ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
НАУКИ ИНСТИТУТ БИОХИМИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ ИМ. Н.М. ЭМАНУЭЛЯ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК (ИБХФ РАН)

На правах рукописи

Давыдов Андрей Семёнович

НЕПЕРТУРБАТИВНЫЕ ЭФФЕКТЫ ПОЛЯРИЗАЦИИ ВАКУУМА В УСЛОВИЯХ КУЛОНОВСКОЙ ЗАКРИТИЧНОСТИ

Специальность 01.04.02 —
«теоретическая физика»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор химических наук, профессор
Кузьмин Владимир Александрович

Москва — 2021

Оглавление

Введение

Проблема критических полей для дираковских фермионов возникла более 70 лет назад, когда в пионерской работе Померанчука и Смородинского [1] было показано, что в случае протяженного ядра с радиусом около $10-12$ фм кулоновская задача сохраняет самосопряженность и при $Z > 137$, при этом электронные уровни дискретного спектра последовательно становятся отрицательными и опускаются до порога нижнего континуума. В частности, нижний электронный $1s$-уровень достигает нижнего континуума при заряде ядра (Z_{cr}) около $170-173$. Непертурбативные эффекты поляризации вакуума при погружении электронных уровней в нижний континуум были принципиально поняты значительно позже, когда в работах Герштейна и Зельдовича, Пипера и Грейнера, Зельдовича и Попова [2—4] и др. в 1969-71 гг. был рассмотрен наиболее известный эффект такого типа, который предсказывал спонтанное рождение электрон-позитронных пар и перестройку вакуума при эффективном заряде атомного ядра $Z > 170-173$. Подробному изложению данного эффекта посвящены монографии [5—7]. Однако эксперименты, проведенные в течение последних 40 лет на тяжелоионном комплексе GSI (Дармштадт) и в Аргоннской национальной лаборатории (США), не позволяют пока сделать однозначное заключение о существовании такого эффекта, по крайней мере в диапазоне $170 < Z < 190$ [7—11]. Одно из возможных обьяснений этого результата состоит в том, что время погружения $1s$-уровня в нижний континуум при столкновении тяжелых ионов в проведенных экспериментах оказывается меньше, чем время жизни возникающего при погружении уровня метастабильного состояния, распад которого приводит к испусканию вакуумных позитронов. В работах [12; 13] даже имела место дискуссия о том, возможно или невозможно рождение пар при $Z > Z_{cr}$. Однако корректный анализ всей проблемы критических зарядов сверхтяжелых атомных ядер (более точно, ядерных квазимолекул, возникающих при сближении тяжелых ионов) возможен только при существенно более детальном изучении процесса погружения электронных уровней с учетом непертурбативных эффектов формирования вакуумных оболочек, соответствующего изменения вакуумной энергии за счет поляризации моря Дирака и возрастания роли магнитных эффектов при $Z \gg Z_{cr}$.

Следует отметить, что исследования по физике тяжелых ионов, проводимые совместно группами Шабаева (СПбГУ), Плюньена (Дармштадт) и др., в основном ограничиваются либо расчетом диаграммных квантово-электродинамических эффектов для $Z < 137$ с учетом следующих поправок по теории возмущений, либо уточнением характеристик (возможного) излучения вакуумных позитронов в диапазоне $170 < Z < 190$ [14—20]. В нашей работе преследуется совершенно иная цель – исследование физических систем, моделирующих эффекты новой физики в тяжелоионных кластерах при $Z \gg Z_{cr}$, которые могут иметь гораздо более серьезные последствия, нежели испускание вакуумных позитронов.

Критические заряды в графене являются предметом активных исследований практически сразу после экспериментального подтверждения существования планарной фазы углерода в 2004 г. [21—24], однако как и в 3+1D, поведение вакуумной (казимировской) энергии системы в области $Z \gg Z_{cr}$ практически не рассматривалось.

Магнитным эффектам поляризации в графене за последнее время также посвящено достаточно много работ [25—32], в которых рассматривались как отдельно магнитные эффекты, так и случай скрещенных кулоновского и магнитного полей. Однако магнитные эффекты ограничивались лишь случаем потенциала типа Ааронова-Бома, при этом кулоновский источник выбирался точечным. В нашей работе основной акцент делается на протяженные кулоновские источники.

Альтернативным подходом в проблеме критических зарядов является использование квазиодномерных систем Дирака-Кулона типа «релятивистского одномерного водородоподобного иона», теоретическому изучению которого уже много лет уделяется большое внимание [33—38], поскольку в таких системах возможно значительное понижение Z_{cr}. Однако реальная степень квазиодномерности таких систем до сих пор детально не исследована.

Необходимо отметить, что с проблемой критических ядерных зарядов непосредственно связано отдельное направление современной теоретической квантовой химии по строению таблицы Менделеева и сверхтяжелых атомов в области больших Z, включая критические и закритические [39; 40]. Наиболее принципиальным открытым вопросом в этом направлении является активно обсуждаемая проблема продолжения таблицы Менделеева за $Z > 170 - 173$, поскольку после погружения $1s$-уровня в нижний континуум должна произойти существенная перестройка электронных оболочек, но систематический анализ этого явления возможен только на основе непертурбативных расчетов вакуумных поляризационных эффектов.

В настоящей работе исследуются непертурбативные эффекты поляризации вакуума в условиях кулоновской закритичности ($Z > Z_{cr}$) для модельных 1+1- и 2+1-мерных систем Дирака-Кулона с последующей оценкой эффектов поляризации вакуума в соответствующем 3+1-мерном случае. Отдельно рассматривается случай планарной системы Дирака-Кулона в магнитном поле с аксиальным векторным потенциалом. Такие системы, как было сказано ранее, представляют большой теоретический и экспериментальный интерес сами по себе и воспроизводят почти все свойства реальной 3+1D задачи поляризации вакуума сверхтяжелым ядром (ядерной квазимолекулой), но с рядом вычислительных упрощений, обусловленных меньшим числом вращательных квантовых чисел.

Целью работы является исследование существенно непертурбативных эффектов поляризации вакуума, возникающих при опускании дискретных уровней в нижний континуум в сверхсильных (сверхкритических) кулоновских полях. Для достижения указанной цели были поставлены следующие **задачи**:

1. Разработка непертурбативного метода расчета вакуумной плотности заряда, тока и вакуумной энергии, которые являются основными характеристиками поляризации вакуума.
2. Вычисление вакуумной плотности заряда и вакуумной энергии для 1+1-мерной системы Дирака-Кулона, моделирующей соответствующую 3+1-мерную систему в сильном однородном магнитном поле.
3. Вычисление вакуумной плотности заряда и вакуумной энергии для 2+1-мерной системы Дирака-Кулона. Оценка эффектов поляризации вакуума в соответствующем 3+1-мерном случае.
4. Проверка справедливости предположения о превращении нейтрального вакуума в заряженный в сверхсильных (сверхкритических) кулоновских полях, приводящее к спонтанному излучению вакуумных позитронов при погружении уровней дискретного спектра в нижний континуум вследствие закона сохранения заряда.

5. Исследование влияния магнитного поля с аксиальным векторным потенциалом в 2+1-мерной системе Дирака-Кулона на основные характеристики поляризации вакуума, включая вакуумную плотность тока.

Актуальность работы обусловлена прежде всего тем, что вопрос о критических зарядах атомных ядер имеет принципиальное значение для корректного продолжения таблицы Менделеева в область $Z > 170$ и строения (гипотетических) сверхтяжелых атомов. В настоящее время вопрос о критических зарядах открыт, поскольку эксперименты GSI (Дармштадт) и Аргоннской национальной лаборатории (США) в диапазоне $170 < Z < 190$ не привели к однозначному выводу о статусе закритической области. В связи со строительством новых тяжелоионных ускорительных комплексов FAIR (Дармштадт), NICA (Дубна), EIR& HIAF (Китай) и Фабрики Сверхтяжелых Элементов (SHE, Дубна), и разработки их научных программ становится крайне актуальным существенно более детальное моделирование процесса погружения электронных уровней в нижний континуум с учетом непертурбативных эффектов изменения вакуумной энергии за счет поляризации моря Дирака и возрастания роли вакуумных магнитных эффектов при зарядах кулоновских источников превышающих критическое. Особый интерес такая задача приобретает в связи с наличием 2+1-мерного аналога феномена критического заряда в графене, в котором за счет большой эффективной постоянной тонкой структуры критический заряд оказывается $\mathrm{O}(1)$ в единицах заряда электрона. Поэтому графен предоставляет уникальную возможность для экспериментальной проверки различных теоретических концепций по проблеме критических зарядов в квантовой электродинамике.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Перенормировка через фермионную петлю с двумя внешними линиями оказывается универсальным приемом, который устраняет расходимость теории как в чисто пертурбативном, так и в существенно непертурбативном режимах для вакуумной плотности заряда (и вакуумной плотности тока при наличии магнитного поля) и для вакуумной энергии.
2. В одномерных, двумерных и трехмерных системах Дирака-Кулона в далеко закритической области вакуумная энергия становится быстро убывающей функцией заряда кулоновского источника, достигающей больших отрицательных значений.

3. Подтверждена гипотеза о фазовом переходе нейтрального вакуума в заряженный (который является основным состоянием электрон-позитронного поля в сильных (сверхкритических) электромагнитных полях), приводящем к спонтанному излучению вакуумных позитронов при погружении уровней дискретного спектра в нижний континуум вследствие закона сохранения заряда.
4. В присутствии закритического кулоновского источника в двумерной системе Дирака-Кулона наведённое магнитное поле при определённых значениях параметров внешнего векторного потенциала способно усиливать исходное магнитное поле.

Научная новизна. В ходе исследований на основе оригинальной комбинации аналитических методов, компьютерной алгебры и численных расчетов были разработаны непертурбативные методы расчета вакуумной плотности заряда, тока и вакуумной энергии.

1. Исследовано поведение вакуумной энергии в закритической области для одномерных, двумерных и трехмерных систем Дирака-Кулона. Наиболее значимый результат состоит в том, что в такой системе в далеко закритической области вакуумная энергия становится быстро убывающей функцией заряда кулоновского источника, достигающей больших отрицательных значений.
2. Исследована зависимость эффектов поляризации от обрезания кулоновской асимптотики внешнего поля в 2+1-мерной системе Дирака-Кулона. Впервые показано, что экранировка асимптотики существенно изменяет структуру и свойства первых парциальных каналов с квантовым числом третьей проекции полного момента равным $\pm 1/2$ и $\pm 3/2$.
3. Исследована 2+1-мерная система Дирака-Кулона в присутствии магнитного поля с аксиальным вектор-потенциалом. Показано, что в присутствии закритического кулоновского источника наведённое магнитное поле при определённых значениях параметров внешнего векторного потенциала способно усиливать исходное магнитное поле.
4. Показано, что перенормировка через фермионную петлю с двумя внешними линиями оказывается универсальным приемом, который устраняет расходимость теории как в чисто пертурбативном, так и в существен-

но непертурбативном режимах как для вакуумной плотности заряда, так и для вакуумной энергии.

Научная и практическая значимость. В работе исследованы новые, существенно непертурбативные эффекты поляризации вакуума для систем дираковских фермионов в критических и сверхкритических кулоновских полях и в присутствии магнитных эффектов. Полученные в работе результаты должны внести существенный вклад в развитие науки о критических явлениях в сильных (сверхкритических) полях. Они позволят получить теоретические оценки по достижимости критического заряда и свойствах закритической области в установках по столкновению тяжелых ионов, а также в современных наноматериалах, таких как графен и нанотрубки. Полученные в работе результаты могут не только объяснить существующие экспериментальные данные, но и помочь в проектировании новых экспериментов по поиску ярких эффектов в физике тяжелых ионов, допированном графене и квазиодномерных кулоновских системах.

Степень достоверности работы обеспечивается использованием строгих математических методов и методов квантовой теории поля, подкрепляемых численной проверкой полученных в работе формул. Результаты находятся в соответствии с результатами, полученными другими авторами.

Апробация работы На основе результатов диссертации были сделаны доклады на конференциях:

1. Давыдов А.С. Непертурбативные эффекты поляризации вакуума в одномерных и двумерных сверхкритических системах Дирака-Кулона (Устный). XXV Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2018». Секция «Физика», Москва, Россия, 9-13 апреля 2018.
2. Давыдов А.С., Воронина Ю.С., Свешников К.А. Непертурбативные эффекты поляризации вакуума в одномерных и двумерных сверхкритических системах Дирака-Кулона (Устный). VIII Международная школа-конференция молодых ученых и специалистов «Современные проблемы физики – 2018», Минск, Беларусь, 13-15 июня 2018.
3. Davydov A., Sveshnikov K., Voronina Yu. Nonperturbative Vacuum Polarization Effects in One- and Two-Dimensional Supercritical Dirac-Coulomb Systems (Oral). International School of Nuclear Physics 40th

Course The Strong Interaction: From Quarks and Gluons to Nuclei and Stars, Erice, Sicily, Italy, 16-24 September 2018.

4. Краснов А.А., Давыдов А.С., Свешников К.А. Магнитные эффекты поляризации вакуума в планарных системах в закритических полях (Устный). Молодежная конференция по теоретической и экспериментальной физике (МКТЭФ-2018), НИЦ «Курчатовский институт» – ИТЭФ, Москва, Россия, 26-29 ноября 2018.
5. Давыдов А.С., Свешников К.А., Воронина Ю.С., Грашин П.А. Вакуумная плотность заряда и вакуумная энергия в одномерных и двумерных сверхкритических системах Дирака-Кулона (Устный). Молодежная конференция по теоретической и экспериментальной физике (МКТЭФ-2018), НИЦ «Курчатовский институт» – ИТЭФ, Москва, Россия, 26-29 ноября 2018.

Результаты работы также были доложены 10 февраля 2018 г. на семинаре Лаборатории физики высоких энергий им. В.И. Векслера и А.М. Балдина Объединенного института ядерных исследований (Дубна).

Личный вклад. Все результаты работы получены автором лично или при его непосредственном участии. Постановка задач исследований и интерпретация результатов выполнены совместно с соавторами опубликованных работ.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 10 статьях в рецензируемых изданиях, индексируемых в базах Web of Science, Scopus и RSCI:

1. Davydov A., Sveshnikov K., Voronina Y. Vacuum energy of one-dimensional supercritical Dirac–Coulomb system // International Journal of Modern Physics A. — 2017. — Vol. 32, no. 11. — P. 1750054.
2. Воронина Ю. С., Давыдов А. С., Свешников К. А. Вакуумные эффекты для одномерного «атома водорода» при $Z > Z_{cr}$ // Теоретическая и математическая физика. — 2017. — Т. 193, № 2. — С. 276-308.
3. Воронина Ю., Давыдов А., Свешников К. Непертурбативные эффекты поляризации вакуума для квазиодномерной системы Дирака-Кулона при $Z > Z_{cr}$ // Письма в журнал «Физика элементарных частиц и атомного ядра». — 2017. — Т. 14, № 5(210). — С. 464–486.
4. Davydov A., Sveshnikov K., Voronina Y. Nonperturbative vacuum polarization effects in two-dimensional supercritical Dirac–Coulomb system

I. Vacuum charge density // International Journal of Modern Physics A. — 2018. — Vol. 33, no. 01. — P. 1850004.

5. Davydov A., Sveshnikov K., Voronina Y. Nonperturbative vacuum polarization effects in two-dimensional supercritical Dirac–Coulomb system II. Vacuum energy // International Journal of Modern Physics A. — 2018. — Vol. 33, no. 01. — P. 1850005.
6. Voronina Y., Sveshnikov K., Grashin P., Davydov A. Essentially non-perturbative and peculiar polarization effects in planar QED with strong coupling // Physica E: Low-Dimensional Systems and Nanostructures. — 2019 — Vol. 106. — P. 298-311.
7. Voronina Y., Sveshnikov K., Grashin P., Davydov A. Casimir (vacuum) energy in planar QED with strong coupling // Physica E: Low-Dimensional Systems and Nanostructures. — 2019. — Vol. 109. — P. 209-224 .
8. Свешников К. А., Воронина Ю. С., Давыдов А. С., Грашин П.А. Существенно непертурбативные эффекты поляризации вакуума в двумерной системе Дирака-Кулона при $Z > Z_{cr}$. Вакуумная плотность заряда // Теоретическая и математическая физика. — 2019. — Т. 198, № 3. — С. 381-417.
9. Свешников К. А., Воронина Ю. С., Давыдов А. С., Грашин П.А. Существенно непертурбативные эффекты поляризации вакуума в двумерной системе Дирака-Кулона при $Z > Z_{cr}$. Энергия поляризации вакуума // Теоретическая и математическая физика. — 2019. — Т. 199, № 1. — С. 69-103.
10. Давыдов А. С., Краснов А. А., Кузьмин В. А. Вакуумные плотности заряда и тока в закритической двумерной системе Дирака-Кулона в магнитном поле с аксиальным векторным потенциалом. Теоретическая и математическая физика. — 2021. — Т. 208, № 1. — С. 122-144.

А также в тезисах докладов:

1. Давыдов А.С. Непертурбативные эффекты поляризации вакуума в одномерных и двумерных сверхкритических системах Дирака-Кулона. В сборнике XXV Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых по фундаментальным наукам «Ломоносов-2018». Секция «Физика», место издания Физический факультет МГУ, тезисы, с. 157-158.

2. Давыдов А.С., Воронина Ю.С., Свешников К.А. Непертурбативные эффекты поляризации вакуума в одномерных и двумерных сверхкритических системах Дирака-Кулона. В сборнике VIII Международная школа-конференция молодых ученых и специалистов «Современные проблемы физики», место издания Институт физики НАН Беларуси Минск, тезисы, с. 25-30.
3. Краснов А.А., Давыдов А.С., Свешников К.А. Магнитные эффекты поляризации вакуума в планарных системах в закритических полях. Сборник аннотаций докладов Молодежной конференции по теоретической и экспериментальной физике МКТЭФ-2018, место издания НИЦ «Курчатовский институт» – ИТЭФ, Москва, тезисы, с. 61.
4. Давыдов А.С., Свешников К.А., Воронина Ю.С., Грашин П.А. Вакуумная плотность заряда и вакуумная энергия в одномерных и двумерных сверхкритических системах Дирака-Кулона. Сборник аннотаций докладов Молодежной конференции по теоретической и экспериментальной физике МКТЭФ-2018, место издания НИЦ «Курчатовский институт» – ИТЭФ, Москва, тезисы, с. 35.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и трех приложений. Полный объем диссертации составляет 200 страниц с 42 рисунками. Список литературы содержит 105 наименований.

Глава 1. Вакуумная плотность заряда и вакуумная энергия в одномерных (1+1D) сверхкритических системах Дирака-Кулона

1.1 Введение к главе 1

Начиная с пионерских работ Лоудона и Эллиота [41], [42], исследование квазиодномерных атомных систем с кулоновским взаимодействием вызывает большой интерес в связи с постоянно растущим числом физических приложений [43—55]. Такие системы являются начальным приближением для целого ряда двух- и трехмерных задач, в частности, при описании электрона, «парящего» над сверхтекучими жидкостями [43—45], при изучении порога ионизации атомов интенсивным лазерным излучением [46—49], при наличии сильных постоянных магнитных полей [42], [50—55]. Особый интерес вызывают релятивистские эффекты в водородоподобном атоме, находящемся в сверхсильном однородном магнитном поле. В частности, в работах [33—38; 56; 57] были определены условия на величину магнитного поля, при которой эффективная динамика такого атома становится квазиодномерной, а основное состояние достигает нижнего континуума. При этом в [36—38] показано, что первый критический заряд $Z_{cr,1}$ может быть меньше чем $\simeq 170$ при отсутствии поля.

Отдельный интерес вызывают непертурбативные эффекты поляризации вакуума, обусловленные опусканием уровней дискретного спектра в нижний континуум, в сверхкритических статических или адиабатически медленно меняющихся кулоновских полях. Тогда как в 3+1D таким эффектам квантовой электродинамики (КЭД) посвящено большое число работ (см. [5; 11; 12; 58; 59] и цитируемую в них литературу), их 1+1D аналог практически не исследовался. В этой главе рассматриваются существенно непертурбативные эффекты поляризации вакуума в 1+1D для сверхкритических кулоновских источников с $Z > Z_{cr,1}$. При этом главное внимание уделяется энергетической характеристике поляризации вакуума (вакуумной энергии) $\mathcal{E}_{\mathrm{VP}}$. Хотя большинство работ использует в качестве основной характеристики поляризации вакуумную плотность заряда ρ_{VP}, через которую, в частности, вычисляется вклад поляризации в лэмбовский сдвиг, $\mathcal{E}_{\mathrm{VP}}$ является не менее информативной и во многих отношениях дополнительной к ρ_{VP}. Вакуумная энергия никак не влияет на положение электронных уровней и тем самым на величину критических зарядов, но в то же время как компонента общей электростатической энергии всей конфигурации зарядов, создающей сверхкритическое кулоновское поле, имеет существенное значение для достижения закритической области и ее свойств. Более того, основной непертурбативный эффект, который возникает в вакуумной поляризации при $Z > Z_{cr,1}$ за счет опускания уровней в нижний континуум, на поведении вакуумной энергии как функции Z проявляется по сравнению с ρ_{VP} не менее явно, указывая на принципиальную возможность изменения самого статуса закритической области.

В то же время, вычисление $\mathcal{E}_{\mathrm{VP}}$ представляет собой отдельную и нетривиальную задачу, поскольку ее восстановление непосредственно через ρ_{VP} возможно только в теории возмущений. Общее соотношение между $\mathcal{E}_{\mathrm{VP}}$ и ρ_{VP} задается в рамках швингеровского подхода: если рассмотреть инфинитезимальную вариацию внешнего кулоновского поля $\delta A_0(x)$, то возникающее при этом изменение вакуумной энергии следующим образом связано с вакуумной плотностью

$$\delta\mathcal{E}_{\mathrm{VP}} = \int dx\; \rho_{\mathrm{VP}}(x)\delta A_0(x) + \delta\mathcal{E}_N \;, \tag{1.1}$$

где $\mathcal{E}_N$ – функционал, отвечающий за скачки в вакуумной энергии при переходе дискретных уровней в нижний континуум (подробнее см. раздел 1.4.1). Поэтому для восстановления $\mathcal{E}_{\mathrm{VP}}$ по ρ_{VP} в общем виде необходимо иметь ρ_{VP} как явный функционал от внешнего поля A_0, и уметь решать нелинейные функциональные уравнения. Обе опции в настоящее время отсутствуют. Более того, даже в теории возмущений, когда вакуумная плотность представляется в виде ряда по (нечетным) степеням внешнего поля

$$\rho_{\mathrm{VP}}(x) = \rho^{(1)}_{\mathrm{VP}} + \rho^{(3)}_{\mathrm{VP}} + \rho^{(5)}_{\mathrm{VP}} + \ldots \;, \tag{1.2}$$

где

$$\rho^{(i)}_{\mathrm{VP}}(x) = \int dx_1 \ldots dx_{\mathrm{I}}\; c_i(x, x_1, \ldots x_i)\; A_0(x_1) \ldots A_0(x_i) \;, \tag{1.3}$$

а коэффициентные функции $c_i(x, x_1, \ldots x_i)$ симметричны по всем аргументам, вакуумная энергия представляется в виде следующего (четного) функционала от внешнего поля

$$\mathcal{E}_{\rm VP} = \int dx \ \left(\frac{1}{2}\rho^{(1)}_{\rm VP}(x) + \frac{1}{4}\rho^{(3)}_{\rm VP}(x) + \frac{1}{6}\rho^{(5)}_{\rm VP}(x) + \dots\right) A_0(x) \ , \tag{1.4}$$

который содержит свертки $A_0(x)$ с $\rho^{(i)}_{\rm VP}(x)$, а не с полной плотностью $\rho_{\rm VP}(x)$. Поэтому наличие $\rho_{\rm VP}(x)$ в явном виде еще не означает автоматическое восстановление вакуумной энергии, наоборот, единственную опцию предоставляет пертурбативное решение (1.4), для которого требуется знание не полной плотности $\rho_{\rm VP}(x)$, а его разложения по степеням внешнего поля.

В этой главе для модельной одномерной задачи Дирака-Кулона (ДК) с $Z > Z_{cr,1}$ будет рассмотрено вычисление и основные непертурбативные свойства как вакуумной плотности $\rho_{\rm VP}(x)$, так и вакуумной энергии $\mathcal{E}_{\rm VP}$. Такая задача имеет самостоятельное значение как для атома в сильном однородном магнитном поле [33—38; 56; 57], так и для моделирования существенно непертурбативных эффектов поляризации вакуума в сверхкритических кулоновских полях при $Z > Z_{cr,1}$ для большего числа пространственных измерений. Следует, однако, отметить, что если общий подход к вычислению вакуумных эффектов и поведение $\rho_{\rm VP}(x)$ в закритической области для различного числа пространственных измерений действительно имеют много общего, то $\mathcal{E}_{\rm VP}$ для 1+1D в закритической области имеет целый ряд специфических особенностей, обусловленных одномерностью задачи. В частности, в 1+1D доминантным эффектом в поведении $\mathcal{E}_{\rm VP}$ в закритической области оказывается вклад от ультрафиолетовой (УФ) перенормировки с поправкой за счет непертурбативных эффектов, а не наоборот, как в 2+1D и 3+1D.

По аналогии с большим числом пространственных измерений рассматриваются две системы Дирака-Кулона с внешним потенциалом следующих типов:

I. Кулоновский потенциал с гладким обрезанием на масштабе $a > 0$

$$V_{\rm I}(x) = -\frac{Z\alpha}{|x| + a} \ . \tag{1.5}$$

II. Проекция трехмерного кулоновского потенциала сферической оболочки радиусом R_0 на ось x

$$V_{\rm II}(x) = -Z\alpha \left[\frac{1}{R_0}\theta(R_0 - |x|) + \frac{1}{|x|}\theta(|x| - R_0)\right] \ , \tag{1.6}$$

где $\theta(x)$ – функция Хевисайда. Специально отметим, что мы не рассматриваем вопрос о природе и собственной энергии самих кулоновских источников, порождающих потенциалы $V_{\mathrm{I,II}}$. Легко видеть, что в рамках чисто одномерной задачи такие источники не имели бы даже статуса локализованных, поскольку соответствующая плотность заряда убывала бы при $|x| \to \infty$ всего лишь как $\sim |x|^{-3}$. Фактическим источником в квазиодномерных задачах рассматриваемого типа является атомное ядро или кластер из тяжелых ионов, т.е. заведомо сложный трехмерный обьект, а эффективная одномерная задача Дирака-Кулона возникает за счет дополнительных условий типа сильного магнитного поля. Таким образом, первичными в настоящей работе являются именно внешние потенциалы $V_{\mathrm{I,II}}$, и исследуются только обусловленные ими эффекты поляризации вакуума, а не полевая энергия тех одномерных источников, которым формально соответствовали бы потенциалы $V_{\mathrm{I,II}}$ в рамках чисто одномерного подхода. Иначе и потенциалы следовало бы выбирать не кулоновскими, а типа $Z\alpha|x|/2$, на что уже указывалось в [35].

Как и в других работах по поляризации вакуума кулоновским полем [60—63], вклад процессов с обменом виртуальными фотонами опускается (и все вакуумные диаграммы – однопетлевые). Далее везде, если не оговорено особо, используется релятивистская система единиц $\hbar = m = c = 1$. При этом электромагнитная константа связи $\alpha = e^2$ также становится безразмерной, что существенно упрощает все дальнейшие выкладки, а конкретные расчеты, иллюстрирующие общие выводы, будут проводиться для $\alpha = 1/137.036$.

1.2 Теория возмущений для поляризации вакуума в 1+1D

Поскольку для вычисления вакуумных средних от фермионного тока и гамильтониана потребуется УФ перенормировка фермионной петли, напомним кратко основные свойства единственной логарифмически расходящейся диаграммы поляризации вакуума в 1+1D.

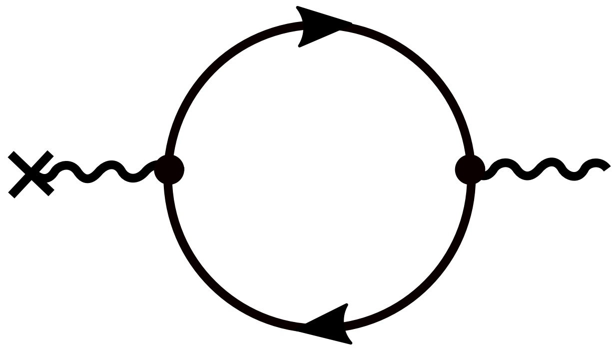


Рисунок 1.1 — Логарифмически расходящаяся диаграмма поляризации вакуума в 1+1D.

Выражение для поляризационного оператора $\Pi_{\mu\nu}(q)$, соответствующего диаграмме Фейнмана на рисунке 1.1, имеет вид

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = i\,4\pi\alpha \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{\mathrm{Tr}\left[\gamma_\mu \left(\hat{k}+m\right)\gamma_\nu \left(\hat{k}-\hat{q}+m\right)\right]}{(k^2-m^2+i\varepsilon)\left[(k-q)^2-m^2+i\varepsilon\right]} \,. \tag{1.7}$$

Используя регуляризацию Паули-Вилларса [7], в рамках которой для устранения логарифмической расходимости в (1.7) требуется всего одна вспомогательная константа C_1, удовлетворяющая условию $C_0 + C_1 = 0$, и масса $M_1 \to \infty$, получаем

$$\begin{aligned} &\Pi^R_{\mu\nu}(q) = \left(q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu}q^2\right)\Pi_R(q^2), \\ &\Pi_R(q^2) = \frac{4\alpha}{m^2}\int\limits_0^1 d\beta\,\beta(1-\beta)\left[1-\beta(1-\beta)\frac{q^2}{m^2-i\varepsilon}\right]^{-1} \,. \end{aligned} \tag{1.8}$$

В частности, при $q^2 = -q_x^2$

$$\Pi_R(-q_x^2) = \frac{4\alpha}{q_x^2}\left(1 - \frac{4m^2}{q_x\sqrt{4m^2+q_x^2}}\mathrm{arsh}\left(\frac{q_x}{2m}\right)\right) \,. \tag{1.9}$$

В первом порядке теории возмущений (ТВ) поляризации вакуума соответствует энергия

$$\mathcal{E}^{(1)}_{\mathrm{VP}} = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx\,\rho^{(1)}_{\mathrm{VP}}(x) A_0^{\mathrm{ext}}(x), \tag{1.10}$$

где A_0^{ext} – потенциал внешнего источника, который предполагается статическим, $\rho_{\mathrm{VP}}^{(1)}$ – вакуумная плотность заряда, которая связана с поляризационным потенциалом (Юлинга) через уравнение Пуассона

$$\rho_{\mathrm{VP}}^{(1)}(x) = -\frac{1}{4\pi}\frac{d^2}{dx^2}\,A_{\mathrm{VP},0}^{(1)}(x)\ . \tag{1.11}$$

Потенциал Юлинга $A_{\mathrm{VP},0}^{(1)}$ находится через поляризационную функцию Π_R и фурье-образ внешнего потенциала $\widetilde{A}_0$ [7]

$$A_{\mathrm{VP},0}^{(1)}(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dq_x\, \mathrm{e}^{iq_x x}\Pi_R(-q_x^2)\widetilde{A}_0(q_x)\ , \quad \widetilde{A}_0(q_x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy\, \mathrm{e}^{-iq_x y}A_0^{\mathrm{ext}}(y)\ . \tag{1.12}$$

Из (1.11) и (1.12) с учетом (1.9) для внешних потенциалов (1.5) и (1.6) находим следующие выражения для вакуумной плотности заряда (здесь и далее, если не оговорено особо, $q = q_x$ и $m = 1$):

$$\rho_{\mathrm{VP,I}}^{(1)}(x) = Z\alpha|e|\,\frac{2}{\pi^2}\int\limits_0^{+\infty} dq\,\cos(qx)\left[1 - \frac{2}{q\sqrt{1+(q/2)^2}}\,\mathrm{arsh}\left(\frac{q}{2}\right)\right]\times \\ \times\left[\sin(qa)\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{Si}(qa)\right) - \cos(qa)\mathrm{Ci}(qa)\right]\ , \tag{1.13а}$$

$$\rho_{\mathrm{VP,II}}^{(1)}(x) = Z\alpha|e|\,\frac{2}{\pi^2}\int\limits_0^{+\infty} dq\,\cos(qx)\left[1 - \frac{2}{q\sqrt{1+(q/2)^2}}\,\mathrm{arsh}\left(\frac{q}{2}\right)\right]\times \\ \times\left[\frac{\sin(qR_0)}{qR_0} - \mathrm{Ci}(qR_0)\right], \tag{1.13б}$$

где $\mathrm{Si}(x)$ и $\mathrm{Ci}(x)$ – интегральные синус и косинус. Далее из (1.10) получаем пертурбативный ответ для вакуумной энергии

$$\mathcal{E}_{\mathrm{VP,I}}^{(1)} = (Z\alpha)^2\frac{2}{\pi^2}\int\limits_0^{+\infty} dq\,\left[\sin(qa)\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{Si}(qa)\right) - \cos(qa)\mathrm{Ci}(qa)\right]^2\times \\ \times\left[1 - \frac{2}{q\sqrt{1+(q/2)^2}}\mathrm{arsh}\left(\frac{q}{2}\right)\right], \tag{1.14а}$$

$$\mathcal{E}^{(1)}_{\mathrm{VP,II}} = (Z\alpha)^2 \frac{2}{\pi^2} \int\limits_0^{+\infty} dq \left[\frac{\sin(qR_0)}{qR_0} - \mathrm{Ci}(qR_0)\right]^2 \left[1 - \frac{2}{q\sqrt{1+(q/2)^2}} \mathrm{arsh}\left(\frac{q}{2}\right)\right] . \tag{1.14б}$$

Из (1.13) легко проверяется, что интегральный индуцированный заряд в обоих случаях тождественно равен нулю

$$Q^{(1)}_{\mathrm{VP}} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx\ \rho^{(1)}_{\mathrm{VP}}(x) = 0\ . \tag{1.15}$$

И хотя в данном случае соотношение (1.15) является прямым следствием перенормировочного условия $\Pi_R(q^2) \sim \gamma q^2$ при $q \to 0$, на самом деле его следует рассматривать как дополнительный критерий правильности пертурбативных вычислений, поскольку при равномерно убывающем на пространственной бесконечности внешнем поле, без специальных граничных условий или нетривиальной топологии полевого многообразия, следует ожидать, что в докритической области при $Z < Z_{cr,1}$ интегральный вакуумный заряд будет нулевым, поляризация вакуума может только искажать его пространственное распределение [7], [64]. Индуцированный заряд может оказаться ненулевым, если внешнее поле будет иметь на бесконечности ненулевую асимптотику, как в работе [65], а в нашей задаче индуцированный заряд вакуума становится ненулевым при $Z > Z_{cr,1}$ за счет непертурбативных эффектов, обусловленных опусканием дискретных уровней в нижний континуум, [5; 11; 58; 59], и далее мы покажем, как последнее обстоятельство проявляется на поведении вакуумной энергии в закритической области.

