естественную модель динамического эффекта Казимира — электромагнитное поле, взаимодействующее с тонким слоем холодной электронной плазмы. Фиксируя калибровку Лоренца и пренебрегая поперечными эффектами<sup>2</sup>, получим следующее уравнение движения на поперечную компоненту векторного потенциала  $A_z(t,x)$  [124, 125]:

$$\frac{\partial^2 A_z(t,x)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 A_z(t,x)}{\partial x^2} + \frac{\omega_{pe}^2(t,x)}{\gamma(t,x)} A_z(t,x) = 0, \qquad \omega_{pe}^2(t,x) = \frac{4\pi e^2 n(t,x)}{m_e}.$$
 (3.6)

Здесь c — скорость света,  $\omega_{pe}$  — частота Ленгмюра, e и  $m_e$  — заряд и масса электрона, n(t,x) — функция плотности распределения электронов, а  $\gamma(t,x)$  — Лоренц-фактор плазменного слоя. Для определенности мы пренебрегли изменением формы плазменного слоя и предположили, что слой движется как целое вдоль оси X, так что функция x=x(t) описывает его положение в момент времени t. Приближая плотность распределения электронов дельта-функцией Дирака,  $n(t,x)=n_0l\delta\left[x-x(t)\right]$ , где  $n_0$  — средняя электронная плотность и l — толщина плазменного слоя, получим следующее уравнение движения для двумерного безмассового скалярного поля:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\alpha}{\gamma(t, x)} \delta[x - x(t)]\right] \phi(t, x) = 0, \tag{3.7}$$

где  $\phi(t,x) = A_z(t,x)\sqrt{S_\perp}$ ,  $\alpha = 4\pi e^2 n_0 l/m_e$  и  $S_\perp$  — площадь поперечного сечения плазменного слоя (этот множитель не входит в уравнения движения, но необходим для правильной размерности скалярного поля). В качестве грубого приближения можно положить  $l \sim c/\omega_{pe}$ , что приводит к оценке  $\alpha \sim c\omega_{pe}$ . Для типичного металлического зеркала частота Ленгмюра составляет порядка  $\omega_{pe} \sim 10^{16}~{\rm c}^{-1}$ , то есть  $\alpha/c^2 \sim 10^5~{\rm cm}^{-1}$ . На практике такое зеркало также может сформироваться в процессе опрокидывания плазменных кильватерных волн (так называемое релятивистское летящее зеркало); типичные параметры такого зеркала составляют  $n_0 \sim 10^{17}~{\rm cm}^{-3}$  и  $l \sim 10^{-2}~{\rm cm}$ , и в этом случае коэффициент полупрозрачности

 $<sup>\</sup>overline{\phantom{a}}^2$ То есть пренебрегая взаимодействием между поперечными и продольными модами и полагая нулевым импульс поперечных колебаний,  $k_{\perp}=0$ . Если не накладывать последнего условия, то получим теорию массивного скалярного поля с массой  $m^2=k_{\perp}^2$ , которая существенно сложнее безмассовой теории из-за отсутствия конформной симметрии.

зеркала в модели (3.7) можно оценить как  $\alpha/c^2 \sim 10^4$  см<sup>-1</sup> (см. [124,126]). Еще один пример моделирования эффективной теории (3.7) с быстро движущимся зеркалом основан на вставке одиночного СКВИДа в конец копланарного волновода; для таких зеркал коэффициент полупрозрачности составляет примерно  $\alpha/c^2 \sim 10$  см<sup>-1</sup> [82–85].

Заметим, что в пределе  $\alpha \to \infty$  уравнение (3.7) воспроизводит случай идеального зеркала:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right] \phi(t, x) = 0, \quad \phi[t, x(t)] = 0.$$
(3.8)

Более того, коэффициент пропускания неидеального зеркала пропорционален  $\omega/\alpha$ , если  $\omega \ll \alpha$ , где  $\omega$  — частота падающей волны. Вывод этого соотношения можно найти в разделе 3.4.1. Следовательно, на таких частотах зеркало можно считать практически идеальным и работать с моделью (3.8) вместо более точной модели (3.7). На практике это означает, что зеркала можно считать идеальными при частотах ниже  $10^{14}$  Гц (а в экспериментах со СКВИДами — на частотах ниже  $10^{10}$  Гц).

Наконец, напомним, что мы будем рассматривать нелинейные обобщения моделей (3.7) и (3.8). В качестве простейшего естественного обобщения мы выбираем стандартное для скалярных полей квартичное взаимодействие вида  $\lambda\phi^4$ . С одной стороны, подобные нелинейности можно создать на практике, заполнив пространство (если речь идет о полости с идеально отражающими стенками, то достаточно заполнить ее внутренность) средой с нелинейной диэлектрической проницаемостью. С другой стороны, с точки зрения квантовой электродинамики вакуум также является нелинейной средой, хотя эту нелинейность при существующих энергиях измерить практически невозможно; с этой точки зрения квартичное взаимодействие между модами возникает за счет обмена виртуальными фермионами в эффективной теории [1,127]. В экспериментах по моделированию модели (3.8) с помощью сверхпроводящих квантовых контуров нелинейности также эффективно возникают при вставке промежуточных СКВИДов в копланарный волновод [84, 128–133]. Этот случай мы обсудим более подробно в следующем разделе.

### 3.2.2 Джозефсоновский метаматериал

Следуя [133] и [86], выпишем гамильтониан так называемого квантового джозефсоновского метаматериала и покажем, что уравнения движения в этом случае совпадают с уравнениями движения для нелинейного скалярного динамического эффекта Казимира (3.5). Фактически джозефсоновский метаматериал — это массив последовательно соединенных и заземленных СКВИДов, каждый из которых состоит из двух джозефсоновских переходов (Рис. 3.1):

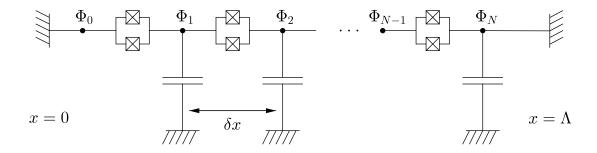


Рис. 3.1: Схематичное изображение джозефсоновского метаматериала [86], который моделирует динамический эффект Казимира в резонансной полости с переменной скоростью света. Квадрат с крестом обозначает джозефсоновский переход.

$$H_{JM} = \sum_{n=1}^{N} \left\{ \frac{1}{2C_0} Q_n^2 + E_J(\Phi_{\text{ext}}) - E_J(\Phi_{\text{ext}}) \cos \left[ \frac{2\pi}{\Phi_0} (\Phi_n - \Phi_{n-1}) \right] \right\}.$$
 (3.9)

Здесь  $\Phi_n(t) = \int_{-\infty}^t V_n(t')dt'$  — электрический поток, связанный с n-ым узлом,  $Q_n$  — заряд на этом узле,  $\Phi_0 = \pi \hbar/e$  — квант магнитного потока,  $C_0$  — емкость,  $E_J$  — джозефсоновская энергия каждого СКВИДа, а N — полное число СКВИДов. Во внешнем магнитном поле джозефсоновская энергия СКВИДа изменяется по правилу  $E_J(\Phi_{\rm ext}) = 2E_J(0)\cos\left(\frac{\pi\Phi_{\rm ext}}{\Phi_0}\right)$  (мы предполагаем, что свойства обоих джозефсоновских переходов приблизительно совпадают). Полная длина массива  $\Lambda$  и расстояние между соседними узлами фиксировано,  $\delta x = \Lambda/N$ . Обратите внимание, что обе стороны массива заземлены, что моделирует граничные условия Дирихле для возбуждений, распространяющихся по массиву.

Рассмотрим непрерывный предел полученного гамильтониана. Для этого введем "погонную" емкость и заряд,  $c_0 = C_0/\delta x$  и  $Q(t,x_n) = Q_n(t)/\delta x$ , воспользуемся соотношением  $Q_n(t) = C_0 \partial_t \Phi_n(t)$  и разложим косинус до четвертого порядка:

$$H_{JM} \approx \sum_{n=1}^{N} \delta x \left[ \frac{c_0}{2} \left( \partial_t \Phi_n \right)^2 + \frac{1}{2l_0} \left( \frac{\Phi_n - \Phi_{n-1}}{\delta x} \right)^2 - \frac{1}{24l_0} \left( \frac{2\pi \delta x}{\Phi_0} \right)^2 \left( \frac{\Phi_n - \Phi_{n-1}}{\delta x} \right)^4 \right]$$

$$\approx \int_0^{\Lambda} dx \left[ \frac{1}{2} (\partial_t \phi)^2 + \frac{1}{2} v^2 (\partial_x \phi)^2 - \frac{\lambda v^2}{4} (\partial_x \phi)^4 \right]. \tag{3.10}$$

Для краткости мы также ввели "погонную" индуктивность,  $l_0(t,x) = \frac{1}{\delta x E_J[\Phi_{\rm ext}(t,x)]} \left(\frac{\Phi_0}{2\pi}\right)^2$ , эффективную скорость света,  $v(t,x) = 1/\sqrt{c_0 l_0(t,x)}$ , и эффективную константу связи  $\lambda = \frac{1}{6c_0} \left(\frac{2\pi\delta x}{\Phi_0}\right)^2$ . В последнем равенстве (3.10) мы также переопределили переменную электрического потока,  $\phi(t,x) = \sqrt{c_0}\Phi(t,x)$ . Заметим, что на практике вариации внешнего магнитного поля обычно пространственно однородны,  $\Phi_{\rm ext}(t,x) = \Phi_{\rm ext}(t)$ ; тем не менее, для общности мы рассматриваем произвольные функции  $\Phi_{\rm ext}(t,x)$ .

Наконец, оценим параметры получившейся эффективной скалярной теории. Для этого возьмем реалистичные параметры исходного метаматериала. Например, в эксперименте [86] эти параметры принимали следующие значения: длина метаматериала  $\Lambda=4$  мм, число СКВИДов N=250, критический ток джозефсоновских переходов  $I_{\rm c}\sim 10^{-5}$  А, и эффективная скорость света в невозмущенном контуре  $v_{\infty}\sim 0.5c$ , где c — скорость света в вакууме. В этом случае эффективная константа связи составляет порядка  $\hbar\lambda/c\sim 10^{-12}$  м², поэтому нелинейностями контура можно пренебрегать вплоть до времени  $t_*\sim \Lambda^3/\hbar\lambda\sim 10^{-5}$  с. Следующий порядок разложения косинуса сопровождается еще более малой констаной связи и начинает играть какую-то роль только на временах порядка 10 с.

### 3.2.3 Энергия Казимира в нестационарном случае

Как известно, в стационарном случае энергия скалярного поля в резонансной полости (энергия Казимира) обратно пропорциональная расстоянию  $\Lambda$  между стенками полости [134]:

$$H_{\text{free}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\pi m}{2\Lambda} = -\frac{\pi}{24\Lambda}.$$
 (3.11)

Обобщим эту формулу на случай нестационарной и нелинейной резонансной полости. Для этого воспользуемся связью между энергией и келдышевским пропагатором безмассового скалярного поля с квартичным взаимодействием:

$$H_{\text{full}}(t) = \int_{L(t)}^{R(t)} dx_1 \left[ \frac{1}{2} \partial_{t_1} \partial_{t_2} G^K(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \frac{1}{2} \partial_{x_1} \partial_{x_2} G^K(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \frac{\lambda}{4} \left( G^K(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \right)^2 \right]_{\mathbf{x}_1 \to \mathbf{x}_2}, \quad (3.12)$$

где мы для краткости обозначили  $\mathbf{x} = (t, x)$ . Напомним, что на древесном уровне келдышевский пропагатор определяется как антикоммутатор квантовых полей:

$$G_{\text{free}}^{K}(\mathbf{x}_{1}, \mathbf{x}_{2}) = \frac{1}{2} \langle in | \{ \phi(\mathbf{x}_{1}), \phi(\mathbf{x}_{2}) \} | in \rangle$$

$$= \sum_{k,l=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{1}{2} \delta_{k,l} + n_{kl} \right) f_{k}^{\text{in}}(\mathbf{x}_{1}) \left( f_{l}^{\text{in}}(\mathbf{x}_{2}) \right)^{*} + \varkappa_{kl} f_{k}^{\text{in}}(\mathbf{x}_{1}) f_{l}^{\text{in}}(\mathbf{x}_{1}) + h.c. \right].$$
(3.13)

Во второй строке мы разложили квантовое поле по модам (в обозначениях (2.8)) и ввели обозначения для начальной заселенности уровней и аномального квантового среднего. Во взаимодействующей теории келдышевский пропагатор также сохраняет форму (3.13) с точными квантовыми средними (1.9) и (1.10), если разница внешних времен много меньше их среднего значения,  $t_1 - t_2 \ll (t_1 + t_2)/2$ . Это наблюдение позволяет нам оценить будущую асимптотику точного гамильтониана во взаимодействующей теории:

$$H_{\text{full}} \approx \sum_{k,l,m=1}^{\infty} \frac{\pi m}{2\tilde{\Lambda}} \left[ \left( \frac{1}{2} \delta_{k,l} + n_{kl} \right) \left( \alpha_{km} \alpha_{lm}^* + \beta_{km} \beta_{lm}^* \right) + \varkappa_{kl} \left( \alpha_{km} \beta_{lm} + \beta_{km} \alpha_{lm} \right) + h.c. \right] + \mathcal{O} \left( \lambda \tilde{\Lambda} \right),$$

$$(3.14)$$

где мы взяли предел  $t \to +\infty$ , подставили асимптотику ин-мод (3.104), переписанных через боголюбовские коэффициенты, повернулись к сопутствующим координатам  $(\tilde{t}, \tilde{x})$  и проинтегрировали по  $\tilde{x}$ . Заметим, что вклад нелинейной части будет пренебрежимо мал, если мы возьмем достаточно маленькую константу связи,  $\lambda \ll 1/\tilde{\Lambda}^2$ .

Наконец, используем свойство коэффициентов Боголюбова:

$$\sum_{k} \left( \alpha_{ik} \alpha_{jk}^* - \beta_{ik} \beta_{jk}^* \right) = \delta_{i,j}, \qquad \sum_{k} \left( \alpha_{ik} \beta_{jk} - \beta_{ik} \alpha_{jk} \right) = 0 \tag{3.15}$$

а также симметрию заселенности уровней,  $n_{kl}^* = n_{lk}$ , и аномального квантового среднего,  $\varkappa_{kl} = \varkappa_{lk}$ . В результате получим следующее выражение для точного гамильтониана:

$$H_{\text{full}} \approx \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\pi m}{\tilde{\Lambda}} \left( \frac{1}{2} + \mathcal{N}_m \right) + \mathcal{O} \left( \lambda \tilde{\Lambda} \right),$$
 (3.16)

где  $\mathcal{N}_m$  обозначает число частиц, родившихся в нестационарной и нелинейной теории, то есть определяется формулой (1.6) с заселенностью уровней (1.9) и аномальным квантовым средним (1.10). Легко видеть, что расходящаяся сумма  $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\pi m}{2\tilde{\Lambda}}$  просто воспроизводит стандартную энергию Казимира (3.11) для стационарного случая с учетом изменения расстояния между зеркалами. Вторая сумма описывает возбуждения над стационарностью. Очевидно, эта формула подтверждает предположение, что на достаточно больших временах величина  $\mathcal{N}_m$  играет роль числа частиц, родившихся в нелинейном динамическом эффекте Казимира.

### 3.3 Петлевые поправки для резонансной полости

В этом разделе мы рассмотрим случай резонансной полости, то есть двух идеально отражающих зеркал, и вычислим петлевые поправки к корреляционным функциям полей в такой полости. Мы покажем, что на больших временах эволюции двухпетлевые поправки квадратично растут со временем, что указывает на изменение состояния теории. С одной стороны, этот рост связан с нарушением конформной инвариантности теории членом взаимодействия  $\lambda \phi^4$ . С другой стороны, он тесно связан с нарушением закона сохранения энергии на нестационарном фоне (то есть с накачкой энергии в систему за счет внешнего воздействия). Кроме того, в пределе бесконечно далеких зеркал мы воспроизведем результаты работы [62].

В основном в этом разделе мы будем работать со "сломанными" траекториями зеркал. Физически такая траектория отвечает одиночному резкому толчку зеркала, который выражается в скачкообразном изменении скорости зеркала. Поскольку мы хотим рассматривать асимптотически стационарные ситуации, мы предполагаем, что оба зеркала испытывают одинаковые, но не обязательно совпадающие во времени толчки, так что скорости обоих зеркал

в бесконечном прошлом и будущем совпадают. В разделах 3.3.3 и 3.3.4 мы рассматриваем два наиболее естественных способа синхронизировать движения зеркал. В разделе 3.3.5 мы также обсуждаем периодически осциллирующие траектории зеркал, которые моделируют резонансную полость.

### 3.3.1 Геометрический метод вычисления мод

Начнем с того, что обсудим квантование безмассового скалярного поля на фоне двух идеально отражающих зеркал (3.2). Для удобства предположим, что зеркала покоились до момента t=0, то есть L(t<0)=0 и  $R(t<0)=\Lambda$ . Как было показано в работах [8,9,15], в данном случае квантованное поле можно представить в виде следующего разложения:

$$\phi(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n g_n(t,x) + a_n^{\dagger} g_n^*(t,x) \right], \qquad (3.17)$$

где  $[a_m,a_n^\dagger]=\delta_{mn}$ . В стационарном случае  $(L(t)=0,R(t)=\Lambda$  для всех t) мода n=1 отвечает стоячей волне с наименьшей возможной частотой  $\omega_1=\frac{\pi}{\Lambda}$ . Для произвольных траекторий зеркал моды выписываются с помощью двух вспомогательных функций G(z) и F(z):

$$g_n(t,x) = \frac{i}{\sqrt{4\pi n}} \left[ e^{-i\pi nG(t+x)} - e^{-i\pi nF(t-x)} \right],$$
 (3.18)

которые решают обобщенные уравнения Мура:

$$G[t + L(t)] - F[t - L(t)] = 0, \quad G[t + R(t)] - F[t - R(t)] = 2.$$
 (3.19)

Легко сообразить, что в стационарном случае эти функции равны  $G(z)=F(z)=\frac{z}{\Lambda}$ . Для произвольных же траекторий L(t) и R(t) уравнения (3.19) можно решить рекурсивно с помощью геометрического метода, предложенного в [106, 107] и дополненного в [108]. В этом разделе мы кратко обсудим этот метод, а в разделах 3.3.3, 3.3.4 и 3.3.5 применим его к конкрентным траекториям зеркал. Напомним, что мы предполагаем, что до момента t=0 зеркала покоились. Это означает, что  $G(z \le \Lambda) = F(z \le 0) = \frac{z}{\Lambda}$ . Следовательно, удобно определить так называемый статический регион  $G(t+x) = \frac{t+x}{\Lambda}$ ,  $F(t-x) = \frac{t-x}{\Lambda}$ .

Ключевая идея геометрического метода заключается в том, чтобы "проследить" изменение функций G(z) и F(z) вдоль светоподобных лучей, пока лучи не попадут в соответствующий статический регион. Другими словами, этот метод полагается на тот факт, что функции G(t+x) и F(t-x) из разложения (3.18) сохраняются вдоль лучей t+x= const и t-x= const. Это позволяет связать значения функций в определенных точках на левом и правом зеркале.

В то же время, уравнения (3.19) связывают функции G и F на отраженных лучах. Это, в свою очередь, позволяет нам продолжать строить соответствие между точками на левом и правом зеркале до тех пор, пока луч не попадет в статический регион, где функции G и F известны.

Проиллюстрируем идею метода на примере функции G(z) (Рис. 3.2). Испустим световой луч из точки (z,0) и проследим за ним до тех пор, пока он не пересечет правое зеркало в точке  $(t_1, R(t_1))$ :

$$z = t_1 + R(t_1)$$
, следовательно,  $G(z) = G(t_1 + R(t_1))$ . (3.20)

Затем свяжем функции G и F на правом зеркале с помощью уравнений Мура:

$$G(z) = G(t_1 + R(t_1)) = F(t_1 - R(t_1)) + 2, (3.21)$$

и продолжим световой луч из точки  $(t_1, R(t_1))$  до точки  $(t_2, L(t_2))$ :

$$t_1 - R(t_1) = t_2 - L(t_2)$$
, следовательно,  $F(t_1 - R(t_1)) = F(t_2 - L(t_2))$ . (3.22)

Наконец, с помощью уравнений Мура снова вернемся к функции G и найдем очередное пересечение луча и правого зеркала:

$$t_2 + L(t_2) = t_3 + R(t_3)$$
, следовательно,  $F(t_2 - L(t_2)) = G(t_2 + L(t_2)) = G(t_3 + R(t_3))$ . (3.23)

В итоге получаем рекурсивную последовательность:

$$G(z) = G(t_1 + R(t_1)) = G(t_3 + R(t_3)) + 2 = G(t_5 + R(t_5)) + 4 = \cdots$$
 (3.24)

Заметим, что при каждом отражении от правого зеркала значение функции G(z) увеличивается на два. Этот процесс обрывается только тогда, когда луч входит в статический регион, где функции F(z) и G(z) явно известны. При этом существует два способа попасть в этот регион. Во-первых, луч может отразиться от правого зеркала и попасть в статический регион F. Во-вторых, луч может отразить от левого зеркала и попасть в статический регион G. В обоих случаях функция G(z) сводится к следующему выражению:

$$G(z) = 2n + \frac{t_{\text{final}}}{\Lambda},\tag{3.25}$$

где n — суммарное число отражений от правого зеркала, которое луч успел испытать до попадания в статический регион, а  $t_{\rm final}$  — момент, в который последний отраженный луч пересекает ось времени (см. Рис. 3.2):

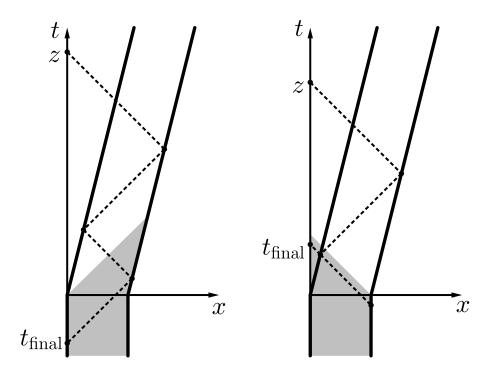


Рис. 3.2: Вычисление  $t_{\rm final}$  для статического региона F (слева) и G (справа). Жирные сплошные линии обозначают траектории зеркал, пунктирные линии — световые лучи, используемые при построении функций, серые области — статические регионы F и G.

$$t_{\text{final}} = \begin{cases} z - 2 \left[ \sum_{i=1}^{n} R(t_{2i-1}) - \sum_{i=1}^{n-1} L(t_{2i}) \right], & \text{для статического региона } F, \\ z - 2 \left[ \sum_{i=1}^{n} R(t_{2i-1}) - \sum_{i=1}^{n} L(t_{2i}) \right], & \text{для статического региона } G. \end{cases}$$
(3.26)

Обратите внимение, что для времениподобных траекторий точки пересечения  $t_1, t_2, \cdots, t_{\text{final}}$  всегда существуют и единствены [9, 106]. Следовательно, определение (3.25) корректно воспроизводит функцию G(z) для всех значений z. Также заметим, что функция (3.25) непрерывна, поскольку функция  $t_{\text{final}}(z)$  уменьшается на  $2\Lambda$  в точках, где количество отражений n(z) увеличивается на единицу.

Функцию F(z) можно построить аналогичным образом [108]. Впрочем, для относительно простых функций L(t) гораздо удобнее воспользоваться тождеством F[t-L(t)]=G[t+L(t)]. В этом случае достаточно найти обратную функцию z(t)=t-L(t), и известную функцию G(z) можно будет легко отобразить в F(z). В частности, в бесконечном будущем, где зеркала движутся с постоянной скоростью,  $L(t)=L_++\beta_+t$  и  $R(t)=L_++\Lambda_++\beta_+t$  при  $t\to+\infty$ , соотношение между функциями G и F приобретает следующий вид:

$$F(z) = G\left(\frac{1+\beta_{+}}{1-\beta_{+}}z + \frac{2L_{+}}{1-\beta_{+}}\right) \quad \text{при} \quad z \to +\infty.$$
 (3.27)

Наконец, обсудим возможные выборы траекторий зеркал (функций L(t) и R(t)). Напомним, что мы хотим рассматривать асимптотически стационарные траектории, то есть такие траектории, для которых конечные скорости постоянны и совпадают,  $\dot{L}(\pm\infty) = \dot{R}(\pm\infty) = \beta_{\pm}$ ,  $|\beta_{\pm}| < 1$ . Другими словами, мы хотим рассматривать резонансную полость, которая стационарна в бесконечном прошлом и будущем, но может сжиматься и растягиваться в промежуточные времена. Для удобства также выбираем  $\beta_{-} = 0$  и переносим начало координат t = 0 в момент, когда хотя бы одно зеркало начало двигаться.

Простейший пример нестационарной траектории с описанными свойствами — комбинация так называемых "сломанных" траекторий, для которых скорость зеркал однократно скачкообразно меняется:

$$x(t) = x(t_x) + \beta(t - t_x)\theta(t - t_x), \tag{3.28}$$

где x=L,R и  $t_x$  — моменты, в которые соответствующее зеркало испытывает толчок. Напомним, что  $L(t_L)=0$  и  $R(t_R)=\Lambda$ . Случай  $t_L=t_R=0$  и  $\beta=\frac{1}{4}$  изображен на Рис. 3.2. Такие "сломанные" траектории фактически являются приближением к траекториям с конечным периодом ускоренного движения w:

$$x(t) - x(t_x) = \begin{cases} \frac{1}{w} \left( \sqrt{1 + w^2(t - t_x)^2} - 1 \right), & \text{для} \quad 0 < t - t_x < \frac{\gamma \beta}{w}, \\ \frac{1}{w} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right) + \beta(t - t_x), & \text{для} \quad t - t_x > \frac{\gamma \beta}{w}, \end{cases}$$
(3.29)

или к тра<br/>ектории бесконечно ускоренного зеркала, экспоненциально приближающейся к траектории с постоянной скоростью<br/>  $\beta$ :

$$x(t) - x(t_x) = \beta(t - t_x) - \frac{\beta}{w} \left( 1 - e^{-w(t - t_x)} \right),$$
 для  $t > t_x$ . (3.30)

Обе этих траектории воспроизводят (3.28) в пределе  $w \to \infty$  и гладко соединяют асимптотически стационарные регионы. Вообще говоря, для древесных вычислений условие гладкости может быть важно, поскольку резкие скачки скорости генерируют сингулярный поток тензора энергии-импульса (для примера см. [9,10,135]). В то же время, в следующем разделе мы покажем, что петлевые вычисления совпадают для всех асимптотчиески однородных траекторий (за исключением вырожденного случая  $|\beta| = 1$ , который в геометрическом подходе описать нельзя). В результате двухпетлевые поправки к  $n_{pq}$  и  $\varkappa_{pq}$  одинаково квадратично растут со временем для всех перечисленных траекторий, хотя префакторы этого роста могут зависеть от истории промежуточного движения. Следовательно, для наших целей мы можем ограничиться более простым случаем "сломанных" траекторий (3.28).

# 3.3.2 Секулярный рост как следствие нарушения конформной инвариантности

Как можно догадаться, решение (3.18) было вдохновлено конформной инвариантностью теории двумерного безмассового скалярного поля [8,9]. В самом деле, легко проверить, что следующее конформное преобразование:

$$w + s = G(t + x), \quad w - s = F(t - x),$$
 (3.31)

отображает задачу с произвольными траекториями зеркал (3.2) в стационарную задачу с покоящимися зеркалами:

$$\partial_{\mu}\partial^{\mu}\phi = 0, \quad \phi(w, s = 0) = \phi(w, s = 1) = 0,$$
 (3.32)

откуда немедленно следует решение (3.18). Однако взаимодействие  $\lambda \phi^4$  нарушает конформную инвариантность. В этом разделе мы покажем, что это нарушение проявляется в секулярном росте петлевых поправок к корреляционным функциям. Для определенности в этом разделе мы предполагаем, что скорости зеркал совпадают после некоторого момента времени  $t = t_*$ , то есть  $\dot{L}(t) = \dot{R}(t) = \beta$ , и равны нулю до момента t = 0.

Во-первых, довольно легко показать, что в теории  $\lambda \phi^4$  двухпетлевые поправки к заселенности уровней и аномальному квантовому среднему, которые входят в келдышевский пропагатор, имеют следующий вид:

$$n_{pq}(T) \approx 2\lambda^2 \int_{t_0}^T dt_1 \int_{L(t_1)}^{R(t_1)} dx_1 \int_{t_0}^T dt_2 \int_{L(t_2)}^{R(t_2)} dx_2 \sum_{m,n,k=1}^{\infty} I_{p,m,n,k}(t_1,x_1) I_{q,m,n,k}^*(t_2,x_2), \tag{3.33}$$

$$\varkappa_{pq}(T) \approx -2\lambda^2 \int_{t_0}^T dt_1 \int_{L(t_1)}^{R(t_1)} dx_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{L(t_2)}^{R(t_2)} dx_2 \sum_{m,n,k=1}^{\infty} \left( I_{p,m,n,k}^c(t_1, x_1) I_{q,m,n,k}^*(t_2, x_2) + (p \leftrightarrow q) \right),$$

$$(3.34)$$

где мы для краткости ввели функции

$$I_{p,m,n,k}(t_1, x_1) = g_p(t_1, x_1)g_m(t_1, x_1)g_n(t_1, x_1)g_k(t_1, x_1),$$

$$I_{p,m,n,k}^c(t_1, x_1) = g_p^*(t_1, x_1)g_m(t_1, x_1)g_n(t_1, x_1)g_k(t_1, x_1).$$
(3.35)

Попробуем оценить эти интегралы с помощью конформного преобразования (3.31). Как и в предыдущей главе, мы будем удерживать только лидирующие секулярно растущие вклады в пределе  $\lambda \to 0$ ,  $T \to \infty$ . Поскольку подынтегральные выражения в (3.33) и (3.34) состоят из осциллирующих экспонент, можно оценить  $|I_{p,m,n,k}(t,x)| < \frac{1}{\pi^4}$  и  $|I_{p,m,n,k}^c(t,x)| < \frac{1}{\pi^4}$ . Это значит, что результаты интегрирования по областям пространства-времени конечного размера

не могут обеспечить растущие со временем вклады в (3.33) и (3.34). Иначе говоря, такими вкладами в рассматриваемом пределе можно пренебречь, поэтому для оценки лидирующих секулярно растущих вкладов интегралы по конечным областям можно свободно выкидывать. По той же самой причине мы можем положить  $t_0 = 0$  (интегралы не могут неограниченно расти в пределе  $t_0 \to -\infty$ , потому что при t < 0 система стационарна, см. приложение A). Эти рассуждения позволяют нам упростить интегралы для I и  $I^c$ , а затем выделить из них только лидирующие секулярно растущие вклады в (3.33) и (3.34).

После конформного преобразования (3.31) приобретают следующий вид:

$$\int_0^T dt_1 \int_{L(t_1)}^{R(t_1)} dx_1 I_{p,m,n,k}(t_1, x_1) \approx \int_0^{G[T+L(T)]} dw \int_0^1 ds \, g'(w+s) f'(w-s) I_{p,m,n,k}(w,s), \quad (3.36)$$

где  $g'(w+s)f'(w-s)=\frac{dG^{-1}(z)}{dz}\Big|_{z=w+s}\frac{dF^{-1}(z)}{dz}\Big|_{z=w-s}$  — конформный фактор,  $I_{p,m,n,k}(w,s)=h_p(w,s)h_m(w,s)h_n(w,s)h_k(w,s)$  и  $h_p(w,s)=\frac{i}{\sqrt{4\pi p}}\left[e^{-i\pi p(w+s)}-e^{-i\pi p(w-s)}\right]$ . Структура интегралов  $I_{p,m,n,k}^*(t,x)$  и  $I_{p,m,n,k}^c(t,x)$  аналогична. Обратите внимание, что g'(w+s) и f'(w-s) положительны, если мы рассматриваем времениподобные мировые линии зеркал с  $|\dot{L}(t)|<1$  и  $|\dot{R}(t)|<1$ .

Наконец, сделаем еще одну замену и введем координаты u = w - s, v = w + s:

$$\int_0^T dt_1 \int_{L(t_1)}^{R(t_1)} dx_2 I_{p,m,n,k}(t_1, x_1) \approx \int_0^{G[T+L(T)]} du \int_u^{u+2} dv \frac{1}{2} g'(v) f'(u) I_{p,m,n,k}(u, v).$$
 (3.37)

Для произвольных траекторий L(t) и R(t) этот интеграл очень сложен, однако в некоторых физически осмысленных ситуациях он существенно проще, чем начальные интегралы (3.33) и (3.34).

А именно, предположим, что скорости зеркал совпадают для достаточно больших времен, то есть  $\dot{L}(t)=\dot{R}(t)=\beta$  для  $t>t_*$ . В этом случае геометрический метод построения мод с Рис. 3.3.1 подсказывает, что функции G(z) и F(z) периодически растут, то есть  $G(z+\Delta z_G)=G(z)+2,\ F(z+\Delta z_F)=F(z)+2.$  С точки зрения геометрического метода приращение аргумента функций на  $\Delta z_G=\frac{2\Lambda_*}{1-|\beta|}$  или  $\Delta z_F=\frac{2\Lambda_*}{1+|\beta|}$ , соответственно, просто добавляет дополнительный цикл отражения лучей между левым и правым зеркалом, однако не изменяет значения функций G и F; здесь  $\Lambda_*$  — расстояние между зеркалами в лабораторной системе отсчета при  $t>t_*$ . Следовательно, начиная с некоторого момента  $y_*$  обратные функции  $y_*$  обратные функции  $y_*$  обратные функции  $y_*$  обратные функции  $y_*$  обратные попростустановятся периодичными:  $y_*$  обратные  $y_*$  что еще более важно, их производные попросту становятся периодичными:  $y_*$   $y_*$ 

 $<sup>^{3}</sup>$ Как обычно, эти функции определяются как g[G(z)] = z, G[g(y)] = y и f[F(z)] = z, F[f(y)] = y.

f'(y+2) = f'(y). Следовательно, их можно разложить в ряд Фурье:

$$g'(y) = g'[y - y_* - 2n(y)] = \sum_{n = -\infty}^{\infty} g_n e^{i\pi ny}, \quad g_n = \frac{1}{2} \int_0^2 g'(y) e^{-i\pi ny} dy,$$

$$f'(y) = f'[y - y_* - 2n(y)] = \sum_{n = -\infty}^{\infty} f_n e^{i\pi ny}, \quad f_n = \frac{1}{2} \int_0^2 f'(y) e^{-i\pi ny} dy,$$
(3.38)

где  $n(y) \in \mathbb{N}$  и  $0 < y - y_* - n(y) < 2$ . Это свойство означает, что в интеграле по dv в (3.37) появляются вклады, которые не зависят от u:

$$\int_{u}^{u+2} dv g'(v) e^{-i\pi(p+m+n+k)v} = \int_{u}^{u+2} dv \sum_{l=-\infty}^{\infty} g_n e^{i\pi l v} e^{-i\pi(p+m+n+k)v} = 2g_{p+m+n+k}.$$
 (3.39)

Следовательно, интеграл (3.37) неограниченно растет со временем при условии  $g_{p+m+n+k} \neq 0$  и  $T > t_*$ :

$$\int_{G[t_*+L(t_*)]}^{G[T+L(T)]} du f'(u) g_{p+m+n+k} \sim g_{p+m+n+k} \left[ T - L(T) - t_* + L(t_*) \right]. \tag{3.40}$$

Это, в свою очередь, приводит к секулярному росту квантовых средних  $n_{pq}$  и  $\varkappa_{pq}$ :

$$n_{pq}(T) \approx 2\lambda^2 \frac{[T - L(T) - t_* + L(t_*)]^2}{(4\pi)^4 \sqrt{pq}} \sum_{m, n, k=1}^{\infty} \frac{g_{p+m+n+k} g_{q+m+n+k}^*}{mnk},$$
(3.41)

$$\varkappa_{pq}(T) \approx -\lambda^2 \frac{\left[T - L(T) - t_* + L(t_*)\right]^2}{(4\pi)^4 \sqrt{pq}} \sum_{m,n,k=1}^{\infty} \frac{g_{-p+m+n+k} g_{q+m+n+k}^* + (p \leftrightarrow q)}{mnk}.$$
 (3.42)

Напомним, что мы удерживаем только лидирующие секулярно растущие выражения в пределе  $\lambda \to 0$ ,  $T \gg \Delta t$ ,  $T \sim 1/\lambda$ . Осциллирующие вклады и вклады вида  $\lambda^2 T^\alpha$  с  $\alpha < 2$  в этом пределе подавлены. Отметим, что суммы по виртуальным импульсам сходятся, поскольку для физически осмысленных траекторий коэффициенты Фурье стремятся к нулю,  $g_n \sim \frac{\Lambda}{n}$  при  $n \gg 1$ :

$$\sum_{m,n,k=1}^{\infty} \frac{g_{p+m+n+k}g_{q+m+n+k}}{mnk} \sim \sum_{m,n,k=1}^{\infty} \frac{\Lambda^2}{(p+m+n+k)(q+m+n+k)mnk} < \infty.$$
 (3.43)

Также обратите внимание, что для некоторых траекторий коэффициенты Фурье могут зануляться вообще для всех виртуальных импульсов. В этом случае  $n_{pq}$  и  $\varkappa_{pq}$  не получают секулярно растущих петлевых поправок. Пример такой ситуации разбирается в разделе 3.3.4.

Также подчеркнем, что секулярный рост (3.41) и (3.42) имеет прозрачный физический смысл. В полностью стационарной ситуации закон сохранения энергии полностью запрещает любую кинетику (см. приложение А); однако в нестационарной ситуации наличие внешнего фона приводит к тому, что этот закон может нарушаться<sup>4</sup>, а запрещенные им процессы могут

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>Очевидно, что квантовая теория поля и неоднородно движущееся зеркало формируют открытую систему, поскольку для задания траектории зеркала к нему необходимо прикладывать внешнюю силу. Собственно, благодаря наличию этой силы энергия системы поле-зеркало может увеличиваться (или уменьшаться), что с точки зрения внутреннего наблюдателя будет выглядеть как нарушение закона сохранения энергии.

идти на макроскопических временах. Фактически это нарушение проявляется в коэффициентах Фурье более высокого порядка (3.38). Более того, всегда есть вклады в (3.33) и (3.34), которые не зависят от одного из времен интегрирования (или соответствующих преобразованных координат), поскольку моды содержат одновременно и падающие, и отраженные от зеркал волны. В результате двухпетлевая поправка к квантовым среднем растет как вторая степень времени эволюции.

Таким образом, задача вычисления петлевых поправок к квантовым средним сводится к нахождению коэффициентов Фурье функции g(z). Вообще говоря, эти коэффициенты сложным образом зависят от траекторий зеркал в промежуточном отрезке  $0 < t < t_*$ , соединяющем асимптотически стационарные области, поэтому для произвольных траекторий вычислить коэффициенты Фурье может быть довольно сложно. Тем не менее, для сравнительно простых функций L(t) и R(t) этот подход гораздо эффективнее прямолинейного вычисления интегралов (3.33) и (3.34). В следующих разделах мы проиллюстрируем этот подход и оценим лидирующие вклады в двухпетлевые поправки к  $n_{pq}$  и  $\varkappa_{pq}$  для некоторых конкретных функций L(t) и R(t).

### 3.3.3 Одновременные толчки

Рассмотрим случай двух одновременных толчков ( $t_L=t_R=0$  в обозначениях (3.28)):

$$L(t) = \beta t \theta(t), \quad R(t) = \Lambda + \beta t \theta(t).$$
 (3.44)

Пример таких траекторий изображен на Рис. 3.2. Для определенности будем рассматривать положительные скорости,  $0 < \beta < 1$ , хотя рассуждения данного раздела с тем же успехом можно применить к случаю  $-1 < \beta < 0$ , если поменять знаки в нужных местах. Обратите внимание, что расстояние между зеркалами в лабораторной системе отсчета всегда остается постоянным,  $R(t) - L(t) = \Lambda$ . Тем не менее, расстояние в сопутствующей системе отсчета изменяется от  $\Lambda$  в бесконечном прошлом до  $\Lambda/\sqrt{1-\beta^2}$  в бесконечном будущем.

Воспользуемся геометрическим методом, чтобы найти моды для траекторий (3.44). Вопервых, уравнение  $F\left[t-L(t)\right]=G\left[t+L(t)\right]$  немедленно приводит к простому соотношению  $F(z)=G\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}z\right)$  для z>0, поэтому ограничимся вычислением G(z). Во-вторых, для траекторий (3.44) моменты отражения луча от правого зеркала можно найти аналитически:

$$t_1 = \frac{z - \Lambda}{1 + \beta}, \quad \cdots, \quad t_{2k+1} = t_1 - \frac{2\Lambda k}{1 - \beta^2}, \quad t_{2k} = t_{2k-1} - \frac{\Lambda}{1 - \beta}, \quad k = 1, 2, \cdots, n.$$
 (3.45)

Суммарное число отражений легко оценить, учитывая периодический рисунок отражений:

$$n = \left\lceil \frac{1 - \beta}{2} \frac{z - \Lambda}{\Lambda} \right\rceil,\tag{3.46}$$

где  $\lceil x \rceil$  обозначает округление вверх. Наконец, статические регионы F и G в этой картине отвечают следующим значениям  $z > \Lambda$ :

Статический регион 
$$F: (n-1)\frac{2\Lambda}{1-\beta} < z - \Lambda < n\frac{2\Lambda}{1-\beta} - \Lambda,$$
 Статический регион  $G: n\frac{2\Lambda}{1-\beta} - \Lambda < z - \Lambda < n\frac{2\Lambda}{1-\beta}.$  (3.47)

Эти тождества означают, что G(z) описывается следующей кусочно-линейной функцией:

$$G(z) = \begin{cases} \frac{1-\beta}{1+\beta} \frac{z}{\Lambda} + \frac{2\beta n}{1+\beta}, & \text{для статического региона } F, \\ \frac{z}{\Lambda} - \frac{2\beta n}{1-\beta}, & \text{для статического региона } G. \end{cases}$$
(3.48)

Также для удобства введем координату  $\delta \equiv x - L(t)$ ,  $0 < \delta < \Lambda$ , которая измеряет расстояние до левого зеркала в лабораторной системе отсчета:  $G(t,\delta) = G\left[(1+\beta)t + \delta\right]$ ,  $F(t,\delta) = F\left[(1-\beta)t - \delta\right]$ . В этих координатах функции G(t+x) и F(t-x) связаны простой сдвижкой:

$$F(t,\delta) = F\left[(1-\beta)t - \delta\right] = G\left[(1+\beta)t - \frac{1+\beta}{1-\beta}\delta\right], \quad G(t,\delta) = G\left[(1+\beta)t + \delta\right]. \tag{3.49}$$

Кроме того, в таких обозначениях легче увидеть, что функции G и F периодически растут со временем, то есть  $G\left(t+\frac{2\Lambda}{1-\beta^2},\delta\right)=G\left(t,\delta\right)+2$  и  $F\left(t+\frac{2\Lambda}{1-\beta^2},\delta\right)=F\left(t,\delta\right)+2$ . Таким образом, оказывается удобным ввести время  $\tau=\frac{2\Lambda}{1-\beta^2}$  и целое число  $k=\left\lceil\frac{t-\Lambda}{\tau}\right\rceil$ . Тогда можно показать, что в новых обозначениях функции  $G\left[t>0,\delta\right]$  и  $F\left[t>0,\delta\right]$  выглядят следующим образом (напомним, что мы рассматриваем  $0<\beta<1$ ):

(напомним, что мы рассматриваем 
$$0 < \beta < 1$$
):
$$\begin{cases}
\frac{(1-\beta)t}{\Lambda} - \frac{\delta}{\Lambda} + \frac{2\beta(k-1)}{1+\beta}, & \text{при } k - \frac{1+\beta^2}{2} < \frac{t}{\tau} < k - \frac{1-\beta}{2}, & \frac{2(t/\tau - k + 1)}{1+\beta} < \frac{\delta}{\Lambda} < 1, \\
\frac{(1+\beta)t}{\Lambda} - \frac{1+\beta}{1-\beta}\frac{\delta}{\Lambda} + \frac{2\beta k}{1-\beta}, & \text{при } \begin{cases}
k - \frac{1+\beta^2}{2} < \frac{t}{\tau} < k - \frac{1-\beta}{2}, & 1 < \frac{\delta}{\Lambda} - \frac{2(t/\tau - k)}{1+\beta} < \frac{2}{1+\beta}, \\
k - \frac{1-\beta}{2} < \frac{t}{\tau} < k, & 1 - \frac{2}{1-\beta} \left(k - \frac{t}{\tau}\right) < \frac{\delta}{\Lambda} < 1, \\
k - \frac{1+\beta^2}{2} < \frac{t}{\tau} < k - \frac{1-\beta}{2}, & 0 < \frac{\delta}{\Lambda} < 1 - \frac{2(k-t/\tau)}{1+\beta}, \\
k - \frac{1-\beta}{2} < \frac{t}{\tau} < k, & 0 < \frac{\delta}{\Lambda} < 1 - \frac{2(k-t/\tau)}{1+\beta}, \\
k - \frac{1-\beta}{2} < \frac{t}{\tau} < k, & 0 < \frac{\delta}{\Lambda} < 1 - \frac{2(k-t/\tau)}{1+\beta}, \\
k - \frac{1-\beta}{2} < \frac{t}{\tau} < k, & 0 < \frac{\delta}{\Lambda} < 1 - \frac{2(k-t/\tau)}{1+\beta}, \\
k - \frac{1-\beta}{2} < \frac{t}{\tau} < k + \frac{1-\beta^2}{2}, & 0 < \frac{\delta}{\Lambda} < \frac{2}{1+\beta} \left(\frac{t}{\tau} - k\right), \\
k - \frac{1-\beta}{2} < \frac{t}{\tau} < k < \frac{1-\beta^2}{2}, & 1 < \frac{\delta}{\Lambda} < \frac{2(k+1-t/\tau)}{1+\beta} < \frac{2}{1+\beta}, \\
\frac{1-\beta}{\Lambda} - \frac{\delta}{\Lambda} + \frac{2\beta(k+1)}{1+\beta}, & \text{при } k + \frac{1-\beta}{2} < \frac{t}{\tau} < k + \frac{1-\beta^2}{2}, & 0 < \frac{\delta}{\Lambda} < 1 - \frac{2(k+1-t/\tau)}{1+\beta}, \end{cases}$$
(3.50)

$$G(t,\delta) = \begin{cases} \frac{(1-\beta)t}{\Lambda} + \frac{1-\beta}{1+\beta}\frac{\delta}{\Lambda} + \frac{2\beta k}{1+\beta}, & \text{при} \end{cases} \begin{cases} k - \frac{1+\beta^2}{2} < \frac{t}{\tau} < k - \frac{1-\beta}{2}, & 0 < \delta < \Lambda, \\ k - \frac{1-\beta}{2} < \frac{t}{\tau} < k, & 0 < \frac{\delta}{\Lambda} < \frac{2}{1-\beta}\left(k - \frac{t}{\tau}\right), \end{cases} \\ \frac{(1+\beta)t}{\Lambda} + \frac{\delta}{\Lambda} - \frac{2\beta k}{1-\beta}, & \text{при} \end{cases} \begin{cases} k - \frac{1-\beta}{2} < \frac{t}{\tau} < k, & \frac{2}{1-\beta}\left(k - \frac{t}{\tau}\right) < \frac{\delta}{\Lambda} < 1, \\ k < \frac{t}{\tau} < k + \frac{1-\beta}{2}, & 0 < \frac{\delta}{\Lambda} < 1 - \frac{2}{1-\beta}\left(\frac{t}{\tau} - k\right), \end{cases} \\ \frac{(1-\beta)t}{\Lambda} + \frac{1-\beta}{1+\beta}\frac{\delta}{\Lambda} + \frac{2\beta(k+1)}{1+\beta}, & \text{при} \end{cases} \begin{cases} k < \frac{t}{\tau} < k + \frac{1-\beta}{2}, & 1 - \frac{2}{1-\beta}\left(\frac{t}{\tau} - k\right) < \frac{\delta}{\Lambda} < 1, \\ k + \frac{1-\beta}{2} < \frac{t}{\tau} < k + \frac{1-\beta^2}{2}, & 0 < \frac{\delta}{\Lambda} < 1. \end{cases}$$

$$(3.51)$$

Графики этих функций при фиксированном  $\delta$  напоминают периодически растущую пилу. А именно, они склеены из чередующихся кусков медленного (с наклоном  $\frac{1-\beta}{\Lambda}$ ) и быстрого (с наклоном  $\frac{1+\beta}{\Lambda}$ ) роста. Для больших  $\beta$  зубья пилы становятся острее; напротив, при малых  $\beta$  график практически гладкий. Изменение  $\delta$  просто сдвигает графики вверх или вниз.

Напомним, что моды выражаются через функции G и F по формуле (3.18):

$$g_n(t,\delta) = \frac{i}{\sqrt{4\pi n}} \left[ e^{-i\pi nG(t,\delta)} - e^{-i\pi nF(t,\delta)} \right]. \tag{3.52}$$

При больших  $\beta$  и фиксированном t эти функции имеют следующее поведение. На большей части значений  $\delta$  они выглядят как медленно осциллирующие экспоненты  $\sim e^{-i\pi n \frac{\delta}{\Lambda} + \varphi_1}$ , где фаза  $\varphi_1$  не зависит от  $\delta$ . Для оставшегося узкого интервала значений  $\delta$  они осциллируют гораздо быстрее,  $\sim e^{-i\pi n \frac{1+\beta}{1-\beta} \frac{\delta}{\Lambda} + \varphi_2}$ . В этой области функции G и F увеличиваются примерно на единицу, поэтому разность фаз слева и справа от области примерно равна  $e^{-i\pi n}$ . Другими словами, в четных модах медленно осциллирующие экспоненты продолжают друг друга, тогда как в нечетных модах экспоненты меняют знак при переходе через указанный узкий интервал.

Наконец, заметим, что сдвиг функций G и F на двойку приводит к тождественному преобразованию мод,  $e^{-2i\pi n}=1$ . Следовательно, моды (3.18) просто периодичны с периодом  $\Delta t=\frac{2\Lambda}{1-\beta^2}$ .

#### Малое время эволюции и регуляризация

Применяя формулы из предыдущего параграфа к области  $t < \frac{\Lambda}{1+|\beta|}$ , получаем следующие выражения для мод:

$$g_n(t,x) = \begin{cases} \frac{i}{\sqrt{4\pi n}} \left[ e^{-i\pi n \frac{t+x}{\Lambda}} - e^{-i\pi n \frac{1+\beta}{1-\beta} \frac{t-x}{\Lambda}} \right], & \text{при} \quad \beta t < x < t, \\ \frac{i}{\sqrt{4\pi n}} \left[ e^{-i\pi n \frac{t+x}{\Lambda}} - e^{-i\pi n \frac{t-x}{\Lambda}} \right], & \text{при} \quad t < x < \Lambda - t, \\ \frac{i}{\sqrt{4\pi n}} \left[ e^{-i\pi n \left( \frac{1-\beta}{1+\beta} \frac{t+x}{\Lambda} + \frac{2\beta}{1+\beta} \right)} - e^{-i\pi n \frac{t-x}{\Lambda}} \right], & \text{при} \quad \Lambda - t < x < \Lambda + \beta t. \end{cases}$$

$$(3.53)$$

Обратите внимание, что при  $\beta t < x < t$  эти моды совпадают с модами для одиночного зеркала (сравните с [62]), поскольку на таких малых временах сигналы еще не успели дойти от левого зеркала до правого и наоборот.

Вычислим интегралы (3.33) и (3.34) в пределе  $T \ll \Lambda$ . Поскольку  $\frac{T}{\Lambda}$  является малым параметром, мы можем разложить интегралы в ряд по  $\frac{T}{\Lambda}$  и удерживать только первые члены разложения. Как и в стационарной ситуации (приложение A), мы ожидаем, что интегралы  $\int_0^T dt \int_{\beta t}^{\Lambda+\beta t} dx \, I_{p,m,n,k}(t,x)$  и  $\int_0^T dt \int_{\beta t}^{\Lambda+\beta t} dx \, I_{p,m,n,k}^c(t,x)$  линейно растут вместе с T. В то же время, площади самого левого ( $\beta t < x < t$ ) и правого ( $\Lambda - t < x < \Lambda + \beta t$ ) регионов в определении (3.53) не превышают ( $1 + |\beta|$ ) $T^2$ . В рассматриваемом пределе вклады этих областей пренебрежимо малы. До промежуточного региона информация о том, что зеркала начали двигаться, еще не успела дойти. Следовательно, в лидирующем порядке интегралы  $I_{p,m,n,k}$  и  $I_{p,m,n,k}^c$  совпадают с аналогичными интегралами в стационарном случае:

$$I_{p,m,n,k}(T) \approx \int_{0}^{T} dt \int_{t}^{\Lambda-t} dx \frac{e^{-\frac{i\pi t}{\Lambda}(p+m+n+k)}}{8\pi^{2}\sqrt{pmnk}} \sum_{\sigma_{m},\sigma_{n},\sigma_{k}=\pm 1} \sigma_{m}\sigma_{n}\sigma_{k} \cos\left[\frac{\pi x}{\Lambda}(p+\sigma_{m}m+\sigma_{n}n+\sigma_{k}k)\right] \approx \frac{T}{8\pi^{2}\sqrt{pmnk}} \sum_{\sigma_{m},\sigma_{n},\sigma_{k}=\pm 1} \sigma_{m}\sigma_{n}\sigma_{k}\Lambda\delta_{p+\sigma_{m}m+\sigma_{n}n+\sigma_{k}k,0} + \mathcal{O}(T^{2}).$$

$$(3.54)$$

Такой же вывод можно получить и для интегралов (3.33) и (3.34). Следовательно:

$$n_{pq} \approx n_{pq}^{\rm stat} \sim (\lambda \Lambda T)^2, \quad \varkappa_{pq} \approx \varkappa_{pq}^{\rm stat} \sim -(\lambda \Lambda T)^2.$$
 (3.55)

В случае сильно удаленных зеркал ( $\Lambda \to \infty$  и  $p = \frac{\pi p}{\Lambda} = \mathrm{const}$ ) подобное поведение может сохраняться на протяжении длительного времени. Тем не менее, этот ложный "секулярный рост" не имеет ничего общего с изменением состояния системы; в сущности, это просто артефакт неправильного инфракрасного обрезания. Полученное нефизическое поведение можно исправить, вычтя подходящие величины из стационарной теории:

$$n_{pq}^{\text{reg}} \equiv n_{pq} - n_{pq}^{\text{stat}}, \quad \varkappa_{pq}^{\text{reg}} \equiv \varkappa_{pq} - \varkappa_{pq}^{\text{stat}}.$$
 (3.56)

В сущности, такое вычитание просто восстанавливает корректные пределы в интегралах для квантовых средних, уводя начало интегрирования в момент  $t_0 \to -\infty$  вместо  $t_0 = 0$  (сравните с вычислением двухпетлевых поправок в [62]). Очевидно, такой способ регуляризации не сказывается на больших временах эволюции,  $T \gg \Lambda$ , потому что в этом пределе  $n_{pq}^{\rm stat} \to 0$  и  $\varkappa_{pq}^{\rm stat} \to 0$  (см. приложение A). Следовательно, для оценки петлевых поправок при больших временах эволюции мы имеем полное право вычислять интегралы от t=0 до t=T и применять регуляризацию (3.56) вместо того, чтобы честно вычислять интегралы от  $t=t_0 \to -\infty$  до t=T.

Заметим, что анализ этого параграфа в сущности не отличается для различных траекторий L(t) и R(t), поскольку при  $T \ll \Lambda$  информация о движении зеркал успевает распространиться только на область площади  $\sim T^2$ . Следовательно, предложенную схему регуляризации можно применять для произвольных траекторий зеркал.

### Большие времена эволюции

Теперь применим логику раздела 3.3.2 для оценки  $n_{pq}$  и  $\varkappa_{pq}$  при больших временах,  $T \gg \Lambda$ , в модели (3.44). Прежде всего, перепишем тождество (3.48) с помощью тета-функции Хевисайда:

$$G(z) = \theta(\Lambda - z)\frac{z}{\Lambda} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[ \theta\left(\frac{z}{\Lambda} - 1 - \frac{2(n-1)}{1-\beta}\right) - \theta\left(\frac{z}{\Lambda} - \frac{2n}{1-\beta}\right) \right] \left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\frac{z}{\Lambda} + \frac{2\beta n}{1+\beta}\right) + \left[ \theta\left(\frac{z}{\Lambda} - \frac{2n}{1-\beta}\right) - \theta\left(\frac{z}{\Lambda} - 1 - \frac{2n}{1-\beta}\right) \right] \left(\frac{z}{\Lambda} - \frac{2\beta n}{1-\beta}\right) \right\}.$$
(3.57)

Используя это представление, легко вычислить обратную функцию:

$$g(y) = \theta(1-y)\Lambda y + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[ \theta \left( y - (2n-1) \right) - \theta \left( y - 2n \right) \right] \left( \frac{1+\beta}{1-\beta} \Lambda y - \frac{2\beta n\Lambda}{1-\beta} \right) + \left[ \theta \left( y - 2n \right) - \theta \left( y - (2n+1) \right) \right] \left( \Lambda y + \frac{2\beta n\Lambda}{1-\beta} \right) \right\},$$

$$(3.58)$$

и ее производную:

$$g'(y) = \Lambda + \frac{2\beta\Lambda}{1-\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \theta \left( y - (2n-1) \right) - \theta \left( y - 2n \right) \right]. \tag{3.59}$$

Соответствующие коэффициенты Фурье также можно легко вычислить:

$$g_n = \frac{1}{2} \int_0^2 g'(y) e^{-i\pi ny} dy = -\frac{2\beta\Lambda}{1-\beta} \frac{1-(-1)^n}{2i\pi n},$$
 для  $n \neq 0;$   $g_0 = \frac{\Lambda}{1-\beta}.$  (3.60)

Наконец, учитывая, что в этом случае  $t_*=0$ , получаем следующие выражения для квантовых средних:

$$n_{pq}(T) \approx (\lambda \beta \Lambda T)^2 \times \frac{S_{p,q}}{32\pi^6 \sqrt{pq}},$$
 (3.61)

$$\varkappa_{pq}(T) \approx -(\lambda \beta \Lambda T)^2 \times \frac{S_{-p,q} + S_{p,-q}}{64\pi^6 \sqrt{pq}},$$
(3.62)

где мы ввели краткое обозначение для суммы

$$S_{p,q} = \sum_{m,n,k=1}^{\infty} \frac{\left(1 - (-1)^{p+m+n+k}\right) \left(1 - (-1)^{q+m+n+k}\right)}{4mnk(p+m+n+k)(q+m+n+k)}.$$
(3.63)

Обратите внимание, что  $S_{p,q} = 0$ , если p и q имеют разную четность. В то же время,  $S_{p,q}$  содержит ненулевые недиагональные члены, которые отвечают p и q одинаковой четности. Это

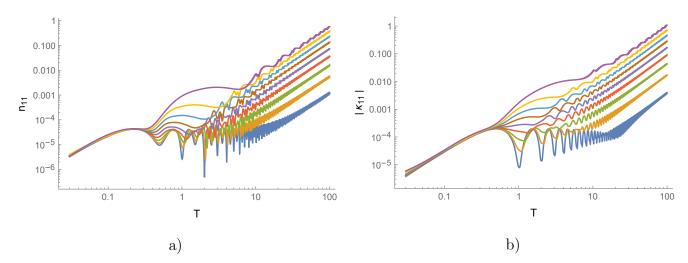


Рис. 3.3: Численно рассчитанные функции  $n_{11}(T)$  (a) и  $|\varkappa_{11}(T)|$  (b). Разные цвета отвечают разным скоростям  $\beta$ , от 0.9 до 0.1 (сверху вниз). Время T измеряется в единицах  $\Lambda$ , квантовые средние измеряются в единицах  $2\lambda^2$ . Регуляризация (3.56) не применяется.

значит, что  $n_{pq}$  и  $\varkappa_{pq}$  не сводятся к диагональному виду в отличие от других нестационарных квантовых систем (например, электрического поля или скалярного поля в пространстве де Ситтера [22, 28, 31, 32]). Это связано с тем, что в рассматриваемой нами системе закон сохранения импульса нарушается из-за отсутствия пространственной однородности.

Таким образом, в случае одновременных толчков (3.44) двухпетлевые поправки к квантовым средним квадратично растут как на малых ( $T \ll \Lambda$ ), так и на больших ( $T \gg \Lambda$ ) временах. Регуляризация (3.56) восстанавливает правильные пределы интегрирования и убирает нефизический квадратичный рост на малых временах, однако не сказывается на асимптотическом поведении петлевых поправок в бесконечном будущем. В промежуточной области эти асимптотики соединяются гладкой функцией, которую можно вычислить численно (Рис. 3.3).

Наконец, заметим, что в пределе  $\Lambda \to \infty$  и  $P = \frac{\pi p}{\Lambda} = \text{const}$  задача двух зеркал качественно воспроизводит случай одного зеркала, рассмотренный в [62]. В обоих случаях квантовые средние одинаковым образом (квадратично) растут вместе со временем эволюции, хотя зависимость префактора этого роста от скорости зеркал немного отличается:  $n_{pq} \sim \frac{\beta^2}{(1+\beta)^2} \frac{S_{pq}}{\sqrt{pq}} (\lambda T)^2$  в случае одиночного зеркала и  $n_{pq} \sim \beta^2 \frac{S_{pq}}{\sqrt{pq}} (\lambda T)^2$  в случае двух зеркал. Для малых начальных скоростей,  $|\beta| \ll 1$ , разница между этими двумя случаями полностью стирается.

### 3.3.4 Синхронизированные толчки

Другой примечательный способ подстройки траекторий — случай синхронизированных толчков $^5$ , соединенных светоподобным лучом ( $t_L = t_R + \Lambda$  в обозначениях (3.28)):

$$L(t) = \beta(t - \Lambda)\theta(t - \Lambda), \quad R(t) = \Lambda + \beta t\theta(t). \tag{3.64}$$

В этом случае статические регионы F и G совпадают, что существенно упрощает вывод G(z). В самом деле, в этом случае функция может испытывать только один излом в точке  $z=\Lambda$ :

$$G(z) = \frac{1-\beta}{1+\beta} \frac{z}{\Lambda} + \frac{2\beta}{1+\beta},$$
 для  $z > \Lambda.$  (3.65)

Более того, путем несложных рассуждений можно показать, что  $F(z)=\frac{z}{\Lambda}$  для всех z.

Напомним, что нас в первую очередь интересует будущая асимптотика квантовых средних  $n_{pq}(T)$  и  $\varkappa_{pq}(T)$ . Для этих целей достаточно рассмотреть времена  $t>\frac{2\Lambda}{1-\beta}$ , для которых моды (3.18) имеют следующий вид:

$$g_n(t,x) = \frac{i}{\sqrt{4\pi n}} e^{-i\pi n(1-\beta)\frac{t}{\Lambda} - i\pi n\beta} \left[ e^{-i\pi n\frac{1-\beta}{1+\beta}\frac{\delta}{\Lambda}} - e^{i\pi n\frac{\delta}{\Lambda}} \right], \tag{3.66}$$

где  $\delta \equiv x - L(t)$  и  $0 < \delta < (1+\beta)\Lambda$  для всех  $t > \frac{2\Lambda}{1-\beta}$ . Подставляя эту функцию в интегралы (3.33) и (3.34), получаем, что ни  $n_{pq}$ , ни  $\varkappa_{pq}$  не могут расти в пределе  $T \to \infty$ :

$$n_{pq}(T) \approx 2\lambda^{2} \int_{\frac{2\Lambda}{1-\beta}}^{T} dt_{1} \int_{\frac{2\Lambda}{1-\beta}}^{T} dt_{2} \sum_{m,n,k=1}^{\infty} e^{-i\pi(1-\beta)(p+m+n+k)\frac{t_{1}}{\Lambda}} e^{i\pi(1-\beta)(q+m+n+k)\frac{t_{2}}{\Lambda}} C(p,q,m,n,k) \sim \lambda^{2} \Lambda^{4},$$
(3.67)

$$\varkappa_{pq}(T) \approx 2\lambda^2 \int_{\frac{2\Lambda}{1-\beta}}^T dt_1 \int_{\frac{2\Lambda}{1-\beta}}^{t_1} dt_2 \sum_{m,n,k=1}^{\infty} e^{i\pi(1-\beta)(p+m+n+k)\frac{t_1}{\Lambda}} e^{i\pi(1-\beta)(q+m+n+k)\frac{t_2}{\Lambda}} D(p,q,m,n,k) \sim \lambda^2 \Lambda^4.$$
(3.68)

Здесь мы ввели функции C и D, которые зависят от импульсов, но не зависят от внешних времен  $t_1$  и  $t_2$ :

$$C(p,q,m,n,k) = \int_0^{\Lambda} d\delta_1 \int_0^{\Lambda} d\delta_2 \, \tilde{g}_{p,1} \tilde{g}_{q,2}^* \tilde{g}_{m,1} \tilde{g}_{n,1} \tilde{g}_{k,1} \tilde{g}_{m,2}^* \tilde{g}_{n,2}^* \tilde{g}_{k,2}^*, \tag{3.69}$$

$$D(p,q,m,n,k) = \int_0^{\Lambda} d\delta_1 \int_0^{\Lambda} d\delta_2 \left( \tilde{g}_{p,1}^* \tilde{g}_{q,2}^* + \tilde{g}_{q,1}^* \tilde{g}_{p,2}^* \right) \tilde{g}_{m,1} \tilde{g}_{n,1} \tilde{g}_{k,1}^* \tilde{g}_{m,2}^* \tilde{g}_{n,2}^* \tilde{g}_{k,2}^*, \tag{3.70}$$

 $<sup>^5</sup>$ Синхронизировать можно и вдоль луча  $u={\rm const},$  то есть положить  $t_L+\Lambda=t_R.$  Это движение имеет те же свойства, что и (3.64).

где  $\tilde{g}_{p,n} = \frac{i}{\sqrt{4\pi n}} e^{-i\pi n\beta} \left[ e^{-i\pi n\frac{1-\beta}{1+\beta}\frac{\delta}{\Lambda}} - e^{i\pi n\frac{\delta}{\Lambda}} \right]$ . Для последних равенств в выражениях (3.67) и (3.68) мы учли, что эти интегралы ограничены (в них нет сингулярных вкладов, потому что аргументы экспонент никогда не обращаются в ноль), а сумма по виртуальным импульсам сходится:

$$|C(p,q,m,n,k)| \sim |D(p,q,m,n,k)| \lesssim \frac{1}{\pi^4 \sqrt{pq}} \frac{\Lambda^2}{mnk}, \quad \text{следовательно},$$
 
$$\sum_{m,n,k=1}^{\infty} \frac{\Lambda^2 \times [C \text{ or } D]}{(p+m+n+k)(q+m+n+k)} \sim \sum_{m,n,k=1}^{\infty} \frac{\Lambda^4}{(p+m+n+k)(q+m+n+k)mnk} < \infty.$$

Заметим, что безразмерные коэффициенты пропорциональности в равенствах (3.67) и (3.68) включают в себя скорость  $\beta$ .

К тому же самому выводу можно было прийти и в рамках подхода раздела 3.3.2. В самом деле, для синхронизированных толчков находим, что функции  $g(y) = \frac{1+\beta}{1-\beta}\Lambda y - \frac{2\beta\Lambda}{1-\beta}$  и  $g'(y) = \frac{1+\beta}{1-\beta}\Lambda$  при  $y > y_* = 2$ . Следовательно, единственный отличный от нуля коэффициент ряда Фурье — это  $g_0 = \frac{1+\beta}{1-\beta}\Lambda$ . В то же время, в нашем случае все частоты строго положительны, то есть p+m+n+k>0 для всех p,m,n,k. Следовательно, получить ненулевые вклады в сумму по виртуальным импульсам в интегралах (3.41) и (3.42) было невозможно. Это значит, что  $n_{pq}$  и  $\varkappa_{pq}$  не получают растущих со временем петлевых поправок.

Подчеркнем, что разница между синхронизированным  $(t_L = t_R \pm \Lambda)$  и рассинхронизированным  $(t_L \neq t_R \pm \Lambda)$ , например  $t_L = t_R$ ) движением зеркал проявляется уже на древесном уровне [9]. А именно, можно показать, что в случае синхронизированных толчков древесный тенор энергии-импульса получает ненулевые вклады только в промежуточной области,  $0 < t < \Lambda$  (движение, рассмотренное в [9], выглядит сложнее, чем (3.64), однако вычисления в обоих случаях по существу совпадают).

Примечательно, что это отличие сохраняется и на петлевом уровне: если толчки синхронизированы, то и древесный, и двухпетлевой вклады в тензор энергии-импульса пренебрежимо малы на больших временах эволюции, тогда как в случае рассинхронизированных толчков оба этих вклада существенны. В самом деле, напомним, что поток тензора энергииимпульса связан с точным келдышевским пропагатором следующим соотношением:

$$\langle T_{tx} \rangle = \partial_{t_1} \partial_{x_2} G_{12}^K \big|_{t_1 = t_2, x_1 = x_2},$$
 (3.71)

а потому содержит петлевые поправки к квантовым средним  $n_{pq}$  и  $\varkappa_{pq}$ . Это отличие между синхронизированным и рассинхронизированным случаем также означает, что в этих двух случаях квантовое состояние системы по-разному эволюционирует.

С точки зрения разделов 3.3.1 и 3.3.2, разницу между синхронизированным и рассинхронизированным движением можно объяснить следующим образом. Во-первых, в случае

синхронизированных толчков число отражений от левого и правого зеркал всегда отличается на единицу. Во-вторых, условия синхронизации означают, что  $R(t_{2i-1}) - L(t_{2i}) = \Lambda$  для  $i = 1, \cdots, n-1$ . Следовательно, какой-либо существенный вклад в функцию (3.25) может внести только самая первая точка отражения. Наконец, напомним, что мы рассматриваем асимптотически стационарное движение, то есть предполагаем, что  $\dot{L}(t) = \dot{R}(t) = \beta$  для  $t > t_*$ . Вместе эти наблюдения приводят к тому, что функция G(z) является чисто линейной при  $z > z_*$ , а g'(y) постоянна при  $y > y_*$ . Следовательно, все коэффициенты Фурье (3.38), кроме нулевого, в точности равны нулю, а интегралы (3.41) и (3.42) не могут получать секулярно растущие петлевые поправки. Те же аргументы работают и для более сложного синхронизированного движения — например, случая, когда второй толчок применяется не сразу, а через несколько отражений сигнала, созданного первым толчком.

Другими словами, точная подстройка толчков восстанавливает закон сохранения энергии в бесконечном будущем несмотря на нестационарность движения. В свою очередь, этот закон приводит к нулевому интегралу столкновения и запрещает секулярный рост петлевых поправок (сравните с приложением А). Без синхронизации эта аргументация не работает, закон сохранения энергии нарушается, и секулярный рост становится возможен.

### 3.3.5 Резонансная полость

Наконец, применим подход раздела 3.3.2 к одномерной полости, осциллирующей с резонансной частотой:

$$L(t > 0) = \epsilon \Lambda \sin\left(\frac{s\pi t}{\Lambda}\right),$$

$$R(t > 0) = \Lambda + \epsilon \Lambda \sin\left(\frac{s\pi t}{\Lambda} + \varphi\right) - \epsilon \Lambda \sin\varphi,$$
(3.72)

где  $\epsilon \ll 1$  — некий малый параметр,  $s \in \mathbb{N}$  определяет частоту осцилляций и  $\varphi$  — разница фаз колебаний. Из соображений наглядности выберем  $\varphi = 0$  (что отвечает полости, движущейся как целое) и s = 2 (минимальный нетривиальный случай). В этом случае функции G(z) и F(z) имеют следующий вид [111,112]:

$$G(z) = \frac{z}{\Lambda} - 2\epsilon \sin \frac{2\pi z}{\Lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \theta \left( \frac{z}{\Lambda} - (2n-1) \right) - \theta \left( \frac{z}{\Lambda} - 2n \right) \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2),$$

$$F(z) = \frac{z}{\Lambda} + 2\epsilon \sin \frac{2\pi z}{\Lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \theta \left( \frac{z}{\Lambda} - 2n \right) - \theta \left( \frac{z}{\Lambda} - (2n+1) \right) \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$
(3.73)

Это решение справедливо для сравнительно больших аргументов $^6$ ,  $\Lambda/\epsilon \ll z \ll \Lambda/\epsilon^2$ . Можно заметить, что в этом случае отклонение функций G(z) и F(z) от линейной функции  $z/\Lambda$ 

 $<sup>\</sup>overline{\phantom{a}}^{6}$ Обратите внимание, что наивный подход, основанный на пертурбативном разложении по  $\epsilon$ , работает только для  $z \ll \Lambda/\epsilon$ , потому что при больших аргументах выражения (3.73) получают секулярно растущие

периодичны. Следовательно, подход раздела 3.3.2 можно применять даже несмотря на то, что движение зеркал не однородно на больших временах. Обратные функции в этом случае также можно вычислить с точностью до того же порядка по  $\epsilon$ :

$$\frac{g(y)}{\Lambda} = y + 2\epsilon \sin(2\pi y) \sum_{n=1}^{\infty} \left[\theta\left(y - (2n - 1)\right) - \theta\left(y - 2n\right)\right] + \mathcal{O}(\epsilon^{2}),$$

$$\frac{f(y)}{\Lambda} = y - 2\epsilon \sin(2\pi y) \sum_{n=0}^{\infty} \left[\theta\left(y - 2n\right) - \theta\left(y - (2n + 1)\right)\right] + \mathcal{O}(\epsilon^{2}).$$
(3.74)

Это приближение хорошо работает для  $y \ll 1/\epsilon^2$ . Теперь легко заметить, что высшие коэффициенты Фурье отличны от нуля:

$$g_n = \epsilon \Lambda \frac{-4in}{n^2 - 4} \frac{1 - (-1)^n}{2}$$
, для  $n \neq -2, 0, 2$ ;  $g_0 = \frac{1}{2} \Lambda$ , и  $g_{\pm 2} = \pi \epsilon \Lambda$ . (3.75)

Следовательно, в этом случае квантовые средние также получают секулярно растущие петлевые поправки, существенные на временах  $\Lambda/\epsilon \ll t \ll \Lambda/\epsilon^2$ :

$$n_{pq}(T) \approx (\lambda \epsilon \Lambda T)^2 \frac{S_{p,q}}{8\pi^4 \sqrt{pq}},$$
 (3.76)

$$\varkappa_{pq}(T) \approx -(\lambda \epsilon \Lambda T)^2 \frac{S_{-p,q} + S_{p,-q}}{16\pi^4 \sqrt{pq}}.$$
(3.77)

Здесь мы пренебрегли сублидирующими,  $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ , и осциллирующими вкладами. Также мы ввели краткое обозначение для суммы по виртуальным импульсам:

$$S_{p,q} = \sum_{m,n,k=1}^{\infty} \frac{\left(1 - (-1)^{p+m+n+k}\right) \left(1 - (-1)^{q+m+n+k}\right)}{4mnk} \frac{p+m+n+k}{(p+m+n+k)^2 - 4} \frac{q+m+n+k}{(q+m+n+k)^2 - 4}.$$
(3.78)

Таким образом, мы показали, что для взаимодействующего безмассового скалярного поля на фоне резонансно осциллирующих зеркал квантовые средние, келдышевский пропагатор и поток тензора энергии-импульса получают секулярно растущие петлевые поправки. Это указывает на изменение квантового состояния системы. Также это означает, что петлевые поправки могут сказываться на рождении частиц в резонансной полости. Тем не менее, подчеркнем, что окончательный вывод об изменении состояния и числа родившихся частиц можно сделать только после суммирования лидирующих секулярно растущих вкладов из всех петель.

поправки вида  $\epsilon^n t^m$ . Лидирующие поправки вида  $\epsilon^n t^n$  могут быть пересуммированны с помощью ренормгрупповой техники, описанной в [111,112]. Тем не менее, в случае s=2 конструктивная интерференция не происходит, а пересуммирование секулярных поправок не приносит ничего нового. Поэтому в этом случае область применимости выражений (3.73) можно просто расширить на  $\Lambda/\epsilon \ll z \ll \Lambda/\epsilon^2$ .

### 3.4 Одиночное полупрозрачное зеркало

В этом разделе мы вычислим петлевые поправки к динамическому эффекту Казимира на фоне одиночного полупрозрачного зеркала. Сначала мы обсудим квантование двумерного безмассового скалярного поля на таком фоне, моделируя зеркало дельта-функциональным барьером. Затем, используя полученное разложение по модам, мы вычислим двухпетлевую поправку к заселенности уровней и аномальному квантовому среднему. Для простоты в этом разделе мы также будем рассматривать "сломанную" траекторию зеркала (3.28).

### 3.4.1 Квантование свободных полей

Рассмотрим свободное двумерное безмассовое скалярное поле на фоне дельта-функционального барьера:

$$S = \int d^2x \left[ \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{\alpha}{2} \delta \left( \frac{x - x(t)}{\sqrt{1 - \beta^2(t)}} \right) \phi^2 \right], \tag{3.79}$$

где функция x(t) задает положение зеркала в момент времени  $t,\,\beta(t)\equiv\frac{dx(t)}{dt}$  — скорость зеркала  $(|\beta(t)|<1$  для всех t) и  $\alpha$  — коэффициент, который контролирует "идеальность" зеркала (зеркало становится идеально отражающим в пределе  $\alpha\to\infty$  и полностью прозрачным при  $\alpha=0$ ). Квантованное поле раскладываем по модам:

$$\phi(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} \left[ a_p g_p(t,x) + a_p^{\dagger} g_p^*(t,x) \right]. \tag{3.80}$$

Здесь  $a_p^{\dagger}$  и  $a_p$  подчиняются стандартным бозонным коммутационным отношениям,  $\left[a_p,a_q^{\dagger}\right]=2\pi\delta(p-q)$ ; моды  $g_p$  решают соответствующее уравнение движения (3.3) и удовлетворяют условиям нормировки:

$$(g_p, g_q) = \delta(p - q), \quad (g_p, g_q^*) = 0,$$
 (3.81)

относительно скалярного произведения Клейна — Гордона [11,15]:

$$(f,h) \equiv -i \int_{-\infty}^{\infty} dx \Big[ f(t,x) \partial_t h^*(t,x) - h^*(t,x) \partial_t f(t,x) \Big].$$
 (3.82)

Заметим, что при условии выполнения (3.80) и (3.81) канонические коммутационные соотношения,  $[\phi(t,x),\partial_t\phi(t,y)]=i\delta(x-y)$ , автоматически выполнены. Также заметим, что в случае идеального зеркала ( $\alpha=\infty$ ) правая часть этого тождества содержит дополнительные граничные члены, возникающие из-за некорректного ультрафиолетового поведения зеркала [62,123]. Ниже мы покажем, что в случае неидеального зеркала отраженные волны пренебрежимо малы в ультрафиолетовом пределе, то есть высокочастотные моды ведут себя

как обычные плоские волны. Следовательно, теория с полупрозрачным зеркалом не страдает от проблем теории с идеальным зеркалом.

В работе [122] было показано, что моды, удовлетворяющие перечисленным выше условиям, можно записать в виде суммы отраженной и прошедшей волны:

$$g_{p}(t,x) = \theta(p) \left[ \theta\left(x(t) - x\right) \left( \frac{e^{-i\omega u}}{\sqrt{2\omega}} - R_{\omega}^{L}(v) \frac{e^{-i\omega f(v)}}{\sqrt{2\omega}} \right) + \theta\left(x - x(t)\right) T_{\omega}^{R}(u) \frac{e^{-i\omega u}}{\sqrt{2\omega}} \right] + \theta\left(-p\right) \left[ \theta\left(x - x(t)\right) \left( \frac{e^{-i\omega v}}{\sqrt{2\omega}} - R_{\omega}^{R}(u) \frac{e^{-i\omega g(u)}}{\sqrt{2\omega}} \right) + \theta\left(x(t) - x\right) T_{\omega}^{L}(v) \frac{e^{-i\omega v}}{\sqrt{2\omega}} \right],$$

$$(3.83)$$

где  $\omega \equiv |p|$ ,  $u \equiv t-x$  и v=t+x — координаты светового конуса, а функции f, g выбраны таким образом, чтобы равенства f(v)=u, g(u)=v выполнялись, когда точка (u,v) движется вдоль траектории зеркала (то есть когда  $u=t-x(t),\ v=t+x(t)$ ). В этих обозначениях положительно(отрицательно)-частотные моды отвечают волнам, бегущим вправо(влево). Коэффициенты отражения и прохождения на зеркале фиксируются условиями сшивки, которые устанавливают следующие равенства (здесь мы дополнительно предположили, что скорость зеркала в бесконечном будущем постоянна):

$$R_{\omega}^{R}(\tau) = \frac{\alpha}{2} \int_{-\infty}^{\tau} d\tau' \exp\left[i\omega \left(v(\tau) - v(\tau')\right) - \frac{\alpha}{2}(\tau - \tau')\right], \qquad T_{\omega}^{L}(\tau) = 1 - R_{\omega}^{R}(\tau),$$

$$R_{\omega}^{L}(\tau) = \frac{\alpha}{2} \int_{-\infty}^{\tau} d\tau' \exp\left[i\omega \left(u(\tau) - u(\tau')\right) - \frac{\alpha}{2}(\tau - \tau')\right], \qquad T_{\omega}^{R}(\tau) = 1 - R_{\omega}^{L}(\tau),$$
(3.84)

где  $\tau(t)=\tau_0+\int_{t_0}^t dt \sqrt{1-\beta^2(t)}$  — собственное время зеркала, а функции  $u(\tau), v(\tau)$  обозначают соответствующие координаты на зеркале. Также мы переписали коэффициенты R и T как функции  $\tau$  с помощью соотношений  $u=u(\tau), \ v=v(\tau)$ . Заметим, что для времениподобных траекторий функции  $u(\tau)$  и  $v(\tau)$  являются обратимыми. Следовательно, можно определить собственные времена  $\tau_u$  и  $\tau_v$  такие, что  $u(\tau_u)=u$  и  $v(\tau_v)=v$ . В сущности, это собственные времена проекции точки (u,v) на зеркало вдоль линий  $u={\rm const}$  и  $v={\rm const},$  соответственно. Используя эти обозначения, можно восстановаить коэффициенты R и T для произвольной точки пространства-времени:  $R_\omega^L(v)=R_\omega^L(\tau_v), \ R_\omega^R(u)=R_\omega^R(\tau_u), \ T_\omega^L(v)=T_\omega^L(\tau_v), \ T_\omega^R(u)=T_\omega^R(\tau_u).$ 

Заметим, что в пределе  $\omega \gg \alpha$  коэффициенты отражения стремятся к нулю из-за быстрых осцилляций подынтегральных выражений (3.84). Следовательно, в ультрафиолетовом пределе отраженными волнами можно пренебречь, то есть моды (3.83) сводятся к обычным плоским волнам. Другими словами, в ультрафиолетовом пределе неидеальное зеркало исчезает, поэтому ультрафиолетовые перенормировки можно выполнить так же, как в пустом пространстве.

Разумеется, для произвольных траекторий коэффициенты (3.84) вычислить очень сложно, поэтому нам придется сделать какое-нибудь приближение, которое заметно упрощает

вычисления. Для этого заметим, что для однородной траектории с постоянной скоростью  $x(t)=\beta t$  интегралы в (3.84) легко берутся:

$$R_{\omega}^{R,L}(\tau) = \frac{\alpha/2}{\alpha/2 - i\omega D_{\beta}^{\pm}},$$
 где  $D_{\beta}^{\pm} = \sqrt{\frac{1 \pm \beta}{1 \mp \beta}}.$  (3.85)

Здесь  $D_{\beta}^{\pm}$  — доплеровские множители для волн, падающих на зеркало слева(справа), поэтому формула (3.85) имеет прозрачный физический смысл. Теперь заметим, что интегралы (3.84) в основном набираются на интервале  $0 < \tau - \tau' < \frac{1}{\alpha}$  из-за экспоненциального затухания подынтегрального выражения. В то же время, траекторию x(t) в интегралах (3.84) на отрезке  $0 < \tau - \tau' \ll \frac{\alpha v'(\tau)}{v''(\tau)} \approx \frac{\alpha}{\gamma^3(t)|\ddot{x}(t)|}$  можно приблизить прямой линией. Следовательно, для траекторий со сравнительно небольшим собственным ускорением,  $|w(t)| = \gamma^3(t) |\ddot{x}(t)| \ll \alpha$ , коэффициент отражения можно приблизить формулой (3.85):

$$R_{\omega}^{R,L}(\tau) \approx \frac{\alpha/2}{\alpha/2 - i\omega D_{\beta}^{\pm}(\tau)} + \mathcal{O}\left(\frac{w}{\alpha}\right), \quad \text{где} \quad D_{\beta}^{\pm}(\tau) = \sqrt{\frac{1 \pm \beta(\tau)}{1 \mp \beta(\tau)}}.$$
 (3.86)

Как мы установили в разделе 3.2, для реалистичных зеркал "коэффициент идеальности" составляет порядка  $\alpha \sim 10^{1\div 5}~{\rm cm}^{-1}$ . Это значит, что приближенная формула для коэффициентов отражения и прохождения работает вплоть до собственных ускорений порядка  $w \sim c^2 \alpha \sim 10^{20\div 24}~{\rm m/c^2}$ . Следовательно, для большинства практических приложений поправками к (3.85) можно пренебречь (хотя в некоторых экспериментах по плазменному ускорению удалось достичь таких больших ускорений w [136], в этих экспериментах речь о проверке динамического эффекта Казимира не идет).

### 3.4.2 Петлевые поправки

В этом разделе мы вычислим петлевые поправки к заселенности уровней и аномальному квантовому среднему в модели (3.79), используя моды (3.83) с приближенными коэффициентами отражения (3.86). Как и в случае резонансной полости, рассмотрим стандартную для скалярных полей квартичную нелинейность  $\lambda \phi^4$ :

$$S = \int d^2x \left[ \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{\alpha}{2} \delta \left( \frac{x - x(t)}{\sqrt{1 - \beta^2(t)}} \right) \phi^2 - \frac{\lambda}{4} \phi^4 \right]. \tag{3.87}$$

Чтобы выделить лидирующие секулярно растущие петлевые поправки, будем работать в пределе малой константы связи и большого времени эволюции,  $\lambda \to 0, T \to \infty, \lambda T = \text{const.}$  Напомним, что в этом пределе лидирующие поправки к  $n_{pq}$  и  $\varkappa_{pq}$  задаются следующими

выражениями:

$$n_{pq}(T) \approx 2\lambda^2 \int d^2x_1 d^2x_2 \,\theta\left(T - t_1\right) \theta\left(T - t_2\right) g_{p,1} g_{q,2}^* \left[ \int \frac{dk}{2\pi} g_{k,1} g_{k,2}^* \right]^3,$$
 (3.88)

$$\varkappa_{pq}(T) \approx -2\lambda^2 \int d^2x_1 d^2x_2 \,\theta\left(T - t_1\right) \theta\left(t_1 - t_2\right) \left[g_{p,1}^* g_{q,2}^* + g_{p,2}^* g_{q,1}^*\right] \left[\int \frac{dk}{2\pi} g_{k,1} g_{k,2}^*\right]^3. \tag{3.89}$$

Аналогично случаю двух зеркал (раздел 3.3.2), плотность уровней (3.88) можно переписать через произведение двух интегралов:

$$n_{pq} \approx 2\lambda^2 \int \frac{dk_1 dk_2 dk_3}{(2\pi)^3} I_p(T) I_q^*(T),$$
 (3.90)

где мы ввели краткое обозначение:

$$I_p(T) = \int_{t_0}^T dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \, g_{p,1} g_{k_1,1} g_{k_2,1} g_{k_3,1}, \quad \text{где} \quad g_{p,n} \equiv g_p(t_n, x_n). \tag{3.91}$$

Выделим из интеграла  $I_p(T)$  секулярно растущие вклады. Подобные вклады могут возникуть только тогда, когда интеграл сводится к произведению функций, зависящих от одного аргумента и отличных от нуля на одном и том же интервале. В противном случае, то есть когда интеграл зависит и от u, и от v, итоговое выражение будет осциллировать или затухать в пределе  $T \to \infty$ . Следовательно, такие члены не могут вносить вклад в секулярный рост и могут быть отброшены. Вкладами вида  $\mathcal{O}(w/\alpha)$  на практике тоже можно пренебречь.