1.3 Непертурбативная вакуумная плотность заряда для 1+1D

1.3.1 Теоретическая часть для непертурбативной вакуумной плотности заряда в 1+1D. Формализм Вихманна-Кролла в 1+1D

Теперь рассмотрим наиболее общий непертурбативный подход к вычислению вакуумной плотности $\rho_{\mathrm{VP}}(x)$, основанный на методе Вихманна-Кролла (ВК) [60—63] (см. также [64] и цитируемую в них литературу). Отправной точкой является вакуумное среднее плотности заряда, соответствующее С-нечетному оператору фермионного тока $j_\mu(x) = e[\bar\psi(x), \gamma_\mu \psi(x)]/2$:

$$\begin{aligned}\rho_{\mathrm{VP}}(x) &= \langle j_0(x)\rangle_{vac} = i|e|\mathrm{Tr}\,[S_F(x,x')\gamma_0]|_{x\to x'} = \\ &= -\frac{|e|}{2}\left(\sum_{\epsilon_n<\epsilon_F}\psi_n(x)^\dagger\psi_n(x) - \sum_{\epsilon_n\geqslant\epsilon_F}\psi_n(x)^\dagger\psi_n(x)\right)\,,\end{aligned} \tag{1.16}$$

где ϵ_F – энергия Ферми ($\epsilon_F = -1$), а ϵ_n и $\psi_n(x)$ – собственные значения и собственные функции соответствующей спектральной задачи Дирака-Кулона.

Основное содержание метода ВК состоит в наблюдении, что вакуумная плотность заряда (1.16) может быть выражена через след функции Грина спектральной задачи ДК. В одномерном случае функция Грина удовлетворяет уравнению

$$(-i\,\alpha\,\partial_x + V(x) + \beta - \epsilon)\ \mathrm{G}(x,x';\epsilon) = \delta(x-x'), \tag{1.17}$$

где для максимально простого вида операции пространственной инверсии матрицы Дирака выбираются в виде $\alpha = \sigma_2$, $\beta = \sigma_3$.

Формальное решение (1.17) записывается в виде

$$\mathrm{G}(x,x';\epsilon) = \sum_n \frac{\psi_n(x)\psi_n(x')^\dagger}{\epsilon_n - \epsilon}\,. \tag{1.18}$$

Согласно [60], [61] вакуумная плотность заряда выражается через интегралы по контурам на первом листе римановой поверхности по комплексной

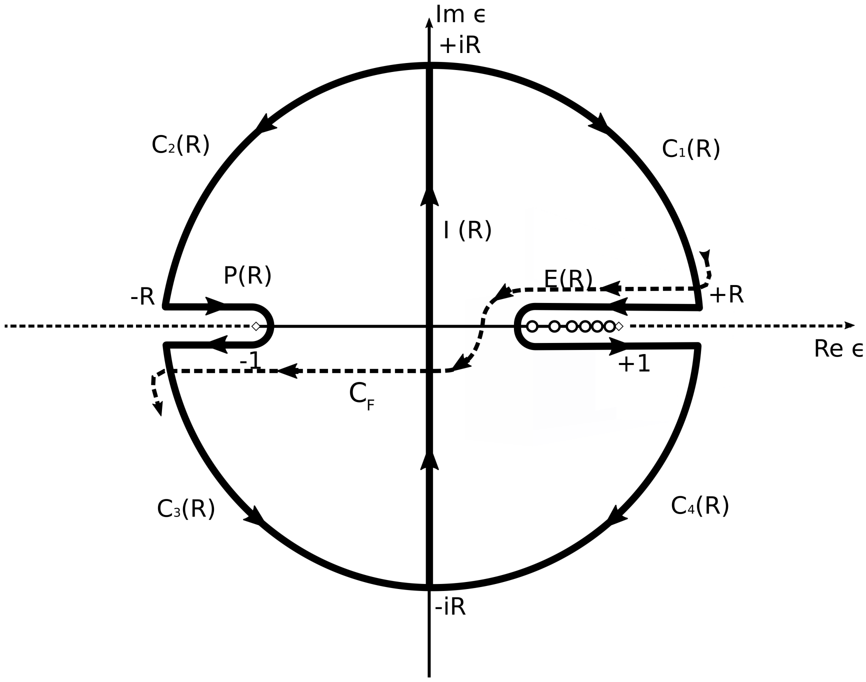


Рисунок 1.2 — Специальные контуры на первом листе римановой энергетической поверхности, используемые для представления вакуумной плотности заряда в виде контурных интегралов. Направление обхода контуров находится в соответствии с (1.18).

энергии (рис. 1.2)

$$\rho_{\mathrm{VP}}(x) = -\frac{|e|}{4\pi i}\lim_{R\to\infty}\left(\int\limits_{P(R)} + \int\limits_{E(R)}\right) d\epsilon\, \mathrm{Tr}\,\mathrm{G}(x,x;\epsilon). \tag{1.19}$$

Альтернативный способ представления $\rho_{\mathrm{VP}}(x)$ через контурный интеграл состоит в использовании фейнмановского контура C_F, который обходит левый разрез снизу, а правый и все дискретные уровни – сверху.

Далее след функции Грина представляется в виде

$$\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}(x,x;\epsilon) = \frac{1}{J(\epsilon)}\psi_L(x)^{\mathrm{T}}\psi_R(x), \tag{1.20}$$

где $\psi_L(x)$ и $\psi_R(x)$ – регулярные соответственно на $-\infty$ и $+\infty$ решения уравнения ДК, $J(\epsilon)$ – их вронскиан

$$J(\epsilon) = \psi_{L,2}(x)\psi_{R,1}(x) - \psi_{L,1}(x)\psi_{R,2}(x). \tag{1.21}$$

Определенный таким образом $\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}$ имеет нужную нормировку. Следует отметить, что $J(\epsilon)$ фактически является функцией Йоста задачи ДК: вещественные нули $J(\epsilon)$ располагаются на интервале $-1 \leqslant \epsilon_n < 1$ и являются дискретными уровнями энергии, а комплексные лежат на втором листе римановой энергетической поверхности, имеют отрицательную мнимую часть волнового числа $k = \sqrt{\epsilon^2 - 1}$ и при $\mathrm{Re}\, k > 0$ соответствуют упругим резонансам.

Построим теперь $\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}$ для внешних потенциалов I и II. В общем виде спектральная задача ДК имеет вид системы

$$\begin{cases} \varphi'(x) = [\epsilon + 1 - V(x)]\, \chi(x) \, , \\ \chi'(x) = -\, [\epsilon - 1 - V(x)]\, \varphi(x) \, , \end{cases} \tag{1.22}$$

где $\varphi(x)$, $\chi(x)$ – верхняя и нижняя компоненты дираковского спинора. Для модели I при $x > 0$ линейно независимые решения (1.22) выбираем в виде [66]

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \Phi_1(x;\epsilon) \\ \Phi_2(x;\epsilon) \end{pmatrix}, \quad \Psi(x) = \begin{pmatrix} \Psi_1(x;\epsilon) \\ \Psi_2(x;\epsilon) \end{pmatrix} \, , \tag{1.23}$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_1(x;\epsilon) &= \sqrt{1+\epsilon}\, \mathrm{e}^{-\gamma z} (2\gamma z)^{iQ} \left(\Phi(b,c,2\gamma z) + (i\gamma - \epsilon)\Phi(b+1,c,2\gamma z)\right) \, , \\ \Phi_2(x;\epsilon) &= \sqrt{1-\epsilon}\, \mathrm{e}^{-\gamma z} (2\gamma z)^{iQ} \left(-\Phi(b,c,2\gamma z) + (i\gamma - \epsilon)\Phi(b+1,c,2\gamma z)\right) \, , \\ \Psi_1(x;\epsilon) &= \sqrt{1+\epsilon}\, \mathrm{e}^{-\gamma z} (2\gamma z)^{iQ} \left(\Psi(b,c,2\gamma z) + \frac{Q}{\gamma}\Psi(b+1,c,2\gamma z)\right) \, , \\ \Psi_2(x;\epsilon) &= \sqrt{1-\epsilon}\, \mathrm{e}^{-\gamma z} (2\gamma z)^{iQ} \left(-\Psi(b,c,2\gamma z) + \frac{Q}{\gamma}\Psi(b+1,c,2\gamma z)\right) \, , \end{aligned} \tag{1.24}$$

а $\Phi(b,c,x)$, $\Psi(b,c,x)$ – функции Куммера и Трикоми [67],

$$\gamma = \sqrt{1-\epsilon^2}\, , \quad Q = Z\alpha \, , \quad b = iQ - \epsilon Q/\gamma \, , \quad c = 1 + 2iQ \, , \quad z = x + a \, . \tag{1.25}$$

Выбор фундаментальной пары решений Φ и Ψ в данном случае диктуется их взаимодополнительными асимптотиками при $z \to 0$ и $z \to \infty$.

Далее $\psi_L(x)$ и $\psi_R(x)$ строятся как линейные комбинации решений (1.23), удовлетворяющие условиям регулярности на $-\infty$ и $+\infty$ соответственно, и связанные между собой операцией пространственной инверсии $\psi_L(x) = \beta\psi_R(-x)$

(последнее есть прямое следствие четности задачи с потенциалом (1.5)):

$$\begin{aligned}\psi_R(x) &= \theta(-x)\beta\left[A\,\Phi(-x) + B\,\Psi(-x)\right] + \theta(x)\Psi(x),\\ \psi_L(x) &= \theta(-x)(\beta\Psi)(-x) + \theta(x)\left[A\,\Phi(x) + B\,\Psi(x)\right]\ .\end{aligned} \tag{1.26}$$

В результате след функции Грина и тем самым вакуумная плотность заряда будут автоматически четными функциями от x, что соответствует очевидным физическим требованиям к $\rho_{\mathrm{VP}}(x)$ в данном случае. Отметим также, что из (1.23–1.26) легко видеть, что как ψ_L, ψ_R, так и вронскиан и тем самым $\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}$, рассматриваемые как функции волнового числа $k = \sqrt{\epsilon^2 - 1}$, обладают симметрией отражения относительно мнимой оси $f^*(k) = f(-k^*)$.

Коэффициенты A и B определяются из условия непрерывности при $x = 0$

$$A = -2\,\frac{\Psi_1(0;\epsilon)\Psi_2(0;\epsilon)}{[\Phi(x),\Psi(x)]_0}\ , \quad B = \frac{\Phi_1(0;\epsilon)\Psi_2(0;\epsilon) + \Phi_2(0;\epsilon)\Psi_1(0;\epsilon)}{[\Phi(x),\Psi(x)]_0}, \tag{1.27}$$

$$\Big([f(x),g(x)]_a = f_2(a)g_1(a) - f_1(a)g_2(a)\Big).$$

а вронскиан $J(\epsilon)$, входящий в $\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}$, будет равен

$$J(\epsilon) = [\psi_L(x),\psi_R(x)] = -2\,\Psi_1(0;\epsilon)\,\Psi_2(0;\epsilon). \tag{1.28}$$

Из (1.23–1.28) окончательное выражение для следа функции Грина в модели I для $x \geqslant 0$ примет следующий вид:

$$\mathrm{Tr}\,\mathrm{G_I}(x,x;\epsilon) = \frac{1}{[\Phi(x),\Psi(x)]}\left(\Phi(x)^{\mathrm{T}}\Psi(x) - \frac{1}{2}\left(\frac{\Phi_1(0;\epsilon)}{\Psi_1(0;\epsilon)} + \frac{\Phi_2(0;\epsilon)}{\Psi_2(0;\epsilon)}\right)\Psi(x)^{\mathrm{T}}\Psi(x)\right). \tag{1.29}$$

При этом по построению $\mathrm{Tr}\,\mathrm{G_I}(x,x;\epsilon) = \mathrm{Tr}\,\mathrm{G_I}(-x,-x;\epsilon)$, и $\mathrm{Tr}\,\mathrm{G_I}$ как функция волнового числа обладает симметрией отражения $f^*(k) = f(-k^*)$.

Для потенциала (1.6) фундаментальную пару решений (1.22) в области $|x| < R_0$ выбираем в виде

$$Y(x) = \begin{pmatrix}\sqrt{\epsilon + V_0 + 1}\,\cos(\xi\,x)\\ -\sqrt{\epsilon + V_0 - 1}\,\sin(\xi\,x)\end{pmatrix}\ , \quad W(x) = \begin{pmatrix}\sqrt{\epsilon + V_0 + 1}\,\sin(\xi\,x)\\ \sqrt{\epsilon + V_0 - 1}\,\cos(\xi\,x)\end{pmatrix}\ , \tag{1.30}$$

где $\xi = \sqrt{(\epsilon + V_0)^2 - 1}$, $V_0 = Q/R_0$, а решения при $x > R_0$ имеют вид (1.23–1.25) с заменой $z \to x$.

Действуя далее по аналогии с I,

$$\begin{aligned}
&\psi_R(x) = \theta(-x-R_0)\beta\left[C\Phi(-x)+D\Psi(-x)\right] + \theta(R_0-|x|)\left[AY(x)-BW(x)\right]+\\
&+\theta(x-R_0)\Psi(x)\ ,\\
&\psi_L(x) = \theta(-x-R_0)\beta\Psi(-x) + \theta(R_0-|x|)\left[AY(x)+BW(x)\right]+\\
&+\theta(x-R_0)\left[C\Phi(x)+D\Psi(x)\right]\ ,
\end{aligned} \tag{1.31}$$

где

$$\begin{aligned}
&A = \frac{[\Psi(x),W(x)]_{R_0}}{[Y(x),W(x)]_{R_0}}\ , \quad B = \frac{[Y(x),\Psi(x)]_{R_0}}{[Y(x),W(x)]_{R_0}}\ ,\\
&C = -2\frac{[Y(x),\Psi(x)]_{R_0}[W(x),\Psi(x)]_{R_0}}{[Y(x),W(x)]_{R_0}[\Phi(x),\Psi(x)]_{R_0}}\ ,\\
&D = \frac{[Y(x),\Phi(x)]_{R_0}[W(x),\Psi(x)]_{R_0} + [Y(x),\Psi(x)]_{R_0}[W(x),\Phi(x)]_{R_0}}{[Y(x),W(x)]_{R_0}[\Phi(x),\Psi(x)]_{R_0}}\ ,
\end{aligned} \tag{1.32}$$

при этом $[Y(x),W(x)] = -\xi$, а вронскиан $J(\epsilon)$ будет равен

$$J(\epsilon) = -2\,\frac{[Y(x),\Psi(x)]_{R_0}[W(x),\Psi(x)]_{R_0}}{[Y(x),W(x)]}\ . \tag{1.33}$$

Из (1.30–1.33) для следа функции Грина в модели II получим

$$\mathrm{Tr}\,\mathrm{G_{II}}(x,x;\epsilon) = \begin{cases}
\dfrac{1}{[\Phi(x),\Psi(x)]}\Big[\Phi(x)^{\mathrm{T}}\Psi(x)-\\
-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{[Y(x),\Phi(x)]_{R_0}}{[Y(x),\Psi(x)]_{R_0}}+\dfrac{[W(x),\Phi(x)]_{R_0}}{[W(x),\Psi(x)]_{R_0}}\right)\Psi(x)^{\mathrm{T}}\Psi(x)\Big]\ ,\\
x > R_0\ ,\\
-\dfrac{1}{2[Y(x),W(x)]}\left[\dfrac{[W(x),\Psi(x)]_{R_0}}{[Y(x),\Psi(x)]_{R_0}}Y(x)^{\mathrm{T}}Y(x)-\right.\\
\left.-\dfrac{[Y(x),\Psi(x)]_{R_0}}{[W(x),\Psi(x)]_{R_0}}W(x)^{\mathrm{T}}W(x)\right]\ ,\\
|x| \leqslant R_0\ .
\end{cases} \tag{1.34}$$

При этом по построению $\mathrm{Tr}\,\mathrm{G_{II}}(x,x;\epsilon) = \mathrm{Tr}\,\mathrm{G_{II}}(-x,-x;\epsilon)$, и $\mathrm{Tr}\,\mathrm{G_{II}}$ как функция волнового числа обладает симметрией отражения $f^*(k) = f(-k^*)$.

Вронскиан $[\Phi(x),\Psi(x)]$, который входит в оба следа, равен

$$[\Phi(x),\Psi(x)] = \frac{(2\gamma)^2}{2Q}\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)} \ . \tag{1.35}$$

На следующем шаге находим асимптотику $\mathrm{Tr\,G}$ на дугах большого круга радиуса $R \to \infty$ на первом листе энергетической поверхности (рис. 1.2). Асимптотики в верхней полуплоскости на дугах $C_{1,2}(R)$ $(0 < \mathrm{Arg}\,\epsilon < \pi,\ |\epsilon| \to \infty)$

$$\mathrm{Tr\,G_I}(x,x;\epsilon) \to i + \frac{i}{2\epsilon^2} - \frac{Q}{|x|+a}\frac{i}{\epsilon^3} + \mathrm{O}(|\epsilon|^{-4}) \ , \tag{1.36}$$

$$\mathrm{Tr\,G_{II}}(x,x;\epsilon) \to \begin{cases} i + \dfrac{i}{2\epsilon^2} - V_0\dfrac{i}{\epsilon^3} + \mathrm{O}\left(|\epsilon|^{-4}\right), & |x| \leqslant R_0, \\ i + \dfrac{i}{2\epsilon^2} - \dfrac{Q}{|x|}\dfrac{i}{\epsilon^3} + \mathrm{O}\left(|\epsilon|^{-4}\right), & |x| > R_0, \end{cases} \tag{1.37}$$

на дугах большого круга нижней полуплоскости $C_{3,4}(R)$
$(-\pi < \mathrm{Arg}\,\epsilon < 0,\ |\epsilon| \to \infty)$

$$\mathrm{Tr\,G_I}(x,x;\epsilon) \to -i - \frac{i}{2\epsilon^2} + \frac{Q}{|x|+a}\frac{i}{\epsilon^3} + \mathrm{O}(|\epsilon|^{-4}) \ , \tag{1.38}$$

$$\mathrm{Tr\,G_{II}}(x,x;\epsilon) \to \begin{cases} -\,i - \dfrac{i}{2\epsilon^2} + V_0\dfrac{i}{\epsilon^3} + \mathrm{O}\left(|\epsilon|^{-4}\right), & |x| \leqslant R_0, \\ -\,i - \dfrac{i}{2\epsilon^2} + \dfrac{Q}{|x|}\dfrac{i}{\epsilon^3} + \mathrm{O}\left(|\epsilon|^{-4}\right), & |x| > R_0. \end{cases} \tag{1.39}$$

Из (1.36), (1.37) и (1.38), (1.39) следует, что интегрирование по контурам $P(R)$ и $E(R)$ или C_F (рис. 1.2) может быть сведено к мнимой оси, откуда находим окончательное выражение для вакуумной плотности в виде [60], [61]

$$\rho_{\mathrm{VP}}(x) = \frac{|e|}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty} d\epsilon\ \mathrm{Tr\,G}(x,x;\epsilon) = \frac{|e|}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy\ \mathrm{Tr\,G}(x,x;iy) \ . \tag{1.40}$$

При наличии отрицательных дискретных уровней с $0 > \epsilon_n \geqslant -1$

$$\rho_{\mathrm{VP}}(x) = |e|\left[\sum_{-1\leqslant\epsilon_n<0}\psi_n(x)^\dagger\psi_n(x) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy\ \mathrm{Tr\,G}(x,x;iy)\right] \ . \tag{1.41}$$

Далее отметим общие свойства $\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}$ при смене знака внешнего поля ($Q \to -Q$) и комплексном сопряжении

$$\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}_Q(x,x;\epsilon) = -\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}_{-Q}(x,x;-\epsilon)\ , \quad \mathrm{Tr}\,\mathrm{G}(x,x;\epsilon)^* = \mathrm{Tr}\,\mathrm{G}(x,x;\epsilon^*)\ , \tag{1.42}$$

а также следующее из (1.42) соотношение

$$\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}_Q(x,x;iy)^* = -\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}_{-Q}(x,x;iy)\ . \tag{1.43}$$

Из (1.43) следует, что $\mathrm{Re}\,[\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}_Q(x,x;iy)]$ – нечетная по Q и четная по y функция, а $\mathrm{Im}\,[\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}_Q(x,x;iy)]$ – наоборот, четная по Q и нечетная по y. Поэтому фактически ρ_{VP} определяется только через $\mathrm{Re}\,[\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}_Q(x,x;iy)]$ и является заведомо действительной величиной, нечетной по Q. Заметим также, что в чисто пертурбативной области представление ρ_{VP} в виде нечетного ряда по степеням внешнего поля (1.2) есть прямое следствие борновского ряда $\mathrm{G} = \mathrm{G}_0 - \mathrm{G}_0 V\,\mathrm{G}_0 + \mathrm{G}_0 V\,\mathrm{G}_0 V\,\mathrm{G}_0 + \ldots$, откуда

$$\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}(x,x;iy) = \sum_{k=0} \mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}\left[\mathrm{G}_0\,(-V\,\mathrm{G}_0)^{2k+1}\,(x,x;iy)\right]\ , \tag{1.44}$$

где G_0 – свободная функция Грина уравнения Дирака. В то же время, при наличии отрицательных дискретных уровней и тем более в закритической области при $Z > Z_{cr,1}$ нечетность ρ_{VP} по Q по-прежнему имеет место [61], но теперь зависимость от внешнего поля степенным рядом (1.44) более не описывается, поскольку в ρ_{VP} появляются существенно непертурбативные и тем самым неаналитические по Q составляющие.

Приведенное в (1.40), (1.41) выражение для вакуумной плотности заряда не обеспечивает автоматическое исчезновение полного индуцированного заряда при $Z < Z_{cr,1}$, чего следовало бы ожидать в рассматриваемом случае на основе аргументов, приведенных в конце раздела 1.2. В частности, в модели I из явного вида асимптотики $\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}_{\mathrm{I}}$ (1.36), (1.38) легко видеть, что $\mathrm{Re}\,[\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}_{\mathrm{I}}(x,x;iy)]$ при $|y| \to \infty$ убывает как $Q/(|x|+a) \times |y|^{-3}$, и интеграл $\int dy\ \mathrm{Re}\,[\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}_{\mathrm{I}}(x,x;iy)]$ равномерно сходится. Далее, поскольку $\mathrm{Re}\,[\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}_{\mathrm{I}}(x,x;iy)]$ при $|x| \to \infty$ убывает как $Q/(1+y^2)^{3/2} \times |x|^{-1}$, то неперенормированная $\rho_{\mathrm{VP}}(x)$ убывает при $|x| \to \infty$ как $1/|x|$, и в результате интегральный индуцированный заряд логарифмически расходится. Общий результат, установленный в [61] через разложение ρ_{VP} по степеням Q и справедливый для одного и двух пространственных измерений всегда, и для сферически-симметричного внешнего потенциала в трехмерном случае, состоит в том, что все расходимости ρ_{VP} содержатся только в фермионной петле с двумя внешними концами (рис. 1.1), приводящей к потенциалу Юлинга $A^{(1)}_{\mathrm{VP},0}$, а все следующие порядки разложения уже свободны от расходимостей (см. также [64] и приведенные там ссылки). В 3+1D расходится (логарифмически) еще и фермионная петля с четырьмя концами, но в сферически-симметричном случае для вычисления вакуумной плотности и вакуумной энергии эта расходимость оказывается не актуальна, поскольку в рамках парциального разложения каждое слагаемое с определенным моментом и четностью в порядке $\mathrm{O}(Q^3)$ для плотности и $\mathrm{O}(Q^4)$ для энергии оказывается автоматически калибровочно-инвариантным и конечным без дополнительной регуляризации, поэтому в этом случае процедуры перенормировки в 3+1D и в 1+1D фактически одинаковы и сводятся только к диаграмме с двумя концами.

Таким образом, для вычисления перенормированного ρ_{VP} необходимо выделить в выражениях для $\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}$ в (1.40), (1.41) линейные по Q члены и заменить их на перенормированные плотности $\rho^{(1)}_{\mathrm{VP}}$, соответствующие потенциалам Юлинга и приведенные в (1.13). Для этого сначала находим компоненту вакуумной плотности $\rho^{(3+)}_{\mathrm{VP}}$, которая определяется следующим образом

$$\rho^{(3+)}_{\mathrm{VP}}(x) = |e| \left[\sum_{-1\leqslant\epsilon_n<0} \psi_n(x)^{\dagger}\psi_n(x) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy \, \Big(\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}(x,x;iy) - \mathrm{Tr}\,\mathrm{G}^{(1)}(x,x;iy) \Big) \right] , \tag{1.45}$$

где $\mathrm{G}^{(1)} = Q \; \partial\,\mathrm{G}/\partial Q|_{Q=0} = \mathrm{G}_0\,(-V)\;\mathrm{G}_0$.

Для модели I

$$\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}^{(1)}_{\mathrm{I}}(x,x;iy) = \frac{Q}{\tilde\gamma^2}\Big[\mathrm{e}^{-2\tilde\gamma(|x|+a)}\Big(\mathrm{Ei}(2\tilde\gamma(|x|+a)) - \mathrm{Ei}(2\tilde\gamma a) - \mathrm{e}^{4\tilde\gamma a}\mathrm{Ei}(-2\tilde\gamma a)\Big) - \\ - \mathrm{e}^{2\tilde\gamma(|x|+a)}\mathrm{Ei}(-2\tilde\gamma(|x|+a))\Big] \;, \tag{1.46}$$

для II

$$
\operatorname{Tr} \mathrm{G}_{\mathrm{II}}^{(1)}(x,x;iy) = \begin{cases} \dfrac{2Q}{\tilde{\gamma}^2}\left(-\cosh(2\tilde{\gamma}x)\left[\mathrm{Ei}(-2\tilde{\gamma}R_0) + \dfrac{\mathrm{e}^{-2\tilde{\gamma}R_0}}{2\tilde{\gamma}R_0}\right] + \dfrac{1}{2\tilde{\gamma}R_0}\right) \ , \\ |x| \leqslant R_0 \ , \\ \dfrac{Q}{\tilde{\gamma}^2}\left(\mathrm{e}^{-2\tilde{\gamma}|x|}\left[\dfrac{\sinh(2\tilde{\gamma}R_0)}{\tilde{\gamma}R_0} - \mathrm{Ei}(-2\tilde{\gamma}R_0) - \mathrm{Ei}(2\tilde{\gamma}R_0) + \mathrm{Ei}(2\tilde{\gamma}|x|)\right] - \right. \\ \left. -\mathrm{e}^{2\tilde{\gamma}|x|}\mathrm{Ei}(-2\tilde{\gamma}|x|)\right) \ , \\ |x| > R_0 \ , \end{cases} \tag{1.47}
$$

где $\mathrm{Ei}(x)$ – интегральная показательная функция, а $\tilde{\gamma} = \sqrt{1+y^2}$.

При $Z < Z_{cr,1}$ индуцированный заряд от $\rho_{\mathrm{VP}}^{(3+)}(x)$ обращается в нуль. В рассматриваемом случае при отсутствии отрицательных дискретных уровней, которые не позволяют осуществить аналитическое продолжение, этот факт устанавливается переходом в комплексную плоскость по x, где $\rho_{\mathrm{VP}}^{(3+)}(x)$, представленная в виде сходящегося интеграла по dy от $\big(\operatorname{Tr}\mathrm{G}(x,x;iy) - \operatorname{Tr}\mathrm{G}^{(1)}(x,x;iy)\big)$, оказывается аналитической функцией от x с разрезом, который возникает за счет наличия в $\operatorname{Tr}\mathrm{G}$ функции Трикоми, и который всегда можно направить по отрицательной мнимой полуоси. Тогда интегральный заряд $Q_{\mathrm{VP}}^{(3+)}$ (интеграл по действительной оси от $\rho_{\mathrm{VP}}^{(3+)}(x)$) выражается через контурный интеграл по дуге большого круга в верхней полуплоскости, который обращается в нуль, что проверяется непосредственным вычислением асимптотики $\rho_{\mathrm{VP}}^{(3+)}(x)$. Более конкретно, для внешнего потенциала (1.5) асимптотика $\operatorname{Tr}\mathrm{G}_{\mathrm{I}}(x,x;iy)$ в верхней полуплоскости при $\operatorname{Re} x > 0$ имеет вид

$$
\operatorname{Tr}\mathrm{G}_{\mathrm{I}}(x,x;iy) \to \frac{iy}{(1+y^2)^{1/2}} + \frac{Q}{(1+y^2)^{3/2}}\frac{1}{x+a} + \mathrm{O}(|x|^{-2}) \ , \quad \operatorname{Re} x > 0 \ , \quad |x| \to \infty \ , \tag{1.48}
$$

Главный член асимптотики (1.48) чисто мнимый, четный по Q и нечетный по y, и поэтому исчезает при интегрировании по dy, следующий первый нечетный по Q уничтожается вычитанием $\operatorname{Tr}\mathrm{G}_{\mathrm{I}}^{(1)}$, а остальные члены убывают как $\mathrm{O}(1/x^2)$. При $\operatorname{Re} x < 0$ асимптотика $\rho_{\mathrm{VP}}^{(3+)}(x)$ находится из симметрии отражения относительно мнимой оси $f^*(x) = f(-x^*)$, поэтому на всей дуге большого круга в верхней полуплоскости $\rho_{\mathrm{VP}}^{(3+)}(x)$ равномерно убывает как $\mathrm{O}(1/x^2)$. Аналогичный результат имеет место и для модели II. Этот результат еще раз подтверждает вывод о том, что все расходимости в $\rho_{\text{VP}}(x)$ возникают за счет линейных по Q членов.

Таким образом, окончательный ответ для вакуумной плотности заряда принимает вид

$$\rho_{\text{VP}}^{\text{ren}}(x) = \rho_{\text{VP}}^{(1)}(x) + \rho_{\text{VP}}^{(3+)}(x) \ , \tag{1.49}$$

где $\rho_{\text{VP}}^{(1)}$ – линейная по Q пертурбативная плотность (1.13), найденная через перенормированную диаграмму (рис. 1.1). Такое выражение для $\rho_{\text{VP}}^{\text{ren}}(x)$ гарантирует обращение в нуль полного индуцированного заряда в докритической области при $Z < Z_{cr,1}$. При наличии отрицательных дискретных уровней исчезновение полного заряда при $Z < Z_{cr,1}$ следует из модельно-независимых аргументов, в основе которых лежит исходное выражение для вакуумной плотности (1.16). Из последнего следует, что изменение интегрального заряда возможно только при $Z > Z_{cr,1}$, когда дискретные уровни достигают нижнего континуума. При этом каждый дискретный уровень при пересечении ϵ_F приводит к изменению интегрального заряда на $(-|e|)$. Этот эффект является существенно непертурбативным и полностью содержится в $\rho_{\text{VP}}^{(3+)}$, а $\rho_{\text{VP}}^{(1)}$ никак в этом не участвует и по-прежнему вносит чисто нулевой вклад в полный индуцированный заряд. Таким образом, поведение перенормированной с помощью (1.49) вакуумной плотности и в непертурбативной области оказывается именно таким, какое следует ожидать из общих соображений о структуре электрон-позитронного вакуума при $Z > Z_{cr,1}$.