Таким образом, в указанном приближении получаем, что  $I_p(T)$  линейно растет со временем:

$$I_p(T) = \frac{iT}{4\sqrt{|pk_1k_2k_3|}\left(|p| + |k_1| + |k_2| + |k_3|\right)}g(p, k_1, k_2, k_3). \tag{3.92}$$

Здесь мы разделили общий универсальный множитель и переменный член, который состоит из восьми различных произведений кусков мод:

$$g(p, k_{1}, k_{2}, k_{3}) = \left[\theta(p)\theta(k_{1})\theta(k_{2})\theta(k_{3}) + \theta(-p)\theta(-k_{1})\theta(-k_{2})\theta(-k_{3})\right] \times \left[T_{|p|}T_{|k_{3}|}T_{|k_{2}|}T_{|k_{1}|} + R_{|p|}R_{|k_{3}|}R_{|k_{2}|}R_{|k_{1}|} - \left(T_{|p|}^{-c}T_{|k_{3}|}^{-c}T_{|k_{2}|}^{-c}T_{|k_{1}|}^{-c} + R_{|p|}^{-c}R_{|k_{3}|}^{-c}R_{|k_{2}|}^{-c}R_{|k_{1}|}^{-c}[D_{\beta}^{c}]^{2}\right)e^{-is(T-cx(T))} + \left(\frac{1}{2}\int_{0}^{T-cx(T)}d[-isu]T_{|p|}^{-c}(u)T_{|k_{3}|}^{-c}(u)T_{|k_{2}|}^{-c}(u)T_{|k_{1}|}^{-c}(u)e^{-isu} + \int_{0}^{T+cx(T)}d[-isv]R_{|p|}^{-c}(v)R_{|k_{3}|}^{-c}(v)R_{|k_{2}|}^{-c}(v)R_{|k_{1}|}^{-c}(v)e^{-is(2t_{v}-v)}\right] + \sum_{\{p\}}J_{u,v}^{\{p\}},$$

где  $c=\mathrm{sgn}(p),\ s=|p|+|k_1|+|k_2|+|k_3|$ , а времена  $t_u$  и  $t_v$  решают уравнения  $u=t_u-x(t_u)$  и  $v=t_v+x(t_v)$ . Также мы ввели крактие обозначения для коэффициентов прохождения и отражения стационарного зеркала:  $T_\omega=\frac{2i\omega}{2i\omega-\alpha},\ R_\omega=\frac{\alpha}{2i\omega-\alpha}$ , и движущегося зеркала:  $T_\omega^c(u)=\frac{2i\omega}{2i\omega-\alpha}$ 

 $\frac{2i\omega D_{\beta}^{c}(u)}{2i\omega D_{\beta}^{c}(u)-\alpha}$ ,  $R_{\omega}^{c}(u)=\frac{\alpha}{2i\omega D_{\beta}^{c}(u)-\alpha}$ . Эти коэффициенты связаны с частями траектории при t<0 и t>0, соответственно. Для краткости в (3.93) мы привели только четыре секулярно растущих члена, которые отвечают одной комбинации кусков мод; остальные включены в  $\sum_{\{p\}} J_{u,v}^{\{p\}}$  и имеют такую же структуру. Чтобы описать оставшиеся члены, введем два вспомогательных интеграла:

$$Int_{1} = \left[\theta(-p)\theta(k_{1})\theta(k_{2})\theta(k_{3}) + \theta(p)\theta(-k_{1})\theta(-k_{2})\theta(-k_{3})\right] \times \left[R_{|p|}T_{|k_{3}|}T_{|k_{2}|}T_{|k_{1}|} + T_{|p|}R_{|k_{3}|}R_{|k_{2}|}R_{|k_{1}|} - \frac{s}{s + \frac{2|p|}{1 + c\beta}}R_{|p|}^{c}T_{|k_{3}|}^{-c}T_{|k_{2}|}^{-c}T_{|k_{1}|}^{-c}e^{-i(|k_{1}| + |k_{2}| + |k_{3}|)(T - cx(T)) - i|p|(T + cx(T))} + \frac{s}{s + \frac{2|p|}{1 + c\beta}}T_{|p|}^{c}R_{|k_{3}|}^{-c}R_{|k_{2}|}^{-c}R_{|k_{1}|}^{-c}\left[D_{\beta}^{-c}\right]^{2}e^{-i(|k_{1}| + |k_{2}| + |k_{3}|)(T - cx(T)) - i|p|(T + cx(T))} + \int_{0}^{T - cx(T)}d[-isu]R_{|p|}^{c}(u)T_{|k_{3}|}^{-c}(u)T_{|k_{2}|}^{-c}(u)T_{|k_{1}|}^{-c}(u)e^{-i(|k_{1}| + |k_{2}| + |k_{3}|)u - i|p|v(u)} + \int_{0}^{T + cx(T)}d[-isv]T_{|p|}^{c}(v)R_{|k_{3}|}^{-c}(v)R_{|k_{2}|}^{-c}(v)R_{|k_{1}|}^{-c}(v)e^{-i(|k_{1}| + |k_{2}| + |k_{3}|)u(v) - i|p|v}\right],$$

$$(3.94)$$

$$Int_{2} = [\theta(p)\theta(k_{1})\theta(-k_{2})\theta(-k_{3}) + \theta(-p)\theta(-k_{1})\theta(k_{2})\theta(k_{3})] \times$$

$$\times \left[ R_{|p|}T_{|k_{3}|}T_{|k_{2}|}R_{|k_{1}|} + T_{|p|}R_{|k_{3}|}R_{|k_{2}|}T_{|k_{1}|} - \frac{s}{s + \frac{2(|p| + |k_{1}|)}{1 + c\beta}} R_{|p|}^{c}T_{|k_{3}|}^{-c}T_{|k_{2}|}^{-c}R_{|k_{1}|}^{c}e^{-i(|k_{2}| + |k_{3}|)(T - cx(T)) - i(|p| + |k_{1}|)(T + cx(T))} + \right.$$

$$- \frac{s}{s + \frac{2(|p| + |k_{1}|)}{1 + c\beta}} T_{|p|}^{c}R_{|k_{3}|}^{-c}R_{|k_{2}|}^{-c}T_{|k_{1}|}^{c}[D_{\beta}^{-c}]^{2}e^{-i(|k_{2}| + |k_{3}|)(T - cx(T)) - i(|p| + |k_{1}|)(T + cx(T))} +$$

$$+ \int_{0}^{T - cx(T)} d[-isu]R_{|p|}^{c}(u)T_{|k_{3}|}^{-c}(u)T_{|k_{2}|}^{-c}(u)R_{|k_{1}|}^{c}(u)e^{-i(|k_{2}| + |k_{3}|)u - i(|k_{1}| + |p|)v(u)} +$$

$$+ \int_{0}^{T + cx(T)} d[-isv]T_{|p|}^{c}(v)R_{|k_{3}|}^{-c}(v)R_{|k_{2}|}^{-c}(v)T_{|k_{1}|}^{-c}(v)e^{-i(|k_{2}| + |k_{3}|)u(v) - i(|k_{1}| + |p|)v} \right],$$

$$(3.95)$$

где  $c = \operatorname{sgn}(p)$ ,  $s = |p| + |k_1| + |k_2| + |k_3|$ ,  $v(u) = t_u + x(t_u)$ ,  $u(v) = t_v - x(t_v)$ . Тогда итоговое выражение для функций J следующим образом записывается через вспомогательные интегралы:

$$\sum_{\{p\}} J_{u,v}^{\{p\}} = Int_1 + Int_1(p \leftrightarrow k_1) + Int_1(p \leftrightarrow k_2) + Int_1(p \leftrightarrow k_3) + Int_2 + Int_2(k_1 \leftrightarrow k_2) + Int_2(k_1 \leftrightarrow k_3).$$
(3.96)

Для произвольной траектории зеркала аналитически вычислить интегралы (3.93) нельзя. Тем не менее, в случае "сломанной траектории" (3.28) большая часть осциллирующих вкладов сокращается, и интеграл заметно упрощается. Грубо говоря, такие осциллирующие вклады отличны от нуля только в областях пространства-времени, которые причинно связаны с отрезками ускоренного движения зеркал. Для "сломанной" траектории такие области

вырождаются в линии, поэтому интегралы в  $g(p, k_1, k_2, k_3)$  легко берутся:

$$g(p, k_{1}, k_{2}, k_{3}) = \left[\theta(p)\theta(k_{1})\theta(k_{2})\theta(k_{3}) + \theta(-p)\theta(-k_{1})\theta(-k_{2})\theta(-k_{3})\right] \times \left[T_{|p|}T_{|k_{3}|}T_{|k_{2}|}T_{|k_{1}|} + R_{|p|}R_{|k_{3}|}R_{|k_{2}|}R_{|k_{1}|} - T_{|p|}^{-c}T_{|k_{3}|}^{-c}T_{|k_{2}|}^{-c}T_{|k_{1}|}^{-c} - R_{|p|}^{-c}R_{|k_{3}|}^{-c}R_{|k_{2}|}^{-c}R_{|k_{1}|}^{-c}(D_{\beta}^{c})^{2}\right] + \sum_{\{p\}} J_{u,v}^{\{p\}}.$$

$$(3.97)$$

Здесь  $J_{u,v}^{\{p\}}$  снова обозначает оставшиеся члены с аналогичной структурой. Подставляя полученное выражение для интеграла  $I_p(T)$  в заселенность уровней (3.90), находим:

$$n_{pq} = \frac{(\lambda T)^2}{8\sqrt{|pq|}} \int \frac{dk_1 dk_2 dk_3}{(2\pi)^3 |k_1 k_2 k_3|} \frac{g(p, k_1, k_2, k_3)g^*(q, k_1, k_2, k_3)}{(|p| + |k_1| + |k_2| + |k_3|)(|q| + |k_1| + |k_2| + |k_3|)} + \mathcal{O}(\lambda^2 T). \quad (3.98)$$

Отметим, что интеграл по виртуальным импульсам сходится. С одной стороны, для больших импульсов зеркало становится прозрачным, поэтому интеграл сводится к интегралу по стандартным модам пустого пространства-времени. С другой стороны, для малых импульсов мы можем ввести естественное инфракрасное обрезание  $p \sim \frac{1}{\Lambda}$  с прозрачным физическим смыслом (см. раздел 3.3). Также можно проверить, что этот интеграл отличен от нуля, если движение зеркало неоднородно.

Вычисление петлевой поправки к аномальному квантовому среднему (3.89) существенно не отличается от вычисления поправки к заселенности уровней. В самом деле, в лидирующем приближении  $\varkappa_{pq}$  имеет следующий вид:

$$\varkappa_{pq} = -2\lambda^2 \int \frac{dk_1 dk_2 dk_3}{(2\pi)^3} \int_{t_0}^T dt_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 g_{k_1,1} g_{k_2,1} g_{k_3,1} \left[ g_{p,1}^* I_q^*(t_1) + g_{q,1}^* I_p^*(t_1) \right]. \tag{3.99}$$

Следовательно, итоговое выражение для аномального квантового среднего также пропорционально  $T^2$ :

$$\varkappa_{pq} = -\frac{(\lambda T)^2}{32\sqrt{|pq|}} \int \frac{dk_1 dk_2 dk_3}{(2\pi)^3 |k_1 k_2 k_3|} h(p, q, k_1, k_2, k_3) + \mathcal{O}(\lambda^2 T), \tag{3.100}$$

где функцию  $h(p,q,k_1,k_2,k_3)$  можно восстановить, вычисляя интеграл (3.99). Этот интеграл сходится и отличен от нуля по тем же причинам, что и интеграл (3.98) для  $n_{pq}$ .

Таким образом, динамический эффект Казимира для одиночного полупрозрачного зеркала заметно не отличается от случая идеального зеркала, рассмотренного в [62]. Единственное отличие — наличие размерного параметра  $\alpha$ , задающего естественный ультрафиолетовый масштаб теории. В то же время, напомним, что мы в основном интересуемся секулярным ростом петлевых поправок — существенно инфракрасным эффектом. Следовательно, не удивительно, что подобная модификация теории не сказалась на петлевых интегралах (3.88) и (3.89).

# 3.5 Суммирование петлевых поправок при слабых отклонениях от стационарности

В этом разделе мы просуммируем петлевые поправки к нелинейному динамическому эффекту Казимира в пределе слабых отклонений от стационарности, то есть малого числа родившихся частиц. Поскольку в предыдущих разделах мы показали, что учет полупрозрачности зеркал слабо сказывается на числе родившихся частиц и инфракрасно расходящихся петлевых поправках к квантовым средним, в этом разделе мы рассмотрим резонансную полость с идеально отражающими стенками. В большей части раздела мы будем обсуждать более наглядную модель (3.4) с нелинейностью вида  $\lambda \phi^4$ . Кроме того, в конце раздела мы также рассмотрим модель (3.5), эффективно описывающую джозефсоновский метаматериал — систему, в которой динамический эффект Казимира можно экспериментально измерить.

#### 3.5.1 Коэффициенты Боголюбова

Как и в разделе 3.3.1, прежде всего рассмотрим квантование свободного поля, подчиняющегося уравнениям (3.1). Для простоты (без ограничения общности) будем считать, что до момента t=0 оба зеркала покоились, L(t<0)=0 и  $R(t<0)=\Lambda_-$ . С одной стороны, как было показано в разделе 3.3.1, в этой модели квантованное поле можно разложить по ин-модам (3.18), которые имеют определенную (положительную) энергию в бесконечном прошлом:

$$g_n(t,x) = f_n^{\text{in}}(t,x) = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \exp\left(-i\frac{\pi nt}{\Lambda_-}\right) \sin\left(\frac{\pi nx}{\Lambda_-}\right),$$
 при  $t < 0,$  (3.101)

и диагонализуют свободный гамильтониан в том же пределе:

$$H_{\text{free}}(t) = \int_{L(t)}^{R(t)} dx \left[ \frac{1}{2} (\partial_t \phi)^2 + \frac{1}{2} (\partial_x \phi)^2 \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n}{\Lambda_-} \left[ (a_n^{\text{in}})^{\dagger} a_n^{\text{in}} + \frac{1}{2} \right], \quad \text{при} \quad t < 0.$$
 (3.102)

С другой стороны, в бесконечном будущем ин-моды больше не диагонализуют гамильтониан, поэтому оказывается более удобным перейти к аут-модам:

$$f_n^{\text{out}}(t,x) \to \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \exp\left(-i\frac{\pi n\tilde{t}}{\tilde{\Lambda}}\right) \sin\left(\frac{\pi n\tilde{x}}{\tilde{\Lambda}}\right), \quad \text{при} \quad t \to +\infty,$$
 (3.103)

где мы учли, что зеркала могут двигаться с одинаковой общей скоростью  $\beta$  и потому перешли к координатам  $\tilde{t} = \gamma_+(t-\beta_+x)$ ,  $\tilde{x} = \gamma_+(x-\beta_+t-L_+)$ , а также ввели обозначения для лоренцфактора  $\gamma_+ = 1/\sqrt{1-\beta_+^2}$  и расстояния между зеркалами в сопутствующей системе отсчета

 $\tilde{\Lambda}=\gamma_+\Lambda_+$ . Как обычно, ин-моды можно переписать через аут-моды:

$$f_n^{\text{in}}(t,x) \to \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi k}} \left[ \alpha_{nk} \exp\left(-i\frac{\pi k\tilde{t}}{\tilde{\Lambda}}\right) + \beta_{nk} \exp\left(i\frac{\pi k\tilde{t}}{\tilde{\Lambda}}\right) \right] \sin\left(\frac{\pi k\tilde{x}}{\tilde{\Lambda}}\right), \quad \text{при} \quad t \to +\infty,$$
(3.104)

с помощью коэффициентов Боголюбова:

$$\alpha_{nk} = \left(f_n^{\text{in}}, f_k^{\text{out}}\right), \quad \beta_{nk} = -\left(f_n^{\text{in}}, (f_k^{\text{out}})^*\right), \tag{3.105}$$

где  $(\cdot,\cdot)$  обозначает скалярное произведение Клейна — Гордона с учетом идеально отражающих граничных условий:

$$(u,v) = -i \int_{L(t)}^{R(t)} dx \Big[ u(t,x) \partial_t v^*(t,x) - v^*(t,x) \partial_t u(t,x) \Big].$$
 (3.106)

Вычислим коэффициенты Боголюбова, предполагая, что нам уже известны функции G(z) и F(z) (например, мы построили их с помощью геометрического метода раздела 3.3.1). Вообще говоря, для произвольных функций подобное вычисление может оказаться очень сложным. Тем не менее, оно существенно упрощается, если мы ограничимся слабыми отклонениями от стационарности, то есть рассмотрим траектории вида  $L(t) = \epsilon l(t)$ ,  $R(t) = \Lambda_- + \epsilon r(t)$ ,  $\epsilon \ll 1$  и исключим конструктивную интерференцию. В этом случае функция G(z) и обратная функция  $g(y) = G^{-1}(y)$  приблизительно линейны:  $G(z) \approx \frac{2}{\Delta z_G} z + \mathcal{O}(\epsilon)$ ,  $g(y) \approx \frac{\Delta z_G}{2} y + \mathcal{O}(\epsilon)$ . Учитывая, что обе эти функции периодически растут вместе с увеличением z и y, разложим их производные в ряд Фурье (см. раздел 3.3.2):

$$G'(z) = \sum_{n = -\infty}^{\infty} G_n e^{i\frac{2\pi}{\Delta z_G}nz}, \qquad G_n = \frac{1}{\Delta z_G} \int_0^{\Delta z_G} G'(z) e^{-i\frac{2\pi}{\Delta z_G}nz} dz,$$

$$g'(y) = \sum_{n = -\infty}^{\infty} g_n e^{i\pi ny}, \qquad g_n = \frac{1}{2} \int_0^2 g'(y) e^{-i\pi ny} dy.$$
(3.107)

Легко видеть, что при слабых отклонениях от стационарности все коэффициенты Фурье с ненулевым номером пропорциональны малому параметру  $\epsilon$ :  $G_n \sim \epsilon$  и  $g_n \sim \epsilon$  для всех  $n \neq 0$ . Более того, эти коэффициенты симметричны,  $G_{-n} = G_n^*$  и  $g_{-n} = g_n^*$ , поскольку исходные функции были действительны. Эти свойства позволяют нам переразложить сложные экспоненты в модах (3.18) по простым плоским волнам:

$$\frac{1}{\Delta z_G} \int_0^{\Delta z_G} e^{-i\pi nG(z)} e^{-i\frac{2\pi}{\Delta z_G}kz} dz = \frac{1}{\Delta z_G} \int_0^2 e^{-i\pi ny - i\pi ky + ik\mathcal{O}(\epsilon)} g'(y) dy$$

$$= \delta_{n,-k} + \frac{g_{n+k}}{g_0} \frac{n}{n+k} \left(1 - \delta_{n,-k}\right) + \mathcal{O}\left(\epsilon^2\right), \tag{3.108}$$

следовательно,

$$e^{-i\pi nG(z)} \approx e^{-i\frac{2\pi}{\Delta z_G}nz} + \sum_{k \neq n} \frac{g_{n-k}}{g_0} \frac{n}{n-k} e^{-i\frac{2\pi}{\Delta z_G}kz}.$$
 (3.109)

Совмещая это равенство с соотношением (3.27), переходя к координатам ( $\tilde{t}, \tilde{x}$ ) и вычисляя соответствующие скалярные произведения (3.105), находим коэффициенты Боголюбова (здесь мы выделяем дельта-символы Кронекера  $\delta_{n,k}$ , чтобы сделать явным разложение коэффициентов по  $\epsilon$ ):

$$\alpha_{nk} = \delta_{n,k} + \frac{g_{n-k}}{g_0} \frac{\sqrt{nk}}{n-k} \left(1 - \delta_{n,k}\right) + \mathcal{O}\left(\epsilon^2\right),$$

$$\beta_{nk} = -\frac{g_{n+k}}{g_0} \frac{\sqrt{nk}}{n+k} + \mathcal{O}\left(\epsilon^2\right).$$
(3.110)

Подчеркием, что эти приближенные равенства справедливы только для сравнительно малых частот,  $n \ll 1/\epsilon$ , для которых длина волны частицы существенно меньше характерного смещения зеркал,  $\bar{\lambda} \sim \tilde{\Lambda}/\pi n \gg \epsilon \tilde{\Lambda}$ . Мы также ожидаем, что на больших частотах взаимодействие между полем и зеркалами можно считать квазистационарным процессом (по крайней мере, если мы исключаем конструктивную интерференцию), поскольку характерное время жизни виртуальных частиц в этом случае много меньше характерного времени, за которое зеркало заметно смещается. Следовательно, поправки к стационарным коэффициентам Боголюбова (то есть к тождественным преобразованиям, не изменяющим ин-моды) в этом случае можно считать пренебрежимо малыми:  $\alpha_{n\neq k}\approx 0$  и  $\beta_{nk}\approx 0$  для  $n\gg 1/\epsilon$  или  $k\gg 1/\epsilon$ .

Еще раз напомним, что приближенные равенства (3.110) выполняются только при слабых отклонениях от стационарности. Примечательные примеры таких движений включают в себя "сломанные" траектории (3.44) с малой конечной скоростью  $\epsilon$ :

$$L(t) = \epsilon t \theta(t), \quad R(t) = \Lambda + \epsilon t \theta(t),$$

$$g_0 = \frac{\Lambda}{1 - \epsilon}, \quad g_{n \neq 0} = -\frac{2\epsilon \Lambda}{1 - \epsilon} \frac{1 - (-1)^n}{2i\pi n},$$
(3.111)

и резонансные осцилляции с деструктивной интерференцией  $^7$ , например:

$$L(t) = \epsilon \Lambda \sin\left(\frac{\pi qt}{\Lambda}\right) \theta(t), \quad R(t) = \Lambda + \epsilon \Lambda \sin\left(\frac{\pi qt}{\Lambda}\right) \theta(t),$$

$$g_0 = \Lambda, \quad g_{\pm q} \approx \frac{q}{2} \pi \epsilon \Lambda, \quad g_{n \neq 0, \pm q} \approx \epsilon \Lambda \frac{2iqn}{n^2 - q^2} \frac{1 - (-1)^n}{2},$$
(3.112)

где  $q=2,4,6,\cdots$ . Вывод<sup>8</sup> коэффициентов  $g_n$  и  $\beta_{nk}$  для движений (3.44) и (3.112) можно найти в [112].

$$\beta_{nk} = \frac{2\epsilon}{i\pi} \frac{n}{(n+k)^2 - (\epsilon k)^2} \frac{1 - (-1)^{n+k} e^{i\pi\epsilon k}}{2} \sqrt{\frac{k}{n}} = -\frac{g_{n+k}}{g_0} \frac{\sqrt{nk}}{n+k} + \mathcal{O}\left(\epsilon^2\right),$$

<sup>&</sup>lt;sup>7</sup>Подчеркнем, что это очень специальный случай резонансных осцилляций, который возникает только для специально подобранных амплитуд, частот и фаз; в действительности, для большинства резонансных осцилляций происходит конструктивная интерференция, отвечающая экспоненциальной накачке энергии поля [111,112].

 $<sup>^8</sup>$ Для сравнения, непосредственное вычисление  $\beta_{nk}$  для "сломанных" траекторий (3.44) приводит к следующему выражению:

В сильно нестационарных ситуациях соотношения между траекториями зеркал, функциями G(z) и g(y), боголюбовскими коэффициентами и числом родившихся частиц оказываются гораздо сложнее. Наиболее примечательные примеры таких сильно нестационарных ситуаций включают в себя резонансные осцилляции с конструктивной интерференцией [79,111,112, 120, 137–139] и асимптотически светоподобное движение зеркал [9, 10, 117–119, 135, 140–142]. Тем не менее, в данном разделе мы для наглядности ограничимся слабыми отклонениями от стационарности, при которых использование равенств (3.110) вполне оправдано.

#### 3.5.2 Эффективный гамильтониан

Полный гамильтониан нелинейного динамического эффекта Казмира с уравнениями движения (3.4) оказывается очень сложным. Следовательно, чтобы просуммировать секулярно растущие петлевые поправки к корреляционным функциям и квантовым средним, нужно найти подходящее приближение. Во-первых, мы будем работать в пределе слабых отклонений от стационарности, то есть будем считать, что поправки к стационарным боголюбовским коэффициентам малы,  $\beta_{nk} \sim \alpha_{n\neq k} \sim \mathcal{O}(\epsilon)$  с  $\epsilon \ll 1$ . В лидирующем порядке по  $\epsilon$  это приближение запрещает практически все процессы, нарушающие закон сохранения энергии. Вовторых, чтобы выделить только лидирующие секулярно растущие петлевые поправки, мы рассмотрим предел малой константы связи и большого времени эволюции<sup>9</sup>,  $\lambda \to 0$ ,  $t \to \infty$ ,  $\lambda \Lambda_+ t = \mathrm{const.}$  Этот предел, напоминающий приближение вращающейся волны из квантовой оптики [70, 76, 94, 95], подавляет быстро осциллирующие вклады в эффективный гамильтониан. Оба этих приближения вдохновлены упрощенной квантовомеханической задачей, рассмотренной в главе 2.

Прежде всего, вычислим в предложенных приближениях свободный гамильтониан. Подставляя разложение по модам (3.104) в определение (3.102), переходя к координатам  $(\tilde{t}, \tilde{x})$ , интегрируя по  $\tilde{x}$  и пренебрегая быстро осциллирующими вкладами, получаем следующее приближенное равенство:

$$H_{\text{free}} = \sum_{m,n,k=1}^{\infty} \frac{\omega_k}{2} \left[ \left( \alpha_{mk}^* \alpha_{nk} + \beta_{mk}^* \beta_{nk} \right) a_m^{\dagger} a_n + \left( \alpha_{mk} \beta_{nk} + \beta_{mk} \alpha_{nk} \right) a_m a_n + h.c. \right]$$

$$\approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \omega_n a_n^{\dagger} a_n - \sum_{n,k=1}^{\infty} \frac{\omega_n + \omega_k}{2} \frac{g_{n+k}}{g_0} \frac{\sqrt{nk}}{n+k} a_n a_k + h.c. + \mathcal{O}\left(\epsilon^2\right),$$
(3.113)

которое подтверждает справедливость приближений (3.110). По-видимому проблемый член  $e^{i\pi\epsilon k}$  существенен только для достаточно высоких частот,  $k \sim 1/\epsilon$ , для которых префактор выражения сам по себе пропорционален  $\mathcal{O}\left(\epsilon^2\right)$ .

<sup>&</sup>lt;sup>9</sup>Этот предел эквивалентен пределу  $\lambda \to 0, \ \tilde{t} \to \infty, \ \lambda \tilde{\Lambda} \tilde{t} = \mathrm{const}, \ \mathrm{ecnu} \ \left| \dot{L}(t) \right| < 1$  и  $\left| \dot{R}(t) \right| < 1$  при  $t \to +\infty$ .

при  $t \to +\infty$ . Здесь мы ввели краткое обозначение для частоты  $f_n^{\text{out}}$  мод,  $\omega_n = \pi n/\tilde{\Lambda}$ . В последней строке мы также подставили приближенные коэффициенты Боголюбова (3.110) и удержали первые два члена в разложении по  $\epsilon$ .

Заметим, что гамильтониан обобщенной модели (3.1) с массивным полем также имеет вид (3.113) с частотой  $\omega_n = \sqrt{\left(\frac{\pi n}{\tilde{\Lambda}}\right)^2 + m^2} \approx \frac{\pi n}{\tilde{\Lambda}} + \frac{\tilde{\Lambda}}{2\pi n} m^2$ , при  $m \to 0$ . В то же время, подход Мура к построению мод свободного поля, который мы использовали для поиска боголюбовских коэффициентов в разделе 3.5.1, для массивных полей не работает из-за отсутствия конформной инвариантности. Следовательно, в массивной модели приближение (3.110) и второе равенство в (3.113) применимы только для достаточно небольших времен эволюции,  $\tilde{t} \ll 1/m^2\tilde{\Lambda}$ .

Теперь применим тот же метод для вычисления взаимодействующего гамильтониана в бесконечном будущем:

$$H_{\text{int}} = \delta H_{\text{free}} + H_{\text{int}}^{(0)} + H_{\text{int}}^{(1)} + \mathcal{O}\left(\epsilon^2\right), \quad \text{при} \quad t \to +\infty,$$
 (3.114)

где  $H_{\mathrm{int}}^{(0)}$  и  $H_{\mathrm{int}}^{(1)}$  — нормально-упорядоченные квартичные вклады в гамильтониан взаимодействия, пропорциональные  $\epsilon^0$  и  $\epsilon^1$ , соответственно:

$$H_{\text{int}}^{(0)} = \frac{\lambda \tilde{\Lambda}}{32\pi^2} \sum_{k,l,m,n=1}^{\infty} \left[ \frac{3\delta_{k+l,m+n} + 6\delta_{k,m}\delta_{l,n}}{\sqrt{klmn}} a_k^{\dagger} a_l^{\dagger} a_m a_n - \frac{4\delta_{k,l+m+n}}{\sqrt{klmn}} a_k^{\dagger} a_l a_m a_n + h.c. \right], \quad (3.115)$$

$$H_{\text{int}}^{(1)} = \frac{\lambda \tilde{\Lambda}}{32\pi^2 g_0} \sum_{k,l,m,n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k l m n}} \left[ \left( 3g_{-k-l+m+n} + 12\delta_{k,m}g_{-l+n} \right) \left( 1 - \delta_{k+l,m+n} \right) a_k^{\dagger} a_l^{\dagger} a_m a_n \right. \\ \left. - \left( 4g_{-k+l+m+n} + 12\delta_{k,l}g_{m+n} \right) \left( 1 - \delta_{k,l+m+n} \right) a_k^{\dagger} a_l a_m a_n \right. \\ \left. + g_{k+l+m+n} a_k a_l a_m a_n + h.c. \right],$$

$$\left. \left( 3.116 \right) \right.$$

а  $\delta H_{\rm free}$  — нормально упорядоченный квадратичный член, который можно включить в перенормировку частоты свободного гамильтониана (3.113):

$$\delta H_{\text{free}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{\Lambda}}{2\pi} \delta m^2 \left[ \frac{1}{n} a_n^{\dagger} a_n - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_{n+k}}{g_0} \frac{1}{\sqrt{nk}} a_n a_k - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_{n+k}^*}{g_0} \frac{1}{\sqrt{nk}} a_n^{\dagger} a_k^{\dagger} \right] + \mathcal{O}\left(\epsilon^2\right). \tag{3.117}$$

В последнем равенстве мы выделили поправку к физической массе (которая фактически является однопетлевой поправкой):

$$\delta m^2 \approx \frac{3\lambda}{2\pi} \sum_{n=1}^{n_{\text{UV}}} \frac{1}{n} = \frac{3\lambda}{2\pi} \log(n_{\text{UV}}), \qquad (3.118)$$

и ввели ультрафиолетовое обрезание  $n_{\rm UV}$ . В дальнейшем мы будем предполагать, что эта поправка сокращается подходящим контрчленом к свободной теории<sup>10</sup>. Более того, мы считаем, что это приближение не сказывается на наших вычислениях. Во-первых, они посвящены

 $<sup>^{10}</sup>$ Впрочем, заметим, что поправка к массе положительна при  $\lambda>0$ , то есть физическая масса может обращаться в ноль только в том случае, если затравочная масса была тахионной  $m_0^2<0$ .

инфракрасным, а не ультрафиолетовым расходимостям. Во-вторых, мы в первую очередь заинтересованы в эволюции квантового состояния, которая не связана с массой поля. По этим причинам мы в дальнейшем будем считать, что физическая масса равна нулю.

Отметим, что символы Кронекера в  $H_{\rm int}^{(0)}$  обеспечивают законы сохранения энергии в процессах рассеяния  $(a^{\dagger}a^{\dagger}aa)$  и распада  $(a^{\dagger}aaa$  аnd  $a^{\dagger}a^{\dagger}a^{\dagger}a)$  частиц. Это является следствем того, что в пределе  $\epsilon \to 0$  модель (3.1) становится стационарной. По той же самой причине в этом пределе не возникает секулярно растущих петлевых поправок к квантовым средним (например, сравните с приложением А). Напротив, следующие порядки разложения гамильтониана по  $\epsilon$  нарушают закон сохранения энергии<sup>11</sup> и разрешают процессы, которые в стационарном случае были невозможны. Например, вклады вида  $a^{\dagger}a^{\dagger}a^{\dagger}a^{\dagger}$  в гамильтониан  $H_{\rm int}^{(1)}$  описывают рождение четырех скоррелированных частиц. Впрочем, в дальнейшем мы будем ограничиваться лидирующими порядками разложения по  $\epsilon$ , то есть будем предполагать, что "запрещенные" процессы происходят только один или два раза в ходе эволюции системы.

Наконец, напомним, что для наших целей достаточно удерживать только первый порядок разложения эффективного гамильтониана (3.114) по  $\epsilon$ . В то же время, из тех же принципов нетрудно получить и полное выражение для гамильтониана взаимодействия, которое выражается через точные коэффициенты Боголюбова и не требует предела  $\epsilon \to 0$  (но по-прежнему требует предел  $\lambda \to 0$ ,  $t \to +\infty$ ). Это выражение имеет следующий вид:

$$H_{\text{int}} = \frac{\lambda \tilde{\Lambda}}{32\pi^2} \sum_{i,j,k,l,m,n,p,q=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{ijkl}} A_{m,n,p,q}^{i,j,k,l},$$
(3.119)

где

$$\begin{split} A_{m,n,p,q}^{i,j,j,k,l} &= \left(3a_m^\dagger a_n^\dagger a_p a_q + 6a_{(n}^\dagger \delta_{m),(p} a_q)\right) \left[\alpha_{mi}^* \alpha_{nj}^* \alpha_{pk} \alpha_{ql} \left(\delta_{i+j,k+l} + \delta_{i,k} \delta_{j,l} + \delta_{i,l} \delta_{j,k}\right) \right. \\ &\quad - 4\alpha_{mi}^* \alpha_{nj}^* \alpha_{pk} \beta_{ql} \, \delta_{i+j+l,k} + 2\alpha_{mi}^* \beta_{nj}^* \alpha_{pk} \beta_{ql} \left(\delta_{i+l,j+k} + \delta_{i,j} \delta_{k,l} + \delta_{i,k} \delta_{j,l}\right) \\ &\quad + 2\alpha_{mi}^* \beta_{nj}^* \alpha_{pk} \beta_{ql} \left(\delta_{i+k,j+l} + \delta_{i,j} \delta_{k,l} + \delta_{i,l} \delta_{j,k}\right) - 4\alpha_{mi}^* \beta_{nj}^* \beta_{pk} \beta_{ql} \, \delta_{i+k+l,j} \\ &\quad + \beta_{mi}^* \beta_{nj}^* \beta_{pk} \beta_{ql} \left(\delta_{i+j,k+l} + \delta_{i,k} \delta_{j,l} + \delta_{i,l} \delta_{j,k}\right) \right] \\ &\quad - \left(4a_m^\dagger a_n a_p a_q + 6\delta_{m,(n} a_p a_q)\right) \left[\alpha_{mi}^* \alpha_{nj} \alpha_{pk} \alpha_{ql} \, \delta_{i,j+k+l} + \beta_{mi}^* \beta_{nj} \beta_{pk} \beta_{ql} \, \delta_{i,j+k+l} \right. \\ &\quad - 3\alpha_{mi}^* \alpha_{nj} \alpha_{pk} \beta_{ql} \left(\delta_{i+l,j+k} + \delta_{i,j} \delta_{k,l} + \delta_{i,k} \delta_{j,l}\right) + 3\beta_{mi}^* \alpha_{nj} \alpha_{pk} \beta_{ql} \, \delta_{i+j+k,l} \\ &\quad - 3\alpha_{mi}^* \alpha_{nj} \beta_{pk} \beta_{ql} \left(\delta_{i+k,j+l} + \delta_{i,j} \delta_{k,l} + \delta_{i,l} \delta_{j,k}\right) - 3\beta_{mi}^* \alpha_{nj} \beta_{pk} \beta_{ql} \left(\delta_{i+j,k+l} + \delta_{i,k} \delta_{j,l} + \delta_{i,l} \delta_{j,k}\right) \right] \\ &\quad - 4a_m a_n a_p a_q \left[\alpha_{mi} \alpha_{nj} \alpha_{pk} \beta_{ql} \, \delta_{i+j+k,l} - 3\alpha_{mi} \alpha_{nj} \beta_{pk} \beta_{ql} \left(\delta_{i+j,k+l} + \delta_{i,k} \delta_{j,l} + \delta_{i,l} \delta_{j,k}\right) \right. \\ &\quad + \alpha_{mi} \beta_{nj} \beta_{pk} \beta_{ql} \, \delta_{i,j+k+l} \right] + h.c. \end{split}$$

<sup>&</sup>lt;sup>11</sup>В сущности, это нарушение отражает обмен энергией между системой и внешним миром, которое становится возможным из-за того, что движение зеркал контролируется внешней силой.

Здесь мы ввели краткое обозначение для симметризованных величин,  $A_{(m,n)} = \frac{1}{2!} (A_{mn} + A_{nm})$ . Также мы пренебрегли быстро осциллирующими и постоянным вкладами, которые в обсуждаемом пределе не вносят вклад в корреляционные функции и квантовые средние (1.9) и (1.10). Другими словами, мы усреднили гамильтониан  $H_{\rm int}(t) \longrightarrow \frac{1}{T} \int_t^{t+T} H_{\rm int}(t') dt'$ , и пренебрегли вкладами, затухающими в пределе  $T \to +\infty$ .

Стоит отметить, что символы Кронекера вида  $\delta_{i+j,k+l}$  появляются только в безмассовой теории. В массивной двумерной теории такие символы домножаются на зависящую от времени функцию,  $\frac{\sin[(\omega_i+\omega_j-\omega_k-\omega_{i+j-k})T]}{(\omega_i+\omega_j-\omega_k-\omega_{i+j-k})T}$ , где  $\omega_k=\sqrt{(\pi k/\tilde{\Lambda})^2+m^2}$ . Эта функция стремится к единице только в трех случаях:  $i=k,\ i=l$  или  $m\to 0$ ; в притивном случае, на больших временах эволюции  $(T\gg 1/m^2\tilde{\Lambda})$  она стремится к нулю. Это поведение иллюстрирует широко известный факт, что упругое рассеяние тождественных массивных частиц в двумерном случае сводится к простому обмену импульсами.

### 3.5.3 Редукция до квантовой механики

В предыдущем разделе мы заметили, что предел  $\epsilon \to 0$  устанавливает приближенный закон сохранения энергии, то есть ограничивает обмен энергией между системой и внешним миром. Следовательно, можно ожидать, что в этом пределе число частиц, родившихся в результате движения зеркал, будет небольшим. Более того, можно ожидать, что частицы в основном будут рождаться в моде с наименьшей возможной энергией, n=1, которую будет легче всего возбудить. По этой причине мы можем пренебречь модами с n>1 и свести гамильтониан (3.114) к упрощенной квантовомеханической задаче:

$$H_{\text{int}}^{\text{QM}} = \frac{\lambda \tilde{\Lambda}}{\pi^2} \left[ \frac{9}{32} a^{\dagger} a^{\dagger} a a - \frac{g_2}{2g_0} a^{\dagger} a a a + \frac{g_4}{32g_0} a a a a + h.c. + \mathcal{O}\left(\epsilon^2\right) \right], \tag{3.120}$$

где мы для краткости обозначили  $a=a_1$ . Напомним, что в пределе  $\epsilon \to 0$  коэффициенты Фурье с отличными от нуля номерами малы,  $g_2 \sim g_4 \sim \epsilon$ .

проэволюционировавшее состояние теории имеет следующий вид:

$$\begin{split} |\Psi(t)\rangle &= \mathcal{T} \exp\left(-i\int_{t_{0}}^{t} H_{\text{int}}(t')dt'\right) |0\rangle \approx \exp\left(-i\tilde{t}H_{\text{int}}^{\text{QM}}\right) |0\rangle \\ &= |0\rangle + \frac{1}{216} \frac{g_{4}^{*}}{g_{0}^{*}} \left[ \exp\left(-i\frac{27}{4\pi^{2}}\lambda\tilde{\Lambda}\tilde{t}\right) - 1 \right] \left(a^{\dagger}\right)^{4} |0\rangle + \mathcal{O}\left(\epsilon^{2}\right). \\ &- \frac{4}{405} \frac{g_{2}g_{4}^{*}}{g_{0}^{2}} \left[ 5 - 6\exp\left(-i\frac{9}{8\pi^{2}}\lambda\tilde{\Lambda}\tilde{t}\right) + \exp\left(-i\frac{27}{4\pi^{2}}\lambda\tilde{\Lambda}\tilde{t}\right) \right] \left(a^{\dagger}\right)^{2} |0\rangle \\ &- \frac{2}{10935} \frac{g_{2}^{*}g_{4}^{*}}{g_{0}^{2}} \left[ 3 + 2\exp\left(-i\frac{125}{8\pi^{2}}\lambda\tilde{\Lambda}\tilde{t}\right) - 5\exp\left(-i\frac{27}{4\pi^{2}}\lambda\tilde{\Lambda}\tilde{t}\right) \right] \left(a^{\dagger}\right)^{6} |0\rangle \\ &+ \frac{1}{1944} \frac{|g_{4}|^{2}}{g_{0}^{2}} \left[ \exp\left(-i\frac{27}{4\pi^{2}}\lambda\tilde{\Lambda}\tilde{t}\right) + i\frac{27}{4\pi^{2}}\lambda\tilde{\Lambda}\tilde{t} - 1 \right] |0\rangle + \mathcal{O}\left(\epsilon^{3}\right). \end{split}$$

Лидирующий вклад в это выражение обеспечивают процессы множественного рассеяния с сохранением энергии (члены вида  $a^{\dagger}a^{\dagger}aa$ ) однажды родившегося квартета виртуальных частиц (члена вида  $a^{\dagger}a^{\dagger}a^{\dagger}a$ ).

Выражение (3.121) непосредственно приводит к следующим формулам для заселенности уровней и аномального квантового среднего:

$$n(t) = \langle \Psi(t) | a^{\dagger} a | \Psi(t) \rangle = \frac{2}{243} \frac{|g_4|^2}{g_0^2} \sin^2 \left( \frac{27}{8\pi^2} \lambda \tilde{\Lambda} \tilde{t} \right) + \mathcal{O}\left(\epsilon^4\right), \tag{3.122}$$

$$\varkappa(t) = \langle \Psi(t) | a a | \Psi(t) \rangle = -\frac{8}{405} \frac{g_2 g_4^*}{g_0^2} \left[ 5 - 6 \exp\left( -i \frac{9}{8\pi^2} \lambda \tilde{\Lambda} \tilde{t} \right) + \exp\left( -i \frac{27}{4\pi^2} \lambda \tilde{\Lambda} \tilde{t} \right) \right] + \mathcal{O}\left(\epsilon^3\right). \tag{3.123}$$

Подставляя (3.122), (3.123) и (3.110) в выражение для числа частиц (1.6), а затем обрезая все суммы на n=1, находим полное число частиц, родившихся в моде с наименьшей частотой:

$$\mathcal{N}_{1} = \frac{|g_{2}|^{2}}{4g_{0}^{2}} + \frac{2}{243} \frac{|g_{4}|^{2}}{g_{0}^{2}} \sin^{2}\left(\frac{27}{8\pi^{2}}\lambda\tilde{\Lambda}\tilde{t}\right) + \mathcal{O}\left(\epsilon^{3}\right). \tag{3.124}$$

Первый и второй члены в правой части (3.124) описывают древесный и петлевой вклад, соответственно. Заметим, что петлевой вклад всегда положителен и имеет тот же порядок по  $\epsilon$ , что и древесное приближение. Более того, на очень больших временах эволюции,  $\tilde{t}\gg 1/\lambda\tilde{\Lambda}$ , осциллирующую часть петлевого вклада можно заменить на среднее значение:

$$\mathcal{N}_1 \approx \frac{|g_2|^2}{4g_0^2} + \frac{1}{243} \frac{|g_4|^2}{g_0^2}.$$
 (3.125)

Следовательно, нелинейности увеличивают среднее число частиц, сгенерировавшееся в моде с наименьшей частотой и измеренное на больших временах. Более того, в случае  $|g_4| \gg |g_2|$  петлевой вклад может даже превосходить древесный — например, для резонансных осцилляций (3.112) с q=4.

Подчеркнем, что петлевые поправки к числу родившихся частиц связаны с изменением исходного квантового состояния, которое становится возможным из-за нарушения закона

сохранения энергии фоновым полем (силой, движущей зеркала). Лидирующая поправка к состоянию, уравнение (3.121), описывает состояние с четыремя скоррелированными частицами. Также отметим, что полный ряд в (3.121) должен описывать унитарную эволюцию чистого состояния, хотя в каждом конечном порядке по  $\epsilon$  унитарность может нарушаться.

#### 3.5.4 Обобщение на большие N

Проверим, что мода с наименьшей частотой действительно является самой "населенной". Для этого рассмотрим O(N)-симметричное обобщение модели (3.4):

$$\left(\partial_t^2 - \partial_x^2\right)\phi^i = \frac{\lambda}{N}(\phi^j \phi^j)\phi^i, \quad \phi^i[t, L(t)] = \phi^i[t, R(t)] = 0, \tag{3.126}$$

где  $i=1,\cdots,N$  с  $N\gg 1$ , и мы подразумеваем суммирование по повторяющимся индексам. Эффективный гамильтониан такой модели в пределе  $\lambda\to 0,\ t\to\infty$  и  $\epsilon\to 0$  совпадает с гамильтонианом (3.114) после следующей замены операторных произведений:

$$3a_{k}^{\dagger}a_{l}^{\dagger}a_{m}a_{n} \to (a_{k}^{i})^{\dagger}(a_{l}^{i})^{\dagger}a_{m}^{j}a_{n}^{j} + (a_{k}^{i})^{\dagger}(a_{l}^{j})^{\dagger}a_{m}^{i}a_{n}^{j} + (a_{k}^{i})^{\dagger}(a_{l}^{i})^{\dagger}a_{m}^{j}a_{n}^{i},$$

$$a_{k}^{\dagger}a_{l}a_{m}a_{n} \to (a_{k}^{i})^{\dagger}a_{l}^{i}a_{m}^{j}a_{n}^{j}, \qquad a_{k}a_{l}a_{m}a_{n} \to a_{k}^{i}a_{l}^{i}a_{m}^{j}a_{n}^{j},$$

$$3a_{k}^{\dagger}a_{l} \to (N+2)(a_{k}^{i})^{\dagger}a_{l}^{i}, \qquad 3a_{k}a_{l} \to (N+2)a_{k}^{i}a_{l}^{i},$$

$$(3.127)$$

и константы связи,  $\lambda \to \lambda/N$ . Аналогично исходному гамильтониану (3.114), основной вклад в обобщенный O(N)-симметричный гамильтониан обеспечивается процессами рассеяния  $^{13}$ , а лидирующая поправка, нарушающая закон сохранения энергии, описывает рождение четырех скоррелированных частиц. По этой причине мы считаем, что качественное поведение обеих моделей приблизительно совпадает, по крайней мере, при слабых отклонениях от стационарности.