Более детальная картина происходящих при этом изменений в $\rho_{\text{VP}}(x)$ рассмотрена в [5; 11; 58; 59], на основе формализма Фано для механизма автоионизации в атомной физике [7], [68]. Основной результат состоит в том, что когда дискретный уровень $\psi_n(x)$ достигает нижнего континуума, изменение вакуумной плотности имеет вид

$$\Delta\rho_{\text{VP}}(x) = -|e|\psi_{\epsilon_n=-1}(x)^\dagger\psi_{\epsilon_n=-1}(x) \ . \tag{1.50}$$

1.3.2 Результаты численных расчетов непертурбативной вакуумной плотности в 1+1D

На рис. 1.3 в модели I при $a = 0.1$ показана перенормированная вакуумная плотность для чисто пертурбативного режима при $Z = 10$, далее для $Z = 115$, когда первое $Z_{cr,1} \simeq 115.999$ еще не достигается, для $Z = 116$, когда первый (четный) дискретный уровень только что опустился в нижний континуум, далее для $Z = 216$, когда еще не достигается второе критическое $Z_{cr,2} \simeq 216.258$, и наконец для $Z = 217$, т.е. почти сразу после опускания в нижний континуум второго (нечетного) дискретного уровня. При этом непосредственным численным интегрированием подтверждается, что полный вакуумный заряд при $Z = 10,\ 115$ равен нулю, при $Z = 116,\ 216$ равен $(-|e|)$, а при $Z = 217$ – соответственно $(-2|e|)$. Соответствующие критические заряды для модели I находятся из [66]

$$K_{1+2iQ}\left(\sqrt{8Qa}\right) + K_{1-2iQ}\left(\sqrt{8Qa}\right) = 0 \tag{1.51}$$

для четных уровней и

$$K_{2iQ}\left(\sqrt{8Qa}\right) = 0 \tag{1.52}$$

для нечетных.

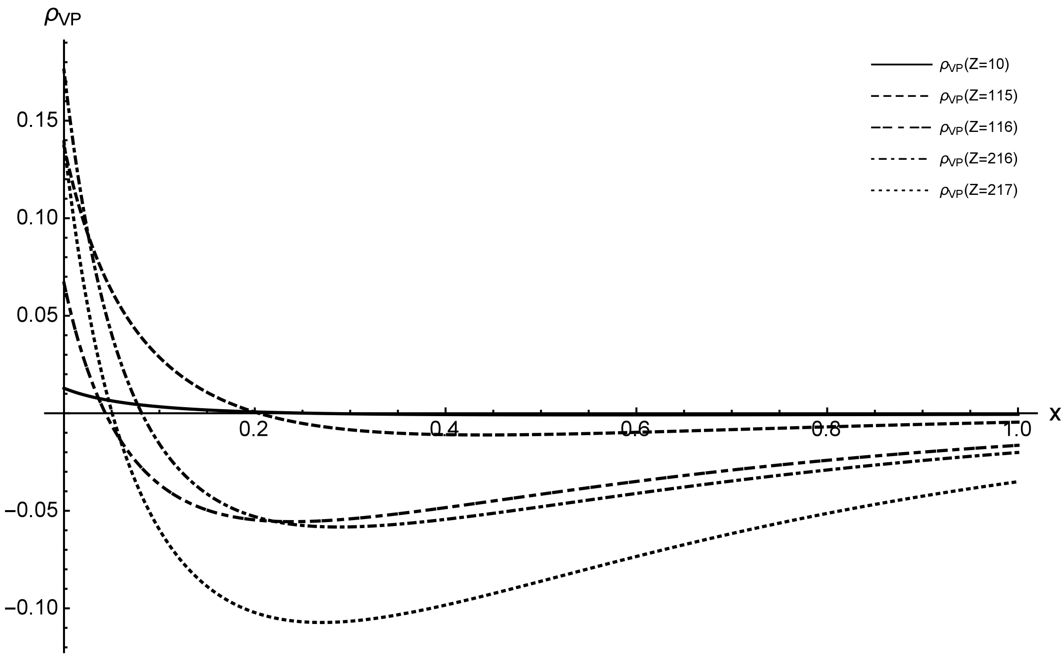


Рисунок 1.3 — $\rho^{\mathrm{ren}}_{\mathrm{VP}}(x)$ в модели I при $a = 0.1$ для $Z = 10,\ 115,\ 116,\ 216,\ 217$.

На рис. 1.4 для модели II при $R_0 = 0.1$ показана перенормированная вакуумная плотность для чисто пертурбативного режима при $Z = 10$, далее для $Z = 81$, когда первое $Z_{cr,1} \simeq 81.5$ еще не достигается, для $Z = 82$, когда первый (четный) дискретный уровень только что опустился в нижний континуум, далее для $Z = 154$, когда еще не достигается второе критическое $Z_{cr,2} \simeq 154.14$, и наконец для $Z = 155$, т.е. почти сразу после опускания в нижний континуум второго (нечетного) дискретного уровня. Критические заряды при этом находятся из трансцендентных уравнений

$$\sqrt{2(V_0-2)}\,\mathrm{tg}\left(\sqrt{V_0(V_0-2)}R\right)K_{2iQ}\left(\sqrt{8QR}\right) - \\ - \left[K_{1+2iQ}\left(\sqrt{8QR}\right) + K_{1-2iQ}\left(\sqrt{8QR}\right)\right] = 0 \quad (1.53)$$

для четных уровней, и

$$\sqrt{2(V_0-2)}K_{2iQ}\left(\sqrt{8QR}\right) + \mathrm{tg}\left(\sqrt{V_0(V_0-2)}R\right)\left[K_{1+2iQ}\left(\sqrt{8QR}\right) + \right. \\ \left. + K_{1-2iQ}\left(\sqrt{8QR}\right)\right] = 0 \quad (1.54)$$

для нечетных.

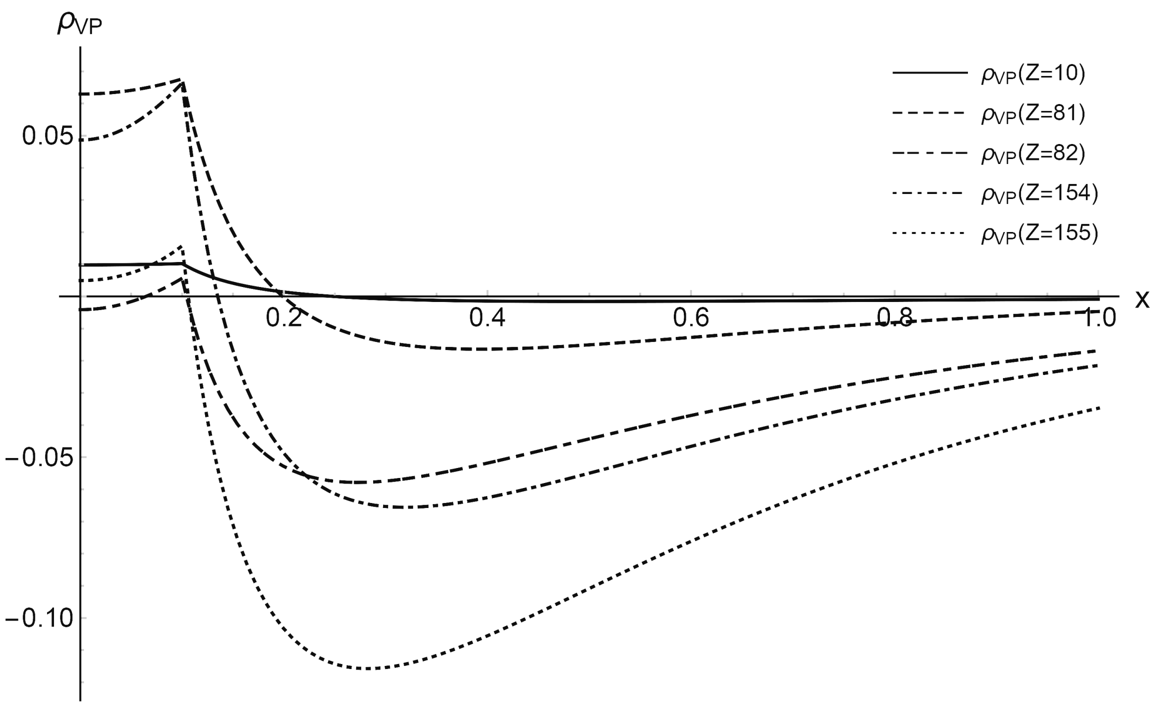


Рисунок 1.4 — $\rho^{ren}_{\mathrm{VP}}(x)$ в модели II при $R_0 = 0.1$ для $Z = 10, 81, 82, 154, 155$.

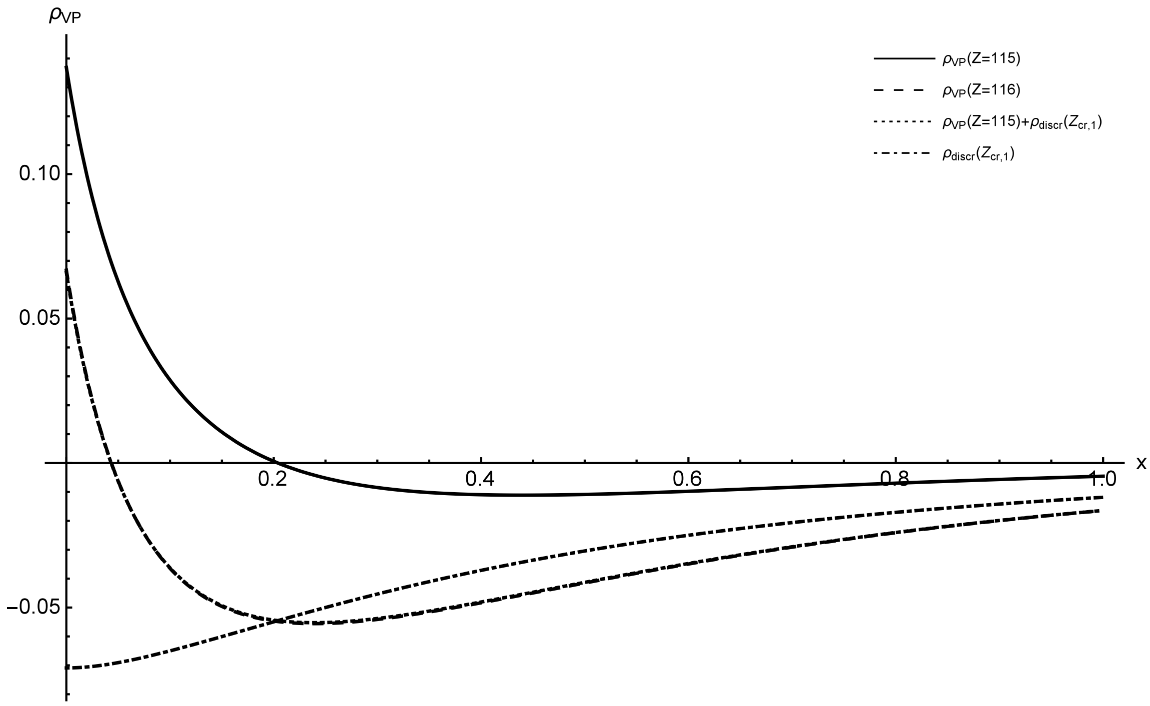


Рисунок 1.5 — Изменение $\rho^{\rm ren}_{\rm VP}(x)$ в модели I с $a = 0.1$ при переходе через первое критическое $Z_{cr,1} = 115.999$. Сумма вакуумной плотности при $Z = 115$ и вклада от дискретного уровня на пороге нижнего континуума $\rho_{\rm discr}(Z_{cr,1})$ практически неотличима от вакуумной плотности при $Z = 116$.

При этом непосредственным численным интегрированием подтверждается, что полный вакуумный заряд при $Z = 10,\ 81$ равен нулю, при $Z = 82,\ 154$ равен $(-|e|)$, а при $Z = 155$ – соответственно $(-2|e|)$. Отметим также, что разрыв производной в $\rho^{ren}_{\rm VP}(x)$ на радиусе R_0 обусловлен соответствующим разрывом в исходном потенциале (1.6). В большем числе измерений такой разрыв производной в потенциале приводит к тому, что $\rho^{ren}_{\rm VP}$ на радиусе сферы становится сингулярным, но интегральный заряд при этом сохраняет свое целочисленное значение.

Более детально процесс формирования вакуумных оболочек из опускающихся в нижний континуум дискретных уровней показан на рис. 1.5–1.7 для модели I при $a = 0.1$. На рис. 1.5 показано изменение перенормированной вакуумной плотности при переходе через первое критическое $Z_{cr,1} = 115.999$, когда в соответствии с (1.50) в $\rho^{\rm ren}_{\rm VP}(x)$ добавляется практически точно $\rho_{\rm discr}(Z_{cr,1}) = (-|e|)\times$плотность, соответствующую первому (четному) дискретному уровню на пороге нижнего континуума.

Аналогичная ситуация возникает на рис. 1.6, когда Z переходит через следующее критическое $Z_{cr,2} = 216.258$. К $\rho^{\rm ren}_{\rm VP}(x)$ снова добавляется практически

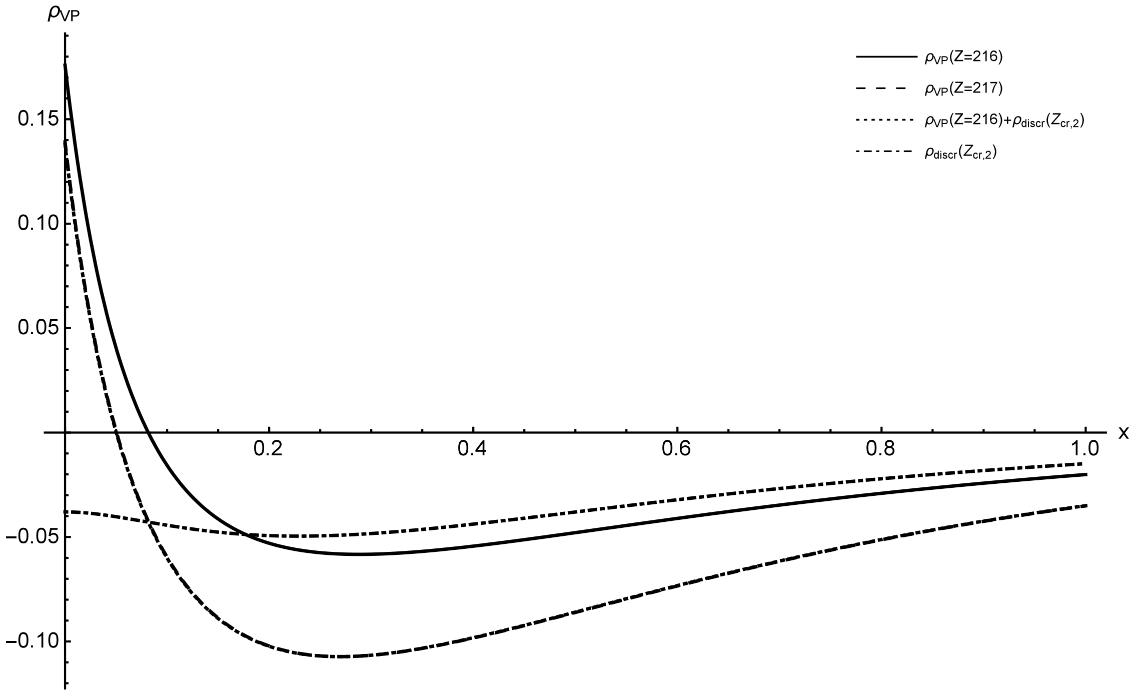


Рисунок 1.6 — Изменение $\rho^{\text{ren}}_{\text{VP}}(x)$ в модели I с $a = 0.1$ при переходе через второе критическое $Z_{cr,2} = 216.258$. Сумма вакуумной плотности при $Z = 216$ и вклада от второго (нечетного) дискретного уровня на пороге нижнего континуума $\rho_{\text{discr}}(Z_{cr,2})$ практически сливается с вакуумной плотностью при $Z = 217$.

точно $\rho_{\text{discr}}(Z_{cr,2}) = (-|e|)\times$плотность, соответствующая второму (нечетному) дискретному уровню на пороге нижнего континуума.

Следует также специально отметить, что в закритической области при увеличении Z изменение $\rho^{\text{ren}}_{\text{VP}}(x)$ происходит не только дискретным образом за счет формирования вакуумных оболочек из опускающихся в нижний континуум дискретных уровней, но и непрерывно за счет изменения плотности состояний непрерывного спектра и эволюции дискретных уровней с ростом Z. На рис. 1.7 показано суммарное изменение $\rho^{\text{ren}}_{\text{VP}}(x)$ при переходе через два первых Z_{cr}. Сумма вакуумной плотности при $Z = 115$ и вкладов от первых двух дискретных уровней, взятых на пороге нижнего континуума, уже не воспроизводит $\rho^{\text{ren}}_{\text{VP}}(x)$ при $Z = 217$.

Более того, оболочечную структуру, возникающую в вакуумной плотности в закритической области, нельзя получить через такую деформацию исходного контура ВК из рис. 1.2, при которой учитывались бы комплексные полюса функции Грина на втором листе римановой энергетической поверхности, возникающие из дискретных уровней после достижения ими нижнего континуума (или начала левого разреза при $\epsilon = -1$), как это предлагалось в [5; 58;

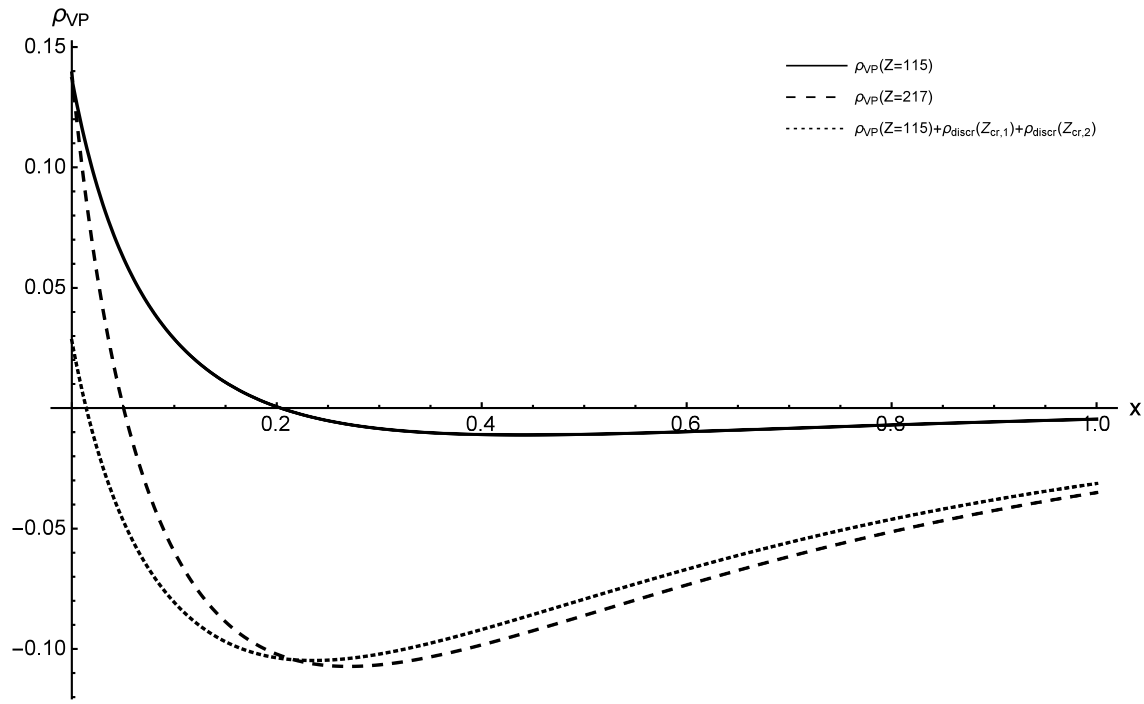


Рисунок 1.7 — Изменение $\rho_{\text{VP}}^{\text{ren}}(x)$ в модели I с $a = 0.1$ при переходе через первое и второе Z_{cr}. Сумма вакуумной плотности при $Z = 115$ и первых двух дискретных уровней, взятых на пороге нижнего континуума, уже не воспроизводит $\rho_{\text{VP}}^{\text{ren}}(x)$ при $Z = 217$.

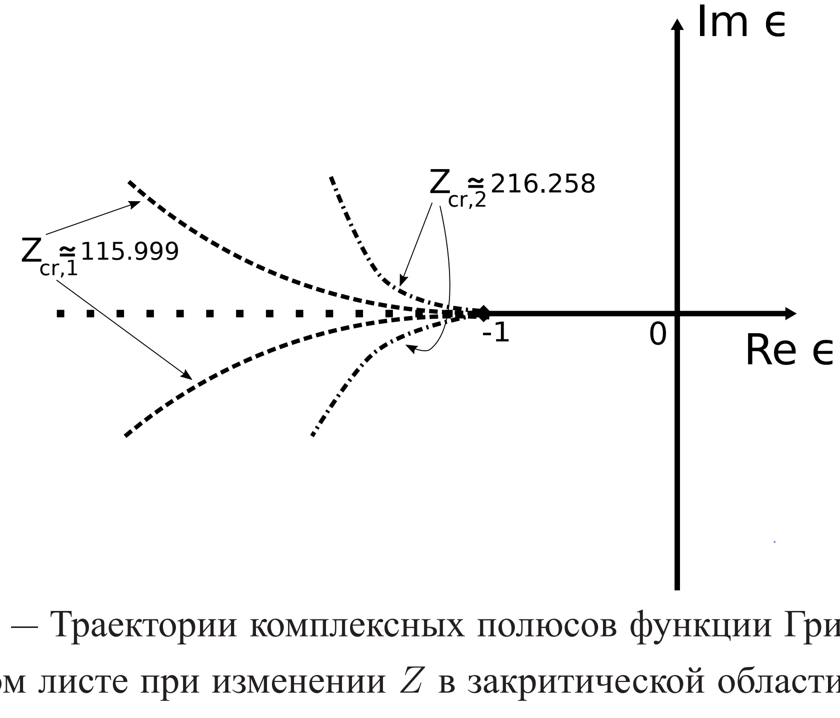


Рисунок 1.8 — Траектории комплексных полюсов функции Грина на втором энергетическом листе при изменении Z в закритической области, возникающие из первых двух дискретных уровней после достижения ими левого разреза при $Z_{cr,1} = 115.999\,, Z_{cr,2} = 216.258$ в модели I при $a = 0.1$.

59]. Траектории комплексных полюсов на втором листе в закритической области по Z, возникающих из первых двух дискретных уровней после достижения ими левого разреза, показаны на рис. 1.8. Как и в нерелятивистской квантовой теории упругого рассеяния, каждый дискретный уровень расщепляется на две комплексно-сопряженные по энергии траектории, которым соответствуют комплексные волновые вектора с отрицательной мнимой частью $k = \pm k_1 - ik_2$, связанные между собой симметрией отражения $k \to -k^*$. В рамках метода ВК такие сопряженные полюса функции Грина совершенно равноправны, поэтому при деформации контура должны учитываться на паритетных основаниях. Вычеты в этих полюсах, возникающие при интегрировании вдоль деформированного таким образом контура ВК по энергетической переменной, в силу симметрии $\mathrm{Tr}\, \mathrm{G}(x,x;\epsilon)^* = \mathrm{Tr}\, \mathrm{G}(x,x;\epsilon^*)$ будут комплексно-сопряжены друг другу, поэтому их сумма будет всегда действительным числом, но как и волновая функция упругого резонанса, будет обязательно содержать экспоненциально растущий множитель $\exp(2k_2|x|)$. Для потенциалов I и II этот вывод является прямым следствием явного вида $\mathrm{Tr}\, \mathrm{G}$ в (1.29), (1.34).

Таким образом, воспроизвести вклад в $\rho^{\mathrm{ren}}_{\mathrm{VP}}(x)$ от дискретных уровней, опустившихся в нижний континуум, через вычеты функции Грина в комплексных полюсах, в которые превратится соответствующий дискретный уровень после достижения нижнего континуума, нельзя. Адекватная картина происходящего в закритической области достигается при использовании формализма Фано [7], [68], но следует учитывать, что этот метод также использует ряд приближений, и поэтому формула (1.50) является точной только в непосредственной окрестности Z_{cr}, что и демонстрируют рис. 1.5–1.7. Корректный способ вычисления $\rho^{\mathrm{ren}}_{\mathrm{VP}}(x)$ для всех областей по Z состоит в использовании (1.45) и (1.49) с прямой проверкой ожидаемого целочисленного значения интегрального заряда.

1.4 Непертурбативная вакуумная энергия в 1+1D

Непертурбативные эффекты, проявляющиеся в $\rho^{\mathrm{ren}}_{\mathrm{VP}}$ при $Z > Z_{cr,1}$ через формирование локализованных вакуумных оболочек, приводят к соответствующим непертурбативным изменениям в $\mathcal{E}_{\mathrm{VP}}$. Как и формирование самих оболочек, такой эффект является существенно нелинейным, и до сих пор детально не рассматривался, поскольку предполагалось, что и в закритической области основной вклад в $\mathcal{E}_{\rm VP}$ будет возникать за счет пертурбативных эффектов (см., в частности, [59] и приведенные там ссылки). Подчеркнем, что такой нелинейный вклад в $\mathcal{E}_{\rm VP}$ непосредственно через $\rho_{\rm VP}$ не находится, поскольку в непертурбативной области не работают ни (1.44), ни тем самым (1.2–1.4). При этом скорость роста числа оболочек и тем самым проявление оболочечного эффекта в $\mathcal{E}_{\rm VP}$ с увеличением Z существенно зависит от числа пространственных измерений. В 1+1D она минимальна, и поэтому оболочек хватает только на то, чтобы понизить в закритической области скорость роста неперенормированной $\mathcal{E}_{\rm VP}$ до $\sim Z^{\nu}$, $1 < \nu < 2$.

1.4.1 Теоретическая часть для непертурбативной вакуумной энергии в 1+1D

Рассмотрим теперь такой способ вычисления $\mathcal{E}_{\rm VP}$, который максимально полно учитывает непертурбативные эффекты в закритической области. Исходным выражением для вакуумной энергии является

$$\mathcal{E}_{\rm VP} = \langle H_D \rangle_{vac} = \frac{1}{2}\left(\sum_{\epsilon_n < \epsilon_F} \epsilon_n - \sum_{\epsilon_n \geqslant \epsilon_F} \epsilon_n\right) \ , \tag{1.55}$$

которое выводится из дираковского гамильтониана, записанного в инвариантном относительно зарядового сопряжения виде, и определено с точностью до константы, зависящей от выбора начала отсчета энергии [5; 58; 59]. Из структуры выражения (1.55) следует, что $\mathcal{E}_{\rm VP}$ даже при отсутствии внешних полей $A_{\rm ext} = 0$ отрицательна и расходится. В то же время, исходное определение вакуумной плотности заряда (1.16) таково, что при $A_{\rm ext} = 0$ она тождественно равна нулю, и таким же образом естественно нормировать и $\mathcal{E}_{\rm VP}$. Далее заметим, что при наличии внешних кулоновских потенциалов типа (1.5) или (1.6) в (1.55) имеется еще и вклад от (бесконечного) набора связанных состояний. Поэтому, для выделения в $\mathcal{E}_{\rm VP}$ исключительно эффектов взаимодействия, в (1.55) необходимо еще вычесть из каждого дискретного уровня массу свободного электрона. Таким образом, в физически мотивированном виде, согласованном с (1.16), исходное выражение для вакуумной энергии приобретает вид

$$\mathcal{E}_{\mathrm{VP}} = \frac{1}{2}\left(\sum_{\epsilon_n<\epsilon_F} \epsilon_n - \sum_{\epsilon_n\geqslant\epsilon_F} \epsilon_n + \sum_{-1\leqslant\epsilon_n<1} 1\right)_A - \frac{1}{2}\left(\sum_{\epsilon_n<0} \epsilon_n - \sum_{\epsilon_n>0} \epsilon_n\right)_0 . \tag{1.56}$$

Определенная таким образом вакуумная энергия при выключении внешнего поля исчезает, а при включении содержит только эффекты взаимодействия, так что разложение $\mathcal{E}_{\mathrm{VP}}$ по (четным) степеням внешнего поля будет начинаться с $\mathrm{O}(Q^2)$.

Теперь выделим в (1.56) по отдельности вклады от дискретного и непрерывного спектров, и для разности интегралов по непрерывному спектру $\left(\int dk\ \sqrt{k^2+1}\right)_A - \left(\int dk\ \sqrt{k^2+1}\right)_0$ используем известный прием, представляющий эту разность в виде интеграла от фазы упругого рассеяния $\delta(k)$. Такая техника вполне эффективно применялась при вычислении однопетлевых квантовых поправок к массе солитонов в существенно нелинейных моделях теории поля в 1+1D (см. [69], [70] и цитируемую в них литературу). В данном случае такой переход осуществляется следующим образом. Пусть, как и ранее,

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \chi(x) \end{pmatrix} , \tag{1.57}$$

тогда, опуская общий нормировочный множитель, в используемом представлении $\alpha = \sigma_2$, $\beta = \sigma_3$ для свободного уравнения Дирака в верхнем континууме имеем два типа решений различной четности с волновым числом $k \geqslant 0$ и энергией $\epsilon = \sqrt{k^2+1}$

$$\varphi(x) = \sqrt{\epsilon+1}\ \sin(kx) \ , \quad \chi(x) = \sqrt{\epsilon-1}\ \cos(kx) \ , \tag{1.58}$$

и

$$\varphi(x) = \sqrt{\epsilon+1}\ \cos(kx) \ , \quad \chi(x) = -\sqrt{\epsilon-1}\ \sin(kx) \ , \tag{1.59}$$

и далее для определенности рассмотрим первый тип решений (1.58) (который во многом аналогичен трехмерному случаю).

Асимптотика решений той же четности для уравнений (1.22) с потенциалами $V_{\mathrm{I,II}}$ будет отличаться от (1.58) на фазовый сдвиг

$$\varphi(x) \to \sqrt{\epsilon+1}\,\sin\left[kx+\delta(k)\right]\ , \quad \chi(x) \to \sqrt{\epsilon-1}\,\cos\left[kx+\delta(k)\right]\ , \quad x\to\infty\ . \tag{1.60}$$

Далее используем регуляризацию на конечный обьем, для чего помещаем систему в ящик больших размеров $-L \leqslant x \leqslant L$ с граничным условием «невылетания» фермионов из ящика [71]

$$(\pm i\alpha+\beta)\,\psi(\pm L)=0\ , \tag{1.61}$$

которое в терминах спинорных компонент записывается в виде

$$\varphi(\pm L)\pm\chi(\pm L)=0\ . \tag{1.62}$$

В результате для верхнего континуума получаем систему дискретных мод, нумеруемых целочисленным индексом $n \geqslant 0$, с соответствующими волновыми числами $k_n^{(0)}$ для свободного случая и k_n при наличии потенциалов $V_{\mathrm{I,II}}$. На следующем шаге снова пользуемся четностью-нечетностью решений и рассматриваем только правую границу ящика с $x=L$, на которой волновые числа k_n и $k_n^{(0)}$ будут связаны условием

$$k_n\,L+\delta(k_n)+\gamma(k_n)=k_n^{(0)}\,L+\gamma(k_n^{(0)})=\pi n\ , \tag{1.63}$$

а дополнительная фаза $\gamma(k)$, которая является характерной чертой фермионных условий «невылетания», в данном случае находится из условия

$$\gamma(k)=\sqrt{\frac{\epsilon-1}{\epsilon+1}}\ , \quad -\pi/2<\operatorname{Arg}\gamma<+\pi/2\ . \tag{1.64}$$

Из (1.63) получаем

$$k_n=k_n^{(0)}-\delta(k_n)/L+\left(\gamma\left(k_n^{(0)}\right)-\gamma\left(k_n\right)\right)/L\ , \tag{1.65}$$

причем в (1.65) последним членом справа можно сразу пренебречь, поскольку при $L\to\infty$ разность $k_n-k_n^{(0)}$ будет $\mathrm{O}(1/L)$, и тем самым последний член будет

$\mathrm{O}(1/L^2)$. Далее из (1.65) с той же точностью по $1/L$ получаем

$$\epsilon\left(k_n\right)-\epsilon\left(k_n^{(0)}\right)=\sqrt{k_n^2+1}-\sqrt{\left(k_n^{(0)}\right)^2+1}=-\frac{k_n^{(0)}}{\sqrt{(k_n^{(0)})^2+1}}\frac{\delta\left(k_n^{(0)}\right)}{L}+\mathrm{O}(1/L^2)\ . \tag{1.66}$$

После чего переходим от суммы $\sum_n$ к интегралу $\int dk$ по следующему из (1.63) правилу $\Delta n = L dk/\pi$. Наличие дополнительной фазы $\gamma(k)$ никакой роли в этом месте не играет, поскольку вклад от нее в связь между Δn и dk при $L \to \infty$ будет следующего порядка малости по $1/L$. В результате для вклада от состояний данной четности из верхнего континуума в $\mathcal{E}_{\mathrm{VP}}$ с учетом знака в (1.56) получим

$$\left(-\sum_{\epsilon_n\geqslant 1}\epsilon_n\right)_A-\left(-\sum_{\epsilon_n\geqslant 1}\epsilon_n\right)_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{k\,dk}{\sqrt{k^2+1}}\,\delta(k)+\mathrm{O}(1/L)\ . \tag{1.67}$$

Таким же способом выполняется аналогичный переход от разности энергий к фазовому интегралу для состояний другой четности и для нижнего континуума. Для нижнего континуума только следует учесть другой (отрицательный) знак энергии отдельных мод и другой (положительный) знак, с которым эти состояния входят в выражение (1.56) для $\mathcal{E}_{\mathrm{VP}}$ по сравнению с верхним континуумом. В результате эти знаки компенсируют друг друга и окончательное выражение для $\mathcal{E}_{\mathrm{VP}}$ после перехода к бесконечному обьему принимает вид

$$\mathcal{E}_{\mathrm{VP}}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty\frac{k\,dk}{\sqrt{k^2+1}}\,\delta_{\mathrm{tot}}(k)+\frac{1}{2}\sum_{-1\leqslant\epsilon_n<1}\left(1-\epsilon_n\right)\ , \tag{1.68}$$

где $\delta_{\mathrm{tot}}(k)$ – суммарный фазовый сдвиг при данном волновом числе k, включающий вклады от состояний рассеяния из нижнего и верхнего континуумов обеих четностей, а $(1-\epsilon_n)$ – энергия связи соответствующего уровня. Такой подход к вычислению $\mathcal{E}_{\mathrm{VP}}$ оказывается весьма эффективен, поскольку $\delta_{\mathrm{tot}}(k)$ ведет себя как в инфракрасном, так и в ультрафиолетовом пределах по k гораздо лучше, чем каждая из упругих фаз по отдельности (см. ниже). Кроме того, $\delta_{\mathrm{tot}}(k)$ автоматически будет четной функцией внешнего поля.