Проэволюционировавшее вакуумное состояние модели (3.126) можно явно найти:

$$|\Psi(t)\rangle \approx |0\rangle - \frac{1}{N} \sum_{p,q} \frac{g_{p+q}^*}{g_0} \frac{A_{p,q}(t)}{\sqrt{pq}} (a_p^i)^{\dagger} (a_q^i)^{\dagger} |0\rangle + \frac{1}{N} \sum_{k,l,m,n} \frac{g_{k+l+m+n}^*}{4g_0} \frac{B_{k,l,m,n}(t)}{\sqrt{klmn}} (a_k^i)^{\dagger} (a_l^i)^{\dagger} (a_n^j)^{\dagger} |0\rangle + \mathcal{O}\left(\epsilon^2\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right),$$
(3.128)

 $<sup>\</sup>overline{\ }^{13}$ В гамильтониане (3.115), то есть при N=1, распады частиц подавлены небольшим численным множителем порядка 1/5. Предел больших N усиливает это подавление до 1/5N.

где

$$A_{p,q}(t) = \sum_{k,l,m,n} \frac{\delta_{p+q,k+l+m+n}}{klm} \left[ \delta_{q,n} \frac{e^{-i\tau C_{k,l,m,n}} + i\tau C_{k,l,m,n} - 1}{C_{k,l,m,n}^2} + \frac{1}{n(k+l+m)} \left( \frac{e^{-i\tau D_{p,q}} - 1}{D_{p,q}^2 (D_{p,q} - C_{k,l,m,n})} - \frac{e^{-i\tau C_{k,l,m,n}} - 1}{C_{k,l,m,n}^2 (D_{p,q} - C_{k,l,m,n})} - \frac{i\tau}{D_{p,q} C_{k,l,m,n}} \right) \right],$$
(3.129)

$$B_{k,l,m,n}(t) = \frac{e^{-i\tau C_{k,l,m,n}} - 1}{2C_{k,l,m,n}}. (3.130)$$

Для краткости мы перескалировали время,  $\tau = \frac{\lambda \tilde{\Lambda} \tilde{t}}{4\pi^2}$ , ввели коэффициенты  $C_{k,l,m,n} = D_{k,l} + D_{m,n}$  и  $D_{p,q} = \frac{H_{p+q-1}}{p+q} + \frac{1}{pq}$ , а также ввели гармонические числа  $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \log n + \gamma$ , где  $\gamma$  — постоянная Эйлера — Маскерони. Заметим, что поправки к начальному состоянию, содержащие более четырех частиц, подавлены степенями 1/N.

Подставляя конечное состояние (3.128) в выражения (1.9) и (1.10), находим будущую асимптотику пересуммированных квантовых средних:

$$n_{pq}^{ij}(t) \approx \frac{\delta_{i,j}}{N} \frac{2}{\sqrt{pq}} \sum_{k,l,m} \frac{g_{p,k,l,m}^* g_{q,k,l,m}}{g_0^2 k l m} B_{p,k,l,m}^*(t) B_{q,k,l,m}(t) + \mathcal{O}\left(\epsilon^3\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right), \tag{3.131}$$

$$\varkappa_{pq}^{ij}(t) \approx -\frac{\delta_{i,j}}{N} \frac{1}{\sqrt{pq}} \frac{g_{p+q}^*}{g_0} \left[ A_{p,q}(t) + A_{q,p}(t) \right] + \mathcal{O}\left(\epsilon^2\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right), \tag{3.132}$$

и среднего числа родившихся частиц:

$$\mathcal{N}_{n}(t) \approx N \sum_{k} \frac{|g_{n+k}|^{2}}{g_{0}^{2}} \frac{nk}{(n+k)^{2}} + 2 \sum_{k,l,m} \frac{|g_{n+k+l+m}|^{2}}{g_{0}^{2}} \frac{B_{n,k,l,m}^{*}(t)B_{n,k,l,m}(t)}{nklm} + 2 \sum_{k} \frac{|g_{n+k}|^{2}}{g_{0}^{2}} \frac{\text{Re}\left[A_{n,k}(t) + A_{k,n}(t)\right]}{n+k} + \mathcal{O}\left(\epsilon^{3}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^{2}}\right).$$
(3.133)

Первый член в уравнении (3.133) описывает древесный вклад,  $\mathcal{N}_n^{\text{free}}$ ; второй член возникает только в нелинейной, взаимодействующей теории.

Для наглядности также явно вычислим суммы и оценим  $\mathcal{N}_n(t)$  для некоторого физически осмысленного движения зеркал. В качестве примера такого движения выберем резонансные осцилляции (3.112) с частотой q=2 и деструктивной интерференцией. Приближенно вычислим число частиц для сравнительно малого,  $\lambda \tilde{\Lambda} \tilde{t} \ll 1$ , и большого,  $\lambda \tilde{\Lambda} \tilde{t} \gg n_{\rm UV}/\log(n_{\rm UV})$ , времени эволюции, где  $n_{\rm UV}$  определяет масштаб ультрафиолетового обрезания. На промежуточных временах эти асимптотики соединяются гладкой кривой, которую можно построить численно (Рис. 3.4).

На сравнительно малых временах эволюции,  $\lambda \tilde{\Lambda} \tilde{t} \ll 1$ , осциллирующие функции в (3.133) можно разложить в ряд по времени. Тогда сублидирующая поправка к числу частиц, связанная с двухпетлевой поправкой к квантовым средним, квадратично растет со временем

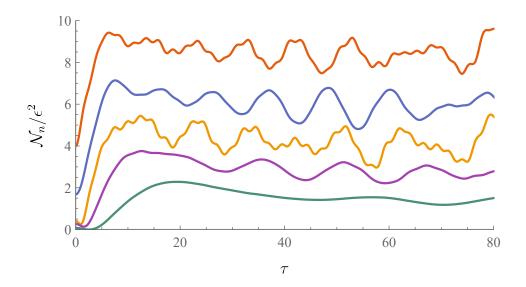


Рис. 3.4: Численно рассчитанная функция  $\mathcal{N}_n(\tau)/\epsilon^2$ , n=1,2,4,8,16 (сверху вниз) для резонансного движения (3.112) с q=2 и  $\epsilon=0.02$ . Масштаб ультрафиолетового обрезания установлен на  $n_{\rm UV}=64$ . Для наглядности мы формально положили N=1; в этом случае "начальные" значения функций совпадают с нормированным древесным вкладом,  $\mathcal{N}_n(0)=\mathcal{N}_n^{\rm free}/N$ .

(сравните с разделами 3.3 и 3.4):

$$\mathcal{N}_{n} \approx \mathcal{N}_{n}^{\text{free}} + \frac{\tau^{2}}{2} \sum_{k,l,m} \frac{|g_{n+k+l+m}|^{2}}{g_{0}^{2}} \frac{1}{nklm} - \tau^{2} \sum_{k,l,m,p} \frac{|g_{n+k}|^{2}}{g_{0}^{2}} \frac{\delta_{n,l+m+p} + \delta_{k,l+m+p}}{(n+k)lmp}$$

$$\sim \frac{\epsilon^{2}}{n} \left[ N - 2\tau^{2} \frac{\log^{2} n}{n^{2}} + \cdots \right], \quad \text{для} \quad 1 \ll n \ll \frac{1}{\epsilon}. \tag{3.134}$$

В последней строке мы отбросили общий числовой множитель и оценили относительный числовой множитель петлевого вклада,  $\mathcal{N}_n^{\text{loop}} = \mathcal{N}_n - \mathcal{N}_n^{\text{free}}$ , с помощью численно рассчитанной зависимости (Рис. 3.5а). Подчеркнем, что полное число родившихся частиц всегда положительно, хотя петлевая поправка отрицательна при  $n \geq 4$  и малых временах эволюции (Рис. 3.4).

На больших временах эволюции,  $\lambda \tilde{\Lambda} \tilde{t} \gg n_{\rm UV}/\log(n_{\rm UV})$ , осциллирующие функции можно заменить их средними значениями:

$$\mathcal{N}_{n} \approx \mathcal{N}_{n}^{\text{free}} + \sum_{k,l,m} \frac{|g_{n+k+l+m}|^{2}}{g_{0}^{2}} \frac{1}{nklm} \frac{1}{C_{n,k,l,m}^{2}}$$

$$+ \sum_{k,l,m,p,q} \frac{|g_{n+k}|^{2}}{g_{0}^{2}} \frac{\delta_{n+k,l+m+p+q}}{(n+k)lmp} \left[ \frac{4}{q(l+m+p)} \frac{D_{n,k} + C_{l,m,p,q}}{D_{n,k}^{2} C_{l,m,p,q}^{2}} - \frac{2\delta_{k,q} + 2\delta_{n,q}}{C_{l,m,p,q}^{2}} \right]$$

$$\sim \frac{\epsilon^{2}}{n} \left[ N + C \frac{\log^{2} n}{n} + \cdots \right], \quad \text{для} \quad 1 \ll n \ll \frac{1}{\epsilon},$$

$$(3.135)$$

где мы опять отбросили общий множитель и подобрали относительный числовой множитель C петлевого вклада с помощью численных расчетов (Рис. 3.5b). Вообще говоря, множитель

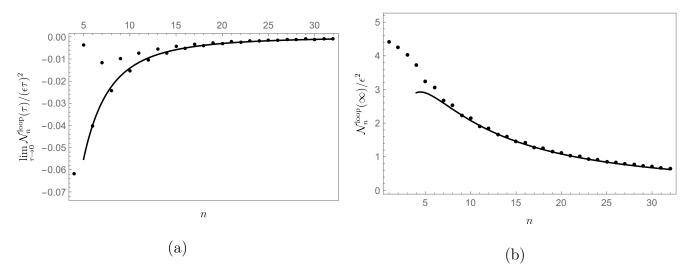


Рис. 3.5: Численно рассчитанные функции  $\mathcal{N}_n^{\text{loop}}(\tau)/(\epsilon\tau)^2$ , при  $\tau \to 0$  (a), и  $\mathcal{N}_n^{\text{loop}}(\tau)/\epsilon^2$ , при  $\tau \to \infty$  (b), для резонансного движения (3.112) с q=2 и  $\epsilon=0.02$ . Ультрафиолетовое обрезание установлено на  $n_{\text{UV}}=64$ . Точки отвечают численно рассчитанным значениям, линии — аналитически найденным кривым с оптимально подобранными параметрами. Обратите внимание, что график (a) начинается с n=4; значения при n<4 положительны и по модулю существенно больше значений при  $n\geq 4$ .

C положителен и незначительно зависит от ультрафиолетового обрезания,  $C \sim \log \log (n_{\rm UV})$ . Для разумных значений обрезания  $n_{\rm UV} \sim 10^{1\div 100}$  этот множитель примерно равен  $C \sim 100$ .

Стоит отметить, что равенства (3.134) и (3.135) имеют смысл только при сравнительно небольших частотах,  $n \ll 1/\epsilon$ , для которых коэффициенты Боголюбова можно приблизить выражениями (3.110). Тем не менее, подчеркнем, что для всех  $n \ll 1/\epsilon$  петлевые вклады в число родившихся частиц имеют тот же порядок по  $\epsilon$ , что и древесные выражения.

Также заметим, что число родившихся частиц пропорционально малому множителю,  $\epsilon^2$ , и стремится к нулю при увеличении частоты,  $\mathcal{N}_n \to 0$  при  $n \to \infty$ . Это качественно подтверждает предположение о малом числе родившихся частиц, использовавшееся в разделе 3.5.3.

## 3.5.5 Учет нелинейности джозефсоновского метаматериала

Теперь применим подход разделов 3.5.1–3.5.3 к еще одной модели нелинейного динамического эффекта Казимира, которая имеет прозрачное экспериментальное происхождение [86]. А именно, рассмотрим непрерывный предел гамильтониана джозефсоновского метаматериала — массива сверхпроводящих квантовых интерферометров (СКВИДов) в переменном магнитном поле:

$$H_{JM} \approx \int_0^{\Lambda} \left[ \frac{1}{2} (\partial_t \phi)^2 + \frac{v^2(t,x)}{2} (\partial_x \phi)^2 - \frac{\lambda v^2(t,x)}{4} (\partial_x \phi)^4 \right], \quad \phi(t,0) = \phi(t,\Lambda) = 0.$$
 (3.136)

Эффективная длина получившейся резонансной полости  $\Lambda$ , скорость света v(t,x) и константа связи  $\lambda$  определяются параметрами метаматериала (см. раздел 3.2.2). Кроме того, модулируя магнитное поле, пронизывающее массив СКВИДов, можно изменять эффективную скорость света в полости v(t,x). Мы предполагаем, что эти изменения малы, нерезонантны и исчезают в бесконечном прошлом и будущем, то есть  $v(t,x)=v_\infty+\epsilon \tilde{v}(t,x)$ , где  $v_\infty=\mathrm{const},\ \epsilon\ll 1$  и  $\tilde{v}(t,x)\to 0$  при  $t\to\pm\infty$ . Другими словами, как и в предыдущих разделах, мы будем рассматривать модель (3.136) при слабых отклонениях от стационарности.

Прежде всего, разобьем гамильтониан (3.136) на свободную (квадратичную) и взаимодействующую (квартичную) части, а затем проквантуем свободную модель аналогично разделу 3.5.1:

$$\phi(t,x) = \sum_{n=1}^{n_{\text{UV}}} \left[ a_n f_n^{\text{in}}(t,x) + h.c. \right].$$
 (3.137)

Здесь операторы  $a_n^{\dagger}$  и  $a_n$  удовлетворяют стандартным бозонным коммутационным соотношениям; ин-моды  $f_n^{\rm in}(t,x)$  решают классические уравнения движения, образуют полный ортонормированный базис относительно скалярного произведения Клейна — Гордона и имеют определенную (положительную) частоту в бесконечном прошлом<sup>14</sup>:

$$f_n^{\rm in}(t,x) \to \sqrt{\frac{\hbar}{\pi n v_\infty}} \exp\left(-i\pi n \frac{v_\infty t}{\Lambda}\right) \sin\left(\frac{\pi n x}{\Lambda}\right), \quad \text{при} \quad t \to -\infty.$$
 (3.138)

В бесконечном будущем ин-моды удобно переписать в терминах аут-мод:

$$f_n^{\text{in}}(t,x) \to \sum_{k=1}^{n_{\text{UV}}} \sqrt{\frac{\hbar}{\pi k v_{\infty}}} \left[ \alpha_{nk} \exp\left(-i\pi k \frac{v_{\infty} t}{\Lambda}\right) + \beta_{nk} \exp\left(i\pi k \frac{v_{\infty} t}{\Lambda}\right) \right] \sin\left(\frac{\pi k x}{\Lambda}\right), \quad \text{при} \quad t \to +\infty,$$
(3.139)

где коэффициенты Боголюбова  $\alpha_{nk}$  и  $\beta_{nk}$  определяются вариациями скорости света. Если эти вариации малы и нерезонансны, то пребразование Боголюбова близко к тождественному,  $\alpha_{nk} \approx \delta_{n,k} + \epsilon \tilde{\alpha}_{nk} \sqrt{n/k}$  и  $\beta_{nk} \approx \epsilon \tilde{\beta}_{nk} \sqrt{n/k}$  (сравните с (3.110)).

Теперь подставим ин-моды во взаимодействующий гамильтониан, разложим его до первого порядка по  $\epsilon$ , вычислим интегралы по dx и пренебрежем быстро осциллирующими вкладами:

$$H_{\text{int}}^{(0)} \approx -\frac{\lambda \pi \hbar^{2}}{32\Lambda^{3}} \sum_{k,l,m,n} \sqrt{k l m n} \Big[ 4\delta_{k,l+m+n} a_{k}^{\dagger} a_{l} a_{m} a_{n} + (3\delta_{k+l,m+n} + 6\delta_{k,m} \delta_{l,n}) a_{k}^{\dagger} a_{l}^{\dagger} a_{m} a_{n} + h.c. \Big],$$

$$(3.140)$$

$$H_{\text{int}}^{(1)} \approx -\epsilon \frac{\lambda \pi \hbar^{2}}{32\Lambda^{3}} \sum_{k,l,m,n} \sqrt{k l m n} \Big[ 4\tilde{\beta}_{k,l+m+n} a_{k} a_{l} a_{m} a_{n} + f_{k,l,m,n}^{(1,3)} a_{k}^{\dagger} a_{l} a_{m} a_{n} + f_{k,l,m,n}^{(2,2)} a_{k}^{\dagger} a_{l}^{\dagger} a_{m} a_{n} + h.c. \Big],$$

$$(3.141)$$

 $<sup>^{14}</sup>$ Обратите внимание, что в этом разделе мы явно удерживаем в формулах постоянную Планка  $\hbar$  и ультрафиолетовое обрезание  $n_{\rm UV} \sim N$ , где N — число СКВИДов в контуре.

при  $t \to +\infty$ . Здесь  $f_{k,l,m,n}^{(1,3)}$  и  $f_{k,l,m,n}^{(2,2)}$  — некоторые постоянные тензоры порядка  $\mathcal{O}(1)$ , которые определяются коэффициентами Боголюбова; нам не понадобится их явный вид, чтобы найти лидирующие поправки к числу родившихся квазичастиц в пределе  $\epsilon \ll 1$ . В сущности, в этом пределе лидирующие вклады в заселенность уровней (1.9) и аномальное квантовое среднее (1.10) приближенно описываются следующими выражениями:

$$n_{kl}(t) \approx \left\langle 0 \middle| \sum_{a=1}^{\infty} \frac{1}{a!} \left( \frac{it}{\hbar} \right)^{a} H_{\text{int}}^{(1)} \left( H_{\text{int}}^{(0)} \right)^{a-1} a_{k}^{\dagger} a_{l} \sum_{b=1}^{\infty} \frac{1}{b!} \left( -\frac{it}{\hbar} \right)^{b} \left( H_{\text{int}}^{(0)} \right)^{b-1} H_{\text{int}}^{(1)} \middle| 0 \right\rangle, \tag{3.142}$$

$$\varkappa_{kl}(t) \approx \left\langle 0 \middle| \sum_{a=0}^{\infty} \frac{1}{a!} \left( \frac{it}{\hbar} \right)^a \left( H_{\text{int}}^{(0)} \right)^a a_k a_l \sum_{b=1}^{\infty} \frac{1}{b!} \left( -\frac{it}{\hbar} \right)^b \left( H_{\text{int}}^{(0)} \right)^{b-1} H_{\text{int}}^{(1)} \middle| 0 \right\rangle. \tag{3.143}$$

При малых отклонениях от стационарности квазичастицы в основном рождаются в моде с наименьшей энергией (сравните с разделами 3.5.3 и 3.5.4), поэтому мы можем ограничить суммы на  $n_{\rm UV}=1$  для грубой оценки эффективного гамильтониана:

$$H_{\text{int}} \approx -\frac{\lambda \pi \hbar^2}{32\Lambda^3} \left[ 9a^{\dagger}a^{\dagger}aa + 4\epsilon \tilde{\beta}_{1,3}aaaa + \epsilon f_{1,1,1,1}^{(1,3)}a^{\dagger}aaa + \epsilon f_{1,1,1,1}^{(2,2)}a^{\dagger}a^{\dagger}aa + h.c. + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right]. \tag{3.144}$$

Этот гамильтониан качественно совпадает с гамильтонианом (3.120) теории с нелинейностью вида  $\lambda\phi^4$ . В лидирующем порядке разложения по  $\epsilon$  этот гамильтониан описывает упругое рассеяние существующих квазичастиц; поправки следующего порядка отвечают за процессы, которые нарушают закон сохранения энергии, то есть используют энергию внешнего магнитного поля для рождения новых квазичастиц. Самый важный из этих процессов — одновременное рождение четырех скоррелированных возбуждений, амплитуда которого определяется боголюбовским коэффициентом  $\tilde{\beta}_{1,3}$ . Этот процесс определяет лидирующий петлевой вклад в пересуммированное число родившихся квазичастиц:

$$\mathcal{N}_{1}^{\text{loop}} = \frac{32}{243} \epsilon^{2} \left| \tilde{\beta}_{1,3} \right|^{2} \sin^{2} \left( \frac{27}{8} \frac{\lambda \pi \hbar t}{\Lambda^{3}} \right) + \mathcal{O}\left( \epsilon^{4} \right). \tag{3.145}$$

Полученный результат устанавливает качественное соответствие между моделями динамического эффекта Казимира на основе движущихся зеркал (3.4) и джозефсоновского метаматериала (3.5), по крайней мере, при слабых отклонениях от стационарности.

Подчеркнем, что на больших временах эволюции,  $t\gg t_*\sim \Lambda^3/\lambda\hbar$ , вклад петлевых поправок сравним с древесным вкладом в число родившихся квазичастиц  $\mathcal{N}_1^{\rm free}\approx \epsilon^2 \big| \tilde{\beta}_{1,1} \big|^2$ . Для реалистичных параметров джозефсоновского метаматериала (см. раздел 3.2.2) это время составляет порядка  $t_*\sim 10^{-5}$  с. Другими словами, на временах  $t\ll t_*$  малыми нелинейностями СКВИДов, составляющих метаматериал, можно пренебречь, однако на больших временах число рождающихся квазичастиц будет отличатся от квазиклассических оценок, полученных в древесном приближении.

Кроме того, напомним, что мы суммируем только лидирующие секулярно растущие петлевые поправки в пределе  $\lambda \to 0$ ,  $t \to \infty$ ,  $\lambda t = {\rm const}$ , то есть удерживаем в петлевых интегралах только вклады вида  $(\lambda t)^k$  с положительными целыми степенями k>0. Сублидирующие поправки имеют вид  $\lambda^m t^n$  с некоторыми несовпадающими m>n>0; при конечных  $\lambda$  и t такие поправки подавлены степенями  $\lambda$ . Для реалистичных параметров модели (см. раздел 3.2.2) сублидирующие секулярно растущие вклады становятся существенными только на временах порядка  $t_{**} \sim \Lambda^5 v_\infty/\lambda^2 \hbar^2 \sim 1$  с, которые много больше времени  $t_*$ .

## Глава 4

# Квантование в фоновых скалярных

### ПОЛЯХ

## 4.1 Введение

В этой главе мы рассмотрим еще один пример квантовой теории на нестационарном фоне, отдаленно напоминающем сильное электрическое или гравитационное поле, — теорию Юкавы взаимодействующих фермионов и безмассовых бозонов в (d+1)-мерном пространстве Минковского на фоне внешнего скалярного поля  $\phi_{cl}$ :

$$S = \int d^{d+1}x \left[ \frac{1}{2} (\partial_{\mu}\phi)^2 + i\bar{\psi}\partial \!\!\!/ \psi - \lambda\phi\bar{\psi}\psi \right]. \tag{4.1}$$

Для наглядности ограничимся случаями d=0,1. Как правило, эту теорию квантуют на тривиальном фоне  $\phi_{cl}=0$ ,  $\psi_{cl}=0$  и находят амплитуды рассеяния с помощью стандартного равновесного подхода [45]. Этот подход неприменим в присутствии сильного скалярного поля  $\phi_{cl}$  (по крайней мере, в том случае, если внешнее поле закачивает в систему энергию и заставляет изменяться заселенность квантовых уровней и аномальные квантовые средние). Чтобы изучить такую неравновесную ситуацию, мы квантуем поля на фоне ненулевого классического скалярного поля, а затем вычисляем корреляционные функции с помощью неравновесной диаграммной техники Швингера — Келдыша.

А именно, в данной главе мы полагаемся на следующую программу [143]. Во-первых, выберем некоторое сильное скалярное поле, то есть классическое решение  $\phi_{cl}(x)\gg 1$  для некоторых значений (d+1)-мерного x и  $\psi_{cl}=0$ . Для простоты рассмотрим линейно растущее во времени скалярное поле  $\phi_{cl}=Et$ , вдохновленное похожей нестационарной задачей из квантовой электродинамики [31,32]. В работах [143–145] также обсуждаются случаи линейно растущего в пространстве скалярного поля,  $\phi_{cl}=\frac{m}{\lambda}+Ex$ , и волны вида  $\phi_{cl}=\frac{1}{\lambda}\Phi\left(\frac{t-x}{\sqrt{2}}\right)$ . Во-

вторых, разделим каждое поле на сумму "классического фона" и "квантовых флуктуаций":  $\phi = \phi_{cl} + \phi_q$ ,  $\psi = \psi_q$ , проквантуем "квантовую" часть и найдем древесные корреляционные функции. При этом будем использовать точные фермионные моды вместо плоских волн, тем самым явно находя отклик фермионного поля (по крайней мере, на древесном уровне на указанном фоне). Затем на древесном уровне найдем отклик самого скалярного поля на созданное возмущение. Наконец, вычислим петлевые поправки к корреляционным функциям, используя неравновесную диаграммную технику Швингера — Келдыша. Больше всего мы заинтересованы в петлевых поправках к келдышевскому пропагатору для скалярного и фермионного поля, поскольку эти пропагаторы зависят от состояния теории (см. раздел 1.3).

В этой главе мы покажем, что сильное скалярое поле не разделяет свойства электрических и гравитационных аналогов: на фоне такого поля даже в пределе бесконечно долгого времени эволюции петлевые поправки к заселенности уровней и аномальному квантовому среднему могут оставаться конечными. Следовательно, описание динамики полей на указанном фоне не обязательно требует пересуммирования лидирующих вкладов из всех порядков теории возмущений. Это существенно отличает рассматриваемую ситуацию от более сложных аналогов, для которых такое пересуммирование необходимо [21].

Кроме того, подчеркнем, что между сильным скалярным и электрическим или гравитационным полем также есть еще два важных отличия. Во-первых, уравнения движения точечной релятивистской частицы на фоне полей вида  $\phi_{cl} = \frac{m}{\lambda} + Et$ ,  $\phi_{cl} = \frac{m}{\lambda} + Ex$  или  $\phi_{cl} = \frac{1}{\lambda} \Phi\left(\frac{t-x}{\sqrt{2}}\right)$  не имеет решений типа евклидовых инстантонов на мировой линии. Во-вторых, эффективное действие на фоне скалярного поля чисто действительное [143, 144]. Следовательно, в рассматриваемых сильных полях не происходит туннелирование частиц. Это отличает сильное скалярное поле от сильного электрического [17, 146, 147] или гравитационного [15] поля.

Тем не менее, отметим, что минимум эффективного потенциала скалярного поля достигается при некотором отличном от нуля вакуумном среднем  $\langle \phi \rangle$  (см. раздел 4.4). Более того, в работах [144, 145] было показано, что на фоне сильной скалярной волны  $\phi_{cl} = \frac{1}{\lambda} \Phi \left( \frac{t-x}{\sqrt{2}} \right)$  петлевые поправки к аномальному квантовому среднему скалярного поля, вычисленному в наивном вакууме свободной теории, секулярно растут, а система уравнений Дайсона — Швингера имеет стационарное решение с ненулевым аномальным квантовым средним. Это решение можно интерпретировать как скалярный конденсат, образующийся при "скатывании" поля к минимуму эффективного потенциала.

## 4.2 Сильное скалярное поле в одном измерении

Для начала рассмотрим наиболее простую ситуацию — (0+1)—мерную квантовую теорию поля взаимодействующих фермионов и действительного скалярного поля. На примере этой простой ситуации мы обсудим технические детали и введем обозначения, которые будем использовать на протяжении всей главы.

Вообще говоря, существует два способа описать одномерные фермионы. Первый из них определяется следующим действием:

$$S = \int dt \left[ \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + i \bar{\psi} \dot{\psi} - \lambda \phi \bar{\psi} \psi \right], \tag{4.2}$$

где мы обозначили сопряженный фермион как  $\bar{\psi}=\psi^{\dagger}$ . При квантовании эти фермионы становятся грассмановыми. Другой способ основан на теории двухкомпонентных спиноров:

$$S = \int dt \left[ \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + i \bar{\psi} \gamma_0 \dot{\psi} - \lambda \phi \bar{\psi} \psi \right], \tag{4.3}$$

где 
$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \ \bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0.$$

Тем не менее, можно показать, что ситуация в последней теории лишь немного сложнее, чем в первой. В основном динамика одна и та же. Основное отличие связано с тем фактом, что при квантовании (4.3) мы получаем четыре фоковских состояния,  $|0,0\rangle$ ,  $|0,1\rangle$ ,  $|1,0\rangle$  и  $|1,1\rangle$ , вместо двух состояний,  $|0\rangle$  и  $|1\rangle$ , в теории (4.2). В дальнейшем мы рассматриваем только теорию (4.2). Как и в главе 2, мы будем рассматривать эту — по сути своей квантовомеханическую — модель с точки зрения одномерной квантовой теории поля. Другими словами, вместо вычисления амплитуд квантовомеханических переходов мы вычислим корреляционные функции. В основном же наша задача состоит в том, чтобы найти отклик такой системы на внешнее скалярное поле, которое будет описано ниже.

Уравнения движения для действия (4.2) выглядят следующим образом:

$$\begin{cases} \ddot{\phi} = -\lambda \bar{\psi}\psi, \\ i\dot{\psi} = \lambda \phi\psi. \end{cases} \tag{4.4}$$

Эти уравнения имеют следующее классическое решение:

$$\phi_{cl}(t) = \frac{m}{\lambda} + \frac{\alpha}{\lambda}t, \quad \psi_{cl} = \bar{\psi}_{cl} = 0, \tag{4.5}$$

которое мы будем рассматривать в качестве фона.

Рассмотрим разложение по модам квантовых частей фермионного и скалярного поля на классическом фоне (4.5):

$$\hat{\psi}(t) = \hat{a}p(t), \quad \hat{\psi}(t) = \hat{a}^{\dagger}p^{*}(t),$$

$$\hat{\phi}(t) = \hat{\alpha}f(t) + \hat{\alpha}^{\dagger}f^{*}(t),$$
(4.6)

где операторы  $\hat{a}$  и  $\hat{\alpha}$  подчиняются стандартным (анти)коммутационным соотношениям (чтобы не путать константу в фоновом поле (4.5) и оператор уничтожения бозона, будем ставить над оператором крышку):

$$\{\hat{a}, \hat{a}^{\dagger}\} = 1, \quad [\hat{\alpha}, \hat{\alpha}^{\dagger}] = 1.$$
 (4.7)

Уравнение для мод на этом фоне выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \ddot{f} = 0, \\ \left(i\frac{d}{dt} - m - \alpha t\right)p = 0. \end{cases}$$
(4.8)

Таким образом, получаем дифференциальное уравнение первого порядка для фермионных мод, решением которого является следующая функция (нормировка следует из канонических коммутационных соотношений для поля  $\psi$  и соответствующего импульса  $\bar{\psi}$ ):

$$p(t) = e^{-i\int_{t_0}^t (m+\alpha t')dt'}. (4.9)$$

Отсюда следует, что на древесном уровне квантовое среднее от произведения двух фермионных операторов, взятых в совпадающие моменты, не зависит от времени:

$$\langle 0|\bar{\psi}\psi|0\rangle = 0$$
 и  $\langle 1|\bar{\psi}\psi|1\rangle = 1,$  (4.10)

где  $\hat{a}|0\rangle=\hat{a}^{\dagger}|1\rangle=0$ . Чтобы найти  $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$  точно, заметим, что полный гамильтониан теории выглядит следующим образом:

$$H_{full} = \lambda \phi \bar{\psi} \psi + \frac{\pi^2}{2},\tag{4.11}$$

где  $\pi$  — импульс, сопряженный к скалярному полю,  $[\phi,\pi]=i,~\{\psi,\bar{\psi}\}=1.$  Используя этот гамильтониан, легко показать, что скалярный ток в полной теории со взаимодействием также не зависит от времени:

$$[\bar{\psi}\psi, H_{full}] = 0$$
, следовательно,  $\langle 0|\bar{\psi}\psi|0\rangle_{exact}(t) = 0$  и  $\langle 1|\bar{\psi}\psi|1\rangle_{exact}(t) = 1$ . (4.12)

Таким образом, у нас есть два варианта для задачи отклика:

$$\ddot{\langle \phi \rangle} \equiv -\lambda \langle 0 | \bar{\psi} \psi | 0 \rangle = 0, 
\ddot{\langle \phi \rangle} \equiv -\lambda \langle 1 | \bar{\psi} \psi | 1 \rangle = -\lambda,$$
(4.13)

то есть либо фоновая сила нулевая, либо отлична от нуля, но постоянна.

Подчеркнем, что этот результат не зависит от того, квантуем мы поля на фоне (4.5) или же полагаем фоновое поле равным нулю. Тем не менее, для окончательного решения задачи отклика необходимо также вычислить скалярные и фермионные двухточечные функции, в которых поля взяты в разные моменты времени.

Прежде чем сделать это, отметим один важный момент. Рассмотрим одномерную теорию скалярного поля с ненулевой массой:

$$S_0 = \frac{1}{2} \int dt \left[ \dot{\phi}^2 - \omega^2 \phi^2 \right]. \tag{4.14}$$

Стандартная мода поля в этом случае задается равенством  $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} e^{-i\omega t}$ .

Рассмотрим двухточечную функцию Вайтмана в этой теории в пределе  $\omega \to 0$ :

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (\hat{\alpha}e^{-i\omega t} + \hat{\alpha}^{\dagger}e^{i\omega t}) \xrightarrow{\omega \to 0} \frac{\hat{\alpha} + \hat{\alpha}^{\dagger}}{\sqrt{2\omega}} + i\sqrt{\frac{\omega}{2}}(\hat{\alpha}^{\dagger} - \hat{\alpha})t,$$

$$\langle \phi(t)\phi(t')\rangle = \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{2\omega} \xrightarrow{\omega \to 0} \frac{1}{2\omega} - \frac{i}{2}(t-t').$$
(4.15)

Заметим, что если мы просто опустим член  $\frac{1}{2\omega}$  в пропагаторе, полученное выражение можно будет использовать в качестве древесной функции Вайтмана скалярного поля в теории (4.2). В самом деле, эта функция решает нужное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2}{dt^2}G(t-t') = 0, (4.16)$$

и может быть использована в качестве основы для построения других пропагаторов (таких как фейнмановская, запаздывающая и опережающая двухточечная функция).

С другой стороны, рассмотрим непосредственное квантование теории безмассового скалярного поля ( $\omega=0$  с самого начала). В этом случае мода задается равенством  $f(t)=\frac{1-it}{\sqrt{2}},$  а разложение оператора поля — следующим выражением:

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ (\hat{\alpha} + \hat{\alpha}^{\dagger}) + i(\hat{\alpha}^{\dagger} - \hat{\alpha})t \right]. \tag{4.17}$$

Легко проверить, что такое  $\phi$  удовлетворяет уравнениям движения и коммутационным соотношениям  $[\phi,\pi]=i.$ 

Теперь вычислим древесный вайтмановский пропагатор скаляров:

$$\langle \phi(t)\phi(t')\rangle_{0} = \frac{1}{2} \langle 0| \left[ (\hat{\alpha} + \hat{\alpha}^{\dagger}) + i(\hat{\alpha}^{\dagger} - \hat{\alpha})t \right] \left[ (\hat{\alpha} + \hat{\alpha}^{\dagger}) + i(\hat{\alpha}^{\dagger} - \hat{\alpha})t' \right] |0\rangle = \frac{1 - i(t - t') + tt'}{2}.$$

$$(4.18)$$

В принципе, этот ответ для функции Вайтмана ничем не хуже ответа (4.15) с отброшенным расходящимся членом. Фактически разные вайтмановские пропагаторы просто отвечают разному выбору состояний. Это напоминает похожую ситуацию для безмассового скалярного поля в двумерном плоском пространстве или пространстве де Ситтера [148].

Обратите внимание, что первый выбор пропагатора уважает инвариантность относительно трансляций во времени, но не уважает "положительную определенность",  $\langle \phi^2(t) \rangle > 0$  (в одномерном случае  $\langle \phi^2(t) \rangle$  тождественно равно нулю, тогда как в двумерии аналогичная вайтмановская функция может быть даже отрицательной). В то же время, второй выбор уважает "положительную определенность", но нарушает инвариантность относительно трансляций во времени.

Итак, для описания динамики полей на фоне (4.5) необходимо вычислить точные двухточечные функции Вайтмана для скаляров и фермионов. В следующих параграфах этого раздела мы выполним такое вычисление двумя разными, хотя и связанными друг с другом, способами. Прежде чем погружаться в громоздкие вычисления, кратко сформулируем полученные результаты. Рассмотрим второе уравнение в (4.13):

$$\langle \ddot{\phi} \rangle = -\lambda. \tag{4.19}$$

Его решением является полином второй степени:

$$\langle \phi \rangle = -\frac{\lambda}{2}t^2 + c_1t + c_2, \tag{4.20}$$

в котором мы обозначили константы интегрирования как  $c_{1,2}$ . С учетом этого результата оператор поля  $\hat{\phi}(t)$  может быть записан в следующей форме:

$$\hat{\phi}(t) = \frac{m}{\lambda} + \frac{\alpha}{\lambda}t + \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(\hat{\alpha} + \hat{\alpha}^{\dagger}\right) + i\left(\hat{\alpha}^{\dagger} - \hat{\alpha}\right)t\right] - \frac{\lambda}{2}t^2 + c_1t + c_2. \tag{4.21}$$

Соответственно, бозонный (вайтмановский) пропагатор имеет следующую форму:

$$\Delta \langle \phi(t_1)\phi(t_2) \rangle = \langle \phi(t_1) \rangle \langle \phi(t_2) \rangle = \frac{\lambda^2}{4} t_1^2 t_2^2 - \frac{\lambda}{2} c_1(t_1^2 t_2 + t_2^2 t_1) - \frac{\lambda}{2} c_2(t_1^2 + t_2^2) + c_1 c_2(t_1 + t_2) + c_1^2 t_1 t_2 + c_2^2.$$

$$(4.22)$$

Это выражение совпадет с точным результатом, приведенным, например, в уравнении (4.34), если мы положим

$$c_1 = \lambda t_0, \qquad c_2 = -\frac{\lambda}{2} t_0^2.$$
 (4.23)

Подобное совпадение объясняется тем фактом, что *точное* выражение для двухточечной функции сводится к сумме древесного вклада и несвязных однопетлевых поправок к одноточечным функциям (то есть диаграммам типа "головастик"), которые решают уравнение (4.19). Другими словами, петлевые поправки сдвигают константы интегрирования, но не изменяют вид выражения (4.22).

#### 4.2.1 Двухточечные функции и квантовые поправки

В этом параграфе мы сделаем поле  $\phi$  динамическим и вычислим поправки к древесным пропагаторам. В качестве стартового состояния теории выберем состояние, уничтожаемое оператором  $\hat{\alpha}$ , то есть состояние, которое отвечает древесному пропагатору (4.18). Заметим, что это условие оставляет определенную свободу в выборе состояния, поскольку мы еще не обговорили, как на него действуют операторы рождения-уничтожения фермионов.

Оператор потенциала в представлении взаимодействия выглядит следующим образом:

$$V(t) = U_0^{\dagger}(t, t_0) \left(\lambda \phi(t_0) \bar{\psi} \psi\right) U_0(t, t_0) = \lambda \phi(t) \bar{\psi} \psi = \lambda \left(\hat{\alpha} f(t) + \hat{\alpha}^{\dagger} f^*(t)\right) \hat{a}^{\dagger} \hat{a}, \tag{4.24}$$

где  $t_0$  — время, после которого адиабатически включается взаимодействие  $\lambda \phi \bar{\psi} \psi$ . Напомним, что  $\bar{\psi} \psi$  не зависит от времени и  $f(t) = \frac{1-it}{\sqrt{2}}$ . Выпишем для наглядности оператор эволюции в представлении взаимодействия:

$$U(t_{b}, t_{a}) = T \exp \left[-i \int_{t_{a}}^{t_{b}} d\eta V(\eta)\right] = 1 - i \int_{t_{a}}^{t_{b}} d\eta V(\eta) + (-i)^{2} \int_{t_{a}}^{t_{b}} d\eta V(\eta) \int_{t_{a}}^{\eta} d\xi V(\xi) + \cdots \equiv 1 + U_{1}(t_{b}, t_{a}) + U_{2}(t_{b}, t_{a}) + \cdots$$

$$(4.25)$$

Первую и вторую поправку к оператору эволюции легко можно вычислить явно:

$$U_{1}(t_{b}, t_{a}) = -\frac{i\lambda}{\sqrt{2}} \hat{a}^{\dagger} \hat{a} \left[ (t_{a} - t_{b}) \left( -1 + \frac{i}{2} (t_{a} + t_{b}) \right) \hat{\alpha} + h.c. \right],$$

$$U_{2}(t_{b}, t_{a}) = -\frac{\lambda^{2}}{2} \hat{a}^{\dagger} \hat{a} \left[ \frac{1}{24} (t_{a} - t_{b})^{2} \left( 12 + 3t_{a}^{2} + t_{b} (3t_{b} + 4i) + t_{a} (6t_{b} - 4i) \right) \hat{\alpha}^{\dagger} \hat{\alpha} - \frac{1}{8} (t_{a} - t_{b})^{2} (2i + t_{a} + t_{b})^{2} \hat{\alpha} \hat{\alpha} + h.c. \right],$$

$$(4.26)$$

где мы использовали равенство  $\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\hat{a}^{\dagger}\hat{a}=\hat{a}^{\dagger}\hat{a}$ . В используемых обозначениях функция Вайтмана двух скалярных полей выглядит следующим образом:

$$D_{exact}(t_{1}, t_{2}) = \langle \phi(t_{1})\phi(t_{2})\rangle = \langle U^{\dagger}(t_{1}, t_{0})\phi(t_{1})U(t_{1}, t_{2})\phi(t_{2})U(t_{2}, t_{0})\rangle =$$

$$= \langle [1 + U_{1}(t_{0}, t_{1}) + U_{2}(t_{0}, t_{1}) + \dots] \phi_{1} [1 + U_{1}(t_{1}, t_{2}) + U_{2}(t_{1}, t_{2}) + \dots] \phi_{2} \times (4.27)$$

$$\times [1 + U_{1}(t_{2}, t_{0}) + U_{2}(t_{2}, t_{0}) + \dots] \rangle = D_{0}(t_{1}, t_{2}) + \Delta D(t_{1}, t_{2}) + \dots,$$

где мы для краткости обозначили  $\phi(t_a) \equiv \phi_a$ .

Заметим, что при усреднении по фермионному вакууму,  $a|0\rangle = 0$ , все квантовые поправки к древесному скалярному пропагатору равны нулю, поскольку они всегда содержат комбинацию  $\psi |0\rangle = 0$ . В этом случае древесное выражение для пропагатора является точным:

$$D_{exact}(t_1, t_2) = D_0(t_1, t_2). (4.28)$$

В то же время, усреднение по состоянию  $\hat{a}^{\dagger} | 1 \rangle = 0$  приводит к менее тривиальному результату. Используя указанное выше разложение оператора эволюции, можно показать, что первая поправка к древесному пропагатору растет со временем:

$$\Delta D(t_1, t_2) = \frac{\lambda^2}{8} (t_0 - t_1)(t_0 - t_2) \{ (t_0 + t_1 - 2i)(t_0 + t_2 + 2i)f(t_1)f^*(t_2) + (t_0 + t_1 - 2i)(t_0 + t_2 - 2i)f(t_1)f(t_2) + h.c \} = \frac{\lambda^2}{4} (t_1 - t_0)^2 (t_2 - t_0)^2.$$

$$(4.29)$$

Чтобы вычислить  $\langle \phi(t_2)\phi(t_1)\rangle$ , достаточно просто заменить  $t_1\leftrightarrow t_2$ . Для полноты и дальнейших ссылок приведем здесь выражения для келдышевского и запаздывающего/опережающего пропагаторов:

$$D^{K}(t_{1}, t_{2}) = \frac{1}{2} \langle \{ \phi(t_{1}), \phi(t_{2}) \} \rangle,$$

$$D^{R/A}(t_{1}, t_{2}) = \pm \theta(\pm t_{1} \mp t_{2}) \langle [\phi(t_{1}), \phi(t_{2})] \rangle.$$
(4.30)

Напомним, что запаздывающий и опережающий пропагаторы совпадают с точностью до замены  $t_1 \leftrightarrow t_2$ , поэтому нам достаточно будет вычислить только один из них. Таким образом, получаем:

$$D_0^K = \frac{1}{2} [f(t_1)f^*(t_2) + f^*(t_1)f(t_2)] = \frac{1 + t_1 t_2}{2},$$

$$\Delta D^K = \frac{\lambda^2}{4} (t_1 - t_0)^2 (t_2 - t_0)^2,$$

$$D_0^R = \theta(t_1 - t_2) [f(t_1)f^*(t_2) - f^*(t_1)f(t_2)] = i\theta(t_1 - t_2)(t_2 - t_1),$$

$$\Delta D^R = 0.$$
(4.31)

Здесь функции  $D_0$  обозначают древесные пропагаторы, а  $\Delta D$  — петлевые поправки. Чтобы понять полученный результат, вычислим квантовое среднее одиночного оператора:

$$\langle \phi_1 \rangle = \langle U^{\dagger}(t_1, t_0) \phi_1 U(t_1, t_0) \rangle. \tag{4.32}$$

С точностью до высших порядков  $\lambda$  поправка выглядит следующим образом:

$$\Delta \langle \phi_1 \rangle = -i\lambda \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \left( \langle \phi_1 \phi_2 \rangle - \langle \phi_2 \phi_1 \rangle \right) = \lambda \int_{t_0}^{t_1} dt_2 (t_2 - t_1) = -\frac{\lambda}{2} (t_1 - t_0)^2. \tag{4.33}$$

Таким образом, мы видим, что  $\Delta D$  в действительности сводится к произведению несвязных поправок к одноточечным функциям:

$$\Delta D(t_1, t_2) = \Delta D^K(t_1, t_2) = \Delta \langle \phi_1 \rangle \Delta \langle \phi_2 \rangle = \frac{\lambda^2}{4} (t_1 - t_0)^2 (t_2 - t_0)^2. \tag{4.34}$$

В следующем параграфе мы покажем, что этот вклад отвечат так называемой диаграмме "головастик". Кроме того, в параграфе (4.2.3) мы покажем, что этот результат, полученный во втором порядке по  $\lambda$ , в действительности является точным.