Теперь специально остановимся на взаимосвязи $\mathcal{E}_{\mathrm{VP}}$ и ρ_{VP} при таком выборе начала отсчета для вакуумной энергии. Исходное выражение для вакуумной энергии (1.55) приводило к швингеровскому соотношению (1.1) между $\mathcal{E}_{\mathrm{VP}}$ и

$\rho_{\rm VP}$ в виде связи инфинитезимальных вариаций (см. в частности, [59] и приведенные там ссылки), но теперь при переходе к новой точке нормировки к $\mathcal{E}_{\rm VP}$ добавляется (бесконечная) сумма масс свободного электрона, соответствующих дискретным уровням в данном внешнем поле, т.е. в определенном смысле динамическая величина, зависящая от конкретного вида взаимодействия (или свойств вершины, если использовать язык диаграммной теории возмущений). Чтобы ответить на вопрос, будет ли за счет такого вычитания изменяться связь между $\mathcal{E}_{\rm VP}$ и $\rho_{\rm VP}$, заметим, что теперь при вариации $A_0(x) \to A_0(x)+\delta A_0(x)$ мы снова получим для $\delta\mathcal{E}_{\rm VP}$ такой же вклад от вакуумной плотности в виде $\int dx\, \rho_{\rm VP}(x)\delta A_0(x)$ и дополнительный член $\delta\mathcal{E}_N$, обусловленный переходами уровней через пороги верхнего и нижнего континуумов как из дискретного спектра в непрерывный, так и наоборот. Но из (1.68) немедленно следует, что в $\delta\mathcal{E}_N$ вклад от уровней, возникающих на порогах в непрерывном спектре, исчезает, так как суммарная фаза $\delta_{\rm tot}(k)$, равно как и ее вариация за счет $\delta A_0(x)$, всегда конечны при $k \to 0$. Также второе слагаемое в (1.68) показывает, что исчезает и вклад в $\delta\mathcal{E}_N$ от уровней, возникающих на верхнем пороге в дискретном спектре. В результате в $\delta\mathcal{E}_N$ выживает только вклад от дискретных уровней на нижнем пороге, который можно представить в виде

$$\delta\mathcal{E}_N = -\sum_n \delta(\epsilon_n - \epsilon_F)\epsilon_n\delta\epsilon_n \ , \tag{1.69}$$

что в точности совпадает с результатом, полученным в [59] при вариации исходного выражения для энергии вакуума (1.55). Более формально это следует из записи вариации $\delta\mathcal{E}_{\rm VP}$ в следующем виде:

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{E}_{\rm VP} = \int dx\, \rho_{\rm VP}\, \delta A_0 + \frac{1}{2}\sum_{\epsilon_n<\epsilon_F} \epsilon_n\, \delta\langle\psi_n|\psi_n\rangle - \frac{1}{2}\sum_{\epsilon_n>-\epsilon_F} \epsilon_n\, \delta\langle\psi_n|\psi_n\rangle \, + \\ + \ \frac{1}{2}\sum_{-1<\epsilon_n<1}(1-\epsilon_n)\,\delta\langle\psi_n|\psi_n\rangle + \frac{1}{2}\sum_n (1-\epsilon_n)\,\delta(\epsilon_n+\epsilon_F)\,\delta\epsilon_n + \\ + \frac{1}{2}\sum_n (1-\epsilon_n)\,\delta(\epsilon_n-\epsilon_F)\,\delta\epsilon_n \ .\end{aligned} \tag{1.70}$$

Легко видеть, что в (1.70) выживают только первое и последнее слагаемое, поскольку $\delta\langle\psi_n|\psi_n\rangle = 0$ в каждом из континуумов и в дискретном спектре, $1-\epsilon_n = 0$ при $\epsilon_n = -\epsilon_F$, а последнее слагаемое совпадает с (1.69). Роль этого слагаемого в $\mathcal{E}_{\text{VP}}$ подробно разобрана в [59]. А именно, $\mathcal{E}_N = -N$, где N – число опустившихся в нижний континуум уровней. Таким образом, $\mathcal{E}_N$ представляет собой ступенчатую функцию, каждый скачок которой равен $(-1 \times mc^2)$ и происходит всякий раз, когда дискретный уровень уходит в нижний континуум. Обусловленный этим скачок в вакуумной энергии есть результат спонтанного рождения электрон-позитронных пар в сверхкритических внешних кулоновских полях [5; 7; 11; 58; 59]. Таким образом, $\delta\mathcal{E}_N$ имеет непосредственное отношение к эффекту перехода нейтрального вакуума в заряженный, который оказывается основным состоянием электрон-позитронного поля в таких полях.

Следует также отметить, что нормировка вакуумной энергии на нуль при $A_{ext} = 0$ и с переходом к суммарной энергии связи уровней дискретного спектра (1.56) приводит к тому, что в таком виде $\mathcal{E}_{\text{VP}}$ в 1+1D для потенциалов типа I или II сразу оказывается конечной величиной без какой-либо УФ перенормировки и обрезания кулоновской асимптотики внешнего поля. Это непосредственно следует из (1.68), поскольку, как это будет показано ниже явным вычислением, $\delta_{\text{tot}}(k)$ регулярна при $k \to 0$, при $k \to \infty$ ведет себя как $\mathrm{O}(1/k^3)$, поэтому фазовый интеграл в (1.68) всегда сходится, а полная энергия связи дискретных уровней также конечна, поскольку $1 - \epsilon_n$ ведут себя при $n \to \infty$ как $\mathrm{O}(1/n^2)$. Это следует также из представления $\mathcal{E}_{\text{VP}}$ в виде суммы сверток $\rho^{(i)}_{\text{VP}}$ с внешним потенциалом (1.4), поскольку при $|x| \to \infty$ как $A_0(x)$, так и неперенормированная вакуумная плотность $\rho^{(1)}_{\text{VP}}(x)$ ведут себя $\sim 1/|x|$, а $\rho^{(i)}_{\text{VP}}(x)$ при $i \geqslant 3$ как компоненты $\rho^{(3+)}_{\text{VP}}$ убывают при $|x| \to \infty$ заведомо еще быстрее, поэтому все интегралы в выражении (1.4) для $\mathcal{E}_{\text{VP}}$ сходятся. Заметим, однако, что конечность $\mathcal{E}_{\text{VP}}$ после вычитания (1.56) (хотя и проводимого под знаком промежуточной УФ регуляризации) не является результатом настоящей УФ перенормировки, а обусловлена исключительно спецификой 1+1D. Необходимость перенормировки через фермионную петлю (рис. 1.1) следует из анализа свойств ρ_{VP}, который показывает, что без такой УФ перенормировки интегральный вакуумный заряд не будет иметь ожидаемого целочисленного значения. Кроме того, при $Z \to 0$ вакуумная энергия должна совпадать с $\mathcal{E}^{(1)}_{\text{VP}}$, полученной по ТВ согласно (1.10–1.12). Поскольку при $Z \to 0$ связь между вакуумной энергией и вакуумной плотностью заряда описывается теорией возмущений (1.2–1.4), легко показать, что неперенормированная $\mathcal{E}_{\text{VP}}$ в общем случае этому условию не удовлетворяет. Фактически это проделано ниже в терминах перенормировочного коэффициента η (см. (1.73), (1.74) и последующие комментарии). Таким образом, несмотря на конечность, $\mathcal{E}_{\mathrm{VP}}$ в виде (1.68) все равно подлежит (конечной) перенормировке в порядке $\mathrm{O}(Z^2)$ на соответствующую вакуумную энергию $\mathcal{E}^{(1)}_{\mathrm{VP}}$, вычисленную в первом порядке теории возмущений через перенормированную плотность $\rho^{(1)}_{\mathrm{VP}}$ согласно (1.10–1.12). Метод Вихманна-Кролла для ρ_{VP} фактически здесь играет роль контролера, обеспечивающего выполнение необходимых физических условий для корректного описания эффекта поляризации вакуума вне рамок ТВ, которые не отслеживаются в рамках вычисления $\mathcal{E}_{\mathrm{VP}}$ через выражение (1.68). Таким образом, в полной аналогии с (1.49) мы должны перейти к перенормированной вакуумной энергии через соотношение

$$\mathcal{E}^{\mathrm{ren}}_{\mathrm{VP}} = \mathcal{E}^{(1)}_{\mathrm{VP}} + \mathcal{E}^{(3+)}_{\mathrm{VP}} \ , \tag{1.71}$$

где $\mathcal{E}^{(3+)}_{\mathrm{VP}}$ собирается из $\rho^{(3+)}_{\mathrm{VP}}$ аналогично (1.4). Формулу (1.71) можно также переписать в форме, не связанной с разложением по степеням внешнего поля и более удобной для практических вычислений

$$\mathcal{E}^{\mathrm{ren}}_{\mathrm{VP}}(Z) = \mathcal{E}_{\mathrm{VP}}(Z) + \eta Z^2 \ , \tag{1.72}$$

где

$$\eta = \lim_{Z_0\to 0} \frac{\mathcal{E}^{(1)}_{\mathrm{VP}}(Z_0) - \mathcal{E}_{\mathrm{VP}}(Z_0)}{Z_0^2} \ . \tag{1.73}$$

При этом перенормировочный коэффициент η определяется исключительно профилем внешнего кулоновского поля и представляется в виде двойного интеграла от $A_0(x)$, для чего $\mathcal{E}^{(1)}_{\mathrm{VP}}$ выражается через (1.10–1.12), а $\mathcal{E}_{\mathrm{VP}}$ – через первое борновское приближение для $\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}$, откуда

$$\mathcal{E}^{(1)}_{\mathrm{VP}}(Z_0) - \mathcal{E}_{\mathrm{VP}}(Z_0) = \frac{1}{2}\int dx \ \left(Z_0 A_0(x)/Z\right)\left[\left(\rho^{(1)}_{\mathrm{VP}}\right)_{\mathrm{ren}}(x) - \left(\rho^{(1)}_{\mathrm{VP}}\right)_{\mathrm{nonren}}(x)\right] \ , \tag{1.74}$$

где $\left(\rho^{(1)}_{\mathrm{VP}}\right)_{\mathrm{ren}}(x)$ – перенормированная пертурбативная вакуумная плотность (1.11–1.13), а $\left(\rho^{(1)}_{\mathrm{VP}}\right)_{\mathrm{nonren}}(x) = (-|e|/2\pi)\int dy\,\mathrm{Tr}\left(G_0 V G_0\right)$ – неперенормированная пертурбативная вакуумная плотность, и обе плотности в свою очередь выражаются через интегралы от $Z_0 A_0(x)/Z$. Отметим также, что η в зависимости от параметров кулоновского источника может быть как любого знака, так и равно нулю (см. ниже рис. 1.11).

Рассмотрим теперь явное вычисление $\mathcal{E}^{\mathrm{ren}}_{\mathrm{VP}}(Z)$ для потенциалов I и II.

I. Решение уравнения Дирака для верхнего и нижнего ($\pm$) континуумов при $x>0$ выбираем в следующем виде

$$\begin{aligned} \Phi_1^{\pm}(x;\epsilon) &= \left\{\begin{matrix}\sqrt{\epsilon+1}\\ \sqrt{|\epsilon|-1}\end{matrix}\right\} \mathrm{Re}\left[\mathrm{e}^{i\lambda^{\pm}}\,\mathrm{e}^{ikz}(-i2kz)^{iQ}\left(i\,\frac{Q}{k}\Phi_z + b\,\Phi_z(b+)\right)\right] , \\ \Phi_2^{\pm}(x;\epsilon) &= \left\{\begin{matrix}-\sqrt{\epsilon-1}\\ \sqrt{|\epsilon|+1}\end{matrix}\right\} \mathrm{Re}\left[i\,\mathrm{e}^{i\lambda^{\pm}}\,\mathrm{e}^{ikz}(-i2kz)^{iQ}\left(-i\,\frac{Q}{k}\Phi_z + b\,\Phi_z(b+)\right)\right] , \end{aligned} \tag{1.75}$$

где

$$\begin{aligned} &k=\sqrt{\epsilon^2-1}\ , \quad b=iQ\,(1-\epsilon/k)\ , \quad c=1+2iQ\ , \quad \Phi_z=\Phi(b,c,-i2kz)\ , \\ &\Phi_z(b+)=\Phi(b+1,c,-i2kz)\ . \end{aligned} \tag{1.76}$$

Коэффициенты $\lambda^{\pm}$ находятся из условий дираковски четного ($\Phi_2(0;\epsilon)=0$) или нечетного ($\Phi_1(0;\epsilon)=0$) продолжения решений (1.75) на отрицательную полуось $x<0$. В результате для четных решений

$$\mathrm{e}^{i2\lambda^{\pm}_{\mathrm{even}}} = \mathrm{e}^{-i2ka}(2ka)^{-i2Q}\,\frac{(b\,\Phi_a(b+))^* + i\,(Q/k)\,\Phi_a^*}{b\,\Phi_a(b+) - i\,(Q/k)\,\Phi_a}\ , \tag{1.77}$$

для нечетных

$$\mathrm{e}^{i2\lambda^{\pm}_{\mathrm{odd}}} = -\mathrm{e}^{-i2ka}(2ka)^{-i2Q}\,\frac{(b\,\Phi_a(b+))^* - i\,(Q/k)\,\Phi_a^*}{b\,\Phi_a(b+) + i\,(Q/k)\,\Phi_a}\ . \tag{1.78}$$

Для дискретного спектра ($|\epsilon|<1$) дираковская ВФ имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi_1(x;\epsilon) &= \sqrt{1+\epsilon}\,\mathrm{e}^{-\gamma z}\mathrm{Re}\left[\mathrm{e}^{i\lambda}(2\gamma z)^{iQ}\left(\frac{Q}{\gamma}\Phi(b,c,2\gamma z) + b\,\Phi(b+1,c,2\gamma z)\right)\right] , \\ \Phi_2(x;\epsilon) &= \sqrt{1-\epsilon}\,\mathrm{e}^{-\gamma z}\mathrm{Re}\left[\mathrm{e}^{i\lambda}(2\gamma z)^{iQ}\left(-\frac{Q}{\gamma}\Phi(b,c,2\gamma z) + b\,\Phi(b+1,c,2\gamma z)\right)\right] , \end{aligned} \tag{1.79}$$

где γ и b определены так же как в (1.25).

Четные уровни дискретного спектра находятся из условий убывания на бесконечности и $\Phi_2(0;\epsilon)=0$, что приводит к уравнению

$$\mathrm{Im}\left[(2\gamma a)^{iQ}\left(-\frac{Q}{\gamma}\Phi(b,c,2\gamma a) + b\,\Phi(b+1,c,2\gamma a)\right)\Gamma(b)\Gamma(c^*)\right] = 0\ , \tag{1.80}$$

а нечетные соответственно из условия на бесконечности и $\Phi_1(0;\epsilon)=0$, что дает

$$\operatorname{Im}\left[(2\gamma a)^{iQ}\left(\frac{Q}{\gamma}\Phi(b,c,2\gamma a)+b\,\Phi(b+1,c,2\gamma a)\right)\Gamma(b)\Gamma(c^*)\right]=0\ . \tag{1.81}$$

II. В этом случае $\lambda^\pm$ находятся из сшивки решений внутри ядра (1.30) и решений в кулоновском потенциале (1.75) (с заменой $z\to x$) в точке $x=R_0$. В результате для четных решений

$$\mathrm{e}^{i2\lambda^\pm_{\mathrm{even}}}=\mathrm{e}^{-i2kR_0}(2kR_0)^{-i2Q}\,\frac{(b\,\Phi_{R_0}(b+))^*\,[1-iW^\pm_{\mathrm{even}}]+i(Q/k)\Phi^*_{R_0}\,[1+iW^\pm_{\mathrm{even}}]}{b\,\Phi_{R_0}(b+)\,[1+iW^\pm_{\mathrm{even}}]-i(Q/k)\Phi_{R_0}\,[1-iW^\pm_{\mathrm{even}}]}\ , \tag{1.82}$$

где

$$W^+_{\mathrm{even}}=\sqrt{\frac{\epsilon+1}{\epsilon-1}}\sqrt{\frac{\epsilon+V_0-1}{\epsilon+V_0+1}}\ \mathrm{tg}(\xi R_0),$$

$$W^-_{\mathrm{even}}=\begin{cases}-\sqrt{\dfrac{|\epsilon|-1}{|\epsilon|+1}}\sqrt{\dfrac{-|\epsilon|+V_0-1}{-|\epsilon|+V_0+1}}\ \mathrm{tg}(\xi R_0), & -|\epsilon|+V_0>1\ ,\\[2ex] \sqrt{\dfrac{|\epsilon|-1}{|\epsilon|+1}}\sqrt{\dfrac{|\epsilon|-V_0+1}{|\epsilon|-V_0-1}}\ \mathrm{tg}(\xi R_0), & -|\epsilon|+V_0<-1\ ,\\[2ex] \sqrt{\dfrac{|\epsilon|-1}{|\epsilon|+1}}\sqrt{\dfrac{1-V_0+|\epsilon|}{1+V_0-|\epsilon|}}\ \mathrm{th}(|\xi|R_0), & |\epsilon+V_0|<1\ ,\end{cases} \tag{1.83}$$

для нечетных

$$\mathrm{e}^{i2\lambda^\pm_{\mathrm{even}}}=-\mathrm{e}^{-i2kR_0}(2kR_0)^{-i2Q}\,\frac{(b\,\Phi_{R_0}(b+))^*\left[1-iW^\pm_{\mathrm{odd}}\right]-i(Q/k)\Phi^*_{R_0}\left[1+iW^\pm_{\mathrm{odd}}\right]}{b\,\Phi_{R_0}(b+)\left[1+iW^\pm_{\mathrm{odd}}\right]+i(Q/k)\Phi_{R_0}\left[1-iW^\pm_{\mathrm{odd}}\right]}\ , \tag{1.84}$$

где

$$W^{+}_{\mathrm{odd}} = \sqrt{\frac{\epsilon-1}{\epsilon+1}}\sqrt{\frac{\epsilon+V_0+1}{\epsilon+V_0-1}}\ \mathrm{tg}(\xi R_0),$$

$$W^{-}_{\mathrm{odd}} = \begin{cases} -\sqrt{\frac{|\epsilon|+1}{|\epsilon|-1}}\sqrt{\frac{-|\epsilon|+V_0+1}{-|\epsilon|+V_0-1}}\ \mathrm{tg}(\xi R_0), & -|\epsilon|+V_0>1\ , \\ \sqrt{\frac{|\epsilon|+1}{|\epsilon|-1}}\sqrt{\frac{|\epsilon|-V_0-1}{|\epsilon|-V_0+1}}\ \mathrm{tg}(\xi R_0), & -|\epsilon|+V_0<-1\ , \\ -\sqrt{\frac{|\epsilon|+1}{|\epsilon|-1}}\sqrt{\frac{1+V_0-|\epsilon|}{1-V_0+|\epsilon|}}\ \mathrm{th}(|\xi|R_0), & |\epsilon+V_0|<1\ . \end{cases} \tag{1.85}$$

Уравнение для четных уровней дискретного спектра имеет вид

$$\mathrm{Im}\left[(2\gamma R_0)^{iQ}\left(-\frac{Q}{\gamma}\Phi(b,c,2\gamma R_0)\left[1+W_{\mathrm{even}}\right]+b\,\Phi(b+1,c,2\gamma R_0)\left[1-W_{\mathrm{even}}\right]\right)\times\right.$$
$$\left.\times\Gamma(b)\Gamma(c^*)\right]=0\ , \tag{1.86}$$

где

$$W_{\mathrm{even}} = \begin{cases} -\sqrt{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}}\sqrt{\frac{\epsilon+V_0-1}{\epsilon+V_0+1}}\ \mathrm{tg}(\xi R_0), & \epsilon+V_0>1\ , \\ \sqrt{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}}\sqrt{\frac{1-\epsilon-V_0}{1+\epsilon+V_0}}\ \mathrm{th}(|\xi|R_0), & |\epsilon+V_0|<1\ , \end{cases} \tag{1.87}$$

для нечетных –

$$\mathrm{Im}\left[(2\gamma R_0)^{iQ}\left(\frac{Q}{\gamma}\Phi(b,c,2\gamma R_0)\left[1+W_{\mathrm{odd}}\right]+b\,\Phi(b+1,c,2\gamma R_0)\left[1-W_{\mathrm{odd}}\right]\right)\times\right.$$
$$\left.\times\Gamma(b)\Gamma(c^*)\right]=0\ , \tag{1.88}$$

где

$$W_{\mathrm{odd}} = \begin{cases} \sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}}\sqrt{\frac{\epsilon+V_0+1}{\epsilon+V_0-1}}\ \mathrm{tg}(\xi R_0), & \epsilon+V_0>1\ , \\ \sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}}\sqrt{\frac{1+\epsilon+V_0}{1-\epsilon-V_0}}\ \mathrm{th}(|\xi|R_0), & |\epsilon+V_0|<1\ . \end{cases} \tag{1.89}$$

Отдельные фазовые сдвиги находятся из асимптотики решений (1.75) при $x \to \infty$ и содержат кулоновские логарифмы $Q\,(\epsilon/k)\,\ln(2k(|x|+a))$ для модели I и $Q\,(\epsilon/k)\,\ln(2k|x|)$ для II, которые в суммарной фазе

$$\delta_{\rm tot}(k) = \left(\delta^{+}_{\rm even} + \delta^{+}_{\rm odd} + \delta^{-}_{\rm even} + \delta^{-}_{\rm odd}\right)(k) \ , \tag{1.90}$$

взаимно сокращаются, поэтому в (1.90) для отдельных фаз сразу оставляем только регулярную при $x \to \infty$ часть

$$\delta^{\pm}_{\sigma}(k) = \mathrm{Arg}\left[\mathrm{e}^{i\phi^{\pm}_{\sigma}}\left(\mathrm{e}^{\pi Q}\frac{\Gamma(c)\mathrm{e}^{i\lambda^{\pm}_{\sigma}}}{(\epsilon+k)\Gamma[iQ(1+\epsilon/k)]} + \frac{\Gamma(c^{*})\mathrm{e}^{-i\lambda^{\pm}_{\sigma}}}{\Gamma[-iQ(1-\epsilon/k)]}\right)\right] \ , \tag{1.91}$$
$$\sigma = \mathrm{even}, \mathrm{odd} \ ,$$

где для модели I $\phi^{+}_{\rm even} = ka$, $\phi^{-}_{\rm even} = ka + \pi$, $\phi^{\pm}_{\rm odd} = ka \pm \pi/2$, а для II слагаемое ka в фазах $\phi^{\pm}_{\sigma}$ отсутствует. При этом асимптотика фаз (1.91) при $k \to \infty$ будет содержать логарифмические члены $\mp Q\,(\epsilon/k)\,[\ln(2ka(\text{или}R_0)) - 1]$, которые также взаимно сокращаются, и в результате в $\delta_{\rm tot}(k)$ остается только регулярная часть, убывающая $\sim 1/k^3$. Более конкретно, УФ асимптотика $\delta_{\rm tot}(k)$ в модели I имеет вид

$$\delta_{\rm tot}(k \to \infty) = -\frac{2Q^2}{k^3 a}\left[1 + \frac{1+4Q^2}{12(ka)^2}\right] + \mathrm{O}(1/k^7) \ , \tag{1.92}$$

а в модели II –

$$\delta_{\rm tot}(k \to \infty) = -\frac{4Q^2}{k^3 R_0}\left[1 + \frac{1+16Q^2}{24(kR_0)^2}\right] + \mathrm{O}(1/k^6) \ . \tag{1.93}$$

Следует отметить, что вывод асимптотик (1.92), (1.93) за разумное время возможен только с использованием систем аналитических вычислений. $\delta_{\rm tot}(k)$ регулярно и при $k \to 0$, поскольку все сингулярные члены в инфракрасных асимптотиках $\pm\,[(1-\ln[Q/k])Q/k - \pi/4 - kQ\ln[Q/k]/2]$ для $\sigma = \mathrm{even}$ и $\pm\,[(1-\ln[Q/k])Q/k + \pi/4 - kQ\ln[Q/k]/2]$ для $\sigma = \mathrm{odd}$ в фазах верхнего и нижнего континуумов также сокращаются. Точные инфракрасные асимптотики для $\delta_{\rm tot}(k)$ в моделях I и II находятся с использованием представления Тэйлора для вырожденных гипергеометрических функций [67], [72] и имеют следующий вид.

Для потенциала I

$$\delta_{\rm tot}(k\to 0)=\mathrm{Arg}\left[\left(\mathrm{e}^{i\varphi^+_{\rm even}}-\mathrm{e}^{-2\pi Q}\mathrm{e}^{-i\varphi^+_{\rm even}}\right)\left(\mathrm{e}^{i\varphi^+_{\rm odd}}-\mathrm{e}^{-2\pi Q}\mathrm{e}^{-i\varphi^+_{\rm odd}}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\sin\left(\varphi^-_{\rm even}\right)\sin\left(\varphi^-_{\rm odd}\right)\right]+\mathrm{O}(k)\ , \quad (1.94)$$

где

$$\begin{aligned}
\varphi^+_{\rm even}&=-\mathrm{Arg}\left[-J_{2iQ}\left(\sqrt{8Qa}\right)\right]\ ,\\
\varphi^+_{\rm odd}&=-\mathrm{Arg}\left[\sqrt{2Qa}\,J_{1+2iQ}\left(\sqrt{8Qa}\right)-iQJ_{2iQ}\left(\sqrt{8Qa}\right)\right]\ ,\\
\varphi^-_{\rm odd}&=-\mathrm{Arg}\left[J_{2iQ}\left(\sqrt{-8Qa}\right)\right]\ ,\\
\varphi^-_{\rm even}&=-\mathrm{Arg}\left[\sqrt{-2Qa}\,J_{1+2iQ}\left(\sqrt{-8Qa}\right)-iQJ_{2iQ}\left(\sqrt{-8Qa}\right)\right]\ .
\end{aligned} \quad (1.95)$$

Для потенциала II

$$\delta_{\rm tot}(k\to 0)=\mathrm{Arg}\left[-\left(\mathrm{e}^{i\varphi^+_{\rm even}}-\mathrm{e}^{-2\pi Q}\mathrm{e}^{-i\varphi^+_{\rm even}}\right)\left(\mathrm{e}^{i\varphi^+_{\rm odd}}-\mathrm{e}^{-2\pi Q}\mathrm{e}^{-i\varphi^+_{\rm odd}}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\cos\left(\varphi^-_{\rm even}\right)\cos\left(\varphi^-_{\rm odd}\right)\right]+\mathrm{O}(k^2)\ , \quad (1.96)$$

где

$$\begin{aligned}
\varphi^+_{\rm even}&=-\mathrm{Arg}\left[2QJ_{2iQ}\left(\sqrt{8QR_0}\right)+w^+_{\rm even}\left(\sqrt{2QR_0}\,J_{1+2iQ}\left(\sqrt{8QR_0}\right)-\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.-iQJ_{2iQ}\left(\sqrt{8QR_0}\right)\right)\right]\ ,\\
\varphi^+_{\rm odd}&=-\mathrm{Arg}\left[-\sqrt{2QR_0}\,J_{1+2iQ}\left(\sqrt{8QR_0}\right)+iQJ_{2iQ}\left(\sqrt{8QR_0}\right)+\right.\\
&\qquad\left.w^+_{\rm odd}2QJ_{2iQ}\left(\sqrt{8QR_0}\right)\right]\ ,\\
\varphi^-_{\rm even}&=-\mathrm{Arg}\left[-i\sqrt{-2QR_0}\,J_{1+2iQ}\left(\sqrt{-8QR_0}\right)-QJ_{2iQ}\left(\sqrt{-8QR_0}\right)-\right.\\
&\qquad\left.-w^-_{\rm even}2iQJ_{2iQ}\left(\sqrt{-8QR_0}\right)\right]\ ,\\
\varphi^-_{\rm odd}&=-\mathrm{Arg}\left[2iQJ_{2iQ}\left(\sqrt{-8QR_0}\right)-w^-_{\rm odd}\left(i\sqrt{-2QR_0}\,J_{1+2iQ}\left(\sqrt{-8QR_0}\right)+\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.+QJ_{2iQ}\left(\sqrt{-8QR_0}\right)\right)\right]\ ,
\end{aligned} \quad (1.97)$$

а коэффициенты $w_\sigma^\pm$ определяются следующим образом

$$
\begin{aligned}
w^+_{\text{even}} &= \sqrt{\frac{4V_0}{V_0+2}}\ \mathrm{tg}\left[\sqrt{(V_0+1)^2-1}\,R_0\right]\ ,\\
w^+_{\text{odd}} &= \sqrt{\frac{V_0+2}{4V_0}}\ \mathrm{tg}\left[\sqrt{(V_0+1)^2-1}\,R_0\right]\ ,
\end{aligned}
\tag{1.98}
$$

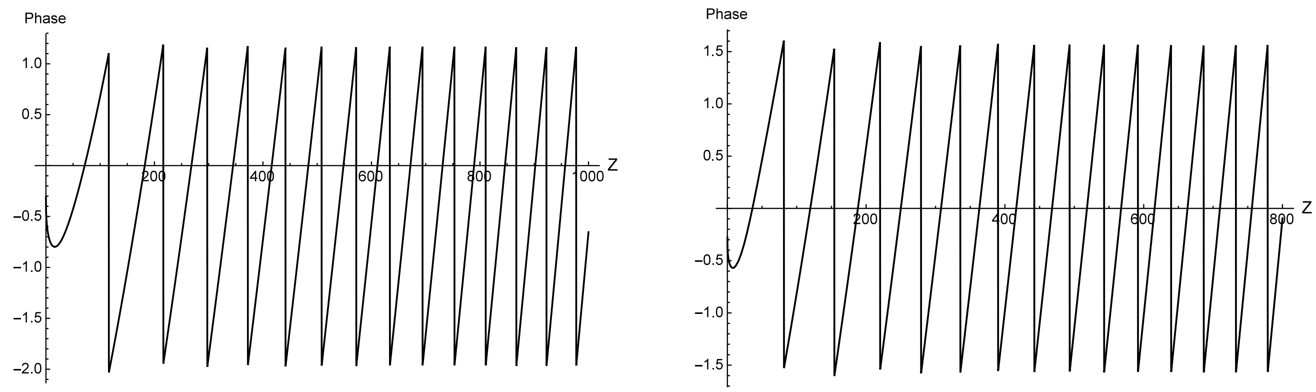
если $V_0 \geqslant 2$, то

$$
\begin{aligned}
w^-_{\text{even}} &= -\sqrt{\frac{V_0-2}{4V_0}}\ \mathrm{tg}\left[\sqrt{(V_0-1)^2-1}\,R_0\right]\ ,\\
w^-_{\text{odd}} &= -\sqrt{\frac{4V_0}{V_0-2}}\ \mathrm{tg}\left[\sqrt{(V_0-1)^2-1}\,R_0\right]\ ,
\end{aligned}
\tag{1.99}
$$

а если $V_0 < 2$, то

$$
\begin{aligned}
w^-_{\text{even}} &= \sqrt{\frac{2-V_0}{4V_0}}\ \mathrm{th}\left[\sqrt{1-(V_0-1)^2}\,R_0\right]\ ,\\
w^-_{\text{odd}} &= -\sqrt{\frac{4V_0}{2-V_0}}\ \mathrm{th}\left[\sqrt{1-(V_0-1)^2}\,R_0\right]\ .
\end{aligned}
\tag{1.100}
$$

Отметим, что по крайней мере в рассмотренном диапазоне параметров внешних источников формулами (1.94–1.100) значение $\delta_{\text{tot}}(0)$ фиксируется однозначно и всегда находится в интервале $-\pi < \delta_{\text{tot}}(0) < \pi$, что проверяется через явное восстановление $\delta_{\text{tot}}(k)$ на всем интервале, начиная с УФ асимптотики (1.92), (1.93). Поведение $\delta_{\text{tot}}(0)$ как функции Z показано на рис. 1.9.