Кроме всего прочего, наблюдения, сделанные в этом разделе, показывают, что рост двухточечной функции, сопровождающий увеличение времен  $t_{1,2}$ , никак не связан с изменением состояния теории. А именно, временная эволюция в теории не приводит к генерации аномальных квантовых средних и заселенности уровней ни для фермионов, ни для бозонов. 
Другими словами, начальное состояние не изменяется, несмотря на нестационарность теории. Это отличает рассматриваемую теорию от аналогичной теории в пространстве более 
высокой размерности (раздел 4.3) и других нестационарных квантовых теорий.

#### 4.2.2 Диаграммная техника

В этом параграфе мы воспроизведем результаты предыдущего параграфа с помощью диаграммной техники. Ввиду нестационарности ситуации мы используем диаграммную технику Швингера — Келдыша. Помимо бозонных пропагаторов, обсуждавшихся в разделах 1.2–1.4, в модели (4.2) также необходимо вычислить фермионные пропагаторы:

$$iG^{--}(x_{1}, x_{2}) \equiv \langle \mathcal{T}\psi(x_{1})\bar{\psi}(x_{2})\rangle = \theta(t_{1} - t_{2})iG^{+-}(x_{1}, x_{2}) + \theta(t_{2} - t_{1})iG^{-+}(x_{1}, x_{2}),$$

$$iG^{++}(x_{1}, x_{2}) \equiv \langle \overline{\mathcal{T}}\psi(x_{1})\bar{\psi}(x_{2})\rangle = \theta(t_{1} - t_{2})iG^{-+}(x_{1}, x_{2}) + \theta(t_{2} - t_{1})iG^{+-}(x_{1}, x_{2}),$$

$$iG^{+-}(x_{1}, x_{2}) \equiv \langle \psi(x_{1})\bar{\psi}(x_{2})\rangle,$$

$$iG^{-+}(x_{1}, x_{2}) \equiv -\langle \bar{\psi}(x_{2})\psi(x_{1})\rangle,$$

$$(4.35)$$

где  $\langle \cdots \rangle$  обозначает усреднение по подходящему начальному состоянию,  $\mathcal T$  обозначает упорядочение по времени, а  $\overline{\mathcal T}$  — обратное упорядочение по времени.

Как и для бозонных, так и для фермионных пропагаторов удобно сделать келдышевский поворот (1.35) и перейти к келдышевскому и запаздывающему/опережающему пропагаторам<sup>1</sup>:

$$G^{K} \equiv \langle \psi_{cl} \bar{\psi}_{cl} \rangle = \frac{1}{2} \left( G^{++} + G^{--} \right), \quad D^{K} \equiv \langle \phi_{cl} \phi_{cl} \rangle = \frac{1}{2} \left( D^{++} + D^{--} \right),$$

$$G^{R} \equiv \langle \psi_{cl} \bar{\psi}_{q} \rangle = G^{--} - G^{-+}, \qquad D^{R} \equiv \langle \phi_{cl} \phi_{q} \rangle = D^{--} - D^{-+},$$

$$G^{A} \equiv \langle \psi_{q} \bar{\psi}_{cl} \rangle = G^{--} - G^{+-}, \qquad D^{A} \equiv \langle \phi_{q} \phi_{cl} \rangle = D^{--} - D^{+-}.$$

$$(4.36)$$

Это определение эквивалентно (4.30).

Правила диаграммной техники для модели (4.2) получаем аналогично теории скалярного поля (разделы 1.2 и 1.4) — либо раскладывая операторы прямой и обратной эволюции в выражениях для точных корреляторов, либо рассматривая функциональный интеграл полной теории. Итоговые правила построения диаграмм в "±" обозначениях изображены на Рис. 4.1.

 $<sup>^{1}</sup>$ Вообще говоря, матрицы, которые поворачивают поля  $\phi$ ,  $\psi$  и  $\bar{\psi}$ , независимы, однако в этой главе мы для удобства считаем, что все они совпадают.

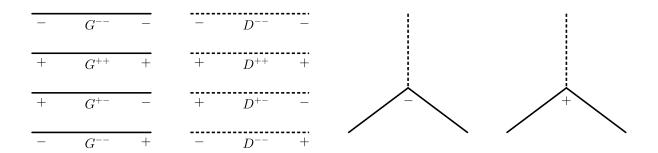


Рис. 4.1: Пропагаторы и вершины в диаграммной технике Швингера — Келдыша для модели (4.2) до келдышевского поворота. Сплошные линии отвечают фермионным пропагаторам, пунктирные — бозонным.

Вычислим первую петлевую поправку к скалярной двухточечной корреляционной функции с помощью диаграммной техники Швингера — Келдыша. Для начала рассмотрим усреднение по состоянию  $|0\rangle_{\psi}|0\rangle_{\phi}$ . В этом случае древесные пропагаторы имеют следующий вид (оставшиеся четыре коррелятора легко восстановить, вспоминая определения пропагаторов):

$$G_0^{+-}(t_1, t_2) = \exp\left[-i \int_{t_2}^{t_1} (m + \alpha t') dt'\right], \qquad D_0^{+-}(t_1, t_2) = \frac{(1 - it_1)(1 + it_2)}{2},$$

$$G_0^{-+}(t_1, t_2) = 0, \qquad \qquad D_0^{-+}(t_1, t_2) = \frac{(1 + it_1)(1 - it_2)}{2}.$$

$$(4.37)$$

Однопетлевая поправка к пропагаторам скалярного поля (Рис. 4.2a) тождественно равна нулю:

$$\Delta D^{+-}(t_1, t_2) = -\lambda^2 \int dt_3 dt_4 \sum_{\sigma_{3,4} = \{+, -\}} D^{+\sigma_3}(t_1, t_3) G^{\sigma_3 \sigma_4}(t_3, t_4) G^{\sigma_4 \sigma_3}(t_4, t_3) D^{\sigma_4 -}(t_4, t_2) \operatorname{sgn}(\sigma_3 \sigma_4) = 0,$$
(4.38)

потому что  $G^{-+}=0$  и  $\theta_{34}\theta_{43}=0$ , где для краткости мы обозначили  $\theta_{34}\equiv\theta(t_3-t_4)$ . Таким образом,  $\Delta D^K(t_1,t_2)=\Delta D^{R/A}(t_1,t_2)=0$ . По тем же самым причинам вакуумный "пузырь" (Рис. 4.2b) также тождественно равен нулю<sup>2</sup>. Наконец, диаграммы-головастики (Рис. 4.2c) также равны нулю, поскольку они содержат пропагаторы свободных фермионов в совпадающих точках:  $\langle 0|\bar{\psi}\psi|0\rangle=0$ . Таким образом, при усреднении по состоянию  $|0\rangle_{\psi}|0\rangle_{\phi}$  однопетлевые поправки к бозонным пропагаторам равны нулю. Это в точности совпадает с результатом, полученным в предыдущем параграфе (см. уравнение (4.28)).

Теперь рассмотрим усреднение по состоянию  $|1\rangle_{\psi}|0\rangle_{\phi}$ . В этом случае древесные бозонные пропагаторы выглядят так же, как и в предыдущем случае, а древесные фермионные

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Напомним, что в диаграммной технике Швингера — Келдыша вакуумные пузыри всегда равны нулю.

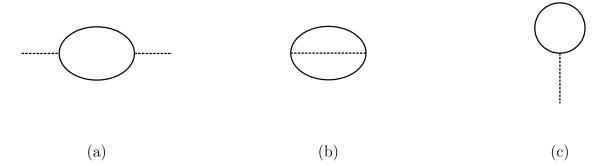


Рис. 4.2: Простейшие диаграммы в теории Юкавы: однопетлевая поправка к скалярному пропагатору (a), вакуумный пузырь (b) и диаграмма "головастик" (c).

пропагаторы приобретают следующий вид:

$$G_0^{+-}(t_1, t_2) = 0,$$

$$G_0^{-+}(t_1, t_2) = -\exp\left[-i\int_{t_2}^{t_1} (m + \alpha t')dt'\right].$$
(4.39)

Диаграммы Рис. 4.2a и Рис. 4.2b в этом случае равны нулю по тем же самым причинам, что и в предыдущем случае. Следовательно, нужно пересчитать только диагримы-головастики с Рис. 4.2c:

$$\Delta \left\langle \phi_{1}^{+} \right\rangle = -i\lambda \int dt_{2} \sum_{\sigma = \{+, -\}} D^{+\sigma}(t_{1}, t_{2}) G_{aa}^{\sigma\sigma}(t_{2}, t_{2}) \operatorname{sgn}(-\sigma) = 
= -i\lambda \int_{t_{0}}^{+\infty} dt_{2} D^{R}(t_{1}, t_{2}) = \lambda \int_{t_{0}}^{t_{1}} dt_{2}(t_{2} - t_{1}) = -\frac{\lambda}{2} (t_{1} - t_{0})^{2}, 
\Delta \left\langle \phi_{1}^{-} \right\rangle = -i\lambda \int dt_{2} \sum_{\sigma = \{+, -\}} D^{-\sigma}(t_{1}, t_{2}) G_{aa}^{\sigma\sigma}(t_{2}, t_{2}) \operatorname{sgn}(-\sigma) = 
= -i\lambda \int_{t_{0}}^{+\infty} dt_{2} D^{R}(t_{1}, t_{2}) = \lambda \int_{t_{0}}^{t_{1}} dt_{2}(t_{2} - t_{1}) = -\frac{\lambda}{2} (t_{1} - t_{0})^{2} = \Delta \left\langle \phi_{1}^{+} \right\rangle.$$
(4.40)

В результате получим, что поправка к корреляционной функции скалярных полей выглядит следующим образом:

$$\Delta D^{+-}(t_1, t_2) = \Delta D^K(t_1, t_2) = \Delta \langle \phi_1^+ \rangle \Delta \langle \phi_2^- \rangle = \frac{\lambda^2}{4} (t_1 - t_0)^2 (t_2 - t_0)^2, \tag{4.41}$$

что совпадает с результатом (4.34) из предыдущего параграфа.

Заметим, что при выборе альтернативного древесного вайтмановского пропагатора скалярных полей:

$$\langle \phi_1 \phi_2 \rangle_0 = -\frac{i}{2} (t_1 - t_2),$$
 (4.42)

который, как мы обсуждали в районе уравнения (4.15), уважает трансляционную инвариантность по времени и отвечает другому выбору исходного состояния теории, мы получим



Рис. 4.3: Диаграмма с поправкой к вершине.

Рис. 4.4: Две петли, соединенные двумя скалярными пропагаторами.

тот же самый ответ для диаграммы-головастика:

$$\Delta \left\langle \phi_1^- \right\rangle = \Delta \left\langle \phi_1^+ \right\rangle = -i\lambda \int_{t_0}^{+\infty} dt_2 D^R(t_1, t_2) = \lambda \int_{t_0}^{t_1} dt_2 (t_2 - t_1) = -\frac{\lambda}{2} (t_1 - t_0)^2, \tag{4.43}$$

поскольку запаздывающие пропагаторы не зависят от выбора состояния.

Таким образом, диаграммная техника дает правильные комбинаторные множители и воспроизводит результат прямых вычислений, проделанных в параграфе 4.2.1.

### 4.2.3 Точные бозонные пропагаторы

Как мы уже отмечали в параграфе 4.2.1, древесные выражения для бозонных пропагаторов являются точными, если мы усредняем по вакууму фермионов  $\hat{a}|0\rangle_{\psi}=0$ :  $D_{exact}(t_1,t_2)=D_0(t_1,t_2)$ . Поэтому в этом разделе мы везде предполагаем усреднение по состоянию  $\hat{a}^{\dagger}|1\rangle_{\psi}=0$ . Мы покажем, что в этом случае ситуация практически совпадает с усреднением по вакууму, однако точный ответ определяется не только древесными выражениями, но и первой петлевой поправкой.

Прежде всего, установим, диаграммы какого вида могут вносить вклад в точный бозонный пропагатор  $\langle \phi_1 \phi_2 \rangle$ . Во-первых, заметим, что поправки к фермионным пропагаторам равны нулю: в самом деле, поправки приходят только из вершины V, которая содержит фермионные поля в совпадающие моменты времени, а в начале этого раздела мы показали, что  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle_{exact} = \langle \bar{\psi}\psi \rangle_0$ . Следовательно, многопетлевые диаграммы, содержащие Рис. 4.2a и Рис. 4.2b, а также диаграммы с поправленными вершинами вроде Рис. 4.3 равны нулю по тем же причинам, которые мы обсуждали в предыдущем параграфе в районе уравнения (4.38).

Теперь рассмотрим петли, соединенные более чем одним бозонным пропагатором, например Рис. 4.4. Чтобы доказать, что эти диаграммы также равны нулю, рассмотрим диаграммылестницы, изображенные на рисунках 4.5a и 4.5b. Обе эти диаграммы отвечают следующему



Рис. 4.5: Диаграмма-лестница с параллельными (a) и перекрестными (b) "ступеньками". интегралу:

$$\Delta G^{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4}(t_1, t_2, t_3, t_4) = \frac{\lambda^4}{2} \int dt_5 dt_6 dt_7 dt_8 \sum_{\sigma_{5,6,7,8} = \{+,-\}} G^{\sigma_1 \sigma_5}(t_1, t_5) G^{\sigma_5 \sigma_6}(t_5, t_6) G^{\sigma_6 \sigma_2}(t_6, t_2) \times G^{\sigma_4 \sigma_7}(t_4, t_7) G^{\sigma_7 \sigma_8}(t_7, t_8) G^{\sigma_8 \sigma_3}(t_8, t_3) D^{\sigma_5 \sigma_7}(t_5, t_7) D^{\sigma_6 \sigma_8}(t_6, t_8) \operatorname{sgn}(\sigma_5 \sigma_6) \operatorname{sgn}(\sigma_7 \sigma_8).$$
(4.44)

Напомним, что  $G^{+-}=0$ , так что ненулевые вклады могут дать только выражения следующего вида:

$$G^{\sigma_{1}+}(t_{1},t_{5})G^{++}(t_{5},t_{6})G^{+\sigma_{2}}(t_{6},t_{2})G^{\sigma_{4}+}(t_{4},t_{7})G^{++}(t_{7},t_{8})G^{+\sigma_{3}}(t_{8},t_{3})D^{++}(t_{5},t_{7})D^{++}(t_{6},t_{8}),$$

$$G^{\sigma_{1}+}(t_{1},t_{5})G^{++}(t_{5},t_{6})G^{+\sigma_{2}}(t_{6},t_{2})G^{\sigma_{4}-}(t_{4},t_{7})G^{--}(t_{7},t_{8})G^{-\sigma_{3}}(t_{8},t_{3})D^{+-}(t_{5},t_{7})D^{+-}(t_{6},t_{8}),$$

$$G^{\sigma_{1}-}(t_{1},t_{5})G^{--}(t_{5},t_{6})G^{-\sigma_{2}}(t_{6},t_{2})G^{\sigma_{4}+}(t_{4},t_{7})G^{++}(t_{7},t_{8})G^{+\sigma_{3}}(t_{8},t_{3})D^{-+}(t_{5},t_{7})D^{-+}(t_{6},t_{8}),$$

$$G^{\sigma_{1}-}(t_{1},t_{5})G^{--}(t_{5},t_{6})G^{-\sigma_{2}}(t_{6},t_{2})G^{\sigma_{4}-}(t_{4},t_{7})G^{--}(t_{7},t_{8})G^{-\sigma_{3}}(t_{8},t_{3})D^{--}(t_{5},t_{7})D^{--}(t_{6},t_{8}),$$

$$(4.45)$$

Заметим, что из-за наличия тета-функций в "++" и "--" пропагаторах эти выражения пропорциональны  $(t_1-t_2)^2$ . В то же время, напомним, что все петлевые поправки генерируются вершиной V, которая содержит поля в совпадающих точках, а произведение  $\bar{\psi}(t)\psi(t)$  не зависит от времени t из-за особенного поведения мод (4.9). Следовательно, можно считать, что начальные и конечные точки всех внутренних фермионных пропагаторов совпадают. Отсюда автоматически следует, что диаграммы вида Рис. 4.5а и Рис. 4.5b, которые входят в качестве поддиаграммы в большую диаграмму, равны нулю, поскольку для них можно положить  $t_1 = t_2$ . В частности, диаграмма Рис. 4.4 содержит в качестве поддиаграммы функцию  $G^{\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4}(t,t,t,t) = 0$ . Вклады диаграмм с большим числом петель (в том числе лестниц с большим числом промежуточных "перекладин") равны нулю по той же самой причине.

В конечном счете, единственные оставшиеся диаграммы, которые могут дать ненулевой вклад в точные бозонные пропагаторы — это несвязные диаграммы-головастики (Рис. 4.2с).

В результате точные пропагаторы выглядят следующим образом:

$$D_{exact}^{+-}(t_1, t_2) = D_0^{+-}(t_1, t_2) + \Delta \langle \phi_1 \rangle \Delta \langle \phi_2 \rangle = \frac{(1 - it_1)(1 + it_2)}{2} + \frac{\lambda^2}{4}(t_1 - t_0)^2(t_2 - t_0)^2,$$

$$D_{exact}^K(t_1, t_2) = D_0^K(t_1, t_2) + \Delta \langle \phi_1 \rangle \Delta \langle \phi_2 \rangle = \frac{1 + t_1 t_2}{2} + \frac{\lambda^2}{4}(t_1 - t_0)^2(t_2 - t_0)^2,$$

$$D_{exact}^{R/A}(t_1, t_2) = D_0^{R/A}(t_1, t_2) = \pm i\theta(\pm t_1 \mp t_2)(t_2 - t_1).$$

$$(4.46)$$

Это обобщает результаты параграфа 4.2.1 на произвольные порядки по  $\lambda$ . Заметим также, что этот результат можно легко обобщить на многоточечные корреляционные функции, которые так же разбиваются на произведение несвязных головастиков. Как мы объясняли выше, фактически этот результат возникает из решения уравнения (4.19), в котором головастики появляются благодаря ненулевой правой части  $\langle 1|\bar{\psi}\psi|1\rangle$ .

## 4.3 Сильное скалярное поле в двух измерениях

В этом разделе мы рассмотрим теорию Юкавы взаимодействующих фермионов и действительного скалярного поля в (1+1)-мерном пространстве Минковского с сигнатурой (+,-):

$$S = \int d^2x \left[ \frac{1}{2} \partial_{\mu} \phi \partial^{\mu} \phi + i \bar{\psi} \partial \psi - \lambda \phi \bar{\psi} \psi \right], \qquad (4.47)$$

где мы обозначили  $\not \partial \equiv \gamma^\mu \partial_\mu, \ \bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$  и предположили, что константа связи  $\lambda > 0$ . В этом разделе мы используем представление Паули — Дирака для алгебры Клиффорда:

$$\gamma^0 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.48}$$

Уравнения движения для действия (4.47) выглядят следующим образом:

$$\begin{cases} \partial^2 \phi + \lambda \bar{\psi} \psi = 0, \\ (i \partial \!\!\!/ - \lambda \phi) \psi = 0. \end{cases}$$

$$(4.49)$$

Наиболее общее классическое решение этих уравнений движения имеет вид  $\psi_{cl}=0, \phi_{cl}=\mathcal{F}(t-x)+\tilde{\mathcal{F}}(t+x),$  где  $\mathcal{F}$  и  $\tilde{\mathcal{F}}$  — произвольные гладкие функции. В дальнейшем мы рассматриваем пример такого классического решения в качестве внешнего фона и разделяем классическую и квантовую части полей:  $\phi=\phi_{cl}+\phi_q, \ \psi=\psi_{cl}+\psi_q.$  Основной нашей целью является вычисление корреляционных функций.

А именно, в этом разделе мы рассматриваем фоновое поле, линейно растущее во времени:  $\phi_{cl}=Et$ , где E — некоторая положительная постоянная $^3$ . В частности, в пределе  $E \to 0$  этот

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>Разумеется, классические решения с другими знаками и абсолютными значениями постоянных можно

фон воспроизводит свободное безмассовое фермионное поле. Если же  $E \neq 0$ , Гамильтониан теории зависит от времени, то есть ситуация нестационарна. Следовательно, можно ожидать рождение частиц, напоминающее аналогичные процессы в сильном электрическом [17,37,146, 147] или гравитационном поле [15].

Тем не менее, подчеркнем, что между рождением частиц, например, в электрическом поле (широко известный эффект Швингера [1]) и процессами на фоне скалярного поля есть существенная разница. С одной стороны, на древесном уровне рождение частиц в электрическом поле можно описать в терминах квантового туннелирования через классически запрещенную область. Вероятность такого процесса описывается мнимой частью эффективного действия, причем выражение для вероятности не является аналитической функцией фонового поля [17]. С другой стороны, как мы увидим ниже, мнимая часть фейнмановского эффективного действия на фоне скалярного поля равна нулю (см. раздел 4.4). Следовательно, ненулевые значения квантовых средних указывают скорее на поляризацию вакуума, чем на рождение частиц.

Кроме того, отметим, что фоновое поле  $\phi_{cl}=Et$  довольно нереалистично, поскольку создание и поддержка неограниченно растущего поля требует бесконечного количества энергии. Тем не менее, такой "игрушечный" пример позволяет ухватить основные свойства модели. Более подходящим примером было бы поле  $\phi_{cl}=ET \tanh \frac{t}{T}$ , которое выходит на постоянный уровень в бесконечном прошлом и будущем, а на временах  $|t| \ll T$  воспроизводит линейный рост. Такая конфигурация полей не решает уравнения движения без подходящего источника в правой части (4.49). Другой возможный пример — сильная скалярная волна, то есть функция  $\mathcal{F}(t-x)$  с компактным носителем. Такой классический фон обсуждается в [144,145].

#### 4.3.1 Моды

Чтобы установить обозначения, рассмотрим сначала теорию свободного массивного фермионного поля. Это поле можно следующим образом разложить на моды:

$$\psi(t,x) = \int \frac{dp}{2\pi} \left[ a_p \psi_p^{(+)}(t,x) + b_p^{\dagger} \psi_p^{(-)}(t,x) \right]. \tag{4.50}$$

получить с помощью временных сдвигов:  $t \to t + \delta t \Longrightarrow \phi_{cl} = E\delta t + Et$ , или инверсии:  $t \to -t \Longrightarrow \phi_{cl} = \frac{m}{\lambda} - Et$ . Например, фермионному полю можно придать массу  $m_{\psi}$  с помощью сдвига  $\delta t = \frac{m_{\psi}}{\lambda E}$ . Впрочем, эти преобразования не приносят ничего существенно нового в рассуждения этого раздела. Поэтому мы без потери общности рассматриваем положительное E и нулевую массу.

Функции  $\psi_p^{(+)}(t,x) \equiv u_p e^{-ipx}$  и  $\psi_p^{(-)}(t,x) \equiv v_p e^{ipx}$ , которые называются положительно- и отрицательно-частотными модами, решают уравнение Дирака:

$$(i\partial \!\!\!/ - m)\psi = 0, \tag{4.51}$$

а операторы рождения и уничтожения удовлетворяют стандартным коммутационным соотношениям:

$$\left\{a_p, a_q^{\dagger}\right\} = \left\{b_p, b_q^{\dagger}\right\} = 2\pi\delta(p - q). \tag{4.52}$$

Это фиксирует одновременные коммутационные соотношения на обобщенную координату  $\psi$  и импульс  $\psi^{\dagger}$ :

$$\left\{\psi_a(t,x),\psi_b^{\dagger}(t,y)\right\} = \delta(x-y)\delta_{ab},\tag{4.53}$$

где мы восстановили спинорные индексы a, b = 1, 2. С точностью до фазы, не зависящей от координат t и x, спиноры  $u_p$  and  $v_p$ , которые удовлетворяют указанным выше соотношениям, задаются следующими равенствами:

$$u_p = \begin{pmatrix} u_{p,1} \\ u_{p,2} \end{pmatrix} = \frac{\operatorname{sgn}(p)}{\sqrt{2\omega(\omega - m)}} \begin{pmatrix} p \\ \omega - m \end{pmatrix}, \quad v_p = \begin{pmatrix} v_{p,1} \\ v_{p,2} \end{pmatrix} = \frac{\operatorname{sgn}(p)}{\sqrt{2\omega(\omega - m)}} \begin{pmatrix} \omega - m \\ p \end{pmatrix}, \quad (4.54)$$

где мы обозначили  $\omega = \sqrt{p^2 + m^2}$  и ипользовали дираковское представление для гаммаматриц (4.48). Для дальнейшего удобства мы ввели фазовый множитель  $\mathrm{sgn}(p)$ , который не сказывается на равенствах (4.51) и (4.53). В дальнейшем мы будем опускать индекс p у спиноров  $u_p$ ,  $v_p$  и  $\psi_p$  в тех местах, где его можно легко восстановить.

На фоне переменного скалярного поля, зависящего от времени, фермионное поле также может быть разложено на моды по образцу (4.50). Очевидно, что при этом  $\psi^{(\pm)}$  должны решать уравнения движения (4.49) с  $\phi = \phi_{cl}$ :

$$[i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - M(t)]\psi = 0, \tag{4.55}$$

где мы для краткости обозначили:

$$M(t) = \alpha t, \quad \alpha = \lambda E.$$
 (4.56)

Поскольку рассматриваемая система инвариантна относительно трансляций в пространстве, удобно представить моды в следующем виде:

$$\psi(t,x) = \psi_p(t)e^{ipx}. (4.57)$$

Подставляя это факторизованное решение в (4.55), получаем уравнение на часть мод, зависящую от времени:

$$\left[i\gamma^0\partial_t - \gamma^1 p - M(t)\right]\psi_p(t) = 0. \tag{4.58}$$

Эту систему уравнений можно разделить, применяя оператор  $[-i\gamma^0\partial_t - \gamma^1 p - M(t)]$  к ее левой части и учитывая, что матрица  $\gamma^0$  имеет собственные значения  $\pm 1$ . Таким образом, уравнение сводится к:

$$\left[\partial_{t}^{2} + \left(\omega_{p}^{(1,2)}\right)^{2}(t)\right]\psi_{1,2}(t) = 0, \quad \text{где}$$

$$\left(\omega_{p}^{(1,2)}\right)^{2}(t) \equiv p^{2} + \alpha^{2}t^{2} \pm i\alpha. \tag{4.59}$$

Заметим, что (4.59) напоминает уравнение для массивного заряженного скалярного поля на фоне постоянного электрического поля [19, 31, 32]. Его точное решение представляет собой сумму линейно независимых функций параболического цилиндра  $D_{\nu}(z)$ :

$$\psi_1 [z(t)] = A_1 D_{\nu} [z(t)] + B_1 D_{-\nu-1} [iz(t)], 
\psi_2 [z(t)] = A_2 D_{\nu-1} [z(t)] + B_2 D_{-\nu} [iz(t)],$$
(4.60)

где  $A_{1,2}$ ,  $B_{1,2}$  — комплексные константы интегрирования, которые мы определим ниже, и для удобства мы ввели новые обозначения:

$$z \equiv \frac{1+i}{\sqrt{\alpha}}M(t), \quad \nu \equiv -\frac{ip^2}{2\alpha}.$$
 (4.61)

Поскольку внешнее поле в рассматриваемой задаче никогда не выключается, невозможно определить обычные ин- и аут-моды, равно как и положительно- и отрицательно-частотные моды. В самом деле, при больших аргументах функция параболического цилиндра имеет следующее асимптотическое разложение [149, 150]:

$$D_{\nu}(z) = z^{\nu} e^{-\frac{z^{2}}{4}} \left[ \sum_{n=0}^{N} \frac{\left(-\frac{\nu}{2}\right)_{n} \left(\frac{1}{2} - \frac{\nu}{2}\right)_{n}}{n! \left(-\frac{z^{2}}{2}\right)^{n}} + \mathcal{O} \left|z^{2}\right|^{-N-1} \right],$$

$$(\gamma)_{0} = 1, \quad (\gamma)_{n \neq 0} = \gamma \left(\gamma + 1\right) \cdots \left(\gamma + n - 1\right),$$

$$(4.62)$$

которое верно для  $|z|\gg |\nu|$  и  $|{\rm Arg}(z)|<\frac{\pi}{2}$ . В нашем случае  ${\rm Arg}(z)=\pm\frac{\pi}{4}$ , а условие  $|z|\gg |\nu|$  отвечает достаточно большим временам  $|t|\gg\frac{p^2}{\alpha^{3/2}}$ . Таким образом, в лидирующем порядке в пределе  $t\to +\infty$  функция ведет себя следующим образом:

$$\psi_{1,2}(z(t)) \sim A_{1,2}(p) \exp\left(-\frac{i}{2}\alpha t^2 - \frac{ip^2}{2\alpha}\log t\right) + B_{1,2}(p) \exp\left(\frac{i}{2}\alpha t^2 + \frac{ip^2}{2\alpha}\log t\right),$$
 (4.63)

где  $A_{1,2}(p)$  и  $B_{1,2}(p)$  — некоторые постоянные, не зависящие от времени (но зависящие от импульса). Следовательно, моды  $\psi_{1,2}(t,x)$  не могут быть сведены к сумме положительно- и отрицательно-частотных плоских волн, а интерпретация происходящих явлений в терминах часиц не имеет смысла.

Впрочем, проверим также другой предел — ультрафиолетовую область, в которой  $|p|\gg \sqrt{\alpha}$  для фиксированного t. В этом пределе мы ожидаем, что моды в сильном скалярном поле

и в свободной теории имеют одинаковое поведение. В самом деле, в этом случае к функции параболического цилиндра применимо следующее асимптотическое разложение (см. приложение В для подробного вывода этого разложения):

$$D_{\nu}\left[z(t)\right] \simeq \frac{e^{\frac{\pi p^{2}}{8\alpha}}}{\sqrt{2}} \left(\frac{M}{\sqrt{M^{2}+p^{2}}}+1\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{ip^{2}}{4\alpha}-\frac{ip^{2}}{4\alpha}\log\frac{\left(\sqrt{M^{2}+p^{2}}+M\right)^{2}}{2\alpha}-\frac{iM\sqrt{M^{2}+p^{2}}}{2\alpha}} \left[1+\mathcal{O}\left(\frac{\alpha}{M^{2}+p^{2}}\right)\right]. \tag{4.64}$$

Следовательно, на временах  $|t| \ll \frac{|p|}{\alpha}$  точные моды действительно ведут себя как обычные плоские волны:

$$\psi_{1,2}(t,x) \sim A'_{1,2}(p)e^{-i|p|t+ipx} + B'_{1,2}(p)e^{i|p|t+ipx}.$$
 (4.65)

Теперь очевидно, что функции  $D_{\nu}[z(t)]$  и  $D_{\nu-1}[z(t)]$  являются некоторыми аналогами "положительно-частотных" мод, то есть точные гармоники должны выглядеть следующим образом:

$$\psi^{(+)}(t) \equiv \begin{pmatrix} \psi_1^{(+)}(t) \\ \psi_2^{(+)}(t) \end{pmatrix} = A^{(+)} \begin{pmatrix} D_{\nu} [z(t)] \\ \frac{(i\partial_t - M(t))}{p} D_{\nu} [z(t)] \end{pmatrix}, \tag{4.66}$$

где мы использовали систему уравнений (4.58), чтобы связать первую и вторую компоненту спинора. Это выражение можно упростить с помощью следующих соотношений [149, 150]:

$$\partial_z D_{\nu}(z) + \frac{1}{2} z D_{\nu}(z) - \nu D_{\nu-1}(z) = 0,$$

$$\partial_z D_{\nu}(z) - \frac{1}{2} z D_{\nu}(z) + D_{\nu+1}(z) = 0,$$
(4.67)

и представить "положительно-частотные" моды в следующем виде:

$$\psi_p^{(+)}(t,x) = A^{(+)} \begin{pmatrix} D_{\nu} \left[ z(t) \right] \\ \frac{1+i}{\sqrt{2}} \frac{p}{\sqrt{2\alpha}} D_{\nu-1} \left[ z(t) \right] \end{pmatrix} e^{ipx}. \tag{4.68}$$

Для достаточно больших импульсов эти функции ведут себя как  $\psi \sim e^{-i|p|t+ipx}$ . Повторим, что мы выделяем эти моды из всех остальных решений уравнения (4.60) по той причине, что они стремятся к модам свободного фермионного поля в пределе  $p \to \infty$ . Следовательно, пропагаторы, разложенные по таким модам, имеют корректное адамаровское поведение. Проще говоря, такой вид мод приводят к тем же ультрафиолетовым перенормировкам, что и в отсутствие фонового поля. Исходя из общефизических соображений, мы считаем, что только такая картина является корректной. В конце этого параграфа мы вернемся к обсуждению этого вопроса.

Тем же самым образом можно получить "отрицательно-частотные" моды:

$$\psi_p^{(-)}(t,x) = A^{(-)} \begin{pmatrix} \frac{1-i}{\sqrt{2}} \frac{p}{\sqrt{2\alpha}} D_{\nu-1}^* [z(t)] \\ D_{\nu}^* [z(t)] \end{pmatrix} e^{-ipx}, \tag{4.69}$$

которые ведут себя при больших импульсах как  $\psi \sim e^{i|p|t-ipx}.$ 

Все, что теперь осталось сделать — это зафиксировать постоянные  $A^{(+)}$  и  $A^{(-)}$ . Для этого мы воспользуемся одновременными коммутационными соотношениями (4.53):

$$\left\{ \psi_{a}(t,x), \psi_{b}^{\dagger}(t,y) \right\} = 
= \iint \frac{dp}{2\pi} \frac{dq}{2\pi} \left[ \left\{ a_{p}, a_{q}^{+} \right\} \psi_{a,p}^{(+)}(t) \psi_{b,q}^{(+)}(t)^{*} e^{i(px-qy)} + \left\{ b_{p}^{+}, b_{q} \right\} \psi_{a,p}^{(-)}(t) \psi_{b,q}^{(-)}(t)^{*} e^{-i(px-qy)} \right] = 
= \iint \frac{dp}{2\pi} \left[ \psi_{a,p}^{(+)}(t) \psi_{b,p}^{(+)}(t)^{*} + \psi_{a,-p}^{(-)}(t) \psi_{b,-p}^{(-)}(t)^{*} \right] e^{ip(x-y)} = \delta(x-y) \delta_{ab}, \tag{4.70}$$

Это условие выполняется в том и только в том случае, если

$$\psi_{a,p}^{(+)}(t)\psi_{b,p}^{(+)}(t)^{*} + \psi_{a,-p}^{(-)}(t)\psi_{b,-p}^{(-)}(t)^{*} = \delta_{ab} \iff \begin{cases} |A^{(+)}|^{2} |D_{\nu}(z)|^{2} + |A^{(-)}|^{2} \frac{p^{2}}{2\alpha} |D_{\nu-1}(z)|^{2} = 1, \\ |A^{(-)}|^{2} |D_{\nu}(z)|^{2} + |A^{(+)}|^{2} \frac{p^{2}}{2\alpha} |D_{\nu-1}(z)|^{2} = 1, \\ (|A^{(+)}|^{2} - |A^{(-)}|^{2}) \frac{1-i}{\sqrt{2}} \frac{p}{\sqrt{2\alpha}} D_{\nu}(z) D_{\nu-1}^{*}(z) = 0, \end{cases}$$

$$(4.71)$$

для произвольных моментов времени z(t). Впрочем, можно заметить, что в действительности указанные выше равенства не зависят от времени ввиду уравнений движения и соотношения  $\psi_{a,-p}^{(-)}(t) = -\gamma_{ab}^1 \left(\psi_{b,p}^{(+)}(t)\right)^*$ , связанного с симметрией системы уравнений (4.49):

$$\partial_t \left( \psi_{a,p}^{(+)}(t) \psi_{b,p}^{(+)}(t)^* + \psi_{a,-p}^{(-)}(t) \psi_{b,-p}^{(-)}(t)^* \right) = 0. \tag{4.72}$$

Во-первых, из соотношений (4.71) следует, что  $|A^{(+)}|^2 = |A^{(-)}|^2 = |A|^2$ . Во-вторых, они позволяют зафиксировать постоянную  $|A|^2$ , полагая аргумент функций равным любому удобному значению, например, нулю:

$$|A|^2 \left[ \frac{\pi}{\left| \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{ip^2}{4\alpha}\right) \right|^2} + \frac{p^2}{4\alpha} \frac{\pi}{\left| \Gamma\left(1 + \frac{ip^2}{4\alpha}\right) \right|^2} \right] = 1.$$
 (4.73)

С помощью свойств гамма-функции:

$$|\Gamma(iy)|^2 = \frac{\pi}{y \sinh(\pi y)}, \quad \left|\Gamma\left(\frac{1}{2} + iy\right)\right|^2 = \frac{\pi}{\cosh(\pi y)},$$
 (4.74)

находим, что

$$|A|^2 = e^{-\frac{\pi p^2}{4\alpha}}. (4.75)$$

Подведем основные итоги этого параграфа и выпишем асимптотические разложения для мод.

Для  $t>0,\ \alpha|t|\ll|p|,\ |p|\gg\sqrt{\alpha}$  мы получаем, что с точностью до  $\mathcal{O}\left(\frac{M^2}{p^2}\right)$  моды ведут себя как плоские волны:

$$\psi^{(+)}(t,x) \simeq \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 + \frac{|M|}{2|p|} \\ \operatorname{sgn}(p) \left( 1 - \frac{|M|}{2|p|} \right) \end{pmatrix} e^{-i|p|t + ipx + \frac{ip^2}{4\alpha} - \frac{ip^2}{4\alpha} \log \frac{p^2}{2\alpha} + i\tilde{\varphi}}, \tag{4.76}$$

где  $\tilde{\varphi}$  — некоторая постянная, не зависящая ни от координат, ни от импульсов. С точностью до фазы это выражение совпадает со свободными модами  $(4.54)^4$ .

В то же время, для  $t>0,~\alpha|t|\gg|p|,~|t|\gg\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$  мы получаем, что с точностью до  $\mathcal{O}\left(\frac{p^2}{M^2}\right)$  моды ведут себя как

$$\psi^{(+)}(t,x) \simeq \begin{pmatrix} 1\\ \frac{p}{2|M|} \end{pmatrix} \left(2\alpha t^2\right)^{\frac{ip^2}{4\alpha}} e^{-\frac{i\alpha t^2}{2} + ipx + \frac{ip^2}{4\alpha} \log \frac{p^2}{2\alpha} + i\tilde{\varphi}}.$$

$$(4.77)$$

Здесь мы приводим только "положительно-частотные" моды, поскольку "отрицательно частотные" моды могут быть получены из них простым зарядовым сопряжением:

$$\psi_p^{(-)}(t,x) = \gamma^5 \psi_p^{(+)*}(t,x), \tag{4.78}$$

где  $\gamma^5 = \gamma^0 \gamma^1$ . Также можно проверить, что моды подчиняются следующему соотношению:

$$\psi_p^{(+)}(-t,x) = \operatorname{sgn} p \, \gamma^5 \psi_p^{(+)*}(t,x). \tag{4.79}$$

Наконец, остановимся на следующем важном вопросе. В этом параграфе мы нашли некоторый полный базис мод, решающих классические уравнения движения, однако в выборе этого базиса, вообще говоря, всегда есть неоднозначность. В зависимости от этого выбора в теории существуют различные "основные" состояния пространства Фока. В самом деле, вместо (4.68) и (4.69) можно было бы с тем же успехом рассмотреть канонически преобразованный базис мод:

$$\widetilde{\psi}_{p}^{(+)}(t,x) = \int \frac{dq}{2\pi} \left[ a_{pq} \psi_{q}^{(+)}(t,x) + b_{pq} \psi_{q}^{(-)}(t,x) \right], \quad \widetilde{\psi}_{p}^{(-)}(t,x) = \int \frac{dq}{2\pi} \left[ c_{pq} \psi_{q}^{(+)}(t,x) + d_{pq} \psi_{q}^{(-)}(t,x) \right]. \tag{4.80}$$

Разумеется, новые моды и новые операторы рождения-уничтожения должны уважать канонические коммутационные соотношения, что накладывает определенные ограничения на коэффициенты  $a_{pq}$ ,  $b_{pq}$ ,  $c_{pq}$  and  $d_{pq}$ :

$$\int \frac{dp}{2\pi} \left( a_{pq} a_{pq'}^* + c_{pq} c_{pq'}^* \right) = 2\pi \delta \left( q - q' \right),$$

$$\int \frac{dp}{2\pi} \left( b_{pq}^* b_{pq'} + d_{pq}^* d_{pq'} \right) = 2\pi \delta \left( q - q' \right),$$

$$\int \frac{dp}{2\pi} \left( a_{pq} b_{pq'}^* + c_{pq} d_{pq'}^* \right) = 0.$$
(4.81)

Из физических соображений также можно потребовать, чтобы коэффициенты выглядели следующим образом:

$$a_{pq} \approx d_{pq} \approx \delta(p-q), \quad b_{pq} \approx c_{pq} \approx 0,$$
 (4.82)

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup> Чтобы это было легче увидеть, мы ввели множитель sgn(p) в уравнениях (4.54).

когда импульс p стремится к бесконечности. Это необходимо, чтобы пропагаторы имели корректное адамарово поведение, а перенормировки выполнялись тем же образом, что и в стационарной теории на нулевом фоне.

Таким образом, не существует единого способа выбрать базис мод — в принципе, все возможности, указанные в (4.80), разрешены и могут привести к различным физическим ситуациям. Этот факт становится более очевидным в ситуациях, когда нет предпочтительной базиса специальных функций, найденных в XIX веке и перечисленных в стандартных учебниках.

Для заданного выбора мод можно определить новое "основное" состояние в пространстве Фока

$$\hat{\tilde{a}}_p|a,b,c,d\rangle = \hat{\tilde{b}}_p|a,b,c,d\rangle = 0, \tag{4.83}$$

где  $\hat{a}_p$  и  $\hat{b}_p$  — каконически преобразованные операторы уничтожения. Для этого нового состояния определенные физические величины могут отличаться от таковых для исходного состояния [90, 144].

## 4.3.2 Древесный скалярный ток

В предыдущем параграфе мы вывели точные моды для фермионного поля, которые в некотором смысле описывают отклик фермионов на сильное фоновое скалярное поле. В этом параграфе мы найдем отклик самого скалярного поля из-за наличия нетривиальных фермионных нулевых колебаний на указанном выше фоне.

Квантуя гамильтониан теории (4.47):

$$\hat{H} = \int dx \left[ \frac{1}{2} \left( \partial_t \hat{\phi} \right)^2 + \left( \partial_x \hat{\phi} \right)^2 - i \hat{\psi} \gamma^1 \partial_x \hat{\psi} + \lambda \hat{\phi} \hat{\psi} \hat{\psi} \right], \tag{4.84}$$

и используя гамильтоновы уравнения движения:

$$\dot{\hat{\phi}}(x) = i \left[ \hat{H}, \hat{\phi}(x) \right], \quad \dot{\hat{\psi}}(x) = i \left[ \hat{H}, \hat{\psi}(x) \right], \tag{4.85}$$

получаем следующее операторное уравнение на скалярное поле:

$$\partial^2 \hat{\phi} + \lambda \hat{\psi} \hat{\psi} = 0, \tag{4.86}$$

которое воспроизводит одно из классических уравнений движения (4.49). Следовательно, чтобы найти отклик самого скалярного поля на классическое поле  $\phi_{cl} = \langle \hat{\phi} \rangle$ , нужно вычислить скалярный ток  $j_{cl}(t) \equiv \langle \hat{\psi} \hat{\psi} \rangle$ . Этот ток имеет следующий вид:

$$\langle \bar{\psi}\psi\rangle(t) = \iint \frac{dp}{2\pi} \frac{dq}{2\pi} \left[ \langle b_p b_q^{\dagger} \rangle \left( \psi_{1,p}^{(-)}(t) \psi_{1,q}^{(-)}(t)^* - \psi_{2,p}^{(-)}(t) \psi_{2,q}^{(-)}(t)^* \right) e^{i(p-q)x} \right] =$$

$$= \int \frac{dp}{2\pi} \left( \left| \psi_{1,p}^{(-)}(t) \right|^2 - \left| \psi_{2,p}^{(-)}(t) \right|^2 \right) = \int \frac{dp}{2\pi} \left( 1 - 2e^{-\frac{\pi p^2}{4\alpha}} \left| D_{\nu} \left[ z(t) \right] \right|^2 \right),$$

$$(4.87)$$

где мы для краткости использовали обозначения параграфа 4.3.1, а в последней строчке также использовали одно из соотношений (4.71). Заметим, что в принципе рассматриваемое уравнение дает неявное выражение для тока для произвольного момента времени. Тем не менее, в исходном виде это выражение трудно интерпретировать в физических терминах. Поэтому для большей наглядности мы будем рассматривать только лидирующий вклад в пределе  $t \to \infty$  для малых  $\alpha$ .