а б

Рисунок 1.9 — $\delta_{\text{tot}}(0)$ в модели I при $a = 0.1$ (а) в II при $R_0 = 0.1$ (б).

1.4.2 Результаты численных расчетов непертурбативной вакуумной энергии в 1+1D

Типичное поведение $\delta_{\rm tot}(k)$ как функции волнового числа показано на рис. 1.10 для модели I при $a = 0.1$. При $Z = 115$ первое критическое $Z_{cr,1} \simeq 115.999$ еще не достигается, поэтому $\delta_{\rm tot}(k)$ демонстрирует гладкое поведение на всем интервале изменения волнового числа. При $Z = 117$ первый четный дискретный уровень уже достиг нижнего континуума, поэтому за счет полюса функции Грина на втором энергетическом листе с $\epsilon = \epsilon_1 + i\epsilon_2,\ \epsilon_1 < -1,\ \epsilon_2 > 0$ и соответственно в нижней полуплоскости по волновому числу с $k = k_1 - ik_2,\ k_1 > 0,\ k_2 > 0$, возникает первый и еще достаточно узкий (позитронный) упругий резонанс. При $Z = 298$ в нижний континуум опустилось уже три уровня, которым соответствуют три резонанса, причем последний резонанс оказывается предельно узким, поскольку второй четный уровень (и третий по общему счету) оказывается на пороге нижнего континуума при $Z_{cr,3} \simeq 297.24$, а два первых резонанса уже стали существенно менее выраженными. Быстрое уширение резонансов (и тем самым расплывание соответствующих вакуумных оболочек) с ростом Z вообще является характерной чертой таких непертурбативных эффектов поляризации вакуума в 1+1D. Аналогичное поведение $\delta_{\rm tot}(k)$ имеет место и в модели II. Различие проявляется только в значениях критических Z для дискретных уровней. В результате в (1.68) как фазовый интеграл, так и суммарная энергия связи дискретных уровней всегда сходятся без дополнительной регуляризации кулоновской асимптотики внешнего потенциала и вычисляются с использованием стандартных численных методов. Следует также отметить, что УФ асимптотика фаз (1.92), (1.93) фактически начинает работать при $ka \gg 1$ и $kR_0 \gg 1$ соответственно, и это обстоятельство играет существенную роль при вычислении фазового интеграла в (1.68), поскольку позволяет существенно упростить интегрирование на верхнем пределе при асимптотически больших k.

Отметим теперь основные непертурбативные эффекты в поведении фазового интеграла и полной энергии связи дискретных уровней $\sum_n (1-\epsilon_n)$ в (1.68) для закритической области. Как следует из рис. 1.9, $\delta_{\rm tot}(0)$ осциллирует в пределах $-\pi < \delta_{\rm tot}(0) < \pi$, при этом каждый очередной резонанс вызывает отрицательный скачок фазы на π, после чего $\delta_{\rm tot}(0)$ снова плавно увеличивается на

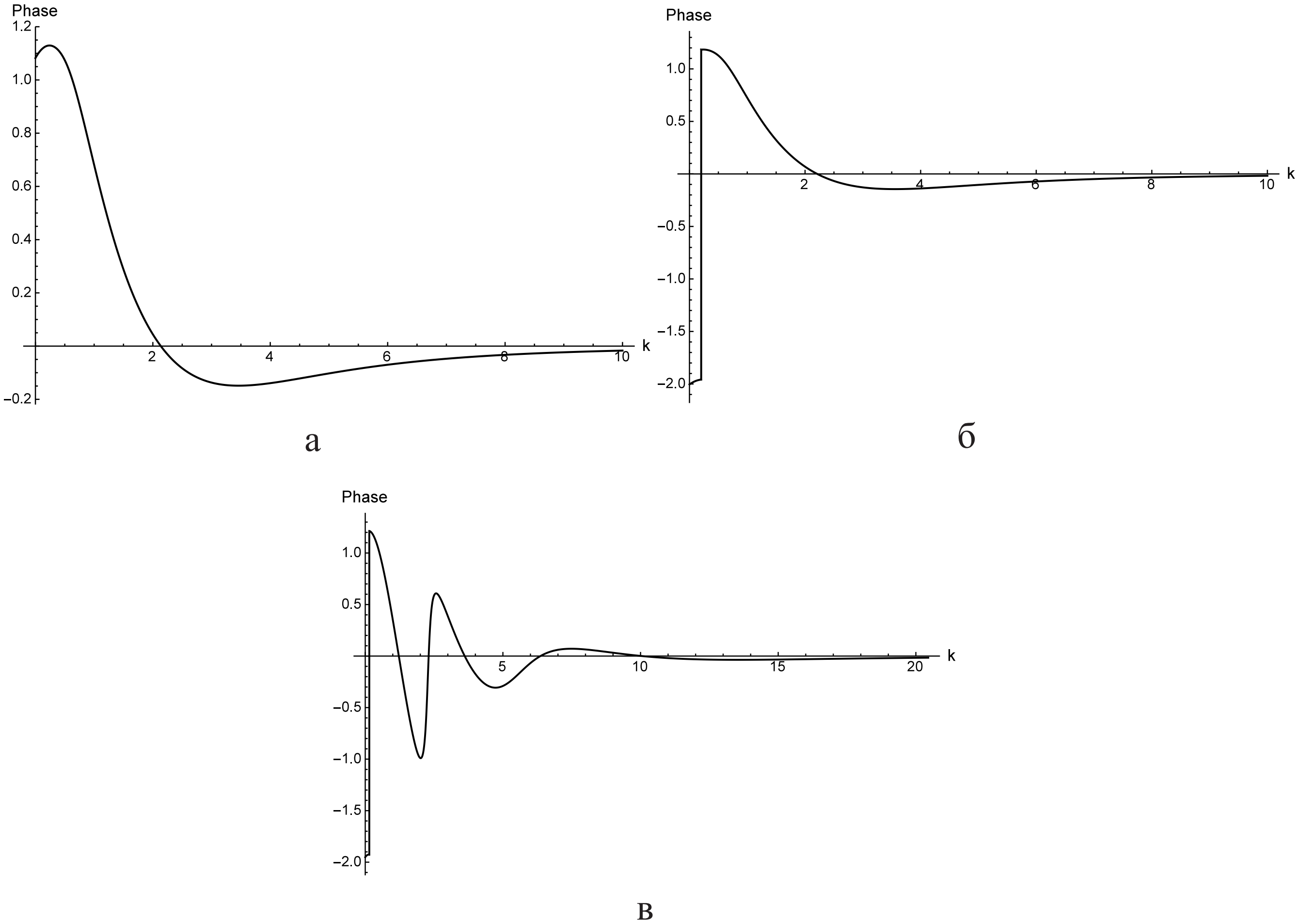


Рисунок 1.10 — $\delta_{\rm tot}(k)$ для (а) $Z = 115$, (б) $Z = 117$, (в) $Z = 298$ в модели I при $a = 0.1$.

те же π. В результате фазовый интеграл при появлении очередного резонанса зарабатывает отрицательный скачок производной, и становится осциллирующей медленно убывающей функцией Z. Энергия связи дискретных уровней, наоборот, с ростом Z растет, поскольку с увеличением Z растет энергия связи каждого уровня, за исключением критических Z, когда очередной уровень достигает нижнего континуума и возникает скачок энергии связи на $(-2\times mc^2)$. При этом в 1+1D в закритической области доминантным эффектом в $\mathcal{E}_{\rm VP}$ до перенормировки оказывается именно поведение суммы дискретных уровней, фазовый интеграл дает в $\mathcal{E}_{\rm VP}$ существенно меньший вклад. Подчеркнем, что такое поведение фазового интеграла и $\mathcal{E}_{\rm VP}$ специфично для 1+1D.

Следующим фактором, влияющим на поведение $\mathcal{E}^{\rm ren}_{\rm VP}$ как функции Z, является значение перенормировочного коэффициента η, поскольку этот коэффициент через (1.72) регулирует поведение $\mathcal{E}^{\rm ren}_{\rm VP}$ в $\mathrm{O}(Z^2)$. Более того, в 1+1D этот вклад в $\mathcal{E}^{\rm ren}_{\rm VP}$ в закритической области оказывается доминирующим, поскольку сумма дискретных уровней и тем самым неперенормированная $\mathcal{E}_{\text{VP}}$ растут в этой области $\sim Z^p$, $1 < p < 2$. Для внешних источников типа I или II непосредственно из определения η (1.73), (1.74) и очевидных размерных аргументов следует, что в обоих случаях асимптотика η при $a\ (R_0) \to 0$ и $a\ (R_0) \to \infty$ будет иметь вид $\text{Const}/a(R_0)$. Поведение η в переходной области между асимптотиками в зависимости от параметров внешнего потенциала показано на рис. 1.11.

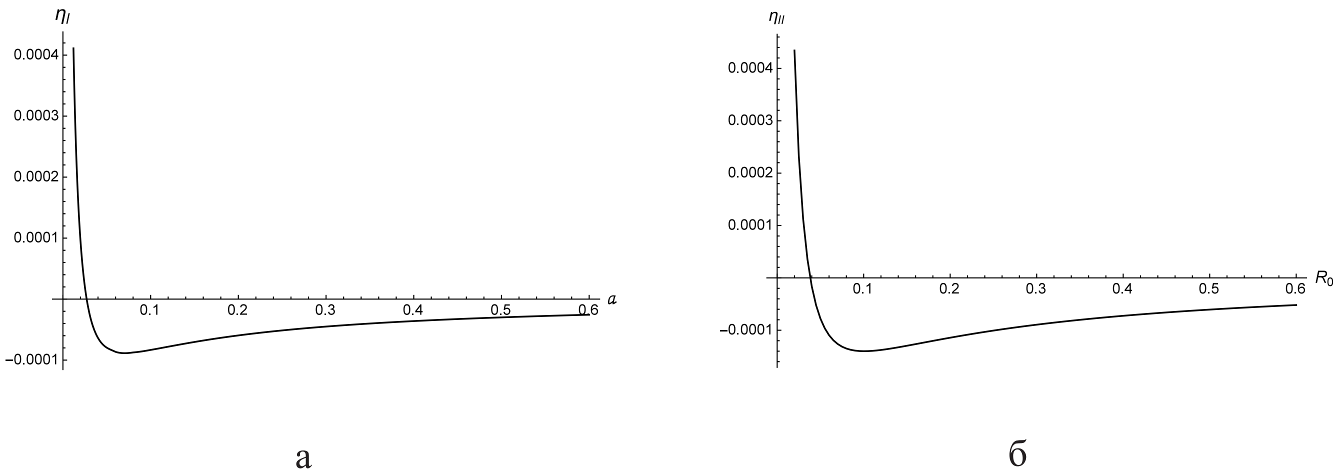


Рисунок 1.11 — Перенормировочный коэффициент η в модели I (а), в II (б).

Разберем теперь роль η на примере модели I. Пусть a_{cr} – такое значение параметра потенциала (1.5), при котором $\eta_{\text{I}}(a_{cr}) = 0$. Тогда при $a < a_{cr}$ перенормировочный коэффициент большой положительный, и в результате в $\mathcal{E}_{\text{VP}}^{\text{ren}}$ доминирует возрастающая $\text{O}(Z^2)$-компонента. В то же время, при $a > a_{cr}$ перенормировочный коэффициент быстро уходит в отрицательную область, в результате слагаемое ηZ^2 в $\mathcal{E}_{\text{VP}}^{\text{ren}}$ будет убывать, а поскольку в закритической области неперенормированная $\mathcal{E}_{\text{VP}}$ растет медленнее, чем Z^2, то при $Z \gg Z_{cr,1}$ возникает эффект понижения вакуумной энергии вплоть до больших отрицательных значений. При $a \simeq a_{cr}$ все определяется конкуренцией непертурбативных эффектов в фазовом интеграле, которые вакуумную энергию стремятся понизить, и энергии связи дискретного спектра, которая действует в обратную сторону, поэтому поведение $\mathcal{E}_{\text{VP}}^{\text{ren}}(Z)$ будет существенно зависеть от конкретного вида потенциала. В моделях I и II вклад дискретного спектра оказывается доминирующим, и поэтому $\mathcal{E}_{\text{VP}}^{\text{ren}}(Z)$ растет, но уже не квадратично, а более медленно, $\sim Z^\nu$, $1 < \nu < 2$.

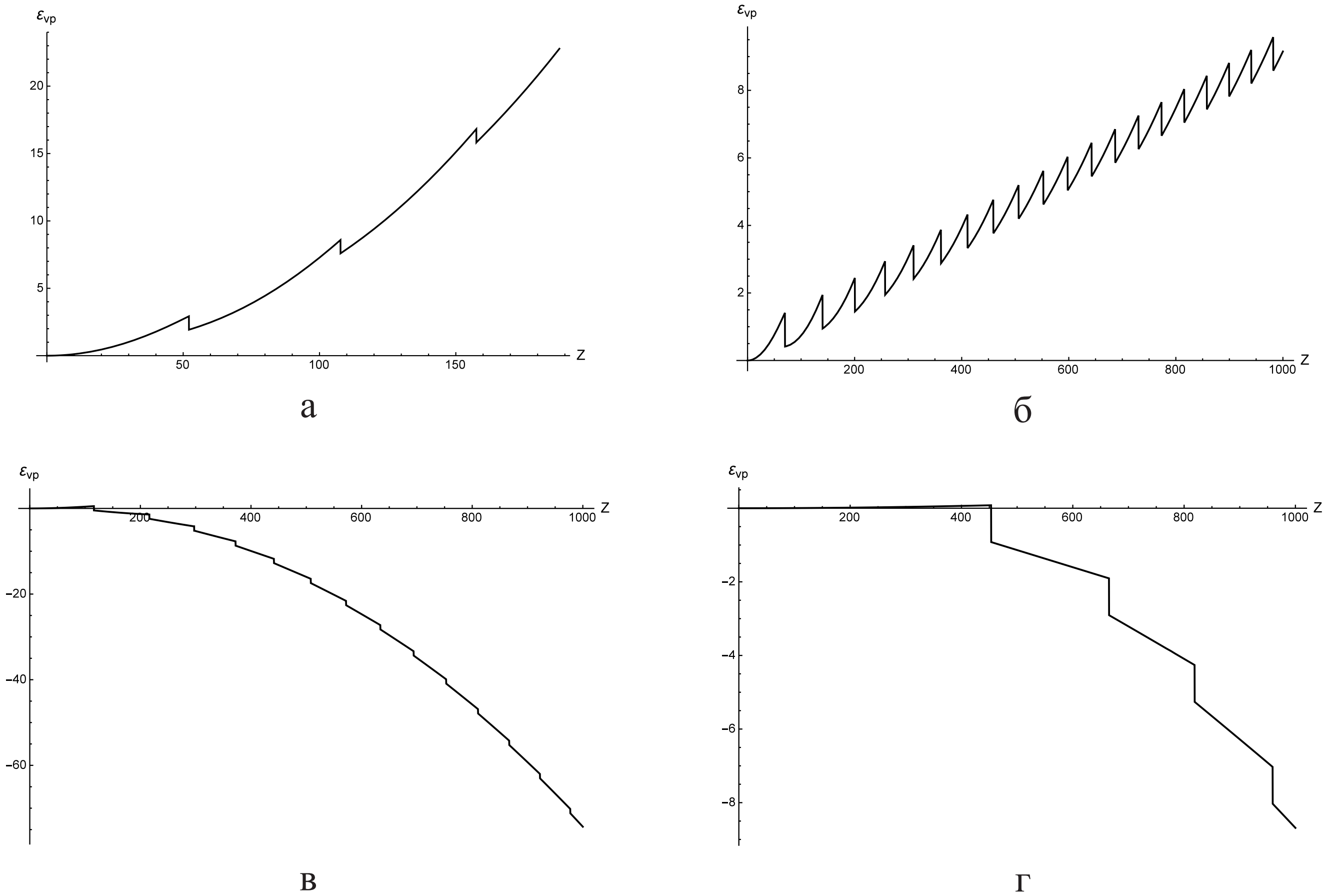


Рисунок 1.12 — $\mathcal{E}_{\mathrm{VP}}^{\mathrm{ren}}(Z)$ в модели I при (а) $a = 0.01$, (б) $a = a_{cr} \simeq 0.027$, (в) $a = 0.1$, (г) $a = 1.0$.

Расчеты, проведенные для моделей I и II для достаточно широкого диапазона параметров, полностью соответствуют этим общим выводам. На рис. 1.12 показано поведение $\mathcal{E}_{\mathrm{VP}}^{\mathrm{ren}}(Z)$ в модели I для $a = 0.01$, $a_{cr} \simeq 0.027$, 0.1, 1.0. Сразу отметим, что число оболочек для этих значений a оценивается как $\sim 0.006\, Z^{1.2}$, $0.004\, Z^{1.24}$, $0.002\, Z^{1.3}$, $0.00002\, Z^{1.75}$ соответственно. При $a = 0.01$ перенормировочный параметр $\eta \simeq 0.0006$, и вакуумная энергия как функция Z демонстрирует квадратичный рост, сначала за счет пертурбативного вклада, а при $Z > Z_{cr,1}$ за счет члена ηZ^2. При $a = a_{cr}$ перенормировочный член исчезает, и доминирующий вклад в $\mathcal{E}_{\mathrm{VP}}^{\mathrm{ren}}(Z)$ при $Z > Z_{cr,1}$ возникает из энергии связи дискретных уровней, которая (при убранных скачках) ведет себя $\sim 0.009\, Z^{1.17}$. При $a = 0.1$, 1.0, наоборот, $\eta \simeq -0.00008$ и $\simeq -0.000016$ соответственно, неперенормированные $\mathcal{E}_{\mathrm{VP}}$ (без скачков) аппроксимируются как $\sim 0.005\, Z^{1.2}$ и $\sim 0.0009\, Z^{1.37}$, поэтому за счет отрицательного квадратичного перенормировочного члена $\mathcal{E}_{\mathrm{VP}}^{\mathrm{ren}}(Z)$ демонстрирует убывание вплоть до значительных отрицательных значений. При этом на рис. 1.12в,г четко видно, что сначала до первого критического $Z_{cr,1}$

имеет место квадратичный рост, обусловленный пертурбативными эффектами, которые при $Z > Z_{cr,1}$ деградируют в соответствии с описанным выше сценарием, после чего основной вклад начинает давать перенормировочный член ηZ^2 и $\mathcal{E}_{\rm VP}^{\rm ren}(Z)$ убывает почти по квадратичному закону.

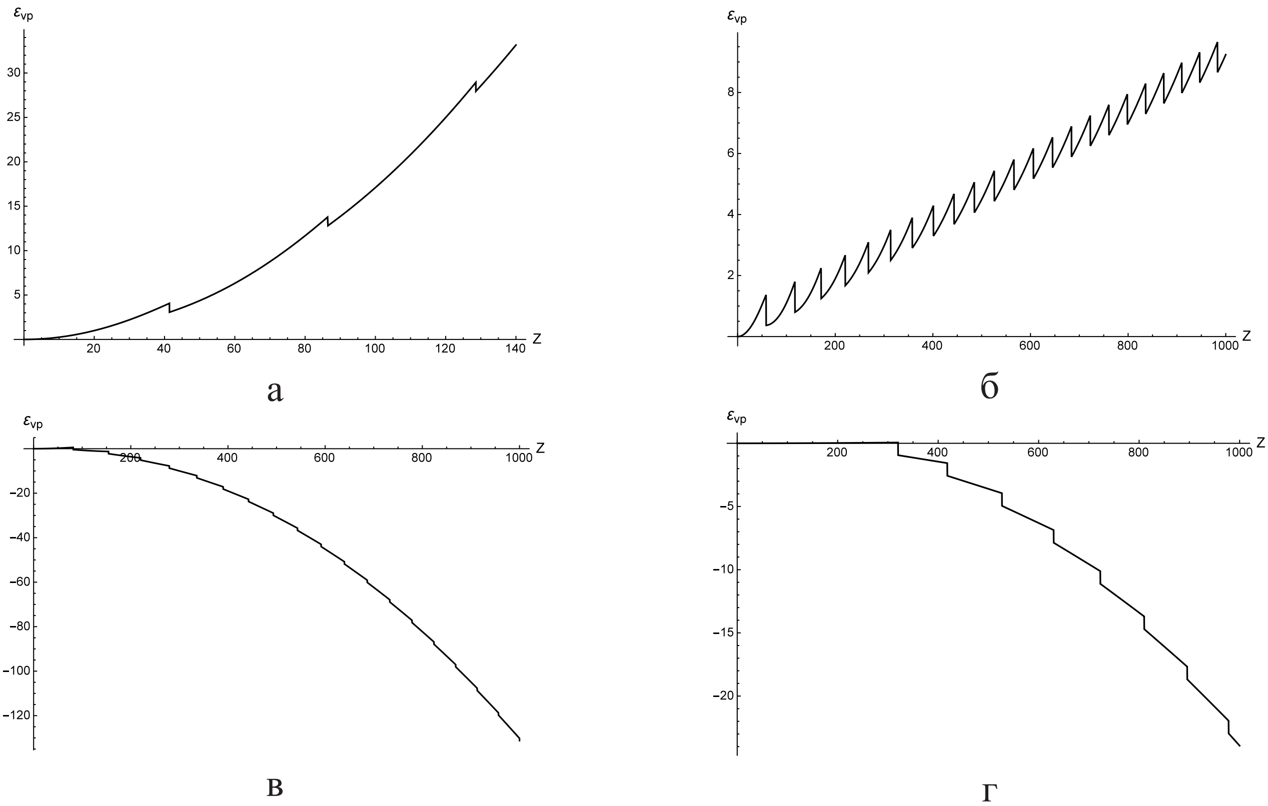


Рисунок 1.13 — $\mathcal{E}_{\rm VP}^{\rm ren}(Z)$ в модели II при (а) $R_0 = 0.01$, (б) $R_0 = R_{0,cr} \simeq 0.038$, (в) $R_0 = 0.1$, (г) $R_0 = 1.0$.

Аналогичные результаты имеют место и в модели II. $\mathcal{E}_{\rm VP}^{\rm ren}(Z)$ показана для этого случая на рис. 1.13. Вся разница заключается в том, что при тех же значениях параметра R_0, как и для параметра a на рис. 1.12, опускание дискретных уровней в нижний континуум происходит при меньших Z_{cr}.

Отдельно остановимся на поведении вакуумной энергии для внешнего источника типа II с зависящим от Z параметром R_0:

$$R_0(Z) = 1.2\,(2.5Z)^{1/3}\,\text{Фм}. \tag{1.101}$$

Такая зависимость $R_0(Z)$ имитирует аналогичную 3+1D задачу, в которой первый $1s_{1/2}$-уровень достигает нижнего континуума при $Z_{cr,1} \simeq 170$. При этом перенормировочный коэффициент η через R_0 также становится функцией Z, которая возникает из функции $\eta(R_0)$, приведенной на рис. 1.11б, при подстановке в нее зависимости (1.101). $\mathcal{E}_{\mathrm{VP}}^{\mathrm{ren}}(Z)$ для этого случая показана на рис. 1.14 и демонстрирует нелинейный переход от квадратичного роста при малых Z и R_0 через плато при $Z \sim 400-500$ к области $Z \sim 600-1000$, когда за счет перенормировочного члена $\mathcal{E}_{\mathrm{VP}}^{\mathrm{ren}}(Z)$ начинает почти квадратично опускаться в область отрицательных значений. Причем с ростом Z скорость убывания $\mathcal{E}_{\mathrm{VP}}^{\mathrm{ren}}(Z)$ за счет зависимости $\eta(R_0)$ при больших R_0 будет стремиться не к $\mathrm{O}(Z^2)$, а к $\mathrm{O}(Z^{5/3})$, и вклад от дискретных уровней становится более заметным.

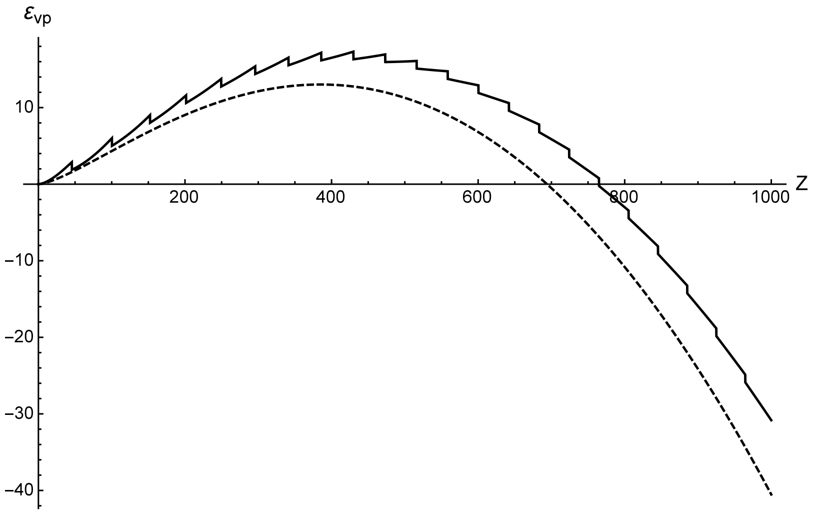


Рисунок 1.14 — $\mathcal{E}_{\mathrm{VP}}^{\mathrm{ren}}(Z)$ в модели II при $R_0(Z) = 1.2\,(2.5Z)^{1/3}$ Фм. Пунктиром показано поведение члена ηZ^2.

1.5 Заключение к главе 1

В заключение необходимо прежде всего отметить, что собственно вычисление вакуумной энергии при УФ перенормировке через фермионную петлю (рис. 1.1) может быть проведено исключительно на основе соотношений (1.68), (1.72) и (1.73) без обращения к вакуумной плотности и оболочечным эффектам. Эффект убывания $\mathcal{E}_{\mathrm{VP}}^{\mathrm{ren}}(Z)$ в закритической области при этом имел бы вполне корректное обьяснение через отрицательный вклад от перенормировочного члена ηZ^2. Однако по существу убывание $\mathcal{E}_{\mathrm{VP}}^{\mathrm{ren}}$ в закритической области обусловлено непертурбативными изменениями в вакуумной плотности при $Z > Z_{cr,1}$ за счет дискретных уровней, достигающих нижнего континуума. В 1+1D в силу специфики одномерной задачи Дирака-Кулона рост числа вакуумных оболочек $\sim Z^s$,

$1 < s < 2$, по крайней мере в рассмотренном диапазоне внешних параметров. Поэтому их хватает только на то, чтобы понизить в закритической области скорость роста неперенормированной $\mathcal{E}_{\mathrm{VP}}$ до $\sim Z^{\nu}$, $1 < \nu < 2$, и в результате доминирующий вклад возникает от перенормировочного члена ηZ^2. В 2+1 и 3+1D оболочечный эффект выражен гораздо более явно. Такое поведение $\mathcal{E}_{\mathrm{VP}}^{\mathrm{ren}}(Z)$ в закритической области показывает правильность вывода о превращении нейтрального вакуума в заряженный, который оказывается основным состоянием электрон-позитронного поля в таких полях [5; 7; 11; 58; 59], и тем самым о спонтанном излучении вакуумных позитронов, которые должны возникать при рождении очередной вакуумной оболочки вследствие закона сохранения полного заряда.

Следует также отметить, что в данной работе, как и в других работах по поляризации вакуума сверхсильным кулоновским полем [60—63], вклад процессов с обменом виртуальными фотонами не рассматривался. При их учете в вакуумных эффектах возникают диаграммы типа

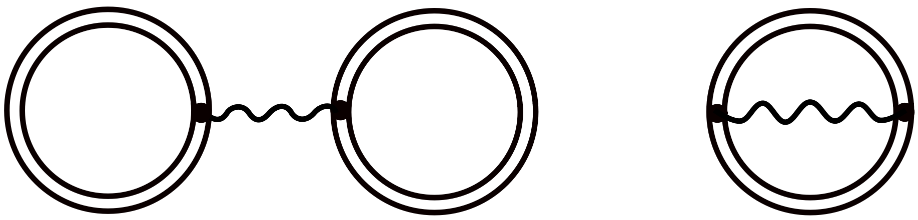


Рисунок 1.15 — Вакуумные диаграммы с однофотонным обменом. Двойная линия обозначает точный фермионный пропагатор во внешнем кулоновском поле.

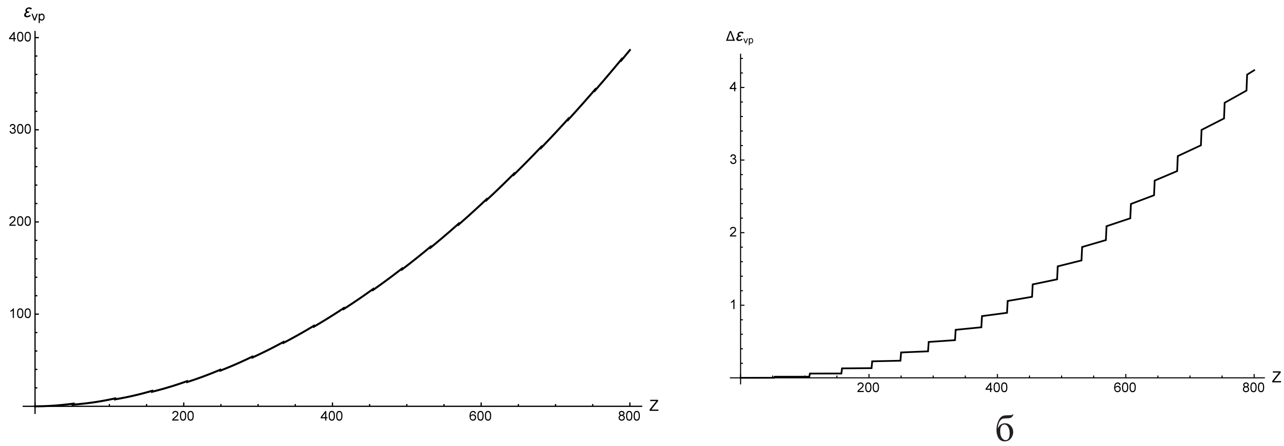
Однако их вычисление вне рамок теории возмущений по внешнему полю представляет большие трудности и к настоящему времени еще не выполнено [73]. Отметим также, что левая (одночастично приводимая) диаграмма при вычислении вакуумной энергии учитываться не должна, поскольку эффективное действие и тем самым $\mathcal{E}_{\mathrm{VP}}$ содержат вклады только от сильно связных (одночастично неприводимых) диаграмм [74].

Простейшая оценка роли вакуумных эффектов с учетом вклада виртуальных фотонов может быть проведена на основе кулоновской электростатической энергии перенормированной вакуумной плотности с таким же обрезанием, что и в исходном потенциале внешнего источника (1.5)

$$\Delta\mathcal{E}_{\mathrm{VP}}^{\mathrm{ren}} = \frac{1}{2}\int dx\, dx'\, \frac{\rho_{\mathrm{VP}}^{\mathrm{ren}}(x)\, \rho_{\mathrm{VP}}^{\mathrm{ren}}(x')}{|x-x'|+a}\ . \tag{1.102}$$

Явный расчет $\Delta\mathcal{E}_{\mathrm{VP}}^{\mathrm{ren}}$ для модели I показывает, что по крайней мере на уровне такой оценки вклад в вакуумную энергию от однофотонного обмена оказывается достаточно малым, примерно на два порядка меньше (см. рис. 1.16), чем от фермионной петли. Для II оценка для фотонного вклада также может быть основана на (1.102), но при этом надо вводить соответствующее обрезание и в исходный потенциал модели (1.6), и поэтому здесь рассматриваться не будет.

На рис. 1.16 показана $\Delta\mathcal{E}_{\mathrm{VP}}^{\mathrm{ren}}$ как функция Z при $a = 0.01$ в сравнении с $\mathcal{E}_{\mathrm{VP}}^{\mathrm{ren}}$, рассчитанной в одной петле согласно (1.68), (1.72) и (1.73). На рис. 1.17 показана $\Delta\mathcal{E}_{\mathrm{VP}}^{\mathrm{ren}}$ как функция Z при $a = 0.1,\ 1.0$. $\mathcal{E}_{\mathrm{VP}}^{\mathrm{ren}}(Z)$ для этих значений параметра кулоновского обрезания и в том же диапазоне по Z уже приведены на рис. 1.12в,г. Следует также отметить, что из рис. 1.16б, 1.17 снова четко



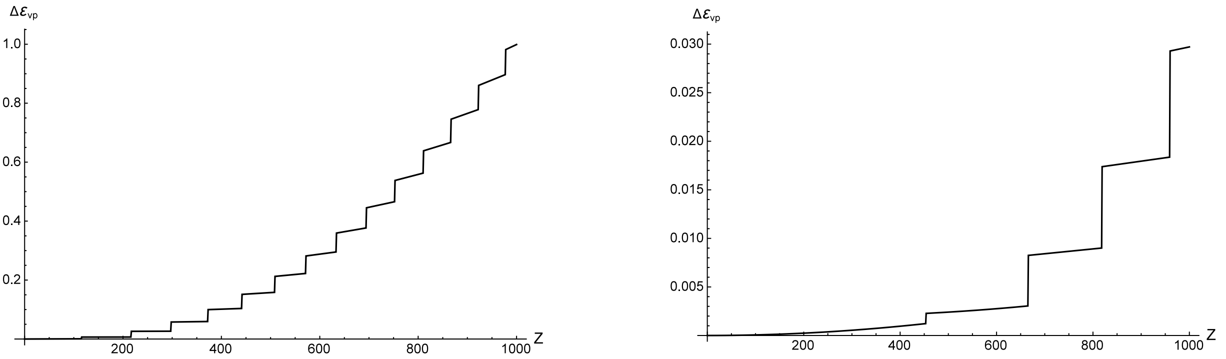
б

а

Рисунок 1.16 — $\mathcal{E}_{\mathrm{VP}}^{\mathrm{ren}}(Z)$, $\Delta\mathcal{E}_{\mathrm{VP}}^{\mathrm{ren}}(Z)$ при $a = 0.01$.

видно, что и в эффектах, обусловленных виртуальными фотонами, основной вклад порождается вакуумными оболочками.

Таким образом, в 1+1D поляризация вакуума в закритической области при соответствующих параметрах кулоновских источников может приводить к существенно отличному от пертурбативного поведению вакуумной энергии. Специфика 1+1D состоит в том, что скорость убывания $\mathcal{E}_{\mathrm{VP}}^{\mathrm{ren}}(Z)$ в рассмотренном диапазоне кулоновских источников не превышает $-|\eta|Z^2$. Но это обусловлено исключительно медленным ростом числа вакуумных оболочек в одномерном случае. При этом по понятным причинам мы опускаем обсуждение вполне за-



а б

Рисунок 1.17 — $\Delta\mathcal{E}_{\mathrm{VP}}^{\mathrm{ren}}(Z)$ при $a = 0.1,\, 1.0$

конного вопроса о том, насколько такая сверхкритическая область физически реализуема (как и вообще вся одномерная картина для релятивистского водородоподобного атома).

Глава 2. Вакуумная плотность заряда и вакуумная энергия в двумерных (2+1D) сверхкритических системах Дирака-Кулона

2.1 Введение к главе 2

Аналогичные по существу эффекты поляризации вакуума, рассмотренные в главе 1, следует ожидать и в 2+1D (планарные гетероструктуры типа графена [21; 24; 27; 75—79]). При этом в случае графена роль эффективного электрон-позитронного вакуума играет сам графен, аналогами виртуальных пар являются электроны и дырки, а эффективная электромагнитная константа связи $\alpha_g \sim 1$.

В главе 1 на основе оригинальной комбинации аналитических методов, компьютерной алгебры и численных расчетов было показано, что при соответствующих параметрах задачи в одномерной системе Дирака-Кулона нелинейные эффекты в закритической области могут приводить к существенно отличному от пертурбативного квадратичного роста поведению вакуумной энергии вплоть до (почти) квадратичного убывания в отрицательную область $\sim -|\eta| Z^2$. В этой главе эти методы применяются для исследования аналогичных эффектов поляризации вакуума в закритической области для модельной 2+1D системы Дирака-Кулона. Более конкретно, мы рассмотрим поведение вакуумной плотности $\rho_{\mathrm{VP}}(\vec{r})$ планарной электрон-позитронной системы во внешнем сверхкритическом кулоновском поле в виде проекции на плоскость потенциала равномерно заряженной сферы с радиусом R_0

$$A_0^{\mathrm{ext}}(\vec{r}) = Z|e| \left[\frac{1}{R_0}\theta\left(R_0 - r\right) + \frac{1}{r}\theta\left(R_0 \leqslant r \leqslant R_1\right) \right] \tag{2.1}$$

с учетом (возможного) обрезания кулоновской асимптотики на некотором масштабе $R_1 > R_0$.

В то же время, вакуумная энергия $\mathcal{E}_{\mathrm{VP}}$ будет рассмотрена как для неэкранированного источника, так и при модифицированном обрезании кулоновской асимптотики вида

$$A_0^{\mathrm{ext}}(\vec{r}) = Z|e| \left[\frac{1}{R_0}\theta\left(R_0 - r\right) + \frac{1/r - 1/R_1}{1 - R_0/R_1}\theta\left(R_0 \leqslant r \leqslant R_1\right) \right] . \tag{2.2}$$

Два различных вида экранировки обусловлены тем, что хотя потенциал (2.1) выглядит физически более прозрачным, но пертурбативная энергия поляризации вакуума $\mathcal{E}^{(1)}_{\mathrm{VP}}$ при этом расходится из-за разрыва в $A_0^{\mathrm{ext}}(\vec{r})$ при $r = R_1$. Поэтому в разделе 2.7 для расчета вакуумной энергии в экранированном случае будет использован непрерывный потенциал (2.2). Существенным преимуществом обеих экранировок по сравнению с другими, прежде всего экспоненциального (юкавского) типа, состоит в том, они оба позволяют провести большую часть вычислений в аналитическом виде. И хотя при стандартном выборе электромагнитной константы $\alpha \simeq 1/137$ и без специального подбора параметров обрезания кулоновского поля такая система может рассматриваться лишь как упрощенная модель для 3+1D, тем не менее ее исследование при $Z > Z_{cr,1}$ представляет значительный интерес, так как при этом воспроизводятся почти все свойства реальной 3+1D задачи поляризации вакуума сверхтяжелым ядром (ядерной квазимолекулой), но с рядом вычислительных упрощений, обусловленных меньшим числом вращательных квантовых чисел. В связи с этим радиус внешнего источника выбирается таким как в 3+1D для случая сверхтяжелого ядра

$$R_0 = R_0(Z) \simeq 1.2\,(2.5\,Z)^{1/3}\ \text{Фм}\ . \tag{2.3}$$

Здесь следует отметить, что физика закритических кулоновских источников неоднократно рассматривалась и в приближении точечных зарядов (см., например, [5; 80; 81] и цитируемую там литературу). Математические аспекты квантовой теории сверхкритических точечных кулоновских зарядов также давно являются предметом исследований в рамках теории самосопряженных расширений дираковского гамильтониана. Весьма строгий и содержательный подход к этой проблеме недавно представлен в [82—84]. Однако, несмотря на всю строгость подхода, электронные состояния все равно остаются недоопределенными при $Z\alpha > 1$, поскольку задача о самосопряженном расширении содержит принципиальную неоднозначность. В работе [28] эту неопределенность предлагается устранить за счет условия исчезновения радиальной компоненты фермионного тока $j_r = \psi^\dagger \alpha_r \psi$ в кулоновской особенности (для конкретности расположенной в начале координат) $j_r(r \to 0) = 0$. Такое условие действительно может быть интерпретировано как моделирование протяженного кулоновского источника ненулевого размера R_0, но при этом следует учитывать то обстоятельство, что закритические вакуумные эффекты, прежде всего опускание электронных уровней в нижний континуум, крайне чувствительны к размеру источника заряда: даже малое изменение R_0 может привести к значительным изменениям в значениях и общем числе критических Z и тем самым во всей картине вакуумной поляризации. Поэтому такие эффекты нельзя рассматривать без задания конкретного значения размера R_0, а условие $j_r(r \to 0) = 0$ это значение (кроме самого факта его наличия) никак не определяет.

Заметим также, что мы не рассматриваем здесь вопрос о природе и собственной энергии самих кулоновских источников, порождающих потенциалы (2.1) или (2.2). Легко видеть, что в рамках чисто двумерной задачи (без внешнего обрезания) такие источники не имели бы даже статуса локализованных, поскольку соответствующая плотность заряда убывала бы при $r \to \infty$ всего лишь $\sim 1/r^3$. Таким образом, первичным в настоящей работе является именно внешний потенциал (2.1) или (2.2), и исследуются только обусловленные им эффекты поляризации вакуума, а не полевая энергия тех двумерных источников, которым формально соответствовали бы потенциалы (2.1) или (2.2) в рамках чисто двумерной задачи. Вакуумную энергию поляризации, которая создается квантованным электрон-позитронным полем в таком внешнем потенциале, мы найти можем, а классическую часть – нет, потому что надо знать как и из чего такая планарная система была создана. Такая постановка задачи актуальна для графена, но при этом необходимо рассматривать режим сильной связи с $\alpha_g \sim 1$ и провести существенное уточнение параметров обрезания кулоновского поля, за счет чего значительно изменяется, прежде всего в численном аспекте, вся общая картина вакуумных эффектов в закритической области. Исследование таких эффектов поляризации в планарной системе Дирака-Кулона с параметрами графена подробно рассмотрено в наших работах [85; 86] и здесь представлено не будет.

Как и в других работах по поляризации вакуума кулоновским полем [60—63], вклад процессов с обменом виртуальными фотонами опускается (и все вакуумные диаграммы – однопетлевые). Далее везде, если не оговорено особо, используется релятивистская система единиц $\hbar = m = c = 1$. При этом электромагнитная константа связи $\alpha = e^2$ также становится безразмерной, что существенно упрощает все дальнейшие выкладки, а конкретные расчеты, иллюстрирующие общие выводы, будут проводиться для $\alpha = 1/137.036$.

2.2 Теория возмущений для поляризации вакуума в 2+1D при необрезанной кулоновской асимптотике $R_1 \to \infty$

В 2+1 КЭД энергия поляризации вакуума в первом порядке ТВ имеет вид

$$\mathcal{E}^{(1)}_{\mathrm{VP}} = \frac{1}{2} \int d^2 r\, \rho^{(1)}_{\mathrm{VP}}(\vec{r}) A_0^{\mathrm{ext}}(\vec{r}) \ , \tag{2.4}$$

где $\rho^{(1)}_{\mathrm{VP}}(\vec{r})$ – вакуумная плотность заряда, которая находится через вакуумный поляризационный потенциал

$$\rho^{(1)}_{\mathrm{VP}}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \Delta_2\, A^{(1)}_{\mathrm{VP},0}(\vec{r}) \ , \tag{2.5}$$

где Δ_2 – двумерный оператор Лапласа. В свою очередь, в первом порядке ТВ потенциал Юлинга $A^{(1)}_{\mathrm{VP},0}$ выражается через поляризационный оператор $\Pi_R(-\vec{q}^{\,2})$ и Фурье-образ внешнего потенциала $\widetilde{A}_0(\vec{q})$ [7]

$$\begin{aligned} A^{(1)}_{\mathrm{VP},0}(\vec{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2 q\, \mathrm{e}^{i\vec{q}\vec{r}} \Pi_R(-q^2) \widetilde{A}_0(\vec{q}) \ , \\ \widetilde{A}_0(\vec{q}) &= \int d^2 r'\, \mathrm{e}^{-i\vec{q}\vec{r}\,'} A_0^{\mathrm{ext}}(\vec{r}\,') \ , \qquad q = |\vec{q}| \ , \end{aligned} \tag{2.6}$$

где

$$\Pi_R(-q^2) = \frac{\alpha}{2q} \left[\frac{2}{q} + \left(1 - \frac{4}{q^2}\right) \mathrm{arctg}\left(\frac{q}{2}\right) \right] \ . \tag{2.7}$$

При этом поляризационный оператор $\Pi_R(q^2)$ вводится через соотношение $\Pi^{\mu\nu}_R(q) = \left(q^\mu q^\nu - g^{\mu\nu} q^2\right) \Pi_R(q^2)$ и безразмерен. При явном вычислении поляризационной функции (2.7) использовалось двухрядное представление матриц Дирака (о выборе представления см. ниже). Из (2.6), (2.7) для внешнего источника (2.1) в пределе $R_1 \to \infty$ получаем выражение для соответствующего потенциала

Юлинга в виде аксиально-симметричной функции (см. приложение А)

$$A^{(1)}_{\mathrm{VP},0}(r)=\frac{Z\alpha|e|}{4}\int\limits_0^\infty dq\,\frac{J_0(qr)}{q}\left[\frac{2}{q}+\left(1-\frac{4}{q^2}\right)\mathrm{arctg}\left(\frac{q}{2}\right)\right]\times$$
$$\times\left(2\left[1+J_1(qR_0)-qR_0J_0(qR_0)\right]+\right.$$
$$\left.+\pi qR\left[J_0(qR_0)\mathbf{H}_1(qR_0)-J_1(qR_0)\mathbf{H}_0(qR_0)\right]\right)\;, \quad (2.8)$$

где $J_\nu(z)$ – функция Бесселя, $\mathbf{H}_\nu(z)$ – функция Струве.

Далее с помощью (2.5) находим аксиально-симметричную вакуумную плотность заряда $\rho^{(1)}_{\mathrm{VP}}(r)$. Для выяснения возможности внесения оператора Лапласа под знак интеграла по dq в (2.8) рассмотрим асимптотику подынтегрального выражения при больших q. Главный член асимптотики имеет вид

$$\frac{\sin(q(r+R_0))+\cos(q(r-R_0))}{\sqrt{r}R_0^{3/2}\,q^3}\;. \quad (2.9)$$

В результате действия оператора Лапласа на (2.9) возникает слагаемое, которое ведет себя $\sim 1/q$ при $r=R_0$, а именно

$$\Delta_2\frac{\sin(q(r+R_0))+\cos(q(r-R_0))}{\sqrt{r}R_0^{3/2}\,q^3}=-\frac{\sin(q(r+R_0))+\cos(q(r-R_0))}{\sqrt{r}R_0^{3/2}\,q}+\mathrm{O}(1/q^2)\;. \quad (2.10)$$

Поэтому при $r=R_0$ отсутствует возможность внесения оператора Лапласа под знак интеграла в (2.8), т.к. в этом случае интеграл по dq, согласно (2.10), будет логарифмически расходящимся. Таким образом, найденная из (2.5) с учетом (2.10) вакуумная плотность

$$\rho^{(1)}_{\mathrm{VP}}(r)=\frac{Z\alpha|e|}{16\pi}\int\limits_0^\infty dq\,qJ_0(qr)\left[\frac{2}{q}+\left(1-\frac{4}{q^2}\right)\mathrm{arctg}\left(\frac{q}{2}\right)\right]\times$$
$$\times\left(2\left[1+J_1(qR_0)-qRJ_0(qR_0)\right]+\right.$$
$$\left.+\pi qR_0\left[J_0(qR_0)\mathbf{H}_1(qR_0)-J_1(qR_0)\mathbf{H}_0(qR_0)\right]\right) \quad (2.11)$$

будет конечна при всех $r\neq R_0$ с логарифмической особенностью при $r\to R_0$. Далее из (2.4) с учетом (2.5) и (2.8) находим энергию поляризации вакуума в первом порядке ТВ

$$\mathcal{E}_{\text{VP}}^{(1)} = \frac{(Z\alpha)^2}{32} \int\limits_0^\infty dq \left[\frac{2}{q} + \left(1 - \frac{4}{q^2}\right) \text{arctg}\left(\frac{q}{2}\right)\right] \times$$
$$\times \left(2\left[1 + J_1(qR_0) - qRJ_0(qR_0)\right] + \right.$$
$$\left. + \pi qR \left[J_0(qR_0)\mathbf{H}_1(qR_0) - J_1(qR_0)\mathbf{H}_0(qR_0)\right]\right)^2 \ . \quad (2.12)$$

На следующем шаге из перенормировочного условия для размерной поляризационной функции (отличающейся от введенной выше на множитель q^2) $\tilde{\Pi}_R(q) \sim q^2$ при $q \to 0$ легко вывести, что в рамках теории возмущений интегральный вакуумный заряд в линейном приближении тождественно равен нулю (см. приложение Б)

$$\int d^2r \ \rho_{\text{VP}}^{(1)}(r) = 0 \ . \quad (2.13)$$

Фактически (2.13) снова является подтверждением в рамках ТВ того, что при равномерно убывающем на пространственной бесконечности внешнем поле, без специальных граничных условий или нетривиальной топологии полевого многообразия, в докритической области при $Z < Z_{cr,1}$ правильно перенормированнный интегральный вакуумный заряд будет нулевым, поляризация вакуума может только искажать его пространственное распределение [7], [64]. Следует, однако, заметить, что это не теорема, а лишь правдоподобное утверждение, которое в каждом конкретном случае следует перепроверять прямым вычислением. В нашей задаче прямая проверка показывает, что после перенормировки индуцированный заряд вакуума становится ненулевым только при $Z > Z_{cr,1}$ за счет непертурбативных эффектов, обусловленных опусканием дискретных уровней в нижний континуум. В части 2.6 мы покажем, как последнее обстоятельство проявляется на поведении вакуумной энергии в закритической области.

2.3 Непертурбативная вакуумная плотность заряда в 2+1D

2.3.1 Теоретическая часть для непертурбативной вакуумной плотности заряда в 2+1D в неэкранированном случае. Формализм Вихманна-Кролла в 2+1D

Наиболее эффективный непертурбативный подход к вычислению вакуумной плотности $\rho_{\mathrm{VP}}(\vec{r})$ основан на методе ВК [60]. Отправной точкой является выражение для вакуумной плотности заряда

$$\rho_{\mathrm{VP}}(\vec{r}) = -\frac{|e|}{2}\left(\sum_{\epsilon_n<\epsilon_F} \psi_n(\vec{r})^\dagger \psi_n(\vec{r}) - \sum_{\epsilon_n\geqslant\epsilon_F} \psi_n(\vec{r})^\dagger \psi_n(\vec{r})\right), \tag{2.14}$$

где ϵ_F – энергия Ферми, которая в таких задачах с внешним кулоновским источником выбирается на пороге нижнего континуума ($\epsilon_F = -1$), а ϵ_n и $\psi_n(\vec{r})$ – собственные значения и собственные функции соответствующей спектральной задачи ДК.

Основное содержание метода ВК состоит в использовании для вакуумной плотности (2.14) представления в виде интегралов по контурам в комплексной плоскости по энергетической переменной от следа функции Грина для спектральной задачи ДК. По определению двумерная функция Грина удовлетворяет уравнению

$$\left(-i\,\vec{\alpha}\,\vec{\nabla} + V(\vec{r}) + \beta - \epsilon\right)\,\mathrm{G}(\vec{r},\vec{r}\,';\epsilon) = \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\ . \tag{2.15}$$

Отметим, что в 2+1D имеется два типа спиноров, которые отвечают двум возможным выборам сигнатуры для двухрядных матриц Дирака [87], [88]. В то же время матрицы Дирака в 2+1D могут быть выбраны и четырехрядными. При этом спектральная задача ДК во внешнем поле (2.22) для четырехкомпонентной волновой функции (ВФ) распадается на две независимые системы уравнений, переходящие друг в друга при замене знака полного момента $m_j \to -m_j$. Поэтому кратность вырождения состояний с определенным значением m_j равна 2, и далее этот множитель будет явно учитываться во всех выражениях для $\mathcal{E}_{\mathrm{VP}}$ и ρ_{VP}, а спектральная задача ДК будет рассматриваться в двумерном представлении для одной сигнатуры (+1) при $\alpha_1 = \sigma_1$, $\alpha_2 = \sigma_2$, $\beta = \sigma_3$.

Формальное решение (2.15) записывается в виде

$$\mathrm{G}(\vec{r},\vec{r}\,';\epsilon) = \sum_n \frac{\psi_n(\vec{r})\psi_n(\vec{r}\,')^\dagger}{\epsilon_n - \epsilon} \ . \tag{2.16}$$

Следуя [60], вакуумная плотность заряда выражается через интегралы по контурам $P(R)$ и $E(R)$ на первом листе римановой энергетической поверхности (рис. 1.2)

$$\rho_{\mathrm{VP}}(\vec{r}) = -\frac{|e|}{2}\lim_{R\to\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{P(R)} d\epsilon\,\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}(\vec{r},\vec{r};\epsilon) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{E(R)} d\epsilon\,\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}(\vec{r},\vec{r};\epsilon)\right) \ . \tag{2.17}$$

Учитывая, что спектральная задача ДК в поле внешнего источника (2.22) допускает разделение радиальных и угловых переменных (угловые ВФ, естественно, выбираются нормированными) в виде

$$\psi(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\begin{pmatrix} i\psi_1(r)\mathrm{e}^{i(m_j-1/2)\varphi} \\ \psi_2(r)\mathrm{e}^{i(m_j+1/2)\varphi}\end{pmatrix} \ , \tag{2.18}$$

где m_j – полуцелый полный момент фермиона в 2+1D, далее для следа функции Грина (2.16) имеем

$$\begin{gathered}\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}(\vec{r},\vec{r};\epsilon) = \frac{1}{2\pi}\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}(r,r;\epsilon) = \frac{1}{2\pi}\left(2\sum_{m_j=\pm1/2,\pm3/2,..}\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}_{m_j}(r,r;\epsilon)\right) \ , \\ \mathrm{Tr}\,\mathrm{G}_{m_j}(r,r;\epsilon) = \frac{\psi^{\mathrm{in}}_{m_j}(r)^{\mathrm{T}}\psi^{\mathrm{out}}_{m_j}(r)}{J_{m_j}(\epsilon)} \ ,\end{gathered} \tag{2.19}$$

где $\psi^{\mathrm{in}}_{m_j}(r)$ и $\psi^{\mathrm{out}}_{m_j}(r)$ – регулярные соответственно при $r \to 0$ и $r \to +\infty$ решения радиальной спектральной задачи ДК для фиксированного m_j , $J(\epsilon)$ – их вронскиан

$$J_{m_j}(\epsilon) = [\psi^{\mathrm{in}}_{m_j},\psi^{\mathrm{out}}_{m_j}] \ , \tag{2.20}$$

и введено удобное для дальнейшего обозначение

$$[f,g]_a = a(f_2(a)g_1(a) - f_1(a)g_2(a)) \ .$$

Определенный таким образом $\operatorname{Tr} \mathrm{G}_{m_j}$ имеет нужную нормировку. Отметим также, что нули $J_{m_j}(\epsilon)$ на первом листе являются вещественными и соответствуют дискретному спектру, а на втором листе становятся комплексно-сопряженными парами и определяют положение упругих резонансов.

Построим теперь $\operatorname{Tr} \mathrm{G}_{m_j}$ для внешнего потенциала (2.1) при $R_1 \to \infty$. Для фиксированного m_j радиальная спектральная задача ДК имеет вид системы

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dr}\psi_1(r) + \dfrac{1/2 - m_j}{r}\,\psi_1(r) = (\epsilon - V(r) + 1)\psi_2(r) \ , \\ \dfrac{d}{dr}\psi_2(r) + \dfrac{1/2 + m_j}{r}\,\psi_2(r) = -(\epsilon - V(r) - 1)\psi_1(r) \ , \end{cases} \tag{2.21}$$

где

$$V(r) = -Z\alpha \left[\frac{1}{R_0}\theta\left(R_0 - r\right) + \frac{1}{r}\theta\left(R_0 \leqslant r \leqslant R_1\right) \right] \ . \tag{2.22}$$

Для $r \leqslant R_0$ линейно независимые решения системы (2.21) выберем в виде

$$\begin{aligned} \text{для } \psi_1(r) : \mathcal{I}_1(r) &= \xi I_{|m_j - 1/2|}(\xi r) \ , \\ \mathcal{K}_1(r) &= -\xi K_{|m_j - 1/2|}(\xi r) \ ; \\ \text{для } \psi_2(r) : \mathcal{I}_2(r) &= (1 - \epsilon - V_0)\, I_{|m_j + 1/2|}(\xi r) \ , \\ \mathcal{K}_2(r) &= (1 - \epsilon - V_0)\, K_{|m_j + 1/2|}(\xi r) \ ; \end{aligned} \tag{2.23}$$

где $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$ – функции Инфельда и Макдональда соответственно,

$$V_0 = \frac{Z\alpha}{R_0}, \quad \xi = \sqrt{1 - (\epsilon + V_0)^2}, \quad \operatorname{Re}\xi \geqslant 0 \ . \tag{2.24}$$

Для $r > R_0$ фундаментальная пара решений (2.21) выбирается в виде

$$\begin{aligned} \text{для } \psi_1(r) : \mathcal{M}_1(r) &= \frac{1+\epsilon}{r}\left[(s - \nu)\, M_{\nu - 1/2, s}(2\gamma r) + \left(m_j + \frac{Q}{\gamma}\right) M_{\nu + 1/2, s}(2\gamma r) \right], \\ \mathcal{W}_1(r) &= \frac{1+\epsilon}{r}\left[\left(m_j - \frac{Q}{\gamma}\right) W_{\nu - 1/2, s}(2\gamma r) - W_{\nu + 1/2, s}(2\gamma r) \right]; \\ \text{для } \psi_2(r) : \mathcal{M}_2(r) &= \frac{\gamma}{r}\left[(s - \nu)\, M_{\nu - 1/2, s}(2\gamma r) - \left(m_j + \frac{Q}{\gamma}\right) M_{\nu + 1/2, s}(2\gamma r) \right], \\ \mathcal{W}_2(r) &= \frac{\gamma}{r}\left[\left(m_j - \frac{Q}{\gamma}\right) W_{\nu - 1/2, s}(2\gamma r) + W_{\nu + 1/2, s}(2\gamma r) \right]; \end{aligned} \tag{2.25}$$

где $M_{b,c}(z)$, $W_{b,c}(z)$ – функции Уиттекера [67],

$$Q = Z\alpha\ , \quad s = \sqrt{m_j^2 - Q^2}\ , \quad \nu = \frac{\epsilon\, Q}{\gamma}\ , \quad \gamma = \sqrt{1-\epsilon^2}\ , \quad \mathrm{Re}\,\gamma \geqslant 0\ . \tag{2.26}$$

$\psi_{in}(r)$ и $\psi_{out}(r)$ строятся как линейные комбинации решений (2.23) и (2.25), удовлетворяющие условиям регулярности при $r \to 0$ и $r \to +\infty$ соответственно. В итоге, выражение для $\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}_{m_j}$ примет вид

$$\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}_{m_j}(r,r;\epsilon) = \begin{cases} \dfrac{1}{[\mathcal{I},\mathcal{K}]}\left(\mathcal{I}_1\mathcal{K}_1 + \mathcal{I}_2\mathcal{K}_2 - \dfrac{[\mathcal{K},\mathcal{W}]_{R_0}}{[\mathcal{I},\mathcal{W}]_{R_0}}\left(\mathcal{I}_1^2+\mathcal{I}_2^2\right)\right)\ , & r \leqslant R_0\ , \\ \dfrac{1}{[\mathcal{M},\mathcal{W}]}\left(\mathcal{M}_1\mathcal{W}_1 + \mathcal{M}_2\mathcal{W}_2 - \dfrac{[\mathcal{I},\mathcal{M}]_{R_0}}{[\mathcal{I},\mathcal{W}]_{R_0}}\left(\mathcal{W}_1^2+\mathcal{W}_2^2\right)\right)\ , & r > R_0\ . \end{cases} \tag{2.27}$$

При этом

$$[\mathcal{I},\mathcal{K}] = \epsilon + V_0 - 1\ , \qquad [\mathcal{M},\mathcal{W}] = -4\gamma^2(1+\epsilon)\frac{\Gamma(2s+1)}{\Gamma(s-\nu)}\ , \tag{2.28}$$

а вронскиан, входящий в выражение для $\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}_{m_j}$ (2.19), имеет вид

$$J(\epsilon) = [\mathcal{I},\mathcal{W}]_{R_0}\ . \tag{2.29}$$

На следующем шаге находим асимптотику $\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}_{m_j}$ на дугах большого круга верхней полуплоскости (рис.1) $C_1(R)$ и $C_2(R)$ $|\epsilon| \to \infty$, $0 < \mathrm{Arg}\,\epsilon < \pi$:

$$\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}_{m_j}(r,r;\epsilon) \to \begin{cases} \dfrac{i}{r} + \dfrac{i}{2r\epsilon^2}\left(\dfrac{m_j^2}{r^2}+1\right) - \dfrac{i}{r^2\epsilon^3}\left(\dfrac{m_j^2}{r}V_0 + \dfrac{m_j}{2r} + rV_0\right) + \mathrm{O}\left(|\epsilon|^{-4}\right), & r < R_0, \\ \dfrac{i}{r} + \dfrac{i}{2r\epsilon^2}\left(\dfrac{m_j^2}{r^2}+1\right) - \dfrac{i}{r^2\epsilon^3}\left(\dfrac{m_j^2}{r}\dfrac{Q}{r} + \dfrac{m_j}{2r} + Q\right) + \mathrm{O}\left(|\epsilon|^{-4}\right), & r > R_0\ , \end{cases} \tag{2.30}$$

на дугах большого круга нижней полуплоскости $C_3(R)$ и $C_4(R)$ $|\epsilon| \to \infty$, $-\pi < \operatorname{Arg}\epsilon < 0$:

$$\operatorname{Tr} \mathrm{G}_{m_j}(r,r;\epsilon) \to$$
$$\begin{cases} -\dfrac{i}{r} - \dfrac{i}{2r\epsilon^2}\left(\dfrac{m_j^2}{r^2}+1\right) + \dfrac{i}{r^2\epsilon^3}\left(\dfrac{m_j^2}{r}V_0 + \dfrac{m_j}{2r} + rV_0\right) + \mathrm{O}\left(|\epsilon|^{-4}\right), & r < R_0 \, , \\ -\dfrac{i}{r} - \dfrac{i}{2r\epsilon^2}\left(\dfrac{m_j^2}{r^2}+1\right) + \dfrac{i}{r^2\epsilon^3}\left(\dfrac{m_j^2}{r}\dfrac{Q}{r} + \dfrac{m_j}{2r} + Q\right) + \mathrm{O}\left(|\epsilon|^{-4}\right), & r > R_0 \, . \end{cases} \tag{2.31}$$

Из (2.30) и (2.31) следует, что интегрирование по контурам $P(R)$ и $E(R)$ в (2.17) может быть сведено к мнимой оси, откуда находим окончательное выражение для вакуумной плотности заряда

$$\rho_{\mathrm{VP}}(r) = 2 \sum_{m_j=1/2,\,3/2,..} \rho_{\mathrm{VP},|m_j|}(r) \, , \tag{2.32}$$

где

$$\begin{gathered} \rho_{\mathrm{VP},|m_j|}(r) = \frac{|e|}{4\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dy \operatorname{Tr} \mathrm{G}_{|m_j|}(r,r;iy) \, , \\ \operatorname{Tr} \mathrm{G}_{|m_j|}(r,r;iy) = \operatorname{Tr} \mathrm{G}_{m_j}(r,r;iy) + \operatorname{Tr} \mathrm{G}_{-m_j}(r,r;iy) \, . \end{gathered} \tag{2.33}$$

При наличии отрицательных дискретных уровней с $-1 \leqslant \epsilon < 0$ по аналогии с главой 1 получим

$$\rho_{\mathrm{VP},|m_j|}(r) = \frac{|e|}{2\pi}\left[\sum_{m_j=\pm|m_j|} \sum_{-1\leqslant\epsilon<0} \psi_{\epsilon,m_j}(r)^\dagger \psi_{\epsilon,m_j}(r) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy \operatorname{Tr} \mathrm{G}_{|m_j|}(r,r;iy)\right] . \tag{2.34}$$

Далее отметим общее свойство $\operatorname{Tr} \mathrm{G}_{m_j}$ при смене знака внешнего поля ($Q \to -Q$) и комплексном сопряжении

$$\operatorname{Tr} \mathrm{G}_{-m_j}(Q;r,r;\epsilon) = -\operatorname{Tr} \mathrm{G}_{m_j}(-Q;r,r;-\epsilon) \, , \quad \operatorname{Tr} \mathrm{G}_{m_j}(Q;r,r;\epsilon)^* = \operatorname{Tr} \mathrm{G}_{m_j}(Q;r,r;\epsilon^*) \, , \tag{2.35}$$

а также вытекающее из этих двух свойств соотношение

$$\operatorname{Tr} \mathrm{G}_{m_j}(Q;r,r;iy)^* = -\operatorname{Tr} \mathrm{G}_{-m_j}(-Q;r,r;iy) \, . \tag{2.36}$$

Из (2.35) и (2.36) следует, что $\rho_{\mathrm{VP},|m_j|}(r)$ определяется только через $\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}_{|m_j|}(Q;r,r;iy)$ и является заведомо действительной величиной, нечетной по Q (в полном согласии с теоремой Фарри). Заметим также, что в чисто пертурбативной области представление ρ_{VP} в виде нечетного ряда по степеням внешнего поля (2.22) есть прямое следствие борновского ряда $\mathrm{G}_{m_j} = \mathrm{G}^{(0)}_{m_j} + \mathrm{G}^{(0)}_{m_j}(-V)\,\mathrm{G}^{(0)}_{m_j} + \mathrm{G}^{(0)}_{m_j}(-V)\,\mathrm{G}^{(0)}_{m_j}(-V)\,\mathrm{G}^{(0)}_{m_j} + \ldots$, откуда

$$\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}_{m_j}(r,r;iy) = \sum_{k=0} \mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}\left[\mathrm{G}^{(0)}_{m_j}\left(-V\,\mathrm{G}^{(0)}_{m_j}\right)^{2k+1}(r,r;iy)\right] , \tag{2.37}$$

где $\mathrm{G}^{(0)}_{m_j}$ – свободная функция Грина радиального уравнения Дирака с тем же m_j. В то же время, при наличии отрицательных дискретных уровней и тем более в закритической области при $Z > Z_{cr,1}$ нечетность ρ_{VP} по Q по-прежнему имеет место [61], но теперь зависимость от внешнего поля степенным рядом (2.37) более не описывается, поскольку в ρ_{VP} появляются существенно непертурбативные и тем самым неаналитические по Q составляющие.