Прежде чем оценивать интеграл (4.87), рассмотрим случай свободного фермионного поля с массой m. Используя свободные моды (4.54), можно получить следующий ток:

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle_{free} = -\int_{-\Lambda}^{\Lambda} \frac{dp}{2\pi} \frac{m}{\sqrt{m^2 + p^2}} \approx \frac{m}{\pi} \log \frac{m}{2\Lambda},$$
 (4.88)

где мы ввели ультрафиолетовое обрезание на масштабе  $\Lambda$ . Теперь заметим, что постоянный классический фон  $\phi_{cl} = \frac{m}{\lambda}$ , подставленный в систему уравнений (4.49), воспроизводит этот случай. Аналогом массового параметра m в теории (4.47) является  $M(t) = \lambda \phi_{cl} = \lambda E t$ . Таким образом, можно ожидать следующего поведения от скалярного тока (4.87):

$$\langle \bar{\psi}\psi\rangle(t) \simeq \frac{\lambda\phi_{cl}}{\pi}\log\frac{\lambda\phi_{cl}}{2\Lambda}.$$
 (4.89)

Проверим это предположение, вычисляя интеграл (4.87) в приближении, когда функция  $\phi_{cl}$  много больше единицы и медленно изменяется. Заметим, что  $M(t) = \alpha t$  растет со временем неограниченно, а потому может превзойти любой заранее выбранный масштаб  $\Lambda$ . По этой причине мы отдельно рассматриваем случаи  $M < \Lambda$  и  $M > \Lambda$ . В обоих случаях мы считаем, что  $M^2 \gg \alpha$ , чтобы выделить лидирующие вклады. Вообще говоря, случай  $M > \Lambda$  довольно нефизичен, однако мы рассматриваем его для полноты изложения.

В случае  $M \ll \Lambda$  разделим область интегрирования на две части:  $[0,\Lambda] = [0,\sqrt{\alpha}] + [\sqrt{\alpha},\Lambda],$  и оценим интегралы по этим отрезкам с помощью разложений (4.62) и (4.64) соответственно:

$$\int_{0}^{\sqrt{\alpha}} dp \left(1 - 2e^{-\frac{\pi p^{2}}{4\alpha}} |D_{\nu}[z(t)]|^{2}\right) \simeq \int_{0}^{\sqrt{\alpha}} dp \left[1 - 2 + \frac{p^{2}}{2M^{2}} + \mathcal{O}\left(\frac{\alpha^{2}}{M^{4}}\right)\right] \simeq \\
\simeq -\sqrt{\alpha} \left[1 - \frac{1}{6} \frac{\alpha}{M^{2}} + \mathcal{O}\left(\frac{\alpha^{2}}{M^{4}}\right)\right];$$

$$\int_{\sqrt{\alpha}}^{\Lambda} dp \left(1 - 2e^{-\frac{\pi p^{2}}{4\alpha}} |D_{\nu}[z(t)]|^{2}\right) \simeq \int_{\sqrt{\alpha}}^{\Lambda} dp \left[1 - \left(1 + \frac{M}{\sqrt{M^{2} + p^{2}}}\right) \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{\alpha}{p^{2}}\right)\right)\right] \simeq \\
\simeq M \left[\log \frac{M}{2\Lambda} + \mathcal{O}\left(\frac{M^{2}}{\Lambda^{2}}, \frac{\sqrt{\alpha}}{M}\right)\right].$$
(4.90)

Следовательно, в пределе  $t \to \infty$  получаем:

$$\langle \bar{\psi}\psi\rangle(t) \simeq \frac{\alpha t}{\pi} \log \frac{\alpha t}{2\Lambda} + \cdots,$$
 (4.92)

где мы обозначили подавленный вклад как "···". Это выражение совпадает с (4.89) в рассматриваемом приближении.

В случае  $M \gg \Lambda$  разложение (4.62) можно использовать во всей области  $[0,\Lambda]$ :

$$\langle \bar{\psi}\psi\rangle(t) \sim \int_0^{\Lambda} dp \left[ -1 + \frac{p^2}{2M^2} + \mathcal{O}\left(\frac{\alpha^2}{M^4}\right) \right] \simeq -\Lambda + \frac{1}{6} \frac{\Lambda^3}{M^2} + \cdots,$$
 (4.93)

то есть в лидирующем порядке ток не зависит от времени и линейно расходится в пределе  $\Lambda \to \infty$ . Судя по всему, это поведение не имеет физического смысла — в частности, оно не позволяет правильно обращаться с ультрафиолетовым расходимостями. Это означает, что бесконечно растущее скалярное поле не является самосогласованным, как мы уже отмечали в начале этого раздела.

Подобной проблемы можно избежать, рассматривая достаточно длинный "пульс"  $\phi_{cl} = ET \tanh \frac{t}{T}$  вместо бесконечно растущего  $\phi_{cl} = Et$ . С одной стороны, на временах  $t \ll T$  эти фоновые поля совпадают, следовательно, верен результат (4.92). С другой стороны, на временах  $t \gg T$  "пульс" воспроизводит свободное дираковское поле с массой  $m = \pm \lambda ET$ . Следовательно, если выбрать ультрафиолетовое обрезание  $\Lambda \gg M(T)$ , условие  $\lambda \phi_{cl} \ll \Lambda$  всегда будет выполнено и равенство (4.89) останется верным.

Таким образом, после учета нулевых колебаний фермионного поля эффективное уравнение движения для скалярного поля изменяется следующим образом:

$$\partial^2 \langle \phi \rangle + \frac{\lambda^2 \langle \phi \rangle}{\pi} \log \frac{\lambda \langle \phi \rangle}{\Lambda} \approx 0.$$
 (4.94)

Это равенство верно для полей из интервала  $\sqrt{\lambda E} \ll \lambda \phi_{cl} \ll \Lambda$  и  $\langle \phi \rangle = \phi_{cl} + \dots$  Заметим, что  $\phi_{cl} = Et$  больше не решает это уравнение, то есть поле должно перестроиться. Мы обсудим причины этого поведения в разделе 4.4.

Отметим, что уравнение (4.94) является аналогом причинных уравнений для скалярных и электромагнитных полей, которые были получены, например, в [100]. В обозначениях работы [100] мы явно рассчитали правую сторону (скалярный ток) для заданных фоновых полей в древесном приближении и для сильного, но медленно меняющегося фона. Интересно, что в древесном приближении скалярный ток нечувствителен к выбору начального состояния. В следующем разделе мы покажем, что сублидирующие поправки к скалярному току, которые возникают за счет взаимодействия, зависят от выбора начального состояния, однако подавлены малой константой связи и ограничены даже в пределе бесконечно большого времени эволюции.

Также обратите внимание, что истинное уравнение движения не может зависеть от искусственного ультрафиолетового обрезания Л. Эта проблема решается путем перенормировки голой массы скалярного поля. Оказывается, что квантовые флуктуации нарушают симметрию задачи и придают скалярному полю постоянное ненулевое значение  $\phi = \langle \phi \rangle_{GS}$ . Во-первых, это означает, что ультрафиолетовое обрезание в выражении (4.94) заменяется вакуумным значением  $\lambda \langle \phi \rangle_{GS}$ . Во-вторых, возбуждения скалярного поля вблизи нового вакуума имеют массу  $\mu \sim \lambda$ . Мы подробно обсудим вывод этих утверждений в разделе 4.4.

#### 4.3.3 Петлевые поправки

Вычисление на древесном уровне, проведенное в параграфе 4.3.2, указывает на распад сильного скалярного поля  $\phi_{cl} = Et$ . В теории со взаимодействием такой распад, как правило, также приводит к существенным изменениям исходного состояния системы за счет петлевых поправок. Это, в свою очередь, проявляется в том, что фоновое поле возбуждает заселенность высших энергетических уровней и аномальные квантовые средние [19–33]. В этом параграфе мы вычислим петлевые поправки к корреляционным функциям и покажем, что петлевые поправки в действительности не растут со временем, в отличие от случая сильных электрических и гравитационных полей.

В виду явной нестационарности рассматриваемой теории для вычисления квантовых поправок мы используем диаграммную технику Швингера — Келдыша, обсуждавшуюся в разделах 1.2 и 4.2.2. Заметим, что определение (4.35) должно быть скорректировано таким образом, чтобы учесть спинорные индексы двумерных фермионов. Для удобства в этом разделе мы будем работать с пропагаторами, над которыми произвели частичное преобразование Фурье:

$$G_{ab}^{\pm\pm}(x_1, x_2) = \int \frac{dp}{2\pi} G_{ab}^{\pm\pm}(t_1, t_2; p) e^{ip(x_1 - x_2)}, \tag{4.95}$$

что приводит к следующим выражениям для фермионных пропагаторов:

$$iG_{ab}^{+-}(t_{1}, t_{2}; p) = \psi_{p1}^{a} \psi_{p2}^{c*} \left(\gamma^{0}\right)_{cb} = \begin{pmatrix} \psi_{p1}^{1} \psi_{p2}^{1*} & -\psi_{p1}^{1} \psi_{p2}^{2*} \\ \psi_{p1}^{2} \psi_{p2}^{1*} & -\psi_{p1}^{2} \psi_{p2}^{2*} \end{pmatrix},$$

$$iG_{ab}^{-+}(t_{1}, t_{2}; p) = -\tilde{\psi}_{p1}^{a} \tilde{\psi}_{p2}^{c*} \left(\gamma^{0}\right)_{cb} = \begin{pmatrix} -\tilde{\psi}_{p1}^{1} \tilde{\psi}_{p2}^{1*} & \tilde{\psi}_{p1}^{1} \tilde{\psi}_{p2}^{2*} \\ -\tilde{\psi}_{p1}^{2} \tilde{\psi}_{p2}^{1*} & \tilde{\psi}_{p1}^{2} \tilde{\psi}_{p2}^{2*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\psi_{p1}^{2*} \psi_{p2}^{2} & -\psi_{p1}^{2*} \psi_{p2}^{1} \\ \psi_{p1}^{1*} \psi_{p2}^{2} & \psi_{p1}^{1*} \psi_{p2}^{1} \end{pmatrix},$$

$$(4.96)$$

где a, b нумеруют спинорные индексы и мы обозначили для краткости  $\psi_{p,a}^{(+)}(t_{\alpha}) = \psi_{p\alpha}^{a}$ ,  $\psi_{-p,a}^{(-)}(t_{\alpha}) = \tilde{\psi}_{p\alpha}^{a}$ . В этой формуле мы также воспользовались представлением (4.48) для гаммаматриц, разложением (4.50) и соотношением  $\psi_{-p}^{(-)}(t) = -\gamma^{1} \left(\psi_{p}^{(+)}(t)\right)^{*}$ . Подчеркнем, что мы используем точные моды (4.68) и (4.69) вместо плоских волн (4.54).

Соответствующий бозонный пропагатор выглядит следующим образом:

$$iD^{+-}(t_1, t_2; p) = f_p(t_1)f_p^*(t_2) = \frac{1}{2|p|}e^{-i|p|(t_1 - t_2)},$$
  

$$iD^{-+}(t_1, t_2; p) = f_p^*(t_1)f_p(t_2) = \frac{1}{2|p|}e^{i|p|(t_1 - t_2)},$$
(4.97)

где функции  $f_p(t)$  — это просто моды свободного скалярного поля:

$$\phi(t,x) = \int \frac{dp}{2\pi} \left[ \alpha_p f_p(t) e^{ipx} + \alpha_p^{\dagger} f_p(t)^* e^{-ipx} \right]. \tag{4.98}$$

Операторы  $\alpha_p$  и  $\alpha_p^\dagger$  удовлетворяют стандартным коммутационным соотношениям для бозонов:  $[\alpha_p,\alpha_q^\dagger]=2\pi\delta(p-q).$ 

Используя разложение по модам для фермионного и бозонного полей, получаем, что после келдышевского поворота древесные пропагаторы имеют следующий вид:

$$D^{K}(t_{1}, t_{2}; p) = \frac{1}{2} \left[ f_{p}(t_{1}) f_{p}^{*}(t_{2}) + f_{p}^{*}(t_{1}) f_{p}(t_{2}) \right],$$

$$D^{R/A}(t_{1}, t_{2}; p) = \pm \theta(\pm t_{1} \mp t_{2}) \left[ f_{p}(t_{1}) f_{p}^{*}(t_{2}) - f_{p}^{*}(t_{1}) f_{p}(t_{2}) \right],$$

$$\operatorname{tr} G_{ab}^{K}(t_{1}, t_{2}; p) = \frac{1}{2} \left( \psi_{p1}^{1} \psi_{p2}^{1*} - \psi_{p1}^{2} \psi_{p2}^{2*} + \psi_{p1}^{1*} \psi_{p2}^{1} - \psi_{p1}^{2*} \psi_{p2}^{2*} \right),$$

$$\operatorname{tr} G_{ab}^{R/A}(t_{1}, t_{2}; p) = \pm \theta(\pm t_{1} \mp t_{2}) \left( \psi_{p1}^{1} \psi_{p2}^{1*} - \psi_{p1}^{2} \psi_{p2}^{2*} - \psi_{p1}^{1*} \psi_{p2}^{1} + \psi_{p1}^{2*} \psi_{p2}^{2} \right).$$

$$(4.99)$$

Помимо других преимуществ (например, менее громоздких формул), эти обозначения позволяют изучить поведение каждой p-моды по отдельности. В самом деле, напомним, что запаздывающий и опережающий пропагаторы несут информацию о спектре квазичастиц, в то время как келдышевский пропагатор позволяет установить состояние теории (см. раздел 1.3). Если выполнить квантовое усреднение по произвольному состоянию  $|\chi\rangle$ , уважающему пространственную трансляционную инвариантность, келдышевские пропагаторы принимают следующий вид:

$$D^{K}(t_{1}, t_{2}; p) = \left(n_{p} + \frac{1}{2}\right) f_{p}(t_{1}) f_{p}^{*}(t_{2}) + \varkappa_{p} f_{p}(t_{1}) f_{-p}(t_{2}) + h.c.,$$

$$\operatorname{tr} G_{ab}^{K}(t_{1}, t_{2}; p) = \left(\frac{1}{2} - n_{p}'\right) \left(\psi_{p1}^{1} \psi_{p2}^{1*} - \psi_{p1}^{2} \psi_{p2}^{2*}\right) - \varkappa_{p}' \left(\psi_{p1}^{1} \psi_{p2}^{2} + \psi_{p1}^{2} \psi_{p2}^{1}\right) + (c.c, p.c, h.c.),$$

$$(4.100)$$

где h.c. обозначает эрмитово сопряжение, p.c. обозначает замену  $p \to -p$  и c.c. обозначает замену  $\psi_p^{(+)} \to \psi_p^{(-)}$ . Также мы ввели следующие обозначения. Во-первых, бозонный пропагатор включает в себя заселенность бозонных уровней  $\langle \chi | \alpha_p^\dagger \alpha_{p'} | \chi \rangle \equiv 2\pi n_p \delta(p-p')$ , аномальное квантовое среднее  $\langle \chi | \alpha_p \alpha_{-p'} | \chi \rangle \equiv 2\pi \varkappa_p \delta(p-p')$  и сопряженную ему величину. Во-вторых, фермионный пропагатор содержит заселенность уровней фермионов  $\langle \chi | a_p^\dagger a_{p'} | \chi \rangle \equiv 2\pi n_p' \delta(p-p')$ , аномальное квантовое среднее  $\langle \chi | a_p b_{-p'} | \chi \rangle \equiv 2\pi \tilde{n}_p' \delta(p-p')$ , аномальное квантовое среднее  $\langle \chi | a_p b_{-p'} | \chi \rangle \equiv 2\pi \tilde{n}_p' \delta(p-p')$ , аномальное квантовое среднее  $\langle \chi | a_p b_{-p'} | \chi \rangle \equiv 2\pi \tilde{n}_p' \delta(p-p')$ , аномальное квантовое среднее  $\langle \chi | a_p b_{-p'} | \chi \rangle \equiv 2\pi \tilde{n}_p' \delta(p-p')$ , аномальное квантовое среднее  $\langle \chi | a_p b_{-p'} | \chi \rangle \equiv 2\pi \tilde{n}_p' \delta(p-p')$ 

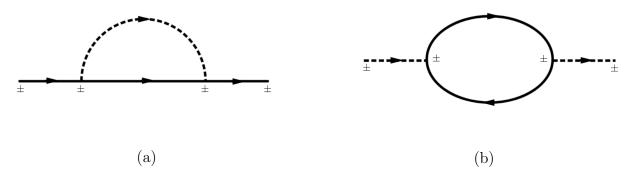


Рис. 4.6: Однопетлевые поправки к фермионным (a) и бозонным (b) двухточечным функциям в "±"-нотации. Сплошные линии обозначают древесные фермионные пропагаторы, пунктирные линии обозначают древесные бозонные пропагаторы.

 $2\pi\varkappa_p'\delta(p-p')$  и сопряженную ему величину. Заметим, что древесные запаздывающий и опережающий пропагаторы пропорциональны коммутатору  $[\phi,\phi]$  или антикоммутатору  $\{\psi,\psi^{\dagger}\}$  соответственно, то есть эти пропагаторы являются с-числами. Другими словами, эти пропагаторы не зависят от выбора состояния  $|\chi\rangle$ .

Прежде чем взаимодействие включено (то есть в гауссовом приближении), теория находится в основном состоянии  $\hat{a}|0\rangle = 0$ ,  $\hat{\alpha}|0\rangle = 0$ , а все перечисленные квантовые средние в точности равны нулю. Тем не менее, при включении взаимодействия эти средние могут изменяться со временем ввиду нестационарности фонового поля. А именно, секулярный рост заселенности уровней  $n_p$ ,  $n'_p$  или  $\tilde{n}'_p$  (если представлен) указывает на усиление более высоких уровней (по сравнению с нулевыми колебаниями точных мод), тогда как рост аномальных квантовых средних (если представлен) означает, что исходное состояние теории не является истинным вакуумом [22]. В этом параграфе мы оценим однопетлевые поправки к квантовым средним (Рис. 4.6) и проверим, как они ведут себя в бесконечном будущем.

#### Однопетлевые поправки к бозонным пропагаторам

Вычислим однопетлевые поправки к двухточечным корреляционным функциям скалярного поля (Рис. 4.6b). Для удобства обозначим  $T = \frac{1}{2}(t_1 + t_2)$ ,  $\tau = t_1 - t_2$ , где  $t_1$  и  $t_2$  — временные аргументы двухточечной функции. Чтобы упростить приведенные ниже выражения, будем считать, что эволюция начинается в момент времени  $t_0 = -T$ . Заметим, что полное время эволюции  $T - t_0 = 2T$ . Затем возьмем предел  $T \to \infty$ , зафиксируем  $\tau \ll T$  и выделим лидирующий вклад в указанном пределе. Эта процедура позволяет определить судьбу состояния рассматриваемой теории, поскольку она описывает эволюцию  $n_p(T)$  и  $\varkappa_p(T)$ , введенных

в предыдущем параграфе. Для краткости ниже мы используем следующие обозначения:

$$\lambda E t_a = \alpha t_a = M(t_a) = M_a. \tag{4.101}$$

Прежде всего покажем, что петлевые поправки к запаздывающему и опережающему пропагаторам не могут расти в пределе  $T \to \infty$  и  $\tau = {\rm const.}$  В самом деле, из-за наличия тета-функций в этих пропагаторах первая петлевая поправка к запаздывающему пропагатору сводится к следующему выражению:

$$\Delta D^{R}(t_{1}, t_{2}; p) =$$

$$= -\lambda^{2} \operatorname{tr} \int_{t_{2}}^{t_{1}} dt_{3} \int_{t_{2}}^{t_{3}} dt_{4} \int \frac{dq}{2\pi} D^{R}(t_{1}, t_{3}; p) G_{ab}^{R}\left(t_{3}, t_{4}; \frac{p+q}{2}\right) G_{ba}^{K}\left(t_{4}, t_{3}; \frac{p-q}{2}\right) D^{R}(t_{4}, t_{2}; p).$$

$$(4.102)$$

Из-за пределов интегрирования по  $t_3$  и  $t_4$  это выражение может расти только если  $\tau \to \infty$ , но не когда  $T \to \infty$  для фиксированного  $\tau$ . Поправки более высоких порядков обладают теми же самыми свойствами, поскольку петлевые поправки не изменяют причинной структуры запаздывающего и опережающего пропагаторов (ср. с разделом 1.3). Для запаздывающего пропагатора рассуждения аналогичны.

Теперь вычислим первую петлевую поправку к келдышевскому пропагатору:

$$\Delta D^{K}(t_{1}, t_{2}; p) = \frac{1}{2} \left[ \Delta D^{++}(t_{1}, t_{2}; p) + \Delta D^{--}(t_{1}, t_{2}; p) \right] =$$

$$= -\frac{\lambda^{2}}{2} \int dt_{3} dt_{4} \int \frac{dq}{2\pi} \sum_{\sigma_{1,3,4} = \{+,-\}} D_{13}^{\sigma_{1}\sigma_{3}}(p) G_{34}^{\sigma_{3}\sigma_{4}} \left( \frac{p+q}{2} \right) G_{43}^{\sigma_{4}\sigma_{3}} \left( \frac{p-q}{2} \right) D_{42}^{\sigma_{4}\sigma_{1}}(p) \operatorname{sgn}(\sigma_{3}\sigma_{4}),$$

$$(4.103)$$

где мы для краткости обозначили  $G^{\pm\pm}_{a_1a_2}(t_1,t_2;p)\equiv G^{\pm\pm}_{12}(p),\, D^{\pm\pm}(t_1,t_2;p)\equiv D^{\pm\pm}_{12}(p)$  и подразумевали суммирование по спинорным индексам. Также мы обозначили однопетлевые поправки к пропагаторам  $D^{++}$  и  $D^{--}$  как  $\Delta D^{++}$  и  $\Delta D^{--}$ .

Раскроем скобки в (4.103) и подставим древесные пропагаторы. В результате получим выражение вида (4.100), в котором лидирующие вклады в заселенность уровней и аномальное квантовое среднее даются следующими формулами:

$$n_{p}(T) \simeq 2\lambda^{2} \operatorname{Re} \int_{-T}^{T} dt_{3} \int_{-T}^{t_{3}} dt_{4} \int \frac{dq}{2\pi} \frac{e^{ip(t_{3}-t_{4})}}{2p} F^{*}(t_{3}) F(t_{4}) =$$

$$= \frac{\lambda^{2}}{p} \operatorname{Re} \int_{0}^{T} dt_{3} \int_{0}^{t_{3}} dt_{4} \int_{0}^{\infty} \frac{dq}{\pi} \left[ e^{ip(t_{3}-t_{4})} F^{*}(t_{3}) F(t_{4}) + \operatorname{sgn} (|p| - |q|) e^{-ip(t_{3}+t_{4})} F(t_{3}) F(t_{4}) \right],$$

$$(4.104)$$

$$\varkappa_{p}(T) \simeq -2\lambda^{2} \int_{-T}^{T} dt_{3} \int_{-T}^{t_{3}} dt_{4} \int \frac{dq}{2\pi} \frac{e^{ip(t_{3}+t_{4})}}{2p} F(t_{3}) F^{*}(t_{4}) =$$

$$= -\frac{2\lambda^{2}}{p} \int_{0}^{T} dt_{3} \int_{0}^{t_{3}} dt_{4} \int_{0}^{\infty} \frac{dq}{\pi} \left[ F(t_{3}) F^{*}(t_{4}) \cos (p(t_{3}+t_{4})) + \operatorname{sgn} (|p| - |q|) F(t_{3}) F(t_{4}) \sin (p(t_{3}-t_{4})) \right].$$

(4.105)

Здесь мы пренебрегли подавленными (в пределе  $T \to \infty$ ,  $\tau \ll T$ ) вкладами и для упрощения формул ввели функцию F(t):

$$\operatorname{tr}\left[G_{34}^{+-}\left(\frac{p+q}{2}\right)G_{43}^{-+}\left(\frac{p-q}{2}\right)\right] = F(t_3)F^*(t_4). \tag{4.106}$$

Используя выражения для пропагаторов (4.35), получаем:

$$F(t) \equiv \psi_{\frac{p+q}{2},1}^{(+)}(t)\psi_{\frac{p-q}{2},2}^{(+)}(t) + \psi_{\frac{p+q}{2},2}^{(+)}(t)\psi_{\frac{p-q}{2},1}^{(+)}(t), \tag{4.107}$$

В обоих равенствах (4.104) и (4.105) мы определенным образом разделили области интегрирования по  $t_3$  и  $t_4$ , а затем использовали свойство мод (4.79). Также мы предположили, что p > 0, и использовали инвариантность функций F(t) относительно замены  $q \to -q$ .

Прежде чем вычислять интегралы (4.104) и (4.105) со сложными модами, отвечающими линейно растущему фоновому полю  $\phi_{cl}$ , имеет смысл разобрать упрощенный случай свободной теории с нулевым фоном, то есть теории, в которой фермионные моды представляют собой плоские волны (4.54). Подставляя эти моды в интегралы, находим:

$$n_{p}(T) \simeq \lambda^{2} \int_{t_{0}}^{T} dt' \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} \mathcal{N}e^{i(\omega_{\frac{p+q}{2}} + \omega_{\frac{p-q}{2}} + |p|)\tau'} =$$

$$= \lambda^{2} \int_{t_{0}}^{T} dt' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} \mathcal{N}\delta \left(\omega_{\frac{p+q}{2}} + \omega_{\frac{p-q}{2}} + |p|\right) \sim \mathcal{O}(\lambda^{2}T^{0}),$$

$$\varkappa_{p}(T = +\infty) \simeq -2\lambda^{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{0}^{\infty} d\tau' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} \mathcal{N}e^{2i|p|t' - i(\omega_{\frac{p+q}{2}} + \omega_{\frac{p-q}{2}})\tau'} =$$

$$= -2\lambda^{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} \mathcal{N}\delta \left(2|p|\right) \left(\pi\delta \left(\omega_{\frac{p+q}{2}} + \omega_{\frac{p-q}{2}}\right) - \mathcal{P}\frac{i}{\omega_{\frac{p+q}{2}} + \omega_{\frac{p-q}{2}}}\right) \sim \mathcal{O}(\lambda^{2}T^{0}).$$

$$(4.108)$$

где  ${\mathcal N}$  обозначает следующее выражение:

$$\mathcal{N} = \frac{1}{16} \frac{(p+q)\left(\omega_{\frac{p+q}{2}} - m\right) + (p-q)\left(\omega_{\frac{p-q}{2}} - m\right)}{\omega_{\frac{p+q}{2}}\omega_{\frac{p-q}{2}}\left(\omega_{\frac{p+q}{2}} - m\right)\left(\omega_{\frac{p-q}{2}} - m\right)},\tag{4.110}$$

которое зависит от p и q, но не зависит  $t'=\frac{t_3+t_4}{2}$  и  $\tau'=t_3-t_4$ . Во втором интеграле мы использовали теорему Сохотского — Племеля и обозначили главное значение Коши как  $\mathcal{P}$ . Заметим, что в  $\varkappa_p$  мы расширили интервал интегрирования до всей числовой прямой, покольку мы хотим просто показать, что интеграл остается конечным в пределе  $T\to +\infty$ . Таким образом, мы получаем в пределе  $T\to +\infty$  либо конечное выражение $^5$ , либо интеграл от дельта-функции, аргумент которой никогда не равен нулю. Другими словами, однопетлевые поправки к бозонному пропагатору на фоне нулевого поля не растут со временем T

 $<sup>^{5}</sup>$ Заметим, что интеграл по dq в (4.109) сходится.

из-за закона сохранения энергии, который обеспечивается дельта-функциями. Это согласуется с тем фактом, что в стационарной ситуации корреляционные функции зависят только от разницы  $t_1 - t_2$  и не зависят от суммы  $T = (t_1 + t_2)/2$ .

Теперь рассмотрим случай линейно растущего фонового скалярного поля, для которого моды имеют вид (4.68) и (4.69). К несчастью, в этом случае интегралы (4.104) и (4.105) вычислить точно невозможно. Поэтому мы оценим их в пределе  $T \to \infty$ ,  $\tau \ll T$ . Если точнее, мы хотим выяснить, выживают ли какие-либо вклады в n и  $\varkappa$  в пределе больших времен и малых констант связи:  $T \to \infty$ ,  $\lambda \to 0$  и  $\lambda^2 g(T) = \mathrm{const}$ , где g(T) — некоторая растущая функция от T (например  $g(T) = T^n$  для n > 0 или  $g(T) = \log T$ ).

С помощью разложений (4.76) и (4.77) можно оценить функцию F(t) на разных временных промежутках:

$$F(t) \simeq \begin{cases} \left(\frac{1+\operatorname{sgn}(p-q)}{2} + \frac{1+\operatorname{sgn}(q-p)}{2} \frac{2p\alpha t}{|q^2-p^2|} + \cdots\right) e^{-i\frac{|p+q|+|p-q|}{2}t}, & \text{при} \quad t < \frac{|p-q|}{2\alpha}, \\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots\right) e^{-\frac{i\alpha t^2}{2} - i|p+q|t}, & \text{при} \quad \frac{|p-q|}{2\alpha} < t < \frac{|p+q|}{2\alpha}, \\ \left(\frac{|p+q|}{2\alpha t} + \cdots\right) e^{-i\alpha t^2 + \frac{i(p^2+q^2)}{2\alpha} \log(2\alpha t^2)}, & \text{при} \quad t > \frac{|p+q|}{2\alpha}. \end{cases}$$

$$(4.111)$$

Прежде чем вычислять интегралы (4.104) и (4.105), попытаемся угадать, откуда могут прийти наиболее быстро растущие вклады. Во-первых, мы ожидаем, что пропагаторы с малыми внешними импульсами,  $p < \alpha T$ , растут быстрее, поскольку соответствующие низкоэнергетические уровни заполняются с большей вероятностью, чем уровни с более высокой энергией. Во-вторых, как правило петлевые интегралы набираются на больших виртуальных импульсах q > p — основной вклад в низкие p—уровни приходит от высоких q—уровней. Наконец, интуиция, набранная при изучении нестационарных явлений в других фоновых полях [19–33,62,90] говорит, что наиболее быстро растущий вклад вносят подынтегральные выражения вида  $F^*(t_3)F(t_4)e^{ip(t_3-t_4)}$ , поскольку в этом случае фазы, не зависящие от  $t' = \frac{t_3+t_4}{2}$ , могут сократиться (после этого интеграл по dt' факторизуется и может дать растущий по T множитель). Для всех остальных комбинаций функций F(t) и  $e^{ipt}$  такое поведение исключено<sup>6</sup>, следовательно, их вклады в пределе  $T \to \infty$  будут расти еще медленнее. Основываясь

 $<sup>\</sup>overline{\phantom{a}^{6}}$ Не считая комбинации  $F(t_3)F^*(t_4)e^{ip(t_3-t_4)}$ , которая не возникает в интегралах (4.104) и (4.105), и комплексно сопряженных выражений.

на этих рассуждениях, рассмотрим следующий интеграл  $(p < \alpha T)$ :

$$\begin{split} I &= \int_{0}^{\infty} dq \int_{0}^{T} dt_{3} \int_{0}^{t_{3}} dt_{4} F^{*}(t_{3}) F(t_{4}) e^{ip(t_{3}-t_{4})} \simeq \\ &\simeq \int_{0}^{p} dq \left[ \int_{0}^{\frac{p+q}{2\alpha}} dt_{3} \int_{0}^{t_{3}} dt_{4} e^{2ip(t_{3}-t_{4})} + \int_{\frac{p+q}{2\alpha}}^{T} dt_{3} \int_{0}^{\frac{p+q}{2\alpha}} dt_{4} \frac{p}{2\alpha t_{3}} e^{i\alpha t_{3}^{2} - 2ipt_{4}} + \right. \\ &\quad + \int_{\frac{p+q}{2\alpha}}^{T} dt_{3} \int_{\frac{p+q}{2\alpha}}^{t_{3}} dt_{4} \frac{p^{2}}{4\alpha^{2} t_{3} t_{4}} e^{i\alpha t_{3}^{2} - i\alpha t_{4}^{2}} \right] + \\ &\quad + \int_{p}^{2\alpha T-p} dq \left[ \int_{0}^{\frac{q-p}{2\alpha}} dt_{3} \int_{0}^{t_{3}} dt_{4} \frac{4p^{2} \alpha^{2} t_{3} t_{4}}{q^{4}} e^{iq(t_{3}-t_{4})} + \int_{\frac{q+p}{2\alpha}}^{\frac{q+p}{2\alpha}} dt_{3} \int_{0}^{\frac{q-p}{2\alpha}} dt_{4} \frac{\sqrt{2p\alpha t_{4}}}{q^{2}} e^{iq(t_{3}-t_{4})} + \right. \\ &\quad + \left. \frac{1}{2} \int_{\frac{q-p}{2\alpha}}^{\frac{q+p}{2\alpha}} dt_{3} \int_{\frac{q-p}{2\alpha}}^{t_{3}} dt_{4} e^{iq(t_{3}-t_{4})} \right] + \int_{\frac{q+p}{2\alpha}}^{T} dt_{3} \int_{\frac{q+p}{2\alpha}}^{t_{3}} dt_{4} \frac{q}{2\alpha t_{3}^{2}} e^{i\alpha t_{3}^{2} - i\alpha t_{4}^{2}} + \right. \\ &\quad + \int_{\frac{q+p}{2\alpha}}^{T} dt_{3} \int_{\frac{q-p}{2\alpha}}^{\frac{q-p}{2\alpha}} dt_{4} \frac{q}{2\sqrt{2\alpha t_{3}}} e^{i\alpha t_{3}^{2} - i\alpha t_{4}} + \int_{\frac{q+p}{2\alpha}}^{T} dt_{3} \int_{\frac{q+p}{2\alpha}}^{t_{3}} dt_{4} \frac{q^{2}}{4\alpha^{2} t_{3} t_{4}} e^{i\alpha (t_{3}-t_{4})} + \right. \\ &\quad + \int_{2\alpha T-p}^{2\alpha T+p} dq \left[ \int_{0}^{\frac{q-p}{2\alpha}} dt_{3} \int_{0}^{t_{3}} dt_{4} \frac{4p^{2} \alpha^{2} t_{3} t_{4}}{q^{4}} e^{iq(t_{3}-t_{4})} + \int_{\frac{q-p}{2\alpha}}^{T} dt_{3} \int_{0}^{\frac{q-p}{2\alpha}} dt_{4} \frac{2p\alpha t_{4}}{q^{2}} e^{iq(t_{3}-t_{4})} + \right. \\ &\quad + \left. \frac{1}{2} \int_{\frac{q-p}{2\alpha}}^{T} dt_{3} \int_{\frac{q-p}{2\alpha}}^{t_{3}} dt_{4} e^{iq(t_{3}-t_{4})} \right] \\ &\quad + \int_{0}^{\infty} dq \int_{0}^{T} dt_{3} \int_{0}^{t_{3}} dt_{4} \frac{4p^{2} \alpha^{2} t_{3} t_{4}}{\alpha^{4}} e^{iq(t_{3}-t_{4})}. \end{aligned} \tag{4.115}$$

В этом выражении мы оставили только лидирующие абсолютные значения и фазы подынтегральных выражений в указанном пределе. Тем не менее, даже такая грубая оценка показывает, что только два члена могут расти в пределе  $T \to \infty$  (в приведенной выше формуле эти члены выделены рамками), тогда как другие члены дают постоянные или затухающие с T поправки:

$$I_{1} \equiv \frac{1}{2} \int_{p}^{2\alpha T - p} dq \int_{\frac{q - p}{2\alpha}}^{\frac{q + p}{2\alpha}} dt_{3} \int_{\frac{q - p}{2\alpha}}^{t_{3}} dt_{4} e^{iq(t_{3} - t_{4})} \simeq \frac{ip}{4\alpha} \log \frac{\alpha T}{p} + \mathcal{O}\left(\frac{p}{\alpha}\right), \tag{4.117}$$

$$I_{2} \equiv \int_{p}^{2\alpha T - p} dq \int_{\frac{q + p}{2\alpha}}^{T} dt_{3} \int_{\frac{q + p}{2\alpha}}^{t_{3}} dt_{4} \frac{q^{2}}{4\alpha^{2} t_{3} t_{4}} e^{i\alpha t_{3}^{2} - i\alpha t_{4}^{2}} \simeq \frac{i}{3} \alpha T + \frac{ip}{2\alpha} \log \frac{\alpha T}{p} + \mathcal{O}\left(\frac{p}{\alpha}\right). \tag{4.118}$$

Здесь  $\mathcal{O}\left(\frac{p}{\alpha}\right)$  обозначает такую функцию g(T), что  $\lambda g(T)=\mathrm{const}$  в пределе  $\lambda\to 0$  и  $T\to\infty$ . Также очевидно, что такие вклады не могут возникнуть, если подынтегральное выражение содержит  $F(t_3)F(t_4)$  вместо  $F^*(t_3)F(t_4)$ , поскольку в этом случае осциллирующие фазы

членов подынтегрального выражения не сокращаются:

$$I_{1} \sim \int_{p}^{2\alpha T - p} dq \int dt_{3} \int dt_{4} e^{iq(t_{3} + t_{4})} \sim \int_{p}^{2\alpha T - p} \frac{dq}{q^{2}} \sim \frac{1}{p},$$

$$I_{2} \sim \int_{p}^{2\alpha T - p} dq \int_{\frac{q + p}{2\alpha}}^{T} dt_{3} \int_{\frac{q + p}{2\alpha}}^{t_{3}} dt_{4} \frac{q^{2}}{4\alpha^{2} t_{3} t_{4}} e^{i\alpha t_{3}^{2} + i\alpha t_{4}^{2}} \sim \int_{p}^{2\alpha T - p} dq \left(\frac{q^{2} e^{i\alpha T^{2}}}{\alpha^{4} T^{4}} - \frac{q^{2} e^{\frac{i(q + p)^{2}}{4\alpha}}}{(q + p)^{4}}\right) \sim \frac{1}{p}.$$

$$(4.120)$$

Также никаких существенных вкладов не возникает, если  $p > \alpha T$ . В самом деле, в последнем случае строчка (4.114) замещается строчкой (4.115), которая дает лидирующее поведение, совпадающее с (4.117). Тем не менее, на этот раз оно ограничено сверху:

$$I \simeq \frac{1}{2} \int_{p}^{2\alpha T + p} dq \int_{\frac{q - p}{2\alpha}}^{T} dt_3 \int_{\frac{q - p}{2\alpha}}^{t_3} dt_4 e^{iq(t_3 - t_4)} + \dots \simeq \frac{1}{2} \left( \frac{ip}{2\alpha} + iT \right) \log \left( 1 + \frac{\alpha T}{p} \right) - iT + \dots = \mathcal{O}\left( \frac{p}{\alpha} \right). \tag{4.121}$$

Таким образом, несмотря на то, что интеграл растет на некоторых временных отрезках, он подавлен большими внешними импульсами и не расходится в пределе  $T \to \infty$ .

Объединим приведенные выше наблюдения, чтобы оценить интегралы (4.104) и (4.105). Учитывая равенства (4.117) и (4.118), рассмотрим малый внешний импульс:  $p < \alpha T$ , пренебрежем интегралами, пропорциональными  $F(t_3)F(t_4)$  или  $F^*(t_3)F^*(t_4)$ , и сосредоточимся на интервале  $p < q < 2\alpha T - p$ ,  $\frac{q-p}{2\alpha} < t_3 < \frac{q+p}{2\alpha}$ ,  $\frac{q-p}{2\alpha} < t_4 < t_3$ . Однако на этот раз вычислим интегралы более точно, то есть учтем следующие за ведущими члены в фазах экспонент:

$$n_{p}(T) \simeq \frac{\lambda^{2}}{\pi p} \operatorname{Re} \int_{p}^{2\alpha T-p} dq \int_{\frac{q-p}{2\alpha}}^{\frac{q-p}{2\alpha}} dt_{3} \int_{\frac{q-p}{2\alpha}}^{t_{3}} dt_{4} e^{i(q+p)(t_{3}-t_{4})+ip(t_{3}-t_{4})+\frac{1}{2}i\alpha(t_{3}^{2}-t_{4}^{2})} + \frac{\lambda^{2}}{\pi p} \operatorname{Re} \int_{p}^{2\alpha T-p} dq \int_{\frac{q+p}{2\alpha}}^{\frac{q+p}{2\alpha}} dt_{3} \int_{\frac{q+p}{2\alpha}}^{t_{3}} dt_{4} \frac{q^{2}}{4\alpha^{2}t_{3}t_{4}} e^{i\alpha t_{3}^{2}-i\alpha t_{4}^{2}+ip(t_{3}-t_{4})} + \frac{\lambda^{2}}{\pi p} \mathcal{O}\left(\frac{p}{\alpha}\right) \simeq$$

$$\simeq \frac{\lambda^{2}}{\pi p} \operatorname{Re} \left[\frac{i}{3}\alpha T + \frac{ip}{2}\log\frac{\alpha T}{p} + \frac{ip}{\alpha}\log\frac{\alpha T}{p} + \mathcal{O}\left(\frac{p}{\alpha}\right)\right] \sim$$

$$\sim \lambda^{2} \mathcal{O}\left(\frac{p}{\alpha}\right) \to 0, \quad \text{KOTJA} \quad \lambda \to 0, \quad T \to \infty,$$

$$(4.122)$$

$$\varkappa_{p}(T) \simeq -\frac{2\lambda^{2}}{\pi p} \int_{p}^{2\alpha T-p} dq \int_{\frac{q-p}{2\alpha}}^{\frac{q+p}{2\alpha}} dt_{3} \int_{\frac{q-p}{2\alpha}}^{t_{3}} dt_{4} e^{-i(q+p)(t_{3}-t_{4})+\frac{1}{2}i\alpha(t_{3}^{2}-t_{4}^{2})} \cos\left(p(t_{3}+t_{4})\right) -$$

$$-\frac{2\lambda^{2}}{\pi p} \int_{p}^{2\alpha T-p} dq \int_{\frac{q+p}{2\alpha}}^{T} dt_{3} \int_{\frac{q+p}{2\alpha}}^{t_{3}} dt_{4} \frac{q^{2}}{4\alpha^{2}t_{3}t_{4}} e^{i\alpha t_{3}^{2}-i\alpha t_{4}^{2}} \cos\left(p(t_{3}+t_{4})\right) - \frac{2\lambda^{2}}{\pi p} \mathcal{O}\left(\frac{p}{\alpha}\right) \simeq$$

$$\simeq -\frac{2\lambda^{2}}{\pi p} \int_{p}^{2\alpha T-p} dq \left[\frac{2i\sin\left(\frac{p^{2}}{2}\right)}{p} \frac{\cos\left(\frac{pq}{\alpha}\right)}{q} + \frac{\sin(2pT)}{8p} \frac{q^{2}}{\alpha^{3}T^{3}} - \frac{\sin\left(\frac{pq}{\alpha}\right)}{pq}\right] - \frac{2\lambda^{2}}{\pi p} \mathcal{O}\left(\frac{p}{\alpha}\right) \simeq$$

$$\sim \frac{\lambda^{2}}{p^{2}} \sin\left(\frac{p^{2}}{\alpha}\right) \operatorname{Ci}\left(\frac{p^{2}}{\alpha}\right) + \frac{\lambda^{2}}{p^{2}} \sin(2pT) + \lambda^{2} \mathcal{O}\left(\frac{p}{\alpha}\right) \to 0, \quad \text{KOTJA} \quad \lambda \to 0, \quad T \to \infty,$$

$$(4.123)$$

где  $\mathrm{Ci}(x)$  — интегральный косинус. В сущности, интеграл (4.122) не растет при увеличении T, потому что подынтегральное выражение действительно, а интеграл (4.123) не растет благодаря быстрым осцилляциям множителя  $\cos{(p(t_3+t_4))}$ . Таким образом, ни заселенность уровней, ни аномальное квантовое среднее не растут в пределе  $T \to \infty$ . Конечно, они генерируются, поскольку рассматриваемая ситуация нестационарна, однако подавляются малыми множителями  $\lambda^2$ , которые не сопровождаются большими степенными множителями  $T^n$ , n>0. Эта ситуация во внешнем скалярном поле существенно отличается от сильного электрического или гравитационного поля [19, 20, 22, 31–33].

Технически отсутствие секулярного роста в фоновом скалярном поле в отличие от его присутствия, например, в постоянном электрическом поле или пространстве де Ситтера, можно объяснить следующим образом. В постоянном электрическом поле (или пространстве де Ситтера) все величины зависят от инвариантных (физических) импульсов  $p_3 - eEt$  ( $|\vec{p}|\ e^{-t/H}$ ). Здесь  $p_3$  — компонента импульса, направленная вдоль внешнего электрического поля E, а H — постоянная Хаббла. В результате все физические величины оказываются инвариантны относительно одновременного сдвига  $t \to t - a$  и  $p_3 \to p_3 - eEa$  ( $|\vec{p}| \to |\vec{p}|\ e^{-a/H}$ ). Благодаря этой симметрии подынтегральные выражения не зависят от  $(t_3 + t_4)/2$ , что в конечном счете приводит к умножении петлевой поправки на растущий степенной множитель  $T^1$ . В то же время, в рассматриваемом фоновом скалярном поле похожей симметрии нет.