Легко видеть, что выражение для вакуумной плотности (2.32–2.34) требует перенормировки, поскольку из асимптотики

$$\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}_{m_j}(r,r;iy) \to \frac{iy}{\sqrt{1+y^2}}\frac{1}{r} + \frac{Q}{(1+y^2)^{3/2}}\frac{1}{r^2} + \mathrm{O}\left(r^{-3}\right) , \quad r \to \infty , \tag{2.38}$$

следует, что неперенормированная плотность $\rho_{\mathrm{VP}}(r)$ убывает при $r \to \infty$ как $1/r^2$, и в результате индуцированный заряд логарифмически расходится.

Таким образом, аналогично 1+1D, для вычисления перенормированной плотности $\rho^{\mathrm{ren}}_{\mathrm{VP}}(r)$ необходимо выделить в выражении для $\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}_{m_j}$ в (2.27) линейные по Q члены и заменить их на перенормированную пертурбативную плотность $\rho^{(1)}_{\mathrm{VP}}(r)$, приведенную в (2.11), которая соответствует первому порядку ТВ и отлична от нуля только для $|m_j| = 1/2$ (это показывается с помощью разложения потенциала Юлинга (2.6) по цилиндрическим функциям (см. приложение A). Для этого сначала находим компоненту вакуумной плотности $\rho^{(3+)}_{\mathrm{VP},|m_j|}(r)$, которая определяется следующим образом

$$\rho^{(3+)}_{\mathrm{VP},|m_j|}(r) = \frac{|e|}{2\pi}\left[\sum_{m_j=\pm|m_j|}\;\sum_{-1\leqslant\epsilon<0}\psi_{\epsilon,m_j}(r)^{\dagger}\psi_{\epsilon,m_j}(r) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty} dy\,\mathrm{Re}\left(\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}_{|m_j|}(r,r;iy) - 2\,\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}^{(1)}_{m_j}(r;iy)\right)\right]\,. \quad (2.39)$$

где $\mathrm{G}^{(1)}_{m_j}(r;iy)$ является компонентой парциальной функции Грина $\mathrm{G}_{m_j}(r,r;iy)$, линейной по Q, и находится из первого борновского приближения для G_{m_j}:

$$\mathrm{G}^{(1)}_{m_j} = Q\left(\partial\,\mathrm{G}_{m_j}/\partial Q\right)_{Q=0} = \mathrm{G}^{(0)}_{m_j}(-V)\,\mathrm{G}^{(0)}_{m_j}\,. \quad (2.40)$$

Для внешнего потенциала (2.1) явное выражение для $\mathrm{G}^{(1)}_{m_j}(r;iy)$ при $r \leqslant R_0$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}^{(1)}_{m_j}(r;iy) = \frac{Q}{(iy-1)^2}&\left[\left(\tilde\gamma^2 K^2_{|m_j-1/2|}(\tilde\gamma r) + (1-iy)^2 K^2_{|m_j+1/2|}(\tilde\gamma r)\right)\times\right.\\
&\times\int\limits_0^r dr'\,\frac{r'}{R_0}\left(\tilde\gamma^2 I^2_{|m_j-1/2|}(\tilde\gamma r') + (1-iy)^2 I^2_{|m_j+1/2|}(\tilde\gamma r')\right) + \\
&+\left(\tilde\gamma^2 I^2_{|m_j-1/2|}(\tilde\gamma r) + (1-iy)^2 I^2_{|m_j+1/2|}(\tilde\gamma r)\right)\times\\
&\times\left\{\int\limits_r^{R_0} dr'\,\frac{r'}{R_0}\left(\tilde\gamma^2 K^2_{|m_j-1/2|}(\tilde\gamma r') + (1-iy)^2 K^2_{|m_j+1/2|}(\tilde\gamma r')\right) + \right.\\
&\left.\left.+\int\limits_{R_0}^{\infty} dr'\,\left(\tilde\gamma^2 K^2_{|m_j-1/2|}(\tilde\gamma r') + (1-iy)^2 K^2_{|m_j+1/2|}(\tilde\gamma r')\right)\right\}\right]\,,
\end{aligned} \quad (2.41)$$

а для $r > R_0$

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\,\mathrm{G}^{(1)}_{m_j}(r;iy) = \frac{Q}{(iy-1)^2} \Bigg[& \Big(\tilde\gamma^2 K^2_{|m_j-1/2|}(\tilde\gamma r) + (1-iy)^2 K^2_{|m_j+1/2|}(\tilde\gamma r)\Big) \times \\ & \times \left\{ \int\limits_0^{R_0} dr' \, \frac{r'}{R_0} \Big(\tilde\gamma^2 I^2_{|m_j-1/2|}(\tilde\gamma r') + (1-iy)^2 I^2_{|m_j+1/2|}(\tilde\gamma r')\Big) + \right. \\ & \left. + \int\limits_{R_0}^{r} dr' \, \Big(\tilde\gamma^2 I^2_{|m_j-1/2|}(\tilde\gamma r') + (1-iy)^2 I^2_{|m_j+1/2|}(\tilde\gamma r')\Big) \right\} + \\ & + \Big(\tilde\gamma^2 I^2_{|m_j-1/2|}(\tilde\gamma r) + (1-iy)^2 I^2_{|m_j+1/2|}(\tilde\gamma r)\Big) \times \\ & \times \int\limits_r^{\infty} dr' \, \Big(\tilde\gamma^2 K^2_{|m_j-1/2|}(\tilde\gamma r') + (1-iy)^2 K^2_{|m_j+1/2|}(\tilde\gamma r')\Big) \Bigg] \ , \end{aligned} \tag{2.42}$$

где $\tilde\gamma = \sqrt{1+y^2}$. Интегралы, входящие в выражения (2.41) и (2.42) для $\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}^{(1)}_{m_j}$, в принципе также вычисляются в аналитическом виде, но не выписаны явно из-за их громоздкого вида.

Таким образом, перенормированная вакуумная плотность принимает вид

$$\rho^{\mathrm{ren}}_{\mathrm{VP}}(r) = 2 \left[\rho^{(1)}_{\mathrm{VP}}(r) + \sum_{m_j=1/2,\,3/2,..} \rho^{(3+)}_{\mathrm{VP},|m_j|}(r) \right] \ , \tag{2.43}$$

где $\rho^{(1)}_{\mathrm{VP}}(r)$ – пертурбативная вакуумная плотность (2.5), рассчитанная с помощью поляризационной функции (2.7) в первом порядке ТВ. Такое выражение для $\rho^{\mathrm{ren}}_{\mathrm{VP}}(r)$ гарантирует обращение в нуль полного вакуумного заряда $Q^{\mathrm{ren}}_{\mathrm{VP}} = \int d^2r \, \rho^{\mathrm{ren}}_{\mathrm{VP}}(r)$ при $Z < Z_{cr,1}$, поскольку $Q^{(1)}_{\mathrm{VP}}$ исчезает по построению, а далее прямая проверка показывает, что вклад от $\rho^{(3+)}_{\mathrm{VP},|m_j|}(r)$ в $Q^{\mathrm{ren}}_{\mathrm{VP}}$ при $Z < Z_{cr,1}$ также исчезает. В отличие от 1+1D, в 2+1D такая проверка уже не может быть проведена в чисто аналитическом виде из-за сложности входящих в $\rho^{(3+)}_{\mathrm{VP},|m_j|}(r)$ выражений, но тем не менее вполне надежно выполняется с помощью комбинации аналитических и численных методов (детали этой комбинации приведены в приложении Б [89]). Более того, достаточно убедиться в исчезновении полного $Q^{\mathrm{ren}}_{\mathrm{VP}}$ не во всей докритической области, а лишь при отсутствии отрицательных дискретных уровней. При наличии отрицательных дискретных уровней исчезновение полного вакуумного заряда при $Z < Z_{cr,1}$ следует из модельно-независимых аргументов, в основе которых лежит исходное выражение для вакуумной плотности (2.14). Из последнего следует, что изменение интегрального заряда возможно только при $Z > Z_{cr,1}$, когда дискретные уровни достигают нижнего континуума. При этом каждый дискретный (двукратно вырожденный) уровень при погружении в нижний континуум приводит к изменению интегрального заряда на $(-2|e|)$. Один из возможных корректных способов доказательства этого факта приведен в нашей статье [90]. Специально отметим, что этот эффект является существенно непертурбативным и полностью содержится в $\rho_{\text{VP}}^{(3+)}$, а $\rho_{\text{VP}}^{(1)}$ никак в этом не участвует и по-прежнему вносит чисто нулевой вклад в полный индуцированный заряд. Таким образом, поведение перенормированной с помощью (2.43) вакуумной плотности и в непертурбативной области оказывается именно таким, какое следует ожидать из общих представлений о структуре электрон-позитронного вакуума при $Z > Z_{cr}$.

Численная проверка по схеме, приведенной в [89] и приложении Б с рабочей точностью 100 и относительной точностью 15, показывает, что при $Z = 50$, когда еще нет ни одного отрицательного дискретного уровня, $Q_{\text{VP},1/2}^{(3+)} \simeq 2.558236 \times 10^{-30}|e|$, $Q_{\text{VP},3/2}^{(3+)} \simeq 2.40077 \times 10^{-41}|e|$, а следующие парциальные заряды $Q_{\text{VP},|m_j|}^{(3+)}$ с большими $|m_j|$ оказываются еще меньше в соответствии с законом $\sim |m_j|^{-3}$. При $Z = 100$ (когда вычисление заведомо менее точное) для $|m_j| = 1/2$, когда уже имеется один отрицательный уровень, интегральная часть формулы (2.39) для $Q_{\text{VP},1/2}^{(3+)}$ дает $-1.99999999999999999999999999999943|e|$ (после единицы 30 девяток), и в сумме с вкладом от уровня $(+2|e|)$ это дает $Q_{\text{VP},1/2}^{(3+)} \simeq 5.65 \times 10^{-31}|e|$. Для $Q_{\text{VP},3/2}^{(3+)}$ при этом Z получим $\simeq -8.139 \times 10^{-31}|e|$. Эти результаты достаточно убедительно свидетельствуют в пользу утверждения, что при внешних полях типа (2.1) в докритической области $Q_{\text{VP}}^{\text{ren}} \equiv 0$.

Более детальная картина происходящих при этом изменений в $\rho_{\text{VP}}^{\text{ren}}(r)$ вполне аналогична рассмотренной в [5; 7; 11; 59] для 3+1D на основе формализма Фано [68]. Основной результат состоит в том, что когда (двукратно вырожденный) дискретный уровень $\psi_{\epsilon,m_j}(r)$ достигает нижнего континуума, изменение вакуумной плотности имеет вид

$$\Delta\rho_{\text{VP}}(r) = -2|e|\psi_{\epsilon=-1,m_j}(r)^\dagger\psi_{\epsilon=-1,m_j}(r) \ . \tag{2.44}$$

Следует, однако, учитывать, что этот метод также использует ряд приближений, и поэтому формула (2.44) является точной только в непосредственной окрестности соответствующего Z_{cr}, что явно продемонстрировано в главе 1.

Существенное отличие вакуумных поляризационных эффектов в 2+1D и 3+1D от одномерного случая проявляется еще и в том, что перенормированная вакуумная плотность (2.43) представляется в виде бесконечного парциального ряда по m_j. Таким образом, возникает естественный вопрос о сходимости этого ряда. Для ответа рассмотрим асимптотику $\rho^{(3+)}_{\mathrm{VP},|m_j|}(r)$ при больших $|m_j|$. Прежде всего рассмотрим подынтегральное выражение в (2.39). Асимптотика $\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}_{m_j}(r,r;iy)$ при $|m_j| \to \infty$ имеет вид

$$\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}_{m_j}(r,r;iy) \to \begin{cases} \dfrac{iy+V_0}{|m_j|} + \dfrac{\mathrm{sgn}(m_j)}{2m_j^2} + \mathrm{O}\left(|m_j|^{-3}\right), & r \leqslant R_0\,, \\ \dfrac{iy+Q/r}{|m_j|} + \dfrac{\mathrm{sgn}(m_j)}{2m_j^2} + \mathrm{O}\left(|m_j|^{-3}\right), & r > R_0\,. \end{cases} \tag{2.45}$$

В то же время, асимптотика $\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}^{(1)}_{m_j}(r;iy)$ (2.41), (2.42) при больших m_j выглядит следующим образом:

$$\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}^{(1)}_{m_j}(r;iy) \to \begin{cases} V_0\dfrac{1}{|m_j|} + \mathrm{O}\left(|m_j|^{-3}\right), & r \leqslant R_0\,, \\ \dfrac{Q}{r}\dfrac{1}{|m_j|} + \mathrm{O}\left(|m_j|^{-3}\right), & r > R_0\,. \end{cases} \tag{2.46}$$

Из (2.45) и (2.46) с учетом определения $\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}_{|m_j|}(r,r;iy)$ (2.33) имеем:

$$\mathrm{Re}\left[\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}_{|m_j|}(r,r;iy) - 2\,\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}^{(1)}_{m_j}(r;iy)\right] = \mathrm{O}\left(|m_j|^{-3}\right), \quad |m_j| \to \infty. \tag{2.47}$$

Кроме того, с ростом $|m_j|$ дискретные уровни обязательно поднимаются, поэтому для заданного Q при $|m_j| \to \infty$ дискретных уровней с отрицательной энергией не будет, и сумма $\sum \psi_{\epsilon,m_j}(r)^\dagger \psi_{\epsilon,m_j}(r)$ в выражении (2.39) исчезнет. Далее используем то обстоятельство, что интеграл по dy в (2.39) сходится равномерно относительно $|m_j|$ и r, рассматриваемых как внешние параметры. Для этого методами компьютерной алгебры находим асимптотику $\mathrm{Re}\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}_{|m_j|}(r,r;iy)$ при $|y| \to \infty$ с существенно более высокой точностью по сравнению с (2.30), (2.31), которая представляется в следующем виде:

при $r < R_0$

$$\operatorname{Re}\operatorname{Tr}\mathrm{G}_{|m_j|}(r,r;iy) \to \frac{2}{r^2|y|^3}\left(\frac{m_j^2}{r}V_0 + rV_0\right) + \\ + \frac{6}{r^4|y|^5}\left[-\frac{m_j^4}{2r}V_0 + \frac{m_j^2}{2r}V_0 - r\left(\frac{2}{3}m_j^2V_0^3 + m_j^2V_0\right) - r^3\left(\frac{2}{3}V_0^3 + \frac{V_0}{2}\right)\right] + \\ + \mathrm{O}\left(\frac{1}{|y|^7}\right) \quad ; \quad (2.48)$$

при $r = R_0$

$$\operatorname{Re}\operatorname{Tr}\mathrm{G}_{|m_j|}(r,r;iy) \to \frac{2}{R_0^2|y|^3}\left(\frac{m_j^2}{R_0}V_0 + Q\right) - \frac{1}{2R_0^3y^4}\left(\frac{m_j^2}{R_0}V_0 + Q\right) + \\ + \frac{6}{R_0^4|y|^5}\left[-\frac{m_j^4}{2R_0}V_0 + \frac{2m_j^2}{3R_0}V_0 - R_0\left(\frac{2}{3}m_j^2V_0^3 + m_j^2V_0 - \frac{V_0}{12}\right) - R_0^3\left(\frac{2}{3}V_0^3 + \frac{V_0}{2}\right)\right] + \\ + \mathrm{O}\left(\frac{1}{|y|^6}\right) \quad ; \quad (2.49)$$

при $r > R_0$

$$\operatorname{Re}\operatorname{Tr}\mathrm{G}_{|m_j|}(r,r;iy) \to \frac{2}{r^2|y|^3}\left(\frac{m_j^2}{r}\frac{Q}{r} + Q\right) + \\ + \frac{6}{r^4|y|^5}\left[-\frac{m_j^4}{2r}\frac{Q}{r} + \frac{5m_j^2}{6r}\frac{Q}{r} - r\left(\frac{2}{3}m_j^2\left(\frac{Q}{r}\right)^3 + m_j^2\frac{Q}{r} - \frac{Q}{6r}\right) - \\ - r^3\left(\frac{2}{3}\left(\frac{Q}{r}\right)^3 + \frac{Q}{2r}\right)\right] + \mathrm{O}\left(\frac{1}{|y|^7}\right) \quad . \quad (2.50)$$

Далее из (2.48–2.50) находим асимптотику для $\operatorname{Re}\left[\operatorname{Tr}\mathrm{G}_{|m_j|}(r,r;iy) - 2\operatorname{Tr}\mathrm{G}^{(1)}_{m_j}(r;iy)\right]$ при $|y| \to \infty$, учитывая, что вычитание $2\operatorname{Tr}\mathrm{G}^{(1)}_{m_j}(r;iy)$ устраняет все линейные по Q и V_0 члены. В результате первый неисчезающий член в асимптотике $\operatorname{Re}\left[\operatorname{Tr}\mathrm{G}_{|m_j|}(r,r;iy) - 2\operatorname{Tr}\mathrm{G}^{(1)}_{m_j}(r;iy)\right]$ оказывается пропорционален $Q^3/|y|^5$ $\times$ фактор, зависящий только от m_j^2 и r. Коэффициент Q^3 подчеркивает тот факт, что $\rho^{(3+)}_{\mathrm{VP}}(r)$ по построению не содержит линейных по Q членов, а сама по себе асимптотика $\sim |y|^{-5}$ гарантирует равномерную сходимость интеграла $\int dy\ \operatorname{Re}\left[\operatorname{Tr}\mathrm{G}_{|m_j|}(r,r;iy) - 2\operatorname{Tr}\mathrm{G}^{(1)}_{m_j}(r;iy)\right]$ относительно m_j и r.

Следует также отметить, что асимптотика (2.48–2.50) неприменима в бесконечно малой окрестности точки $r = 0$, так как r входит в $\operatorname{Tr}\mathrm{G}_{m_j}(r,r;iy)$ через комбинации $r\sqrt{1+y^2}$ и $r\sqrt{1-(iy+V_0)^2}$, которые при $|y| \to \infty$ в окрестности $r = 0$ могут оставаться конечными. Однако в рассматриваемом случае, когда внешний потенциал (2.1) в нуле регулярен, из очевидных физических соображений следует, что индуцированная вакуумная плотность в нуле также должна быть конечна и непрерывна. Поэтому она может быть получены предельным переходом по непрерывности из области ненулевых r, и тем самым равномерная сходимость интеграла $\int dy\ \operatorname{Re}\left[\operatorname{Tr}\mathrm{G}_{|m_j|}(r,r;iy) - 2\operatorname{Tr}\mathrm{G}^{(1)}_{m_j}(r;iy)\right]$ имеет место и при $r = 0$.

На следующем этапе снова используем существенно уточненную по сравнению с (2.38) асимптотику $\operatorname{Tr}\mathrm{G}_{m_j}(r,r;iy)$ при $r \to \infty$, которая имеет следующий вид:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Tr}\mathrm{G}_{m_j}(r,r;iy) \to \frac{iy}{\sqrt{1+y^2}r} + \frac{Q}{(1+y^2)^{3/2}\,r^2} + {}\\
+ \frac{1}{2\,(1+y^2)^{5/2}\,r^3}\left(-im_j^2y^3 - im_j^2y + m_jy^2 + m_j + 3iQ^2y\right) + {}\\
+ \frac{1}{2\,(1+y^2)^{7/2}\,r^4}\left(2m_j^2Qy^4 + m_j^2Qy^2 - m_j^2Q + {}\right.\\
\left. + 3im_jQy^3 + 3im_jQy - 4Q^3y^2 + Q^3 + Qy^2 + Q\right) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{r^5}\right)\ .
\end{aligned} \tag{2.51}
$$

Из (2.51) следует, что первый неисчезающий член в асимптотике $\operatorname{Re}\left[\operatorname{Tr}\mathrm{G}_{|m_j|}(r,r;iy) - 2\operatorname{Tr}\mathrm{G}^{(1)}_{m_j}(r;iy)\right]$ при $r \to \infty$ будет пропорционален $Q^3/r^4 \times$ фактор, зависящий только от m_j^2 и y. Коэффициент Q^3 снова подчеркивает тот факт, что $\rho^{(3+)}_{\mathrm{VP}}(r)$ по построению не содержит линейных по Q членов, а в силу только что установленной равномерной сходимости интеграла $\int dy\ \operatorname{Re}\left[\operatorname{Tr}\mathrm{G}_{|m_j|}(r,r;iy) - 2\operatorname{Tr}\mathrm{G}^{(1)}_{m_j}(r;iy)\right]$ относительно m_j и r асимптотика $\rho^{(3+)}_{\mathrm{VP},|m_j|}(r)$ при $r \to \infty$ оказывается $\sim r^{-4}$ равномерно по m_j, что в свою очередь означает возможность перестановки суммирования по m_j и интегрирования по dr в (2.32) при вычислении полного индуцированного заряда.

Из (2.47-2.51) тогда следует, что $\rho^{(3+)}_{\mathrm{VP},|m_j|}(r)$ при $|m_j| \to \infty$ ведет себя как $\mathrm{O}(|m_j|^{-3})$. Таким образом, парциальный ряд в (2.43) сходится и перенормированная вакуумная плотность $\rho^{\mathrm{ren}}_{\mathrm{VP}}(r)$ конечна всюду, за исключением логарифмической особенности при $r = R_0$, возникающей из $\rho^{(1)}_{\mathrm{VP}}(r)$.

2.3.2 Результаты численных расчетов непертурбативной вакуумной плотности заряда в 2+1D

На рис. 2.1 для необрезанного ($R_1 \to \infty$) внешнего потенциала (2.1) с оговоренными выше параметрами α и $R_0 = R_0(Z)$ показана перенормированная вакуумная плотность $\rho^{\mathrm{ren}}_{\mathrm{VP}}(r)$ для чисто пертурбативного режима при $Z = 10$, далее для $Z = 108$, когда первое $Z_{cr,1} \simeq 108.1$ еще не достигается, для $Z = 109$, когда первый дискретный уровень только что опустился в нижний континуум, далее для $Z = 133$, когда еще не достигается второе критическое $Z_{cr,2} \simeq 133.2$, и наконец для $Z = 134$, т.е. почти сразу после опускания в нижний континуум второго дискретного уровня. Критические заряды при этом находятся из трансцендентного уравнения, которое следует из условия сшивки $\psi_{in}(r)$ и $\psi_{out}(r)$ при $r = R_0$ для $\epsilon = -1$:

$$I_{|m_j-1/2|}(\xi R_0)\left[K_{2s-1}\left(\sqrt{8QR_0}\right) + K_{2s+1}\left(\sqrt{8QR_0}\right) + \right.$$
$$\left. +\sqrt{\frac{2}{QR_0}} m_j K_{2s}\left(\sqrt{8QR_0}\right)\right] + \sqrt{2(2-V_0)}\, I_{|m_j+1/2|}(\xi R_0)\, K_{2s}\left(\sqrt{8QR_0}\right) = 0\,. \tag{2.52}$$

В (2.52) $K_p(z)$ – функция Макдональда, в которую вырождаются функции Уиттекера при $\epsilon \to -1$. При этом непосредственным численным интегрированием по схеме, приведенной в приложении Б, подтверждается, что полный вакуумный заряд при $Z = 10,\ 108$ равен нулю, при $Z = 109,\ 133$ равен $(-2|e|)$, а при $Z = 134$ – соответственно $(-4|e|)$. При $r = R_0$ $\rho^{\mathrm{ren}}_{\mathrm{VP}}(r)$ имеет логарифмическую особенность, которая обусловлена вкладом $\rho^{(1)}_{\mathrm{VP}}(r)$ (рис. 2.2). В то же время, $\rho^{(3+)}_{\mathrm{VP}}(r) = \sum_{m_j} \rho^{(3+)}_{\mathrm{VP},|m_j|}(r)$ является всюду непрерывной функцией, что продемонстрировано на рис. 2.3. Т.к. из рис. 2.3 не видно, что $\int r dr\ \rho^{(3+)}_{\mathrm{VP}}(r)$ для докритических $Z = 10$ и $Z = 108$ зануляется, на рис. 2.4 показано, что

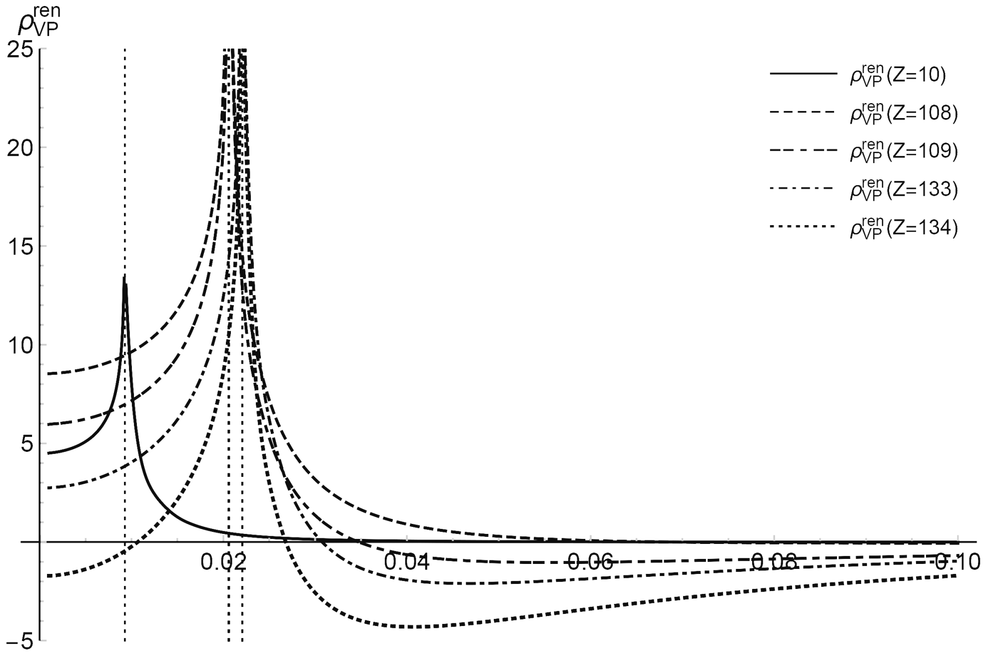


Рисунок 2.1 — $\rho_{\rm VP}^{\rm ren}(r)$ для $Z = 10,\ 108,\ 109,\ 133,\ 134$.

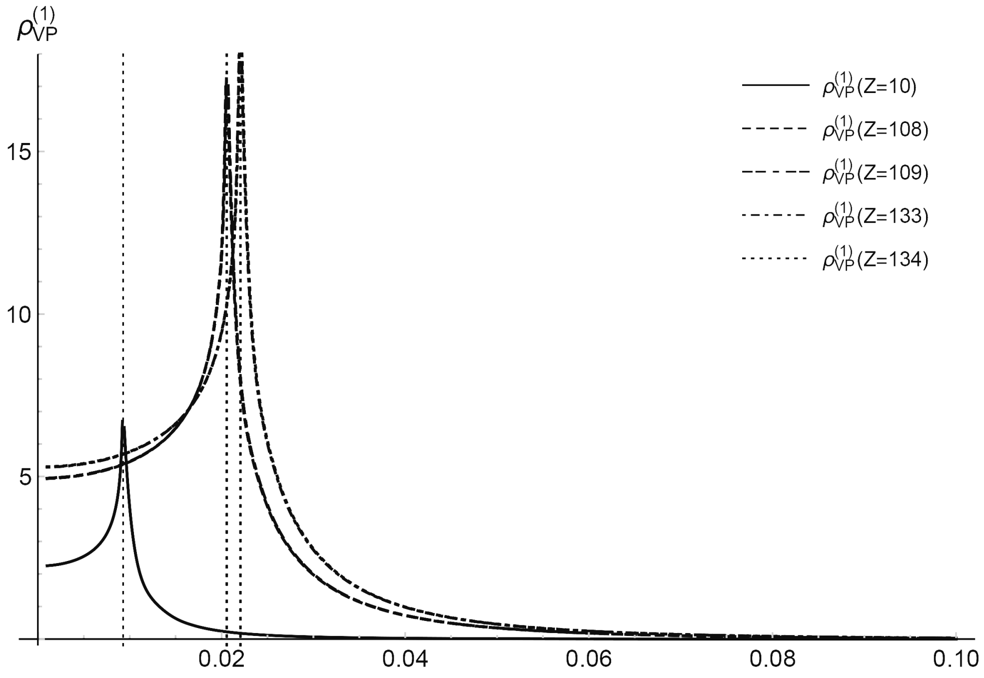


Рисунок 2.2 — $\rho_{\rm VP}^{(1)}(r)$ для $Z = 10,\ 108,\ 109,\ 133,\ 134$.

$\rho_{\rm VP}^{(3+)}(r)$ является знакопеременной функцией от r для этих Z. Заметим также, что в закритической области при увеличении Z изменение $\rho_{\rm VP}^{\rm ren}(r)$ происходит не только дискретным образом за счет формирования вакуумных оболочек из опускающихся в нижний континуум дискретных уровней, но и непрерывно за счет изменения плотности состояний непрерывного спектра и эволюции дискретных уровней с ростом Z.

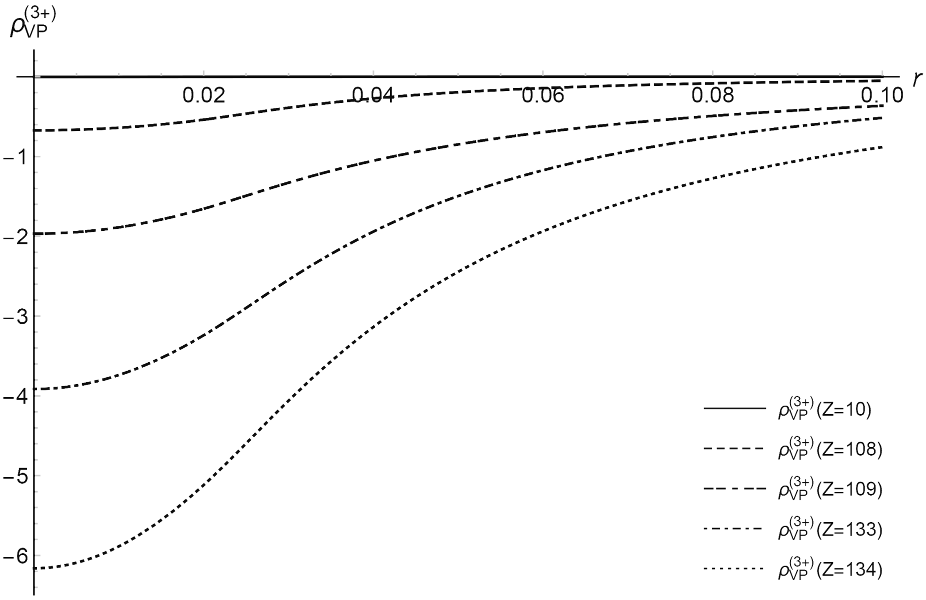


Рисунок 2.3 — $\rho_{\text{VP}}^{(3+)}(r)$ для $Z = 10,\, 108,\, 109,\, 133,\, 134$.

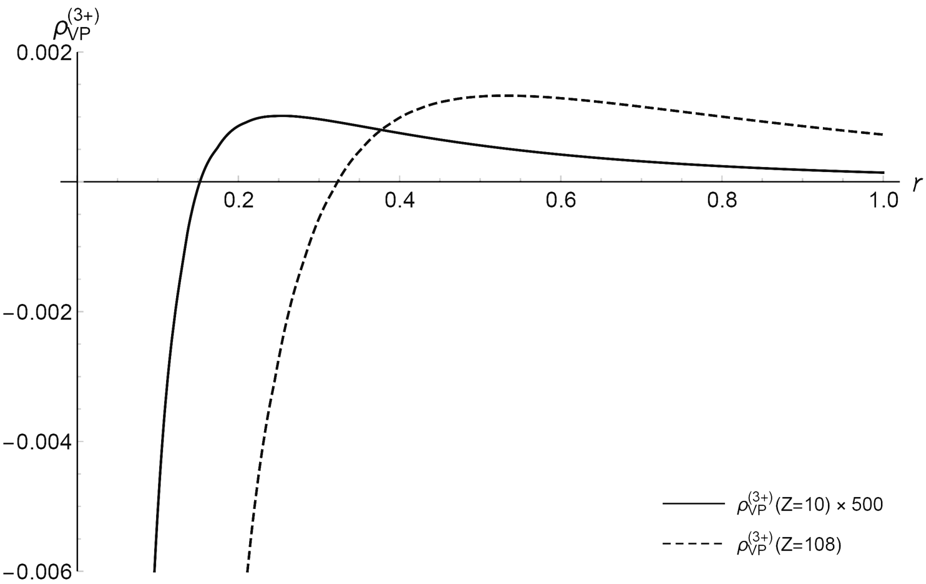


Рисунок 2.4 — $\rho_{\text{VP}}^{(3+)}(r)$ для докритических $Z = 10$ и $Z = 108$, как знакопеременная функция от r.