#### Однопетлевая поправка к фермионным пропагаторам

Теперь перейдем к вычислению однопетлевых поправок к фермионным двухточечным функциям (Рис. 4.6a). Мы работаем в том же пределе для времен T и  $\tau$ , что и в предыдущем параграфе. Мы также полагаем  $t_0 = -T$ .

Для удобства в этом параграфе восстановим массу скалярного поля:

$$S = \int d^2x \left[ \frac{1}{2} \partial_{\mu} \phi \partial^{\mu} \phi - \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 + i \bar{\psi} \partial \psi - \lambda \phi \bar{\psi} \psi \right]. \tag{4.124}$$

С одной стороны, это позволяет избежать неконтролируемых инфракрасных расходимостей в петлевых интегралах. С другой стороны, из-за нулевых колебаний фермионного поля на древесном уровне скалярное поле спонтанно приобретает массу  $\mu \sim \lambda$  (см. раздел 4.4). Мы используем эту оценку, чтобы проверить самосогласованность приведенных ниже выражений.

Очевидно, что петлевые поправки к фермионным запаздывающим и опережающим пропагаторам не растут со временем. В самом деле, эти пропагаторы обладают теми же причинными свойствами, что и бозонные запаздывающие и опережающие пропагаторы, и поэтому рассуждения предыдущего параграфа так же хорошо работают.

Первая петлевая поправка к фермионному келдышевскому пропагатору описывается следующим выражением:

$$\Delta G_{ab}^{K}(t_{1}, t_{2}; p) = \frac{1}{2} \left[ \Delta G_{ab}^{++}(t_{1}, t_{2}; p) + \Delta G_{ab}^{--}(t_{1}, t_{2}; p) \right] =$$

$$= -\frac{\lambda^{2}}{2} \int dt_{3} dt_{4} \int \frac{dq}{2\pi} \sum_{\sigma_{1,2,3} = \{+,-\}} G_{13}^{\sigma_{1}\sigma_{3}}(p) G_{34}^{\sigma_{3}\sigma_{4}}(q) D_{34}^{\sigma_{3}\sigma_{4}}(p-q) G_{42}^{\sigma_{4}\sigma_{1}}(p) \operatorname{sgn}(\sigma_{3}\sigma_{4}).$$

$$(4.125)$$

Раскроем скобки, подставим древесные пропагаторы, возьмем след по внешним спинорным индексам и получим следующий лидирующий вклад в фермионную заселенность энергетических уровней и аномальное квантовое среднее:

$$n'_{p}(T) \simeq -2\lambda^{2} \operatorname{Re} \int_{-T}^{T} dt_{3} \int_{-T}^{t_{3}} dt_{4} \int \frac{dq}{2\pi} \frac{e^{i|p-q|(t_{3}-t_{4})}}{2|p-q|} \left( \psi_{p,3}^{1*} \psi_{q,3}^{2*} + \psi_{p,3}^{2*} \psi_{q,3}^{1*} \right) \left( \psi_{q,4}^{1} \psi_{p,4}^{2} + \psi_{q,4}^{2} \psi_{p,4}^{1} \right),$$

$$\simeq -\lambda^{2} \operatorname{Re} \int_{0}^{T} dt_{3} \int_{0}^{t_{3}} dt_{4} \int \frac{dq}{2\pi} \left[ \frac{e^{i|p-q|(t_{3}-t_{4})}}{|p-q|} H^{*}(t_{3}) H(t_{4}) + \operatorname{sgn} q \frac{e^{i|p-q|(t_{3}+t_{4})}}{|p-q|} H^{*}(t_{3}) H^{*}(t_{4}) \right], \quad (4.126)$$

$$\varkappa'_{p}(T) \simeq 2\lambda^{2} \int_{-T}^{T} dt_{3} \int_{-T}^{t_{3}} dt_{4} \int \frac{dq}{2\pi} \frac{e^{-i|p-q|(t_{3}-t_{4})}}{2|p-q|} \left( \psi_{p,3}^{1*} \psi_{q,3}^{1} - \psi_{p,3}^{2*} \psi_{q,3}^{2} \right) \left( \psi_{q,4}^{1*} \psi_{p,4}^{2*} + \psi_{q,4}^{2*} \psi_{p,4}^{1*} \right) \simeq$$

$$\simeq \lambda^{2} \int_{0}^{T} dt_{3} \int_{0}^{t_{3}} dt_{4} \int \frac{dq}{2\pi} \left[ \frac{e^{i|p-q|(t_{3}-t_{4})}}{|p-q|} \left( \tilde{H}(t_{3}) H^{*}(t_{4}) - H(t_{3}) \tilde{H}^{*}(t_{4}) \right) +$$

$$+ \operatorname{sgn} q \frac{e^{i|p-q|(t_{3}+t_{4})}}{|p-q|} \left( \tilde{H}(t_{3}) H(t_{4}) + H(t_{3}) \tilde{H}(t_{4}) \right) \right], \quad (4.127)$$

где мы ввели функции H(t) и  $\tilde{H}(t)$ :

$$H(t) \equiv \psi_{p,1}^{(+)}(t)\psi_{q,2}^{(+)}(t) + \psi_{p,2}^{(+)}(t)\psi_{q,1}^{(+)}(t),$$

$$\tilde{H}(t) \equiv \psi_{p,1}^{(+)*}(t)\psi_{q,1}^{(+)}(t) - \psi_{p,2}^{(+)*}(t)\psi_{q,2}^{(+)}(t).$$

$$(4.128)$$

Как и в предыдущем параграфе, мы определенным образом разделили область интегрирования по  $t_3$  и  $t_4$  и использовали свойство мод (4.79), чтобы получить выражения (4.126) и (4.127). Также мы предположили, что p > 0.

Для наглядности проведем сначала расчет в том случае, когда фонового поля нет,  $\phi_{cl} = 0$ . Как и при вычислении бозонной петли, несложно показать, что однопетлевая поправка к фермионным квантовым средним не растет со временем T:

$$n'_{p}(T) \simeq \lambda^{2} \int_{t_{0}}^{T} dt' \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \int \frac{dq}{2\pi} \mathcal{M} e^{i(\omega_{p} + \omega_{q} + |p-q|)\tau'} \simeq$$

$$\simeq \lambda^{2} \int_{t_{0}}^{T} dt' \int dq \mathcal{M} \delta(\omega_{p} + \omega_{q} + |p-q|) \sim \mathcal{O}(T^{0}), \tag{4.129}$$

$$\varkappa_p'(T) \simeq 2\lambda^2 \int_{t_0}^T dt' \int_0^{+\infty} d\tau \int \frac{dq}{2\pi} \mathcal{N}e^{2i\omega_p t'} e^{-i(|p-q|+\omega_q)\tau'} = 
= 2\lambda^2 \int dq \mathcal{N}\delta(2\omega_p) \left(\pi\delta(|p-q|+\omega_q) - \mathcal{P}\frac{i}{|p-q|+\omega_q}\right) \sim \mathcal{O}(T^0).$$
(4.130)

Здесь мы сделали подстановку:  $t' = \frac{t_3 + t_4}{2}$ ,  $\tau' = t_3 - t_4$ , и выделили части подынтегральных выражений, которые не зависят от времени:

$$\frac{1}{|p-q|} \left( \psi_{p,3}^{1*} \psi_{q,3}^{2*} + \psi_{p,3}^{2*} \psi_{q,3}^{1*} \right) \left( \psi_{q,4}^{1} \psi_{p,4}^{2} + \psi_{q,4}^{2} \psi_{p,4}^{1} \right) = \mathcal{M} e^{i(\omega_{p} + \omega_{q})(t_{3} - t_{4})}, \quad \text{где}$$

$$\mathcal{M} \equiv \frac{1}{|p-q|} \frac{\left( p(\omega_{q} - m) + q(\omega_{p} - m) \right)^{2}}{4\omega_{p}\omega_{q}(\omega_{p} - m)(\omega_{q} - m)},$$

$$\frac{1}{|p-q|} \left( \psi_{p,3}^{1*} \psi_{q,3}^{1} - \psi_{p,3}^{2*} \psi_{q,3}^{2} \right) \left( \psi_{q,4}^{1*} \psi_{p,4}^{2*} + \psi_{q,4}^{2*} \psi_{p,4}^{1*} \right) = \mathcal{N} e^{-i\omega_{q}(t_{3} - t_{4}) + i\omega_{p}(t_{3} + t_{4})}, \quad \text{где}$$

$$\mathcal{N} \equiv \frac{1}{|p-q|} \frac{\left( pq - (\omega_{p} - m)(\omega_{q} - m) \right) \left( p(\omega_{q} - m) + q(\omega_{p} - m) \right)}{4\omega_{p}\omega_{q}(\omega_{p} - m)(\omega_{q} - m)}.$$

$$(4.131)$$

Как и в бозонном вычислении, интегралы не растут из-за дельта-функций, которые обеспечивают сохранение энергии в вершинах. В результате двухточечная функция зависит только от разности  $t_1 - t_2$ , как и должно быть в стационарной ситуации.

В то же время, на фоне линейно растущего скалярного поля закон сохранения энергии не работает. Как и в предыдущем параграфе, интегралы (4.126) и (4.127) точно посчитать нельзя, поэтому мы оцениваем их в пределе  $T \to \infty$ ,  $\tau \ll T$ . Используя разложения (4.76) и (4.77), можно найти поведение функций H(t) и  $\tilde{H}(t)$  на разных временных отрезках:

$$H(t) \simeq \begin{cases} \left(\frac{\operatorname{sgn}q+1}{2} + \frac{\operatorname{sgn}q-1}{2} \frac{\alpha|t|(|q|-p)}{2|q|p}\right) e^{-i(p+|q-p|)t}, & \operatorname{если} \quad t < \min(p,|q|), \\ \frac{\operatorname{sgn}q}{\sqrt{2}} \left(2\alpha t^2\right)^{\frac{ip^2}{4\alpha}} e^{-\frac{i\alpha t^2}{2} - i|q|t}, & \operatorname{если} \quad p < |q| \quad \text{и} \quad p < \alpha|t| < |q|, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \left(2\alpha t^2\right)^{\frac{iq^2}{4\alpha}} e^{-\frac{i\alpha t^2}{2} - ipt}, & \operatorname{если} \quad |q| < p \quad \text{и} \quad |q| < \alpha|t| < p, \\ \frac{p+q}{2\alpha|t|} \left(2\alpha t^2\right)^{\frac{i(p^2+q^2)}{4\alpha}} e^{-i\alpha t^2}, & \operatorname{если} \quad t > \max(p,|q|), \end{cases}$$

$$(4.132)$$

$$\tilde{H}(t) \simeq \begin{cases} \left(\frac{1-\operatorname{sgn}q}{2} + \frac{\operatorname{sgn}q+1}{2} \frac{\alpha|t|(|q|+p)}{2|q|p}\right) e^{-i(p-|q-p|)t}, & \operatorname{если} \quad t < \min(p,|q|), \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \left(2\alpha t^2\right)^{-\frac{ip^2}{4\alpha}} e^{\frac{i\alpha t^2}{2} - i|q|t}, & \operatorname{если} \quad p < |q| \quad \text{и} \quad p < \alpha|t| < |q|, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \left(2\alpha t^2\right)^{\frac{iq^2}{4\alpha}} e^{-\frac{i\alpha t^2}{2} + ipt}, & \operatorname{если} \quad |q| < p \quad \text{и} \quad |q| < \alpha|t| < p, \\ \left(2\alpha t^2\right)^{\frac{i(q^2-p^2)}{4\alpha}}, & \operatorname{если} \quad t > \max(p,|q|). \end{cases}$$

$$(4.133)$$

Как и в предыдущем параграфе, для краткости мы оставили только лидирующие члены в показателях экспонент и предэкспоненциальных множителях.

Заметим, что интегралы от  $H(t_3)H(t_4)$  и  $H(t_3)\tilde{H}(t_4)$  (а также от похожих выражений) подавлены по сравнению с интегралами от  $H^*(t_3)H(t_4)$ , поскольку первые всегда содержат осциллирующие множители, зависящие одновременно от  $t_3-t_4$  и  $t_3+t_4$ . Следовательно, по тем же самым причинам, что и в предыдущем параграфе, для выделения лидирующего вклада в пределе  $T \to \infty$  достаточно рассмотреть только следующий интеграл (мы полагаем

 $p < \alpha T$ ):

$$\begin{split} I &= \int_{0}^{\infty} dq \int_{0}^{T} dt_{3} \int_{0}^{t_{3}} dt_{4} \left( H^{*}(t_{3}) H(t_{4}) \frac{e^{i|q-p|(t_{3}-t_{4})}}{|q-p|} + (q \to -q) \right) = \\ &= \left[ \int_{0}^{p-\mu} dq \left( \int_{0}^{\frac{q}{\alpha}} dt_{3} \int_{0}^{t_{3}} dt_{4} + \int_{\frac{q}{\alpha}}^{\frac{p}{\alpha}} dt_{3} \int_{0}^{\frac{q}{\alpha}} dt_{4} + \int_{\frac{q}{\alpha}}^{\frac{p}{\alpha}} dt_{3} \int_{\frac{q}{\alpha}}^{t_{3}} dt_{4} + \\ &+ \int_{\frac{p}{\alpha}}^{T} dt_{3} \int_{0}^{\frac{q}{\alpha}} dt_{4} + \int_{\frac{p}{\alpha}}^{T} dt_{3} \int_{\frac{q}{\alpha}}^{\frac{p}{\alpha}} dt_{4} + \int_{\frac{p}{\alpha}}^{T} dt_{3} \int_{\frac{p}{\alpha}}^{t_{3}} dt_{4} \right) + \\ &+ \int_{p-\mu}^{p+\mu} dq \left( \int_{0}^{\frac{p}{\alpha}} dt_{3} \int_{0}^{t_{3}} dt_{4} + \int_{\frac{p}{\alpha}}^{\frac{q}{\alpha}} dt_{3} \int_{0}^{\frac{p}{\alpha}} dt_{4} + \int_{\frac{p}{\alpha}}^{\frac{q}{\alpha}} dt_{3} \int_{\frac{p}{\alpha}}^{t_{3}} dt_{4} \right) + \\ &+ \int_{p+\mu}^{\alpha} dq \left( \int_{0}^{\frac{p}{\alpha}} dt_{3} \int_{0}^{t_{3}} dt_{4} + \int_{\frac{p}{\alpha}}^{\frac{q}{\alpha}} dt_{3} \int_{0}^{\frac{p}{\alpha}} dt_{4} + \int_{\frac{q}{\alpha}}^{\frac{q}{\alpha}} dt_{3} \int_{\frac{p}{\alpha}}^{t_{3}} dt_{4} \right) + \\ &+ \int_{\frac{q}{\alpha}}^{\infty} dq \left( \int_{0}^{\frac{p}{\alpha}} dt_{3} \int_{0}^{t_{3}} dt_{4} + \int_{\frac{p}{\alpha}}^{\frac{q}{\alpha}} dt_{3} \int_{\frac{p}{\alpha}}^{\frac{q}{\alpha}} dt_{4} + \int_{\frac{q}{\alpha}}^{T} dt_{3} \int_{\frac{p}{\alpha}}^{t_{3}} dt_{4} \right) + \\ &+ \int_{\alpha T}^{\infty} dq \left( \int_{0}^{\frac{p}{\alpha}} dt_{3} \int_{0}^{t_{3}} dt_{4} + \int_{\frac{p}{\alpha}}^{T} dt_{3} \int_{0}^{\frac{p}{\alpha}} dt_{4} + \int_{\frac{p}{\alpha}}^{T} dt_{3} \int_{\frac{p}{\alpha}}^{t_{3}} dt_{4} \right) \right] \times \\ &\times \left( H^{*}(t_{3}) H(t_{4}) \frac{e^{i|q-p|(t_{3}-t_{4})}}{|q-p|} + (q \to -q) \right). \end{split}$$

Заметим, что мы восстановили массу скалярного поля  $\mu \neq 0$  и исключили интервал интегрирования  $q \in [p-\mu, p+\mu]$ , чтобы избавиться от инфракрасных логарифмических расходимостей, связанных с виртуальными бозонами. Рассматривая по отдельности каждый член в приведенной сумме и учитывая подходящие разложения из (4.132), находим, что единственные вклады, которые потенциально могут расти со временем T, приходят от интегралов в рамках:

$$I \simeq \frac{i}{2\alpha} \log \frac{\alpha T}{p} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\alpha}\right) \cdot \log \frac{p}{\mu} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\alpha}\right). \tag{4.139}$$

Здесь  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\alpha}\right)$  обозначает такую функцию g(T), что  $\lambda g(T)=\mathrm{const}$ , когда  $\lambda\to 0$  и  $T\to\infty$ . Заметим, что такие интегралы не растут, если  $p>\alpha T$  (в этом случае они ограничены сверху) или если подынтегральное выражение содержит другие комбинации H(t),  $H^*(t)$ ,  $\tilde{H}(t)$  и  $\tilde{H}^*(t)$  (в этом случае быстро осциллирующие функции снижают степень T как минимум на единицу). Следовательно, мы получаем только ограниченные по T вклады и в заселенность уровней, и в аномальное квантовое среднее фермионов:

$$n_p'(T) \sim \varkappa_p'(T) \sim \lambda^2 \cdot \log \frac{p}{\mu} \cdot \mathcal{O}\left(\frac{1}{\alpha}\right) \to 0$$
, когда  $\lambda \to 0$  и  $T \to \infty$ . (4.140)

Этот предел выполняется даже в том случае, если подставить в выражение массу  $\mu \sim \lambda$ , полученную с помощью стандартного равновесного анализа (раздел 4.4). Таким образом, для фермионов поведение петлевых поправок полностью аналогично бозонам.

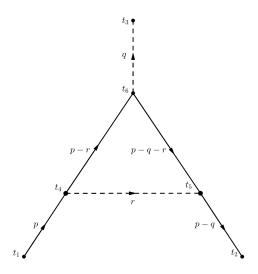


Рис. 4.7: Однопетлевая поправка к вершине.

#### Однопетлевые поправки к вершинам

Наконец, вычислим однопетлевую поправку к трехточечной корреляционной функции  $G_{ab}^{\pm\pm\pm}(x_1,x_2,x_3)$ , то есть к вершине взаимодействия (Рис. 4.7). Заметим, что в нестационарных ситуациях в сильных фоновых полях такие поправки также могут расти со временем [29].

Как обычно, чтобы выделить лидирующие растущие вклады (если они есть), мы рассматриваем предел  $|t_i-t_j|\ll T$  и  $\frac{1}{3}(t_1+t_2+t_3)=T\to\infty$ . Для вычислений этого параграфа удобнее работать до келдышевского поворота. Кроме того, мы считаем, что внешние импульсы трехточечной функции стремятся к нулю,  $|p|, |q|\to 0$ , и рассматриваем большие виртуальные импульсы  $|r|\gg \alpha T$  (см. Рис. 4.7). Из общефизических соображений можно ожидать, что лидирующий растущий со временем вклад (если он есть) приходит именно из этой области физических параметров. Наиболее общий вид петлевого интеграла в этом пределе выглядит следующим образом:

$$\Delta G^{\pm \pm \pm} \sim \int_{t_0}^{T} dt_4 dt_5 dt_6 \int_{|r| > M} \frac{dr}{|r|} e^{\pm i|r|(t_4 - t_5) \pm i|r - p - q|(t_5 - t_6) \pm i|r - p|(t_6 - t_4) \pm i|q|t_6 \pm \frac{i\alpha t_4^2}{2\alpha} \pm \frac{i\alpha t_5^2}{2\alpha}} \sim$$

$$\sim \int_{t_0}^{T} dt_4 dt_5 dt_6 \int_{M}^{\infty} \frac{dr}{r} e^{\pm i|r|(t_4 - t_5) \pm i|r|(t_5 - t_6) \pm i|r|(t_6 - t_4) \pm i|q|t_6 \pm \frac{i\alpha t_4^2}{2} \pm \frac{i\alpha t_5^2}{2}} \cos\left(\pm |p + q|(t_5 - t_6) \pm |p|(t_6 - t_4)\right).$$

$$(4.141)$$

где мы учли разные знаки виртуального импульса r. Оценим выражение (4.141) для разных сочетаний знаков. Для этого нам понадобится следующий интеграл, который насыщается в окрестности нуля:

$$\int_{0}^{t} e^{\frac{ix^{2}}{2} + i\rho x} dx = \frac{1+i}{2} \sqrt{\pi} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t}\right) + \mathcal{O}\left(\rho\right), \quad \text{если} \quad \rho \ll 1,$$

$$\int_{0}^{t} e^{\frac{ix^{2}}{2} + i\rho x} dx = \frac{i}{\rho} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\rho^{2}}\right), \quad \text{если} \quad \rho \gg 1.$$

$$(4.142)$$

Во-первых, рассмотрим ситуацию, в которой показатель экспоненты во второй строке (4.141) зануляется, то есть все члены, пропорциональные |r|, сокращаются. В этом случае интеграл (4.141) сводится к следующему выражению:

$$\Delta G^{\pm \pm \pm} \sim \int_{t_0}^T dt_6 e^{\pm i(|p+q|-|p|\pm|q|)t_6} \int_M^{\Lambda} \frac{dr}{r} \lesssim (T - t_0) \log \frac{\Lambda}{\sqrt{\alpha}}. \tag{4.143}$$

Наивно кажется, что этот член должен давать растущий со временем T вклад в трехточечную функцию. Однако в действительности такой интеграл всегда сопровождается произведением трех тета-функций, тождественно равным нулю ( $\theta_{45}\theta_{56}\theta_{64}$  или  $\theta_{46}\theta_{65}\theta_{54}$ ). Следовательно, такой интеграл при вычислени петлевой поправки на самом деле не возникает.

Во-вторых, рассмотрим случай, когда показатель экспоненты в (4.141) не содержит членов вида  $i|r|t_6$ , но содержит  $\pm i|r|t_4$  и  $\pm i|r|t_5$ . Тогда:

$$\Delta G^{\pm \pm \pm} \sim \int_{t_0}^{T} dt_6 e^{\pm i(|p+q|-|p|\pm|q|)t_6} \int_{M}^{\Lambda} \frac{dr}{r^3} \lesssim \frac{T - t_0}{M^2} \lesssim \mathcal{O}(T^0). \tag{4.144}$$

Наконец, рассмотрим ситуацию, в которой времена  $t_6$  не сокращаются в экспоненте (4.141). Интегрируя по временам  $t_4$  и  $t_5$ , получаем следующее выражение:

$$\Delta G^{\pm \pm \pm} \lesssim \int_{t_0}^{T} dt_6 \int_{M}^{\Lambda} \frac{dr}{r} e^{\pm irt_6} \sim \int_{t_0}^{T} \frac{dt_6}{\alpha T t_6} \lesssim \mathcal{O}(T^0). \tag{4.145}$$

Приведенные здесь аргументы являются общими и, следовательно, применимы также к другим поправкам к вершинам. Таким образом, можно сделать вывод, что однопетлевые поправки к трехточечным корреляционным функциям также не растут в пределе  $T \to \infty$ .

# 4.4 Эффективное действие

# 4.4.1 Вычисление функционального интеграла в двумерном случае

В разделе 4.3 мы показали, что в лидирующем порядке поведение скалярного тока не зависит от основного состояния теории (также см. [143–145]). Более того, в пределе малой константы связи петлевые поправки к бозонному и фермионному пропагаторам не растут. Следовательно, если  $\phi$  описывается большой по модулю, но медленно изменяющейся функцией, эффективное действие скалярного поля можно оценить с помощью стандартной равновесной техники Фейнмана, а также считая поле  $\phi$  нединамическим. В этом разделе мы обсуждаем стандартный вывод фейнмановского эффективного действия [143, 151–154] для теории (4.47).

Чтобы найти эффективное действие для скаляров, отынтегрируем фермионные степени свободы в функциональном интеграле:

$$e^{iS_{eff}[\phi]} = \frac{\int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi e^{i\int d^2x \left(\frac{1}{2}(\partial_{\mu}\phi)^2 + \bar{\psi}(i\partial - \lambda\phi)\psi\right)}}{\int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi e^{i\int d^2x \bar{\psi}i\partial \psi}} = \exp\left[i\int d^2x \, \frac{1}{2}(\partial_{\mu}\phi)^2 + \operatorname{tr}\log\frac{i\partial - \lambda\phi}{i\partial}\right], \quad (4.146)$$

который мы нормировали на статсумму свободных безмассовых фермионов для корректного определения операторного детерминанта.

Как мы уже заметили выше, в этом разделе мы считаем скалярное поле нединамическим. Кроме того, в (4.146) мы вычисляем  $\mathcal{T}$ -упорядоченное фейнмановское эффективное действие вместо действия Швингера — Келдыша. Заметим, что это вычисление неявно предполагает, что состояние системы остается неизменным в ходе ее эволюции; вообще говоря, из-за флуктуаций скалярного поля это условие может нарушаться. Тем не менее, в разделе 4.3.3, а также в работах [143,144] было показано, что оба этих приближения достаточно хорошо работают, если мы ограничиваемся случаем большого и медленно изменяющегося поля.

Оценим детерминант в (4.146). Для простоты рассмотрим скалярные поля, напряженность которых меньше ультрафиолетового обрезания:  $\lambda \phi \ll \Lambda$  (такие поля все еще могут быть очень сильными:  $\phi \gg 1$ ). Это условие позволяет нам разложить логарифм и разделить операторы, которые локальны по x и p [154]. Домножая выражение под знаком логарифма на  $1 = (\gamma^5)^2$  и антикоммутируя  $\gamma^5$  и  $\gamma^\mu$ , получаем:

$$\operatorname{tr}\log\frac{i\partial - \lambda\phi}{i\partial} = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\log\frac{(i\partial - \lambda\phi)(-i\partial - \lambda\phi)}{(i\partial)(-i\partial)} = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\log\frac{\partial^2 + (\lambda\phi)^2 - i\lambda\partial\phi}{\partial^2} \simeq \operatorname{tr}\log\Big(1 + \frac{(\lambda\phi)^2}{\partial^2}\Big),$$
(4.147)

где мы взяли след по спинорным индексам и пренебрегли производными  $\partial_t \phi \ll \lambda \phi^2$  и  $\partial_x \phi \ll \lambda \phi^2$ . В частности, для  $\phi_{cl} = Et$  эти приближения выполняются, когда  $t \gg \frac{1}{\sqrt{\lambda E}}$ .

Чтобы оценить tr log, сделаем виковский поворот в Евклидово пространство [45]. Вообще говоря, в нестационарной ситуации такое преобразование делать нельзя, однако в наших приближениях (когда состояние системы меняется слабо) оно вполне правомерно. После этого разложим логарифм:

$$\operatorname{tr}\log\left(1+\frac{(\lambda\phi)^2}{\partial^2}\right) = \int d^2x \int \frac{i\,d^2p}{(2\pi)^2}\log\left(1+\frac{(\lambda\phi)^2}{p^2}\right) \simeq i\int \frac{d^2x}{4\pi} \left[(\lambda\phi)^2\log\frac{\Lambda^2}{(\lambda\phi)^2}+(\lambda\phi)^2\right]. \tag{4.148}$$

В последнем равенстве мы пренебрегли членами порядка  $\frac{(\lambda\phi)^4}{\Lambda^2}$  и меньше. Таким образом, в лидирующем порядке для больших  $\phi$  и малых производных  $\phi$  эффективное действие приобретает следующий вид:

$$S_{eff} \simeq \int d^2x \left[ \frac{1}{2} \partial_{\mu} \phi \partial_{\mu} \phi - V_{eff}[\phi] \right],$$
 где  $V_{eff}[\phi] \simeq \frac{(\lambda \phi)^2}{2\pi} \log \frac{\lambda \phi}{\Lambda} - \frac{(\lambda \phi)^2}{4\pi}.$  (4.149)

Заметим, что вычисление эффективного действия фактически отвечает суммированию замкнутых фермионных петель с произвольным количеством внешних бозонных ног (например, см. [45, 151]). В самом деле, рассмотрим мягкие бозонные поправки к фермионному пропагатору:

$$G(p) = \frac{i}{\not p + i\epsilon} + (-i\lambda\phi) \left(\frac{i}{\not p + i\epsilon}\right)^2 + \frac{2!}{2!} (-i\lambda\phi)^2 \left(\frac{i}{\not p + i\epsilon}\right)^3 + \dots = \frac{i}{\not p + i\epsilon} \frac{1}{1 - \frac{\lambda\phi}{\not p + i\epsilon}} = \frac{i}{\not p - \lambda\phi + i\epsilon}.$$

$$(4.150)$$

Такие поправки учитывают взаимодействие между фермионным полем и фиксированным фоновым скалярным полем, поэтому неудивительно, что мы получили обратный оператор второго уравнения системы (4.49) на фоне почти постоянного  $\phi_{cl}$ . Скалярный ток соответствует точному пропагатору с совпадающими начальной и конечной точками, то есть сумме замкнутых фермионных петель с четным числом внешних ветвей (диаграммы с нечетным числом ветвей равны нулю из-за теоремы Фарри [45]). Следовательно, суммирование таких диаграмм должно воспроизводить результат (4.148) в пределе, который мы рассматриваем в этом разделе.

Обратите внимание, что полученное эффективное действие (4.149) не имеет мнимой части. Следовательно, с его помощью нельзя описать рождение частиц в сильных скалярных полях по аналогии с сильными электрическими и гравитационными полями.

Статсумма  $Z = \int \mathcal{D}\phi \, e^{iS_{eff}[\phi]}$  в основном набирается на конфигурациях, которые решают классическое уравнение движения. Следовательно:

$$\partial^2 \langle \phi \rangle + \lambda \langle \bar{\psi}\psi \rangle \approx \partial^2 \langle \phi \rangle + \frac{\lambda^2 \langle \phi \rangle}{\pi} \log \frac{\lambda \langle \phi \rangle}{\Lambda} = 0. \tag{4.151}$$

Это выражение согласуется со значением скалярного тока (4.92) для  $\phi_{cl} = Et$ , однако работает для *любого* сильного, но медленно изменяющегося скалярного поля (то есть поля  $\phi \gg 1$ ,  $|\partial \phi| \ll \lambda \phi^2$ ). В частности, расчеты на фоне линейно растущего в пространстве поля [143] или волны большой амплитуды [144] приводят к тому же ответу для скалярного тока.

"Универсальность" лидирующего приближения к эффективному действию можно качественно объяснить следующим образом. Во-первых, заметим, что фермионные моды с достаточно высокими импульсами ведут себя как плоские волны. Критический масштаб составляет примерно  $p \sim \lambda \phi$ . Как мы уже упоминали выше, такое поведение необходимо для правильного обращения с ультрафиолетовыми расходимостями.

Во-вторых, основной вклад в скалярный ток набирается именно на таких высокочастотных модах (например, сравните интегралы (4.90) и (4.91)). Это обусловлено тем фактом, что моды с малыми импульсами осциллируют быстрее, чем моды с большими импульсами

(что, вообще говоря, довольно необычно). В самом деле, сравните асимптотическое поведение (4.77),  $\psi(t) \sim e^{i\alpha t^2}$ , и (4.76),  $\psi(t) \sim e^{i|p|t}$ .

В-третьих, при вычислении вклада таких высокочастотных мод колебаниями фонового поля можно пренебречь. Грубо говоря, плоские волны с большим импульсом  $(p \gtrsim \lambda \phi)$  "высвечивают" области малой протяженности и продолжительности. Следовательно, в каждый момент времени и в каждой точке пространства фон играет роль фиксированной массы для фермионного поля. Поэтому можно просто подставить  $m \to \lambda \phi_{cl}(t,x) \simeq \text{const}$  в выражение для свободного тока (4.89) и получить правильный ответ.

Таким образом, можно ожидать, что эффективное действие совпадает для произвольных сильных скалярных полей, поскольку такие поля не чувствительны, в основном, к свойствам начального состояния. Впрочем, в следующих порядках разложения по  $\lambda$  эта чувствительность себя проявляет — сублидирующие поправки к скалярному току (и, следовательно, к эффективному действие) все-таки зависят от состояния, для которого вычисляются корреляционные функции (см. раздел 4.3.3 и статьи [143–145]). Эти поправки должны быть вычислены с помощью диаграммной техники Швингера — Келдыша.

Напоследок отметим, что классическое поле  $\phi_{cl} = Et$  больше не решает скорректированное уравнение движения (4.151), хотя оно решает свободное уравнение (4.49). Фактически это означает, что такое классическое поле должно распадаться из-за квантовых флуктуаций фермионов. Это напоминает распад сильного постоянного электрического поля [31,32]. Однако в отличие от сильного электрического поля, при условии медленного изменения скалярного поля петлевые поправки к заселенности энергетических уровней бозонов и фермионов не растут, как мы показали в предыдущих разделах.

Наконец, отметим, что в работах [144,145] было показано, что на фоне сильной скалярной волны, нарушающей условие  $|\partial \phi| \ll \lambda \phi^2$ , петлевые поправки к аномальному квантовому среднему (но не к заселенности уровней) скалярного поля секулярно растут, если в качестве начального состояния выбрать наивный вакуум свободной теории. При этом уравнения Дайсона — Швингера имеют стационарное решение, отвечающее постоянному аномальному квантовому среднему. В работах [144,145] подобное поведение корреляционных функций было интерпретировано как образование скалярного конденсата, сопровождающее "скатывание" скалярного поля из состояния с нулевым вакуумным средним к минимуму эффективного потенциала.

#### 4.4.2 Перенормировки

Можно заметить, что выражения (4.149) и (4.151) явно зависят от ультрафиолетового обрезания, то есть они очевидно не инвариантны относительно ренормгрупповых преобразований. Подобная зависимость не имеет физического смысла, поскольку наблюдаемые величины должны быть инвариантны относительно таких преобразований. Чтобы решить эту проблему, восстановим массу скалярного поля и учтем ультрафиолетовые контрчлены (напомним, что теория Юкавы в двумерии является суперперенормируемой, поскольку константа связи  $\lambda$  имеет размерность массы):

$$S_{eff} = \int d^2x \left[ \frac{1}{2} \left( \partial_{\mu} \phi \right)^2 - \frac{1}{2} \mu_0^2 \phi^2 - V_{eff} [\phi] + \frac{1}{2} A \left( \partial_{\mu} \phi \right)^2 - \frac{1}{2} B \phi^2 \right]. \tag{4.152}$$

Обычно перенормированную массу определяют как значение обратного пропагатора при нулевом импульсе:

$$\mu^2 = \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \bigg|_0, \tag{4.153}$$

где V включает в себя и эффективный потенциал, и массовый член, и контрчлены. Однако в данном случае это определение бессмыслено: вторая производная V в нуле не существует из-за логарифмической расходимости. По этой причине мы определяем перенормированную массу на произвольном ненулевом масштабе  $M_R$ :

$$\mu^2 = \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \bigg|_{M_B} \tag{4.154}$$

Такое определение влечет за собой следующее выражение для контрулена B:

$$B = -\frac{\lambda^2}{\pi} \log \frac{\lambda M_R}{\Lambda} - \frac{\lambda^2}{\pi}.$$
 (4.155)

и перенормированного потенциала:

$$V = \frac{1}{2}\mu_0^2 \phi^2 + \frac{(\lambda \phi)^2}{2\pi} \log \frac{\lambda \phi}{M_B} - \frac{3(\lambda \phi)^2}{4\pi}.$$
 (4.156)

Легко проверить, что это выражение инвариантно относительно изменения масштаба перенормировки. Также заметим, что эффективный потенциал имеет минимум, который не совпадает со значением  $\phi=0$ . Эта ситуация напоминает знаменитый потенциал Коулмена — Вайнберга [45,151].

Наконец, положим  $\mu_0 = 0$ , заменим произвольный параметр  $M_R$  вакуумным средним скалярного поля, которое минимизирует перенормированный эффективный потенциал (подчеркнем, что это среднее отличается от среднего в вакуумном состоянии свободной теории):

$$M_R = \frac{1}{e} \lambda \langle \phi \rangle_{GS}, \tag{4.157}$$

где e = 2.71... — постоянная Эйлера. В результате мы получим следующее выражение для эффективного потенциала, инвариантное относительно ренормгрупповых преобразований:

$$V_{eff} = \frac{(\lambda \phi)^2}{2\pi} \log \frac{\phi}{\langle \phi \rangle_{GS}} - \frac{(\lambda \phi)^2}{4\pi}.$$
 (4.158)

Разложение этого потенциала около минимума  $\phi = \langle \phi \rangle_{GS} + \tilde{\phi}$  имеет следующий вид:

$$V_{eff} \simeq -\frac{\lambda^2 \langle \phi \rangle_{GS}^2}{4\pi} + \frac{\lambda^2}{2\pi} \tilde{\phi}^2 + \cdots, \qquad (4.159)$$

то есть скалярное поле спонтанно приобретает массу  $\mu^2 = \frac{\lambda^2}{\pi}$ .

Заметим, что уравнения (4.151) и (4.158) были получены в приближении  $\lambda \phi \ll \Lambda$ , которое, очевидно, нарушается около минимума потенциала. Тем не менее, можно показать, что высшие петлевые поправки (учитывающие, что поле  $\phi$  динамическое) не изменяют форму потенциала около  $\phi=0$ . Следовательно, петлевые поправки не могут сдвинуть минимум эффективного потенциала в ноль, хотя и могут повлиять на его положение [151]. Другими словами, уравнение (4.158) правильно ухватывает качественное поведение полей.

# Глава 5

# Заключение

В диссертационной работе были изучены свойства взаимодействующих нестационарных квантовых систем, в которых петлевые поправки к корреляционным функциям не удается просуммировать с помощью аналога кинетического уравнения (1.44). В качестве примеров подобных систем были рассмотрены нестационарная квантовая механика (система N осцилляторов с переменной частотой, связанных O(N)-симметричным квартичным взаимодействием), нелинейный скалярный динамический эффект Казимира и теория Юкавы на фоне классического растущего во времени скалярного поля. Во всех перечисленных случаях учет петлевых поправок приводит к генерации отличной от нуля заселенности квантовых уровней  $n_{pq}$  и аномального квантового среднего  $\varkappa_{pq}$ , что указывает на изменение основного состояния теории. В сущности, генерация квантовых средних происходит за счет накачки энергии в систему внешним нестационарным фоном — например, в системе нелинейно связанных осцилляторов и нелинейном динамическом эффекте Казимира при слабых отклонениях от стационарности лидирующие поправки к квантовым средним обеспечиваются процессами одновременного рождения четырех скоррелированных частиц.

В нестационарной системе нелинейно связанных осцилляторов петлевые поправки к келдышевскому пропагатору, квантовым средним и средней энергии возбуждений в n-ом порядке теории возмущений неограниченно растут со временем эволюции как  $(\lambda t)^n$ . Подчеркнем,
что подобная скорость секулярного роста превосходит скорость роста петлевых поправок в
нестационарных квантовых теориях более высокой размерности и не позволяет просуммировать поправки с помощью аналога кинетического уравнения (сравните с разделом 1.5). Тем
не менее, нам удалось просуммировать такие секулярные поправки двумя независимыми способами. Во-первых, при слабых отклонениях от стационарности мы нашли приближенный
гамильтониан теории и явно вычислили пересуммированные квантовые средние. Во-вторых,

с помощью диаграммной техники Швингера — Келдыша мы просуммировали лидирующие поправки к пропагаторам и вершинам, а затем оценили сублидирующую поправку к келдышевскому пропагатору в пределе  $N\gg 1$ , тем самым обобщив результаты первого способа на произвольные отклонения от стационарности. Кроме того, мы вычислили среднее число и энергию возбуждений системы в бесконечном будущем. При сильных отклонениях от стационарности и древесный, и петлевой вклады в эти величины пропорциональны квадрату боголюбовского коэффициента, отвечающего за перемешивание положительно- и отрицательно-частотных мод:  $\mathcal{N}_{\text{free}} = N|\beta|^2$ ,  $\mathcal{N}_{\text{loop}} = \frac{3}{2}|\beta|^2$ . Тем не менее, заметим, что петлевой вклад подавлен по 1/N.

В нелинейном динамическом эффекте Казимира петлевые поправки к корреляционным функциям также растут со временем эволюции как  $(\lambda t)^n$ . Это связано с тем, что эффективный гамильтониан модели в пределе малой константы связи и большого времени эволюции содержит постоянные вклады, отвечающие не только за упругое рассеяние, но и за распад и рождение частиц — процессы, нарушающие закон сохранения энергии (отметим, что качественно этот гамильтониан очень похож на гамильтониан системы нелинейно связанных осцилляторов с переменной частотой). В результате в пертурбативном разложении оператора эволюции, а вместе с тем и в разложении корреляционных функций, неизбежно возникают вклады вида  $(\lambda t)^n$ . Мы явно вычислили эти вклады до второго порядка разложения по  $\lambda$  для скалярного поля с взаимодействием вида  $\lambda \phi^4$  на фоне резонансной полости с идеально отражающими стенками и полупрозрачного зеркала, смоделированного дельта-функциональным потенциалом — моделей с естественным инфракрасным и ультрафиолетовым масштабом, соответственно. В результате мы установили, что полупрозрачность зеркала существенно не влияет на секулярный рост петлевых поправок. Затем мы просуммировали лидирующие секулярно растущие петлевые вклады в келдышевский пропагатор и квантовые средние в приближении слабых отклонений от стационарности; для этого мы учли, что в указанном пределе частицы в основном рождаются в моде с наименьшей энергией, что позволяет свести задачу к аналогу квантовомеханической модели, рассмотренной в главе 2.

Наконец, мы рассмотрели (0+1) и (1+1)-мерную модель Юкавы на фоне линейно растущего во времени классического скалярного поля. В (0+1) измерении мы вычислили точные корреляционные функции скалярного поля — а точнее, показали, что они распадаются на произведения несвязных одноточечных функций, поправки к которым описываются диаграммами типа "головастик" (фермионные пропагаторы в этой размерности тривиальны). В (1+1) измерении мы явно нашли моды квантованного скалярного поля на линейно растущем фоне и вычислили скалярный ток, определяющий отклик поля на заданный фон. Также

мы оценили петлевые поправки к квантовым средним скалярного и фермионного поля и показали, что эти поправки отличны от нуля, однако ограничены даже в пределе бесконечно большого времени эволюции. Наконец, мы обобщили выражение для скалярного тока на произвольные сильные, но медленно изменяющиеся скалярные поля, отынтегрировав фермионы и вычислив эффективный потенциал скаляров. Подчеркнем, что установленные свойства сильных скалярных полей — отсутствие секулярного роста петлевых поправок на сильном классическом фоне и отсутствие мнимого вклада в эффективное действие — существенно отличает сильные скалярные поля от электрических и гравитационных полей.

### Благодарности

Прежде всего я хотел бы поблагодарить моего научного руководителя, Ахмедова Эмиля Тофик оглы, за постановку интересных задач и многочисленные плодотворные обсуждения, а также за постоянную поддержку в изучении современной теоретической физики в целом и квантовой теории поля в частности. Кроме того, я хотел бы поблагодарить Ахмедова Э.Т. за организацию литературного семинара и многочисленных школ по теоретической физике, которые помогли мне расширить научный кругозор.

Я выражаю благодарность моим соавторам Елене Ланиной и Лианне Акопян. Также я хотел бы поблагодарить Кирилла Базарова, Дмитрия Дьяконова, Александра Дятлика, Прокопия Анемподистова, Дамира Садекова, Никиту Колганова, Павла Миткина, Артема Александрова, Кирилла Казарновского, Кирилла Губарева, Арсения Пикалова, Сергея Алексеева, Льва Астраханцева, Франческо Басконе и Даниила Шерстнева за горячие дискуссии, посвященные нестационарной квантовой теории поля. Кроме того, выражаю признательность Попову Ф.К., Семенову А.Г., Арсееву П.И., Параоану Г.С., Франхино-Виньясу С., Шубрингу Д., Зенкевичу Е.А., Морозову А.Ю., Слепцову А.В., Поволоцкому А.М., Васильеву М.А., Шукринову Ю.М., Розанову Н.Н., Щербакову И.А., Лосякову В.В., Москелла У., Васильеву Д.В., Мусаеву Э.Т., Морозову А.А., Киселеву В.В., Иванову М.Г., Белоусову Ю.М. и Крайнову В.П. за ценные комментарии к моей работе. Отдельно хочу поблагодарить Александра Сергеевича Горского за полезные обсуждения, помогающие посмотреть на решаемые задачи с новой стороны.

Наконец, я хотел бы поблагодарить моего отца, Трунина Алексея Анатольевича, и мать, Трунину Светлану Ивановну, за привитые мне с детства любовь к науке и тягу к знаниям. Также я хочу поблагодарить мою жену, Трунину Елизавету Сергеевну, за постоянную поддержку и помощь во время написания диссертации.

# Приложение А

# Ложный секулярный рост в стационарной теории

Покажем, что в стационарной теории петлевые поправки к корреляционным функциям (а также к соответствующим квантовым средним и производным величинам) могут испытывать ложный "секулярный рост" на временах эволюции, которые много меньше естественного инфракрасного обрезания, хотя для достаточно больших времен  $T \to \infty$  будет выполняться  $n_{pq} \to 0$  и  $\varkappa_{pq} \to 0$ . Рассмотрим безмассовое скалярное поле, зажатое между двумя идеальными зеркалами, находящимися в точках x = 0 и  $x = \Lambda$ :

$$\partial_{\mu}\partial^{\mu}\phi = 0, \quad \phi(t,0) = \phi(t,\Lambda) = 0.$$
 (A.1)

Как обычно, разложим поле по модам:

$$\phi(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n g_n(t,x) + a_n^{\dagger} g_n^*(t,x) \right], \quad g_n(t,x) = \frac{e^{-i\frac{\pi n}{\Lambda}t}}{\sqrt{\pi n}} \sin\frac{\pi nx}{\Lambda}, \tag{A.2}$$

где  $[a_m, a_n^{\dagger}] = \delta_{mn}$ . Теперь учтем, что двухпетлевые поправки к  $n_{pq}$  сводятся к произведению следующих двух интегралов (здесь мы можем положить  $t_0 = 0$  благодаря инвариантности стационарной задачи относительно трансляций во времени):

$$n_{pq}(T) = 2\lambda^2 \sum_{m,n,k} I_{p,m,n,k}(T) I_{q,m,n,k}^*(T), \quad I_{p,m,n,k}(T) = \int_0^T dt \int_0^{\Lambda} dx g_p(t,x) g_m(t,x) g_n(t,x) g_k(t,x).$$
(A.3)

Подставляя моды (А.2) в эти интегралы, получаем:

$$I_{p,m,n,k}(T) = \int_{0}^{T} dt \int_{0}^{\Lambda} dx \frac{e^{-\frac{i\pi t}{\Lambda}(p+m+n+k)}}{8\pi^{2}\sqrt{pmnk}} \sum_{\sigma_{m},\sigma_{n},\sigma_{k}=\pm 1} \sigma_{m}\sigma_{n}\sigma_{k} \cos\left[\frac{\pi x}{\Lambda}(p+\sigma_{m}m+\sigma_{n}n+\sigma_{k}k)\right] =$$

$$= \frac{1-e^{-\frac{i\pi T}{\Lambda}(p+m+n+k)}}{\frac{i\pi}{\Lambda}(p+m+n+k)} \frac{1}{8\pi^{2}\sqrt{pmnk}} \sum_{\sigma_{m},\sigma_{n},\sigma_{k}=\pm 1} \sigma_{m}\sigma_{n}\sigma_{k}\Lambda\delta_{p+\sigma_{m}m+\sigma_{n}n+\sigma_{k}k,0}.$$
(A.4)

Легко видеть, что для достаточно малых времен эволюции,  $T \ll \Lambda$ , интеграл линейно растет вместе со временем,  $I_{p,m,n,k}(T) \sim \Lambda T$ . Следовательно, на таких временах заселенность уровней также секулярно растет,  $n_{pq}(T) \sim (\lambda \Lambda T)^2$ . Тем не менее, для больших времен,  $T \gg \Lambda$ , зависящие от времени множители сводятся к дельта-функции Дирака, аргумент которой никогда не обращается в ноль:

$$\frac{1 - e^{-\frac{i\pi T}{\Lambda}(p+m+n+k)}}{\frac{i\pi}{\Lambda}(p+m+n+k)} \to \delta\left(\frac{\pi(p+m+n+k)}{\Lambda}\right) = 0.$$
(A.5)

Следовательно, в этом пределе поправка к заселенности уровней исчезает,  $n_{pq} \to 0$ , как и должно быть в стационарной теории. Аналогично можно показать, что  $\varkappa_{pq} \sim -(\lambda \Lambda T)^2$  для  $T \ll \Lambda$  и  $\varkappa_{pq} \to 0$  для  $T \gg \Lambda$ .

Подобное поведение квантовых средних имеет простую физическую интерпретацию. На больших временах эволюции законы сохранения энергии и импульса вкупе с двумерностью и безмассовостью теории исключают обмен энергией между частицами; в результате интеграл столкновений обращается в ноль, и квантовые средние не могут получать какие-либо поправки. Однако на малых временах закон сохранения энергии может нарушаться за счет принципа неопределенностей Гейзенберга. Следовательно, на таких временах могут идти процессы, запрещенные на больших временах, и в результате в течение этих непродолжительных временных отрезков квантовые средние могут расти. Очевидно, такой "секулярный" рост является простым отражением квантовых флуктуаций и не связан с глобальным изменением состояния системы подобно обычному секулярному росту, возникающему на больших временах эволюции.

# Приложение В

# Асимптотическое поведение функций параболического цилиндра большого порядка

Вообще говоря, асимптотическое поведение функций параболического цилиндра широко обсуждается в литературе (например, см. [149,150,155,156]). Тем не менее, нам удалось найти только одну асимптотику, работающую для произвольного значения комплексного параметра  $|\nu| \gg 1$  [149]:

$$D_{\nu}(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left[\frac{1}{2}\nu \log(-\nu) - \frac{1}{2}\nu - \sqrt{-\nu}z\right] \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{|\nu|}}\right)\right],\tag{B.1}$$

где  $|\arg(-\nu)| \leq \frac{\pi}{2}$  и |z| ограничен. Погрешность этого разложения слишком велика для наших целей: например, при попытке проинтегрировать  $D_{-\frac{ip^2}{2\alpha}}(z)$  по dp члены порядка  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{|\nu|}}\right) \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{p}\right)$  потенциально могут заставить интеграл разойтись. Следовательно, необходимо найти более точное разложение.

Следуя [156] и [90], рассмотрим следующее интегральное представление функции параболического цилиндра:

$$D_{\nu}(z) = \frac{\Gamma(1+\nu)}{2\pi i} e^{-\frac{1}{4}z^2} z \int_{\mathcal{C}} \exp\left[z^2 \left(v - \frac{1}{2}v^2\right) - (1+\nu)\log(zv)\right] dv, \tag{B.2}$$

где контур интегрирования  $\mathcal{C}$  запечатлен на Рис. В.1. Несложно проверить, что это выражение действительно решает уравнение на функцию параболического цилиндра. Случаю  $\phi_{cl} = Et$  отвечают следующие значения параметра и аргумента функции:

$$\nu = -\frac{ip^2}{2\alpha}, \quad z = e^{i\pi/4} \sqrt{\frac{2}{\alpha}} M(t), \quad M(t) = \alpha t, \quad \alpha = \lambda E.$$
 (B.3)

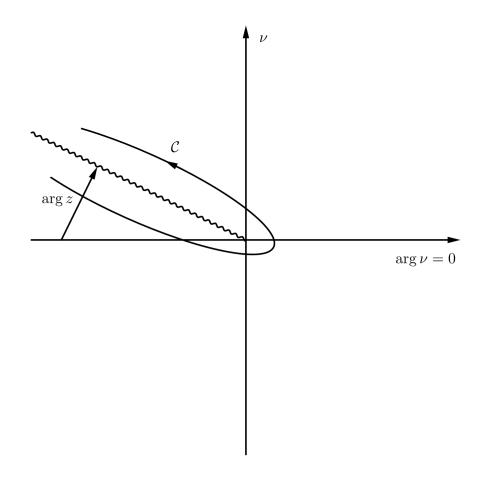


Рис. В.1: Контур интегрирования

Используя метод стационарной фазы для (В.2), можно получить разложение следующего вида:

$$D_{\nu}(z) \simeq \frac{\Gamma(1+\nu)}{i\sqrt{2\pi}} z e^{-\frac{1}{4}z^2} \sum_{j=0,1} \frac{\exp(i\alpha_j + f(v_j))}{|f''(v_j)|^{\frac{1}{2}}} \left[ 1 + \sum_{l=2}^{\infty} \frac{(2l-1)!! \exp(2il\alpha_j)}{v_j^{2l} |f''(v_j)|^l} \sum_{\lambda_n} \prod_{n=3}^{2l} \frac{[(1+\nu)/n]^{\lambda_n}}{\lambda_n!} \right],$$
(B.4)

где

$$f(v) = z^{2}(v - \frac{1}{2}v^{2}) - (1 + \nu)\log(zv),$$

$$\alpha_{j} = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\arg(f''(v_{j})),$$
(B.5)

и мы обозначили критические точки функции f(v) как  $v_{0,1} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \left(1 - \frac{4(1+\nu)}{z^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ . Внутренняя сумма в уравнении (В.4) берется по всем различным разбиениям 2l, которые задаются неотрицательными целыми числами  $\lambda_n$  такими, что  $\sum_{n=3}^{2l} n\lambda_n = 2l$ . Оценим внутреннюю сумму в (В.4). В этой сумме l-ый член содержит l-ую степень следующего выражения:

$$\frac{1}{v_{0,1}^2 f''(v_{0,1})} = \frac{1}{2(1+\nu)} \left[ 1 \mp \left( 1 - \frac{4(1+\nu)}{z^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right],\tag{B.6}$$

и не более чем  $\lfloor \frac{2l}{3} \rfloor$ -ую степень  $[(1+\nu)/n]$ . В случае  $|\nu|\gg 1$  квадратный корень в скобках

мал, и  $\frac{1}{v_{0,1}^2f''(v_{0,1})}\sim\frac{1}{2(1+\nu)}=\mathcal{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)$  для обоих знаков " $\mp$ ". Это значит, что внутренняя сумма имеет порядок  $\mathcal{O}\left(\frac{1+\nu}{[v_{0,1}^2f''(v_{0,1})]^2}\right)=\mathcal{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)$ , поэтому ей можно пренебречь в интегралах по dp. Подставляя значения седловых точек в разложение (B.4), получаем:

$$D_{\nu}(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left[\frac{1-\nu}{2} + \left(\nu + \frac{1}{2}\right) \log \nu - \left(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2}\right) \log \frac{z^{2}}{4} - \frac{1}{4} \log\left(1 - \frac{4(1+\nu)}{z^{2}}\right)\right] \times \sum_{\pm} \exp\left[\left(-\frac{1}{2} - \nu\right) \log\left(1 \pm \left(1 - \frac{4(1+\nu)}{z^{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \pm \frac{z^{2}}{4} \left(1 - \frac{4(1+\nu)}{z^{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right] \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)\right]. \tag{B.7}$$

Заметим, что в обозначениях (В.3) и в пределе  $|\nu|\gg 1$  (то есть  $p^2\gg\alpha$ ) или  $|z|\gg 1$  (то есть  $M^2\gg\alpha$ ) верно следующее разложение:

$$\left(1 - \frac{4(1+\nu)}{z^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{M^2 + p^2}}{M} \left[1 + \frac{i\alpha}{M^2 + p^2} + \mathcal{O}\left(\frac{\alpha}{M^2 + p^2}\right)^2\right].$$

Следовательно, обозначая для краткости  $V = \sqrt{M^2 + p^2}$ , получаем:

$$D_{-\frac{ip^2}{2\alpha}}\left(\frac{1+i}{\sqrt{\alpha}}M\right) \simeq \frac{e^{\frac{\pi p^2}{8\alpha}}}{\sqrt{2}}\left(\frac{M}{V}+1\right)^{\frac{1}{2}}e^{\frac{ip^2}{4\alpha}-\frac{ip^2}{4\alpha}\log\frac{(V+M)^2}{2\alpha}-\frac{iMV}{2\alpha}}\left[1+\mathcal{O}\left(\frac{\alpha}{V^2}\right)\right]. \tag{B.8}$$

Для квадрата модуля функции параболического цилиндра получаем:

$$\left|D_{-\frac{ip^2}{2\alpha}}\left(\frac{1+i}{\sqrt{\alpha}}M\right)\right|^2 \simeq \frac{1}{2}e^{\frac{\pi p^2}{4\alpha}}\left(\frac{M}{\sqrt{M^2+p^2}}+1\right)\left[1+\mathcal{O}\left(\frac{\alpha}{M^2+p^2}\right)\right]. \tag{B.9}$$

Здесь мы пренебрегли вторым членом в сумме, поскольку он содержит экспоненциально малый множитель  $e^{-\frac{\pi p^2}{2\alpha}}$ . Заметим, что мы выбрали лист, для которого  $-1 = e^{-i\pi}$ . Можно проверить, что (В.8) совпадает с (В.1) с точностью до  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{p}\right)$ . Однако новое разложение также содержит следующий член асимптотического разложения.

Подчеркнем, что уравнения (В.8) и (В.9) работают для произвольных значений  $M^2 \gg \alpha$ . Тем не менее, в предельных случаях они заметно упрощаются. Например,

$$D_{-\frac{ip^2}{2\alpha}}\left(\frac{1+i}{\sqrt{\alpha}}M\right) \simeq \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi p^2}{8\alpha} + \frac{ip^2}{4\alpha} - \frac{ip^2}{4\alpha}\log\frac{p^2}{2\alpha}}e^{\frac{-i|p|M}{\alpha} - \frac{iM^3}{6|p|\alpha} + \frac{M}{2|p|}}\left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{M^2 + \alpha}{p^2}\right)\right], \tag{B.10}$$

если  $M^2 \ll p^2$ , и

$$D_{-\frac{ip^2}{2\alpha}} \left( \frac{1+i}{\sqrt{\alpha}} M \right) \simeq \begin{cases} \left( 1 - \frac{p^2}{8M^2} \right) e^{\frac{\pi p^2}{8\alpha} - \frac{iM^2}{2\alpha} - \frac{ip^2}{4\alpha} \log \frac{2M^2}{\alpha}} \left[ 1 + \mathcal{O}\left(\frac{p^2 + \alpha}{M^2}\right) \right], & M > 0, \\ \frac{p}{2|M|} e^{\frac{\pi p^2}{8\alpha} + \frac{iM^2}{2\alpha} + \frac{ip^2}{4\alpha} \log \frac{2M^2}{\alpha} - \frac{ip^2}{2\alpha} \log \frac{p^2}{2\alpha}} \left[ 1 + \mathcal{O}\left(\frac{p^2 + \alpha}{M^2}\right) \right], & M < 0, \end{cases}$$
(B.11)

если  $M^2 \gg p^2$ .

В противоположном случае  $|\nu|\ll 1$  внутреннюю сумму в (В.4) следует вычислять более аккуратно, поскольку  $\frac{1}{1+\nu}\sim 1$  (по крайней мере, для знака "+"). Тем не менее, в случае

 $|\nu| \ll 1 \ll |z|$  (то есть  $p^2 \ll \alpha \ll M^2$ ) можно использовать друге разложение, которое следует из другого интегрального представления для функции параболического цилиндра [149]:

$$D_{\nu}(z) = z^{\nu} e^{-\frac{z^{2}}{4}} \left[ \sum_{n=0}^{N} \frac{\left(-\frac{\nu}{2}\right)_{n} \left(\frac{1}{2} - \frac{\nu}{2}\right)_{n}}{n! \left(-\frac{z^{2}}{2}\right)^{n}} + \mathcal{O}\left(\left|z^{2}\right|^{-N-1}\right) \right],$$

$$(\gamma)_{0} = 1, \quad (\gamma)_{n \neq 0} = \gamma \left(\gamma + 1\right) \cdots \left(\gamma + n - 1\right).$$
(B.12)

Следовательно, мы получаем, что:

$$D_{-\frac{ip^2}{2\alpha}}\left(\frac{1+i}{\sqrt{\alpha}}M\right) \simeq e^{\frac{\pi p^2}{8\alpha} - \frac{iM^2}{2\alpha} - \frac{ip^2}{4\alpha}\log\frac{2M^2}{\alpha}}\left(1 - \frac{p^2}{8M^2}\right)\left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{\alpha^2}{M^4}\right)\right],\tag{B.13}$$

и для квадрата модуля:

$$\left| D_{-\frac{ip^2}{2\alpha}} \left( \frac{1+i}{\sqrt{\alpha}} M \right) \right|^2 \simeq e^{\frac{\pi p^2}{4\alpha}} \left[ 1 - \frac{p^2}{4M^2} + \mathcal{O}\left( \frac{\alpha^2}{M^4} \right) \right]. \tag{B.14}$$

Заметим, что выражения (В.8) и (В.13) приблизительно совпадают, если  $|\nu| \ll |z|, \, |\nu| \gg 1,$  как и следовало ожидать.

# Литература

- [1] J. S. Schwinger, "On gauge invariance and vacuum polarization," Phys. Rev. 82, 664 (1951).
- [2] S. W. Hawking, "Black hole explosions?" Nature **248**, 30 (1974).
- [3] S. W. Hawking, "Particle Creation by Black Holes," Commun. Math. Phys. 43, 199 (1975) [Erratum: Commun. Math. Phys. 46, 206 (1976)]
- [4] S. W. Hawking, "Breakdown of Predictability in Gravitational Collapse," Phys. Rev. D 14, 2460 (1976)
- [5] W. G. Unruh, "Notes on black hole evaporation," Phys. Rev. D 14, 870 (1976).
- [6] S. A. Fulling, "Nonuniqueness of canonical field quantization in Riemannian space-time," Phys. Rev. D 7, 2850 (1973).
- [7] P. C. W. Davies, "Scalar particle production in Schwarzschild and Rindler metrics," J. Phys. A 8, 609 (1975).
- [8] G. T. Moore, "Quantum Theory of the Electromagnetic Field in a Variable-Length One-Dimensional Cavity," J. Math. Phys. 11, 2679 (1970).
- [9] P. C. W. Davies, S. A. Fulling, "Radiation from a moving mirror in two-dimensional spacetime: conformal anomaly," Proc. Roy. Soc. Lond. A **348**, 393 (1976).
- [10] P. C. W. Davies, S. A. Fulling, "Radiation from Moving Mirrors and from Black Holes," Proc. Roy. Soc. Lond. A 356, 237 (1977).
- [11] B. S. DeWitt, "Quantum Field Theory in Curved Space-Time," Phys. Rept. 19, 295 (1975).
- [12] J. Preskill, "Do black holes destroy information?," hep-th/9209058.
- [13] D. Harlow, "Jerusalem Lectures on Black Holes and Quantum Information," Rev. Mod. Phys. 88, 015002 (2016) [arXiv:1409.1231].

- [14] A. Almheiri, T. Hartman, J. Maldacena, E. Shaghoulian, A. Tajdini, "The entropy of Hawking radiation," Rev. Mod. Phys. **93**, 35002 (2021) [arXiv:2006.06872].
- [15] N. D. Birrell, P. C. W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space* (Cambridge, England: Cambridge University Press, 1984).
- [16] S. A. Fulling, Aspects of Quantum Field Theory in Curved Space-Time (Cambridge, England: Cambridge University Press, 1989).
- [17] А. А. Гриб, С. Г. Мамаев, В. М. Мостепаненко, *Квантовые эффекты в интенсивных* внешних полях (М.: Атомиздат, 1988); А. А. Гриб, С. Г. Мамаев, В. М. Мостепаненко, Вакуумные квантовые эффекты в сильных полях (М.: Энергоатомиздат, 1988).
- [18] A. M. Polyakov, "De Sitter Space and Eternity," Nucl. Phys. B **797**, 199 (2008) [arXiv:0709.2899].
- [19] D. Krotov, A. M. Polyakov, "Infrared Sensitivity of Unstable Vacua," Nucl. Phys. B 849, 410 (2011) [arXiv:1012.2107].
- [20] A. M. Polyakov, "Infrared instability of the de Sitter space," arXiv:1209.4135.
- [21] E. T. Akhmedov, "Curved space equilibration versus flat space thermalization: A short review," Mod. Phys. Lett. A **36**, 2130020 (2021) [arXiv:2105.05039].
- [22] E. T. Akhmedov, "Lecture notes on interacting quantum fields in de Sitter space," Int. J. Mod. Phys. D 23, 1430001 (2014) [arXiv:1309.2557].
- [23] E. T. Akhmedov, "IR divergences and kinetic equation in de Sitter space. Poincare patch: Principal series," J. High Energy Phys. **01** (2012) 66 [arXiv:1110.2257].
- [24] E. T. Akhmedov, P. Burda, "Solution of the Dyson–Schwinger equation on de Sitter background in IR limit," Phys. Rev. D 86, 044031 (2012) [arXiv:1202.1202].
- [25] E. T. Akhmedov, "Physical meaning and consequences of the loop infrared divergences in global de Sitter space," Phys. Rev. D 87, 044049 (2013) [arXiv:1209.4448].
- [26] E. T. Akhmedov, F. K. Popov, V. M. Slepukhin, "Infrared dynamics of the massive  $\phi^4$  theory on de Sitter space," Phys. Rev. D 88, 024021 (2013) [arXiv:1303.1068].
- [27] E. T. Akhmedov, F. Bascone, "Quantum heating as an alternative of reheating," Phys. Rev. D 97, no.4, 045013 (2018) [arXiv:1710.06118].

- [28] E. T. Akhmedov, U. Moschella, K. E. Pavlenko, F. K. Popov, "Infrared dynamics of massive scalars from the complementary series in de Sitter space," Phys. Rev. D 96, no. 2, 025002 (2017) [arXiv:1701.07226].
- [29] E. T. Akhmedov, U. Moschella, F. K. Popov, "Characters of different secular effects in various patches of de Sitter space," Phys. Rev. D **99**, no. 8, 086009 (2019) [arXiv:1901.07293].
- [30] E. T. Akhmedov, E. T. Musaev, "Comments on QED with background electric fields," New J. Phys. 11, 103048 (2009) [arXiv:0901.0424].
- [31] E. T. Akhmedov, N. Astrakhantsev, F. K. Popov, "Secularly growing loop corrections in strong electric fields," J. High Energy Phys. **09** (2014) 71 [arXiv:1405.5285].
- [32] E. T. Akhmedov, F. K. Popov, "A few more comments on secularly growing loop corrections in strong electric fields," J. High Energy Phys. **09** (2015) 85 [arXiv:1412.1554].
- [33] E. T. Akhmedov, H. Godazgar, F. K. Popov, "Hawking radiation and secularly growing loop corrections," Phys. Rev. D **93**, no. 2, 024029 (2016) [arXiv:1508.07500].
- [34] F. J. Dyson, "The S matrix in quantum electrodynamics," Phys. Rev. 75, 1736 (1949).
- [35] J. S. Schwinger, "On the Green's functions of quantized fields. 1.," Proc. Nat. Acad. Sci. 37, 452 (1951).
- [36] J. S. Schwinger, "On the Green's functions of quantized fields. 2.," Proc. Nat. Acad. Sci. 37, 455 (1951).
- [37] J. S. Schwinger, "Brownian motion of a quantum oscillator," J. Math. Phys. 2, 407 (1961).
- [38] L. V. Keldysh, "Diagram technique for nonequilibrium processes," Zh. Eksp. Teor. Fiz. 47, 1515 (1964) [Sov. Phys. JETP 20, 1018 (1965)].
- [39] A. Kamenev, Field Theory of Non-Equilibrium Systems (Cambridge, England: Cambridge University Press, 2011); A. Kamenev, "Many-body theory of non-equilibrium systems," cond-mat/0412296.
- [40] J. Berges, "Introduction to nonequilibrium quantum field theory," AIP Conf. Proc. 739, no. 1, 3 (2004) [hep-ph/0409233]; J. Berges, "Nonequilibrium Quantum Fields: From Cold Atoms to Cosmology," arXiv:1503.02907.

- [41] J. Rammer, Quantum field theory of non-equilibrium states (Cambridge, England: Cambridge University Press, 2007).
- [42] E. A. Calzetta, B. L. B. Hu, *Nonequilibrium Quantum Field Theory* (Cambridge, England: Cambridge University Press, 2008).
- [43] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Физическая кинетика (М.: Физматлит, 2012).
- [44] П. И. Арсеев, "О диаграммной технике для неравновесных систем: вывод, некоторые особенности и некоторые применения," УФН **185**, 1271 (2015).
- [45] M. E. Peskin, D. V. Schroeder, An Introduction to quantum field theory (Reading, MA: Addison-Wesley Publ. Co., 1995); пер. на русск. яз.: М. Пескин, Д. Шредер, Введение в квантовую теорию поля (Ижевск: РХД, 2001).
- [46] Ф. К. Попов, "Нестационарные явления во внешних сильных полях," дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.04.02; защищена 21.03.2017 М., 2017 127 с. [https://vak.minobrnauki.gov.ru/advert/100006424]
- [47] A. V. Leonidov, A. A. Radovskaya, "On formation of equation of state of evolving quantum field," JETP Lett. **101**, no.4, 215 (2015) [arXiv:1412.0098].
- [48] A. Leonidov, A. Radovskaya, "Applicability of the Wigner functional approach to evolution of quantum fields," EPJ Web Conf. **125**, 05013 (2016) [arXiv:1608.04580].
- [49] A. A. Radovskaya, A. G. Semenov, "Semiclassical Approximation meets Keldysh-Schwinger diagrammatic technique: Scalar  $\varphi^4$ ," Eur. Phys. J. C 81, 704 (2021) [arXiv:2003.06395].
- [50] M. Gell-Mann, F. Low, "Bound States in Quantum Field Theory," Phys. Rev. 84, 350 (1951).
- [51] G. C. Wick, "The Evaluation of the Collision Matrix," Phys. Rev. 80, 268 (1950).
- [52] T. Matsubara, "A New Approach to Quantum-Statistical Mechanics," Prog. Th. Phys. 14, no. 4, 351 (1955).
- [53] A. Fetter, J. Walecka, Quantum Theory of Many-Particle Systems (New York: McGraw-Hill, 1971).
- [54] В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика* (М.: Физматлит, 2002).

- [55] A. G. Hall, "Non-equilibrium Green functions: generalized Wick's theorem and diagrammatic perturbation with initial correlations," J. Phys. A: Math. Gen. 8 214 (1975).
- [56] Yu. A. Kukharenko, S. G. Tikhodeev, "Diagram technique in the theory of relaxation processes," Sov. Phys. JETP **56**, no. 4, 831 (1982).
- [57] E. T. Akhmedov, K. Kazarnovskii, "Thermalization with non-zero initial anomalous quantum averages," arXiv:2110.00454.
- [58] R. Parentani, J. Serreau, "Physical momentum representation of scalar field correlators in de Sitter space," Phys. Rev. D 87, 045020 (2013) [arXiv:1212.6077].
- [59] F. Gautier, J. Serreau, "Infrared dynamics in de Sitter space from Schwinger-Dyson equations," Phys. Lett. B **727**, 541 (2013) [arXiv:1305.5705].
- [60] F. Gautier, J. Serreau, "Scalar field correlator in de Sitter space at next-to-leading order in a 1/N expansion," Phys. Rev. D **92**, no.10, 105035 (2015) [arXiv:1509.05546].
- [61] D. López Nacir, F. D. Mazzitelli, L. G. Trombetta, "Long distance behavior of O(N)-model correlators in de Sitter space and the resummation of secular terms," J. High Energy Phys. 10 (2018) 16 [arXiv:1807.05964].
- [62] E. T. Akhmedov, S. O. Alexeev, "Dynamical Casimir effect and loop corrections," Phys. Rev. D 96, no. 6, 065001 (2017) [arXiv:1707.02242]; S. Alexeev, "Secularly growing loop corrections to the dynamical Casimir effect," arXiv:1707.02838.
- [63] J. Maldacena, D. Stanford, "Remarks on the Sachdev-Ye-Kitaev model," Phys. Rev. D 94, no.10, 106002 (2016) [arXiv:1604.07818].
- [64] A. Kitaev, S. J. Suh, "The soft mode in the Sachdev-Ye-Kitaev model and its gravity dual,"
   J. High Energy Phys. 05 (2018) 183 [arXiv:1711.08467].
- [65] G. Sárosi, " $AdS_2$  holography and the SYK model," PoS **Modave2017**, 001 (2018) [arXiv:1711.08482].
- [66] V. Rosenhaus, "An introduction to the SYK model," J. Phys. A 52, 323001 (2019) [arXiv:1807.03334].
- [67] Д. А. Трунин, "Педагогическое введение в модель Сачдева Йе Китаева и двумерную дилатонную гравитацию," УФН **191**, 225 (2021).

- [68] A. V. Lunkin, M. V. Feigel'man, "Non-equilibrium Sachdev-Ye-Kitaev model with quadratic perturbation," SciPost Phys. 12, 031 (2022) [arXiv:2106.11245].
- [69] A. V. Lunkin, M. V. Feigel'man, "High-frequency transport and zero-sound in an array of SYK quantum dots," arXiv:2112.11500.
- [70] C. K. Law, "Effective Hamiltonian for the radiation in a cavity with a moving mirror and a time-varying dielectric medium," Phys. Rev. A 49, 433 (1994)
- [71] V. V. Dodonov, A. B. Klimov, D. E. Nikonov, "Quantum phenomena in nonstationary media," Phys. Rev. A 47, 4422 (1993).
- [72] V. V. Dodonov, V. I. Man'ko, V. N. Rudenko, "Efficiency of a gravitational detector with interference of quantum states," Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz. 36, 53 (1982) [JETP Lett. 36, 63 (1982)].
- [73] V. V. Dodonov, O. V. Man'ko, V. I. Man'ko, "Quantum nonstationary oscillator: Models and applications," J. Russ. Laser Res. **16**, 1 (1995).
- [74] A. Imamoğlu, H. Schmidt, G. Woods, M. Deutsch, "Strongly Interacting Photons in a Nonlinear Cavity," Phys. Rev. Lett. 79, 1467 (1997) [Erratum: Phys. Rev. Lett. 81, 2836 (1998)].
- [75] W. Leoński, R. Tanaś, "Possibility of producing the one-photon state in a kicked cavity with a nonlinear Kerr medium," Phys. Rev. A 49, R20(R) (1994).
- [76] R. Román-Ancheyta, C. González-Gutiérrez, J. Récamier, "Influence of the Kerr nonlinearity in a single nonstationary cavity mode," J. Opt. Soc. Am. B 34, 1170 (2017).
- [77] I. M. de Sousa, A. V. Dodonov, "Microscopic toy model for the cavity dynamical Casimir effect," J. Phys. A 48, no.24, 245302 (2015) [arXiv:1504.02413].
- [78] V. V. Dodonov, A. B. Klimov, V. I. Man'ko, "Generation of squeezed states in a resonator with a moving wall," Phys. Lett. A 149, 225 (1990).
- [79] V. V. Dodonov, A. B. Klimov, "Generation and detection of photons in a cavity with a resonantly oscillating boundary," Phys. Rev. A 53, 2664 (1996).
- [80] V. V. Dodonov, "Current status of the dynamical Casimir effect," Phys. Scripta 82, 038105 (2010) [arXiv:1004.3301].

- [81] V. V. Dodonov, "Fifty Years of the Dynamical Casimir Effect," Physics 2, no. 1, 67 (2020).
- [82] P. D. Nation, J. R. Johansson, M. P. Blencowe, F. Nori, "Stimulating Uncertainty: Amplifying the Quantum Vacuum with Superconducting Circuits," Rev. Mod. Phys. 84, 1 (2012) [arXiv:1103.0835].
- [83] J. R. Johansson, G. Johansson, C. M. Wilson, F. Nori, "Dynamical Casimir Effect in a Superconducting Coplanar Waveguide," Phys. Rev. Lett. 103, 147003 (2009) [arXiv:0906.3127].
- [84] J. R. Johansson, G. Johansson, C. M. Wilson, F. Nori, "Dynamical Casimir effect in superconducting microwave circuits," Phys. Rev. A 82, no. 5, 052509 (2010) [arXiv:1007.1058].
- [85] C. M. Wilson, G. Johansson, A. Pourkabirian, M. Simoen, J. R. Johansson, T. Duty, F. Nori, P. Delsing, "Observation of the dynamical Casimir effect in a superconducting circuit," Nature 479, 376 (2011) [arXiv:1105.4714].
- [86] P. Lähteenmäki, G. S. Paraoanu, J. Hassel, P. J. Hakonen, "Dynamical Casimir effect in a Josephson metamaterial," Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. 110, 4234 (2013) [arXiv:1111.5608].
- [87] B. Ya. Zel'dovich, A. M. Perelomov, V. S. Popov, "Relaxation of a quantum oscillator," Zh. Eksp. Teor. Fiz. 55, 589 (1968) [Sov. Phys. JETP 28.2, 308 (1969)].
- [88] V. S. Popov and A. M. Perelomov, "Parametric excitation of a quantum oscillator," Zh. Eksp. Teor. Fiz. **56**, 1375 (1969) [Sov. Phys. JETP **29.4**, 738 (1969)].
- [89] V. S. Popov, A. M. Perelomov, "Parametric excitation of a quantum oscillator. II," Zh. Eksp. Teor. Fiz. 57, 1684 (1969) [Sov. Phys. JETP 30.5, 910 (1970)].
- [90] D. A. Trunin, "Comments on the adiabatic theorem," Int. J. Mod. Phys. A 33, no. 24, 1850140 (2018) [arXiv:1805.04856].
- [91] А. Б. Мигдал, В. П. Крайнов, Приближенные методы квантовой механики (М.: Наука, 1966).
- [92] M. Born and V. A. Fock, "Beweis des Adiabatensatzes," Z. Physik 51 165 (1928).
- [93] T. Kato, "On the Adiabatic Theorem of Quantum Mechanics," J. Phys. Soc. Jpn. 5, 435 (1950).

- [94] D. F. Walls, G. J. Milburn, Quantum Optics (Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008).
- [95] E. K. Irish, "Generalized Rotating-Wave Approximation for Arbitrarily Large Coupling," Phys. Rev. Lett. **99**, 173601 (2007) [Erratum: Phys. Rev. Lett. **99**, 259901 (2007)].
- [96] M. Moshe, J. Zinn-Justin, "Quantum field theory in the large N limit: A Review," Phys. Rept. **385**, 69 (2003) [hep-th/0306133].
- [97] A. M. Polyakov, *Gauge Fields and Strings* (Chur, Switzerland: Harwood Academic Publishers, 1987); пер. на русск. яз.: А. М. Поляков, *Калибровочные поля и струны* (Ижевск: Удмуртский университет, 1999).
- [98] S. Coleman, Aspects of Symmetry: Selected Erice Lectures (Cambridge, England: Cambridge University Press, 1985).
- [99] D. Chowdhury, B. Swingle, "Onset of many-body chaos in the O(N) model," Phys. Rev. D **96**, no. 6, 065005 (2017) [arXiv:1703.02545].
- [100] F. Cooper, S. Habib, Y. Kluger, E. Mottola, J. P. Paz, P. R. Anderson, "Nonequilibrium quantum fields in the large-N expansion," Phys. Rev. D **50**, 2848 (1994) [hep-ph/9405352].
- [101] F. Cooper, S. Habib, Y. Kluger, E. Mottola, "Nonequilibrium dynamics of symmetry breaking in  $\lambda \Phi^4$  field theory," Phys. Rev. D **55**, 6471 (1997) [hep-ph/9610345].
- [102] J. Baacke, K. Heitmann, C. Patzold, "Renormalization of nonequilibrium dynamics at large N and finite temperature," Phys. Rev. D **57**, 6406 (1998) [hep-ph/9712506].
- [103] J. Baacke, K. Heitmann, "Nonequilibrium evolution and symmetry structure of the large-N  $\Phi^4$  model at finite temperature," Phys. Rev. D **62**, 105022 (2000) [hep-ph/0003317].
- [104] D. Boyanovsky, H. J. de Vega, R. Holman, S. P. Kumar, R. D. Pisarski, "Nonequilibrium evolution of a 'Tsunami': Dynamical symmetry breaking," Phys. Rev. D 57, 3653 (1998) [hep-ph/9711258].
- [105] S. R. Das, K. Sengupta, "Non-equilibrium Dynamics of O(N) Nonlinear Sigma models: a Large-N approach," J. High Energy Phys. **09** (2012) 72 [arXiv:1202.2458].
- [106] C. K. Cole, W. C. Schieve, "Radiation modes of a cavity with a moving boundary," Phys. Rev. A 52, 4405 (1995).

- [107] O. Méplan, C. Gignoux, "Exponential Growth of the Energy of a Wave in a 1D Vibrating Cavity: Application to the Quantum Vacuum," Phys. Rev. Lett. **76**, 408 (1996).
- [108] L. Li, B. Z. Li, "Geometrical method for the generalized Moore equations of a one-dimensional cavity with two moving mirrors," Chin. Phys. Lett. **19**, 1061 (2002).
- [109] C. K. Law, "Resonance Response of the Quantum Vacuum to an Oscillating Boundary," Phys. Rev. Lett. **73**, 1931 (1994).
- [110] C. K. Law, "Interaction between a moving mirror and radiation pressure: A Hamiltonian formulation," Phys. Rev. A **51**, 2537 (1995).
- [111] D. A. R. Dalvit, F. D. Mazzitelli, "Renormalization group approach to the dynamical Casimir effect," Phys. Rev. A 57, 2113 (1998) [quant-ph/9710048].
- [112] D. A. R. Dalvit, F. D. Mazzitelli, "Creation of photons in an oscillating cavity with two moving mirrors," Phys. Rev. A 59, 3049 (1999) [quant-ph/9810092].
- [113] W. J. Kim, J. H. Brownell, R. Onofrio, "Detectability of dissipative motion in quantum vacuum via superradiance," Phys. Rev. Lett. **96**, 200402 (2006) [arXiv:0705.2895].
- [114] C. D. Fosco, F. C. Lombardo, F. D. Mazzitelli, "Quantum dissipative effects in moving mirrors: A Functional approach," Phys. Rev. D **76**, 085007 (2007) [arXiv:0705.2960].
- [115] Y. Nagatani, K. Shigetomi, "Effective theoretical approach to back reaction of the dynamical Casimir effect in (1+1)-dimensions," Phys. Rev. A **62**, 022117 (2000) [hep-th/9904193].
- [116] C. D. Fosco, A. Giraldo, F. D. Mazzitelli, "Dynamical Casimir effect for semitransparent mirrors," Phys. Rev. D **96**, no. 4, 045004 (2017) [arXiv:1704.07198].
- [117] N. Obadia, R. Parentani, "Uniformly accelerated mirrors. Part 1. Mean fluxes," Phys. Rev. D 67, 024021 (2003) gr-qc/0208019].
- [118] N. Obadia, R. Parentani, "Uniformly accelerated mirrors. Part 2. Quantum correlations," Phys. Rev. D 67, 024022 (2003) [gr-qc/0209057].
- [119] N. Obadia, R. Parentani, "Notes on moving mirrors," Phys. Rev. D  $\mathbf{64}$ , 044019 (2001) [gr-qc/0103061].
- [120] A. Lambrecht, M. T. Jaekel, S. Reynaud, "Motion induced radiation from a vibrating cavity," Phys. Rev. Lett. 77, 615 (1996) [quant-ph/9606029].

- [121] G. Barton, A. Calogeracos, "On the Quantum Electrodynamics of a dispersive mirror. 1. Mass shifts, radiation, and radiative reaction," Annals Phys. 238, 227 (1995).
- [122] N. Nicolaevici, "Quantum radiation from a partially reflecting moving mirror," Class. Quant. Grav. 18, 619 (2001) [gr-qc/9910098].
- [123] L. Astrakhantsev, O. Diatlyk, "Massive quantum scalar field theory in the presence of moving mirrors," Int. J. Mod. Phys. A **33**, no. 21, 1850126 (2018) [arXiv:1805.00549].
- [124] С. В. Буланов, Т. Ж. Есиркепов, М. Кандо, А. С. Пирожков, Н. Н. Розанов, "Релятивистские зеркала в плазме— новые результаты и перспективы," УФН **183**, 449 (2013).
- [125] D. A. R. Dalvit, P. A. Maia Neto, F. D. Mazzitelli, "Fluctuations, dissipation and the dynamical Casimir effect," Lect. Notes Phys. 834, 419 (2011) [arXiv:1006.4790].
- [126] S. V. Bulanov, T. Esirkepov, T. Tajima, "Light Intensification towards the Schwinger Limit," Phys. Rev. Lett. 91, 085001 (2003) [erratum: Phys. Rev. Lett. 92, 159901 (2004)].
- [127] W. Heisenberg, H. Euler, "Folgerungen aus der Diracschen Theorie des Positrons," Z. Physik 98, 714 (1936) [physics/0605038].
- [128] B. Yurke, J. S. Denker, "Quantum network theory," Phys. Rev. A 29, 1419 (1984).
- [129] P. D. Nation, M. P. Blencowe, E. Buks, "Quantum analysis of a nonlinear microwave cavity-embedded dc SQUID displacement detector," Phys. Rev. B 78, 104516 (2008) [arXiv:0806.4171].
- [130] J. Bourassa, F. Beaudoin, J. M. Gambetta, A. Blais, "Josephson-junction-embedded transmission-line resonators: From Kerr medium to in-line transmon," Phys. Rev. A 86, 013814 (2012) [arXiv:1204.2237].
- [131] S. Boutin, D. M. Toyli, A. V. Venkatramani, A. W. Eddins, I. Siddiqi, A. Blais, "Effect of higher-order nonlinearities on amplification and squeezing in Josephson parametric amplifiers," Phys. Rev. Appl. 8, 054030 (2017) [arXiv:1708.00020].
- [132] B. Yurke, E. Buks, "Performance of cavity-parametric amplifiers, employing Kerr nonlinearites, in the presence of two-photon loss," J. Light. Technol. 24, no. 12, 5054 (2006) [quant-ph/0505018].
- [133] A. Blais, A. L. Grimsmo, S. M. Girvin, A. Wallraff, "Circuit Quantum Electrodynamics," Rev. Mod. Phys. 93, 25005 (2021) [arXiv:2005.12667].

- [134] M. Bordag, G. L. Klimchitskaya, U. Mohideen, V. M. Mostepanenko, *Advances in the Casimir effect* (Oxford: Oxford University Press, 2009), Vol. 145.
- [135] M. Castagnino, R. Ferraro, "The radiation from moving mirrors: The creation and absorption of particles," Ann. Phys. **154**, 1 (1984).
- [136] W. P. Leemans, B. Nagler, A. J. Gonsalves, C. Toth, K. Nakamura, C. G. R. Geddes, E. Esarey, C. B. Schroeder, S. M. Hooker, "GeV electron beams from a cm-scale accelerator," Nature Phys. 2, 696 (2006)
- [137] R. Schutzhold, G. Plunien, G. Soff, "Trembling cavities in the canonical approach," Phys. Rev. A 57, 2311 (1998) [quant-ph/9709008].
- [138] V. V. Dodonov, "Resonance photon generation in a vibrating cavity," J. Phys. A 31, 9835 (1998) [quant-ph/9810077].
- [139] Ying Wu, K. W. Chan, M.-C. Chu, P. T. Leung, "Radiation modes of a cavity with a resonantly oscillating boundary," Phys. Rev. A 59, 1662 (1999).
- [140] W. R. Walker, "Particle and Energy Creation by Moving Mirrors," Phys. Rev. D 31, 767 (1985).
- [141] R. D. Carlitz, R. S. Willey, "Reflections on moving mirrors," Phys. Rev. D 36, 2327 (1987).
- [142] M. R. R. Good, P. R. Anderson, C. R. Evans, "Time dependence of particle creation from accelerating mirrors," Phys. Rev. D 88, 025023 (2013) [arXiv:1303.6756].
- [143] E. T. Akhmedov, E. N. Lanina, D. A. Trunin, "Quantization in background scalar fields," Phys. Rev. D 101, no. 2, 025005 (2020) [arXiv:1911.06518];
- [144] E. T. Akhmedov, O. Diatlyk, A. G. Semenov, "Out of equilibrium two-dimensional Yukawa theory in a strong scalar wave background," Proc. Steklov Inst. Math. 309, 12 (2020) [arXiv:1909.12805].
- [145] E. T. Akhmedov, O. Diatlyk, "Secularly growing loop corrections in scalar wave background,"
   J. High Energy Phys. 10, (2020) 27 [arXiv:2004.01544].
- [146] A. I. Nikishov, "S matrix in quantum electrodynamics with external field," Teor. Mat. Fiz. 20, 48 (1974).

- [147] N. B. Narozhnyi, A. I. Nikishov, "Solutions of the Klein-Gordon and Dirac equations for a particle in a constant electric field and a plane electromagnetic wave propagating along the field," Teor. Mat. Fiz. 26, 16 (1976).
- [148] M. Bertola, F. Corbetta, U. Moschella, "Massless scalar field in two-dimensional de Sitter universe," Prog. Math. 251, 27 (2007) [math-ph/0609080].
- [149] H. Bateman, Higher transcendental functions. Vol. 2 (New York: MC. Graw-Hill, 1953).
- [150] E. T. Whittaker, G. N. Watson, *A course of modern analysis* (Cambridge, England: Cambridge University Press, 1996).
- [151] S. R. Coleman, E. J. Weinberg, "Radiative Corrections as the Origin of Spontaneous Symmetry Breaking," Phys. Rev. D 7, 1888 (1973); E. J. Weinberg, "Radiative corrections as the origin of spontaneous symmetry breaking," hep-th/0507214.
- [152] J. Zinn-Justin, "Quantum field theory and critical phenomena," Int. Ser. Monogr. Phys. 113, 1 (2002).
- [153] A. P. C. Malbouisson, B. F. Swaiter, N. F. Svaiter, "Analytic regularization of the Yukawa model at finite temperature," J. Math. Phys. 38, 2210 (1997) [hep-th/9611030].
- [154] U. Mosel, Path integrals in field theory: An introduction, (Berlin: Springer, 2004).
- [155] F. W. J. Olver, "Uniform asymptotic expansions for Weber parabolic cylinder functions of large order", J. Research NBS **63B**, no. 2, 131 (1959).
- [156] D. S. F. Crothers, "Asymptotic expansions for parabolic cylinder functions of large order and argument," J. Phys. A: Gen. Phys. Vol. 5 1680 (1977).