Следует также отметить, что для докритических Z определяющий вклад в парциальное разложение (2.43) для $\rho_{\text{VP}}^{\text{ren}}(r)$ вносится слагаемым $\rho_{\text{VP},|m_j|=1/2}^{(3+)}$ (см. рис. 2.5). В то же время, для закритических Z сумма (2.43) определяется уже вкладом от всех $|m_j|$, для которых хотя бы один уровень дискретного спектра уже погрузился в нижний континуум.

Таким образом, корректный способ вычисления $\rho_{\text{VP}}^{\text{ren}}(r)$ для всех областей по Z состоит в использовании соотношений (2.39) и (2.43) с последующей

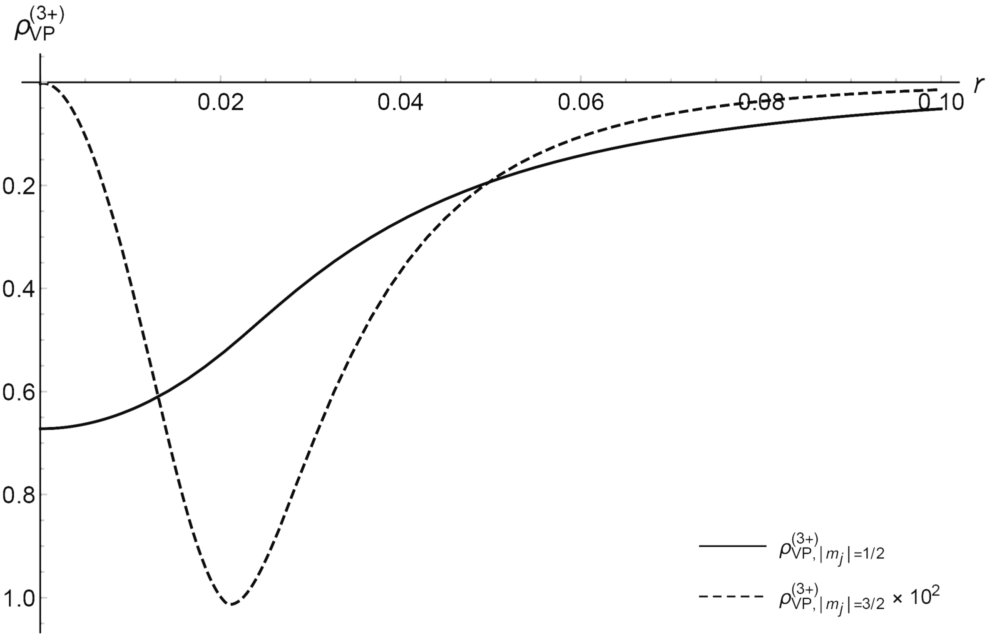


Рисунок 2.5 — $\rho^{(3+)}_{\mathrm{VP},|m_j|}(r)$ для $Z = 108$ при $m_j = 1/2$ и $m_j = 3/2$.

проверкой ожидаемого целочисленного значения индуцированного заряда через прямое интегрирование $\rho^{\mathrm{ren}}_{\mathrm{VP}}(r)$.

2.4 Непертурбативная вакуумная плотность заряда при конечном R_1 в 2+1D

Прежде всего, рассмотрим изменения, которые вносит обрезание кулоновской асимптотики в потенциале (2.1) при конечном R_1 в первый порядок ТВ. В этом случае индуцированный вакуумный потенциал принимает вид

$$A^{(1)}_{\mathrm{VP},0}(r;R_1) = A^{(1)}_{\mathrm{VP},0}(r) + \Delta A^{(1)}_{\mathrm{VP},0}(r;R_1)\ , \tag{2.53}$$

где $A^{(1)}_{\mathrm{VP},0}(r)$ – потенциал Юлинга (2.8) в чисто кулоновском случае, а $\Delta A^{(1)}_{\mathrm{VP},0}(r;R_1)$ отвечает за эффекты обрезания

$$\begin{aligned} \Delta A^{(1)}_{\mathrm{VP},0}(r;R_1) = -\frac{Z\alpha|e|}{4}\int_0^\infty dq\,\frac{J_0(qr)}{q}\left[\frac{2}{q}+\left(1-\frac{4}{q^2}\right)\mathrm{arctg}\left(\frac{q}{2}\right)\right]\times \\ \times\left(2\left[1-qR_1J_0\left(qR_1\right)\right]+\pi qR_1\left[J_0\left(qR_1\right)\mathbf{H}_1\left(qR_1\right)-J_1\left(qR_1\right)\mathbf{H}_0\left(qR_1\right)\right]\right)\ . \end{aligned} \tag{2.54}$$

Чисто кулоновский случай был подробно рассмотрен ранее в разделе 2.2. Теперь исследуем эффекты, возникающие в вакуумной плотности за счет обрезания:

$$\Delta\rho^{(1)}_{\mathrm{VP}}(r;R_1) = -\frac{1}{4\pi}\Delta_2\left(\Delta A^{(1)}_{\mathrm{VP},0}(r;R_1)\right)\ . \tag{2.55}$$

Асимптотика подынтегрального выражения в (2.54) имеет вид

$$\frac{\cos\left(q\left(r+R_1\right)\right)+\sin\left(q\left(r-R_1\right)\right)}{\sqrt{rR_1}q^2} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{q^3}\right)\ . \tag{2.56}$$

Из (2.56) следует, что возможность внесения двумерного оператора Лапласа под знак интеграла в (2.55) теперь отсутствует. Для дальнейших действий представим (2.54) в виде:

$$\Delta A^{(1)}_{\mathrm{VP},0}(r;R_1) = -\frac{Z\alpha|e|}{4}\int_0^\infty dq\,\frac{J_0(qr)}{q}\left[\frac{2}{q}+\left(1-\frac{4}{q^2}\right)\mathrm{arctg}\left(\frac{q}{2}\right)\right]\times$$
$$\times\left(2\left[1+J_1\left(qR_1\right)-qR_1J_0\left(qR_1\right)\right]+\pi qR_1\left[J_0\left(qR_1\right)\mathbf{H}_1\left(qR_1\right)-J_1\left(qR_1\right)\mathbf{H}_0\left(qR_1\right)\right]\right)+$$
$$+\frac{Z\alpha|e|}{2}\int_0^\infty dq\,\frac{J_0(qr)J_1\left(qR_1\right)}{q}\left[\frac{2}{q}+\left(1-\frac{4}{q^2}\right)\mathrm{arctg}\left(\frac{q}{2}\right)\right]\ . \tag{2.57}$$

Первый интеграл в (2.57) с заменой $R_1 \to R_0$ и знака полностью воспроизводит (2.8). С учетом этого обстоятельства, выражения (2.55) и (2.57) перепишутся в виде

$$\Delta A^{(1)}_{\mathrm{VP},0}(r;R_1) = -\left.A^{(1)}_{\mathrm{VP},0}(r)\right|_{R_0\to R_1}+$$
$$+\frac{Z\alpha|e|}{2}\int_0^\infty dq\,\frac{J_0(qr)J_1\left(qR_1\right)}{q}\left[\frac{2}{q}+\left(1-\frac{4}{q^2}\right)\mathrm{arctg}\left(\frac{q}{2}\right)\right]\ , \tag{2.58}$$

$$\Delta\rho^{(1)}_{\mathrm{VP}}(r;R_1) = -\left.\rho^{(1)}_{\mathrm{VP}}(r)\right|_{R_0\to R_1}-$$
$$-\frac{Z\alpha|e|}{8\pi}\Delta_2\int_0^\infty dq\,\frac{J_0(qr)J_1\left(qR_1\right)}{q}\left[\frac{2}{q}+\left(1-\frac{4}{q^2}\right)\mathrm{arctg}\left(\frac{q}{2}\right)\right]\ . \tag{2.59}$$

Свойства $\rho^{(1)}_{\mathrm{VP}}(r)$ были рассмотрены ранее в разделе 2.2. Однако, мы в последующем вернемся к $\rho^{(1)}_{\mathrm{VP}}(r)$, выделив логарифмическую сингулярность при $r = R_0$ (или в данном случае при $r = R_1$) в виде явного аналитического выражения.

Рассмотрим теперь возможность внесения двумерного оператора Лапласа под знак интеграла в (2.59). Асимптотика подынтегрального выражения в (2.59) при $q \to \infty$ имеет следующий вид:

$$\begin{gathered}\frac{J_0(qr)J_1\left(qR_1\right)}{q}\left[\frac{2}{q}+\left(1-\frac{4}{q^2}\right)\operatorname{arctg}\left(\frac{q}{2}\right)\right] \to \\ \to -\frac{\cos\left(q\left(r+R_1\right)\right)+\sin\left(q\left(r-R_1\right)\right)}{2\sqrt{rR_1}q^2}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{q^3}\right) .\end{gathered} \tag{2.60}$$

Заметим, что

$$\frac{2}{q}+\left(1-\frac{4}{q^2}\right)\operatorname{arctg}\left(\frac{q}{2}\right) \to \frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{q^2}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{q^3}\right) , \quad q \to \infty , \tag{2.61}$$

Учитывая (2.61), перепишем интегральное слагаемое в правой части (2.59) в следующем виде:

$$\begin{gathered}-\frac{Z\alpha|e|}{8\pi}\Delta_2\left(\int_0^\infty dq\,\frac{J_0(qr)J_1\left(qR_1\right)}{q}\left[\frac{2}{q}+\left(1-\frac{4}{q^2}\right)\operatorname{arctg}\left(\frac{q}{2}\right)-\frac{\pi}{2}\right]+\right. \\ \left.+\int_0^\infty dq\,\frac{\pi}{2q}J_0(qr)J_1\left(qR_1\right)\right) .\end{gathered} \tag{2.62}$$

Асимптотики подынтегральных выражений в (2.62) при $q \to \infty$ имеют вид

$$\begin{gathered}\frac{J_0(qr)J_1\left(qR_1\right)}{q}\left[\frac{2}{q}+\left(1-\frac{4}{q^2}\right)\operatorname{arctg}\left(\frac{q}{2}\right)-\frac{\pi}{2}\right] \to \\ \to 2\,\frac{\cos\left(q\left(r+R_1\right)\right)+\sin\left(q\left(r-R_1\right)\right)}{\sqrt{rR_1}q^4}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{q^5}\right) ,\end{gathered} \tag{2.63}$$

$$\frac{\pi}{2q}J_0(qr)J_1\left(qR_1\right) \to -\frac{\cos\left(q\left(r+R_1\right)\right)+\sin\left(q\left(r-R_1\right)\right)}{2\sqrt{rR_1}q^2}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{q^3}\right) . \tag{2.64}$$

Ожидаемо, асимптотика (2.64) воспроизводит асимптотику (2.60). В свою очередь, из (2.63) следует, что двумерный оператор Лапласа можно внести под знак первого интеграла в (2.62). Тогда выражение для $\Delta\rho^{(1)}_{\text{VP}}$ (2.59) запишется в виде

$$\Delta\rho^{(1)}_{\text{VP}}(r;R_1) = -\left.\rho^{(1)}_{\text{VP}}(r)\right|_{R_0\to R_1} + \\ + \frac{Z\alpha|e|}{8\pi}\int_0^\infty dq\, q J_0(qr)J_1(qR_1)\left[\frac{2}{q}+\left(1-\frac{4}{q^2}\right)\operatorname{arctg}\left(\frac{q}{2}\right)-\frac{\pi}{2}\right] - \\ - \frac{Z\alpha|e|}{8\pi}\Delta_2\int_0^\infty dq\,\frac{\pi}{2q}J_0(qr)J_1(qR_1)\ . \quad (2.65)$$

Последний интеграл в (2.65) находится аналитически:

$$\int_0^\infty dq\,\frac{\pi}{2q}J_0(qr)J_1(qR_1) = \begin{cases} E\left(\dfrac{r^2}{R_1^2}\right)\ , & r<R_1\ ,\\ 1\ , & r=R_1\ ,\\ \dfrac{R_1^2-r^2}{rR_1}K\left(\dfrac{R_1^2}{r^2}\right)+\dfrac{r}{R_1}E\left(\dfrac{R_1^2}{r^2}\right)\ , & r>R_1\ , \end{cases} \quad (2.66)$$

где $K(z)$ и $E(z)$ – полные нормальные эллиптические интегралы Лежандра 1-го и 2-го рода. Т.к.

$$\lim_{r\to R_1-0} E\left(\frac{r^2}{R_1^2}\right) = 1\ ,\qquad \lim_{r\to R_1+0}\left[\frac{R_1^2-r^2}{rR_1}K\left(\frac{R_1^2}{r^2}\right)+\frac{r}{R_1}E\left(\frac{R_1^2}{r^2}\right)\right] = 1\ , \quad (2.67)$$

то функция (2.66) непрерывна. Далее, действуя двумерным оператором Лапласа на (2.66), имеем

$$\Delta_2\int_0^\infty dq\,\frac{\pi}{2q}J_0(qr)J_1(qR_1) = \frac{1}{r^2-R_1^2}E\left(\frac{r^2}{R_1^2}\right)\theta(R_1-r) + \\ + \left[\frac{r}{R_1}\frac{1}{r^2-R_1^2}E\left(\frac{R_1^2}{r^2}\right)-\frac{1}{rR_1}K\left(\frac{R_1^2}{r^2}\right)\right]\theta(r-R_1) + \\ + \left[\frac{3}{R_1}E\left(\frac{R_1^2}{r^2}\right)+\frac{R_1^2-3r^2}{R_1r^2}K\left(\frac{R_1^2}{r^2}\right)-\frac{3}{r}E\left(\frac{r^2}{R_1^2}\right)+\frac{2}{r}K\left(\frac{r^2}{R_1^2}\right)\right]\delta(r-R_1) + \\ + \left[\frac{R_1^2-r^2}{rR_1}K\left(\frac{R_1^2}{r^2}\right)+\frac{r}{R_1}E\left(\frac{R_1^2}{r^2}\right)-E\left(\frac{r^2}{R_1^2}\right)\right]\delta'(r-R_1)\ , \quad (2.68)$$

откуда следует, что теперь, помимо логарифмической, при $r\to R_1$ в вакуумной плотности будет иметь место еще и степенная сингулярность, обусловленная наличием разрыва в потенциале (2.1).

Учитывая (2.66), (2.68) и очевидное тождество

$$\left[\frac{3}{R_1}E\left(\frac{R_1^2}{r^2}\right)+\frac{R_1^2-3r^2}{R_1r^2}K\left(\frac{R_1^2}{r^2}\right)-\frac{3}{r}E\left(\frac{r^2}{R_1^2}\right)+\frac{2}{r}K\left(\frac{r^2}{R_1^2}\right)\right]\delta\left(r-R_1\right)=0\ , \tag{2.69}$$

окончательное выражение (2.65) для $\Delta\rho^{(1)}_{\mathrm{VP}}(r;R_1)$ запишется в виде

$$\Delta\rho^{(1)}_{\mathrm{VP}}(r;R_1)=-\left.\rho^{(1)}_{\mathrm{VP}}(r)\right|_{R_0\to R_1}+\Delta\rho^{(1)}_{\mathrm{VP,reg}}(r;R_1)+\Delta\rho^{(1)}_{\mathrm{VP,sing}}(r;R_1)\ , \tag{2.70}$$

где введены следующие очевидные обозначения

$$\Delta\rho^{(1)}_{\mathrm{VP,reg}}(r;R_1)=\frac{Z\alpha|e|}{8\pi}\int_0^\infty dq\,qJ_0(qr)J_1\left(qR_1\right)\left[\frac{2}{q}+\left(1-\frac{4}{q^2}\right)\mathrm{arctg}\left(\frac{q}{2}\right)-\frac{\pi}{2}\right] \tag{2.71}$$

для регулярной компоненты изменения плотности за счет конечного R_1, и

$$\begin{aligned}\Delta\rho^{(1)}_{\mathrm{VP,sing}}(r;R_1)=-\frac{Z\alpha|e|}{8\pi}&\left(\frac{1}{r^2-R_1^2}E\left(\frac{r^2}{R_1^2}\right)\theta\left(R_1-r\right)+\right.\\&+\left[\frac{r}{R_1}\frac{1}{r^2-R_1^2}E\left(\frac{R_1^2}{r^2}\right)-\frac{1}{rR_1}K\left(\frac{R_1^2}{r^2}\right)\right]\theta\left(r-R_1\right)+\\&\left.+\left[\frac{R_1^2-r^2}{rR_1}K\left(\frac{R_1^2}{r^2}\right)+\frac{r}{R_1}E\left(\frac{R_1^2}{r^2}\right)-E\left(\frac{r^2}{R_1^2}\right)\right]\delta'\left(r-R_1\right)\right)\end{aligned} \tag{2.72}$$

для сингулярной компоненты со степенной особенностью при $r\to R_1$. Явный вид этой особенности легко установить, если учесть, что слагаемое с производной дельта-функции в (2.72) на самом деле исчезает

$$\begin{aligned}&\left[\frac{R_1^2-r^2}{rR_1}K\left(\frac{R_1^2}{r^2}\right)+\frac{r}{R_1}E\left(\frac{R_1^2}{r^2}\right)-E\left(\frac{r^2}{R_1^2}\right)\right]\delta'\left(r-R_1\right)\to\\&\to\left[\frac{1}{R_1}K\left(\frac{R_1^2}{r^2}\right)-\frac{1}{R_1}E\left(\frac{R_1^2}{r^2}\right)+\frac{1}{r}E\left(\frac{r^2}{R_1^2}\right)-\frac{1}{r}K\left(\frac{r^2}{R_1^2}\right)\right]\delta\left(r-R_1\right)=\\&=\left(\frac{1}{R_1}\lim_{r\to R_1+0}\left[K\left(\frac{R_1^2}{r^2}\right)-E\left(\frac{R_1^2}{r^2}\right)\right]-\frac{1}{r}\lim_{r\to R_1-0}\left[K\left(\frac{r^2}{R_1^2}\right)-E\left(\frac{r^2}{R_1^2}\right)\right]\right)\times\\&\times\delta\left(r-R_1\right)=\left(\lim_{r\to R_1+0}\left[\frac{1}{R_1}-\frac{1}{2R_1}\ln\frac{R_1-r}{8R_1}+\mathrm{O}\left(r-R_1\right)\right]-\right.\\&\left.-\lim_{r\to R_1-0}\left[\frac{1}{R_1}-\frac{1}{2R_1}\ln\frac{r-R_1}{8R_1}+\mathrm{O}\left(R_1-r\right)\right]\right)\delta\left(r-R_1\right)=0\ .\end{aligned} \tag{2.73}$$

Поведение $\Delta\rho^{(1)}_{\mathrm{VP,sing}}(r;R_1)$ в окрестности R_1 находится из разложения эллиптических функций:

$$\frac{1}{r^2-R_1^2}E\left(\frac{r^2}{R_1^2}\right)\to\frac{1}{2R_1\left(r-R_1\right)}+\frac{1}{4R_1^2}\ln\left(R_1-r\right)+\mathrm{O}\left(1\right)\ ,\quad r\to R_1-0\ , \tag{2.74}$$

$$\begin{gathered}\frac{r}{R_1}\frac{1}{r^2-R_1^2}E\left(\frac{R_1^2}{r^2}\right)-\frac{1}{rR_1}K\left(\frac{R_1^2}{r^2}\right)\to\\ \to\frac{1}{2R_1\left(r-R_1\right)}+\frac{1}{4R_1^2}\ln\left(r-R_1\right)+\mathrm{O}\left(1\right)\ ,\quad r\to R_1+0\ .\end{gathered} \tag{2.75}$$

В результате

$$\Delta\rho^{(1)}_{\mathrm{VP,sing}}(r;R_1)\to-\frac{Z\alpha|e|}{8\pi}\left(\frac{1}{2R_1\left(r-R_1\right)}+\frac{1}{4R_1^2}\ln|R_1-r|+\mathrm{O}(1)\right)\ ,\quad r\to R_1\ . \tag{2.76}$$

Теперь покажем, что несмотря на изменения вида сингулярности в зарядовой плотности при наличии обрезания, интегральный индуцированный заряд по-прежнему исчезает в первом порядке теории возмущений. Дополнительный вклад в интегральный индуцированный заряд за счет обрезания имеет вид

$$\Delta Q^{(1)}_{\mathrm{VP}}=\int d^2r\,\Delta\rho^{(1)}_{\mathrm{VP}}(r;R_1)=Q^{(1)}_{\mathrm{VP}}+\Delta Q^{(1)}_{\mathrm{VP,reg}}+\Delta Q^{(1)}_{\mathrm{VP,sing}}\ , \tag{2.77}$$

где

$$\begin{gathered}Q^{(1)}_{\mathrm{VP}}=-\int d^2r\ \rho^{(1)}_{\mathrm{VP}}\left(r\right)\Big|_{R_0\to R_1}\ ,\\ \Delta Q^{(1)}_{\mathrm{VP,reg}}=\int d^2r\,\Delta\rho^{(1)}_{\mathrm{VP,reg}}\left(r;R_1\right)\ ,\quad \Delta Q^{(1)}_{\mathrm{VP,sing}}=\int d^2r\,\Delta\rho^{(1)}_{\mathrm{VP,sing}}\left(r;R_1\right)\ .\end{gathered} \tag{2.78}$$

Наибольший интерес представляет влияние сингулярной части вакуумной плотности на полный вакуумный заряд в первом порядке ТВ. Покажем, что $\Delta Q^{(1)}_{\mathrm{VP,sing}}$ тождественно равен нулю:

$$
\begin{aligned}
&\Delta Q^{(1)}_{\mathrm{VP,sing}} = \int d^2r\,\Delta\rho^{(1)}_{\mathrm{VP,sing}}(r;R_1) = \\
&= -\frac{Z\alpha|e|}{4}\left[\int_0^{R_1} dr\,r\left(\frac{1}{r^2-R_1^2}E\left(\frac{r^2}{R_1^2}\right)\right) + \int_{R_1}^{\infty} dr\,r\left(\frac{r}{R_1}\frac{1}{r^2-R_1^2}E\left(\frac{R_1^2}{r^2}\right) -\right.\right. \\
&\left. -\frac{1}{rR_1}K\left(\frac{R_1^2}{r^2}\right)\right) + \int_0^{\infty} dr\,r\left[\frac{R_1^2-r^2}{rR_1}K\left(\frac{R_1^2}{r^2}\right) + \frac{r}{R_1}E\left(\frac{R_1^2}{r^2}\right) - E\left(\frac{r^2}{R_1^2}\right)\right]\times \\
&\qquad \times\delta'(r-R_1)\Big] = -\frac{Z\alpha|e|}{4}\left[\lim_{\delta\to 0+}\left[\int_0^{1-\delta} dx\,\frac{x}{x^2-1}E\left(x^2\right) + \right.\right. \\
&+\left.\int_0^{1-\delta} dx\,\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{1-x^2}E\left(x^2\right)-K\left(x^2\right)\right)\right] - \lim_{r\to R_1-0}\left[K\left(\frac{r^2}{R_1^2}\right) - 2E\left(\frac{r^2}{R_1^2}\right)\right] - \\
&\qquad -\left.\lim_{r\to R_1+0}\left[\frac{2r}{R_1}\left(E\left(\frac{R_1^2}{r^2}\right)-K\left(\frac{R_1^2}{r^2}\right)\right) + \frac{R_1}{r}K\left(\frac{R_1^2}{r^2}\right)\right]\right] = \\
&\quad = -\frac{Z\alpha|e|}{4}\lim_{\delta\to 0+}\left[\left(E\left(x^2\right)-K\left(x^2\right)\right)\Big|_0^{1-\delta} + \left(\frac{K\left(x^2\right)-E\left(x^2\right)}{x}\right)\Bigg|_0^{1-\delta} + \right. \\
&\qquad \left. +2-\frac{3}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln\frac{\delta}{R_1} - 2 + \frac{3}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln\frac{\delta}{R_1} + \mathrm{O}\left(\delta^2\ln\delta\right)\right] = \\
&= -\frac{Z\alpha|e|}{4}\lim_{\delta\to 0+}\left[E\left((1-\delta)^2\right) - K\left((1-\delta)^2\right) + \frac{K\left((1-\delta)^2\right)-E\left((1-\delta)^2\right)}{1-\delta}\right] = \\
&\qquad = -\frac{Z\alpha|e|}{4}\lim_{\delta\to 0+}\left[\frac{\delta}{2}\left(3\ln 2 - 2 - \ln\delta\right) + \mathrm{O}\left(\delta^2\ln\delta\right)\right] \equiv 0. \quad (2.79)
\end{aligned}
$$

Равенство нулю $\Delta Q^{(1)}_{\mathrm{VP,reg}}$ проверяется численными расчетами. Как было показано ранее (также см. приложение Б), $\int d^2r\,\rho^{(1)}_{\mathrm{VP}}(r)$ тождественно равен нулю для любых R_0 (в нашем случае R_1). Однако, логарифмически расходящаяся при $r = R_1$ часть не была выделена явно. Выделим эту часть, представив $\rho^{(1)}_{\mathrm{VP}}(r)$ в виде суммы равномерно сходящегося интеграла по dq и логарифмически расходящегося при $r = R_1$ аналитического выражения.

$$
\begin{aligned}
\rho^{(1)}_{\mathrm{VP}}(r)\Big|_{R_0\to R_1} &= \frac{Z\alpha|e|}{16\pi}\int_0^{\infty} dq\,qJ_0(qr)\left[\frac{2}{q} + \left(1-\frac{4}{q^2}\right)\mathrm{arctg}\left(\frac{q}{2}\right)\right]\times \\
&\times\left(2\left[1+J_1(qR_1) - qR_1J_0(qR_1)\right] + \right. \\
&\left. +\pi qR_1\left[J_0(qR_1)\,\mathbf{H}_1(qR_1) - J_1(qR_1)\,\mathbf{H}_0(qR_1)\right]\right). \quad (2.80)
\end{aligned}
$$

Асимптотика подынтегрального выражения в (2.80) имеет следующий вид:

$$\frac{\sin\left(q\left(r+R_1\right)\right)+\cos\left(q\left(r-R_1\right)\right)}{\sqrt{r}R_1^{3/2}q}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{q^2}\right)\;,\quad q\to\infty\;. \tag{2.81}$$

Для выделения логарифмически расходящейся при $r = R_1$ составляющей из (2.80) заметим, что

$$\frac{\pi}{R_1}J_0\left(qr\right)J_0\left(qR_1\right)\to\frac{\sin\left(q\left(r+R_1\right)\right)+\cos\left(q\left(r-R_1\right)\right)}{\sqrt{r}R_1^{3/2}q}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{q^2}\right)\;,\quad q\to\infty\;. \tag{2.82}$$

Таким образом, вычтя (2.82) из подынтегрального выражения (2.80), мы получим равномерно сходящийся по dq интеграл согласно асимптотикам (2.81) и (2.82). Т.е.

$$\begin{aligned}\rho^{(1)}_{\mathrm{VP}}\left(r\right)\Big|_{R_0\to R_1}=\frac{Z\alpha|e|}{16\pi}\int_0^\infty dq\,\Bigg(qJ_0(qr)\left[\frac{2}{q}+\left(1-\frac{4}{q^2}\right)\mathrm{arctg}\left(\frac{q}{2}\right)\right]\times\\ \times\left(2\left[1+J_1\left(qR_1\right)-qR_1J_0\left(qR_1\right)\right]+\right.\\ \left.+\pi qR_1\left[J_0\left(qR_1\right)\mathbf{H}_1\left(qR_1\right)-J_1\left(qR_1\right)\mathbf{H}_0\left(qR_1\right)\right]\right)-\frac{\pi}{R_1}J_0\left(qr\right)J_0\left(qR_1\right)\Bigg)+\\ +\frac{Z\alpha|e|}{16R_1}\int_0^\infty dq\,J_0\left(qr\right)J_0\left(qR_1\right)\;.\end{aligned} \tag{2.83}$$

Второй интеграл в (2.83) вычисляется аналитически.

$$\int_0^\infty dq\,J_0\left(qr\right)J_0\left(qR_1\right)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi R_1}K\left(\dfrac{r^2}{R_1^2}\right), & r<R_1\;,\\[2ex] \dfrac{2}{\pi r}K\left(\dfrac{R_1^2}{r^2}\right), & r>R_1\;.\end{cases} \tag{2.84}$$

В итоге, из (2.84) и (2.83) имеем

$$\rho^{(1)}_{\mathrm{VP}}\left(r\right)\Big|_{R_0\to R_1}=\rho^{(1)}_{\mathrm{VP,reg}}\left(r;R_1\right)+\rho^{(1)}_{\mathrm{VP,sing}}\left(r;R_1\right)\;, \tag{2.85}$$

где

$$\rho^{(1)}_{\text{VP,reg}}(r;R_1) = \frac{Z\alpha|e|}{16\pi}\int_0^\infty dq\, q J_0(qr)\left[\left[\frac{2}{q}+\left(1-\frac{4}{q^2}\right)\operatorname{arctg}\left(\frac{q}{2}\right)\right]\times\right.$$
$$\times\left(2\left[1+J_1(qR_1)-qR_1J_0(qR_1)\right]+\right.$$
$$\left.\left.+\pi qR_1\left[J_0(qR_1)\,\mathbf{H}_1(qR_1)-J_1(qR_1)\,\mathbf{H}_0(qR_1)\right]\right)-\frac{\pi}{qR_1}J_0(qR_1)\right]\ , \quad (2.86)$$

$$\rho^{(1)}_{\text{VP,sing}}(r;R_1) = \frac{Z\alpha|e|}{8\pi R_1}\begin{cases}\dfrac{1}{R_1}K\left(\dfrac{r^2}{R_1^2}\right), & r<R_1\ ,\\[2mm] \dfrac{1}{r}K\left(\dfrac{R_1^2}{r^2}\right), & r>R_1\ .\end{cases} \quad (2.87)$$

Из (2.87) следует, что $\rho^{(1)}_{\text{VP,sing}}(r;R_1)$ логарифмически расходится при $r\to R_1$. Однако теперь это уже не главная особенность в зарядовой плостности при $r\to R_1$, а лишь второстепенная, дополнительная к основной степенной, возникающей из $\Delta\rho^{(1)}_{\text{VP,sing}}(r;R_1)$. Отметим также, что в данном случае интегральный заряд нельзя представить в виде суммы двух интегралов от $\rho^{(1)}_{\text{VP,reg}}(r;R_1)$ (2.86) и $\rho^{(1)}_{\text{VP,sing}}(r;R_1)$ (2.87), т.к. согласно (2.86) и (2.87) при $r\to\infty$ $\rho^{(1)}_{\text{VP,reg}}(r;R_1)$ и $\rho^{(1)}_{\text{VP,sing}}(r;R_1)$ по отдельности ведут себя $\sim 1/r$, но их сумма будет $\sim 1/r^3$.

Окончательно, пертурбативная вакуумная плотность для случая кулоновского потенциала сферического источника с радиусом R_0, обрезанного на конечном $R_1>R_0$, будет иметь вид

$$\rho^{(1)}_{\text{VP}}(r;R_1) = \rho^{(1)}_{\text{VP}}(r)+\Delta\rho^{(1)}_{\text{VP}}(r;R_1) =$$
$$= \rho^{(1)}_{\text{VP}}(r)-\rho^{(1)}_{\text{VP}}(r)\Big|_{R_0\to R_1}+\Delta\rho^{(1)}_{\text{VP,reg}}(r;R_1)+\Delta\rho^{(1)}_{\text{VP,sing}}(r;R_1)\ . \quad (2.88)$$

Следующим пунктом рассмотрим изменения, которые вносит обрезание кулоновской асимптотики при конечном R_1 в структуру $\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}_{m_j}$. Экранировка приводит к следующим изменениям в структуре решений радиальной задачи (2.21). Для $r\leqslant R_0$ фундаментальная пара решений (2.23) остается без изменений, фундаментальная пара (2.25) становится теперь актуальной только для интервала $R_0<r<R_1$, в то время как для оставшейся части полуоси $r\geqslant R_1$ в качестве независимых решений уравнения (2.21) удобно выбрать

$$\text{для } \psi_1(r):\quad \mathcal{I}^0_1(r)=\gamma I_{|m_j-1/2|}(\gamma r)\ ,\quad \mathcal{K}^0_1(r)=-\gamma K_{|m_j-1/2|}(\gamma r)\ ;$$

$$\text{для } \psi_2(r): \quad \mathcal{I}_2^0(r) = (1-\epsilon)\, I_{|m_j+1/2|}(\gamma r)\,, \qquad \mathcal{K}_2^0(r) = (1-\epsilon)\, K_{|m_j+1/2|}(\gamma r)\,, \tag{2.89}$$

где $\gamma = \sqrt{1-\epsilon^2}$.

В результате выражение для $\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}_{m_j}$ при конечном R_1 принимает вид

$$\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}_{m_j}(r,r;\epsilon) =$$
$$\begin{cases} \dfrac{1}{[\mathcal{I},\mathcal{K}]}\left(\mathcal{I}_1\mathcal{K}_1 + \mathcal{I}_2\mathcal{K}_2 + \dfrac{\left[\mathcal{K}^0,\mathcal{M}\right]_{R_1}[\mathcal{W},\mathcal{K}]_{R_0} + \left[\mathcal{W},\mathcal{K}^0\right]_{R_1}[\mathcal{M},\mathcal{K}]_{R_0}}{[\mathcal{K}^0,\mathcal{M}]_{R_1}[\mathcal{I},\mathcal{W}]_{R_0} + [\mathcal{W},\mathcal{K}^0]_{R_1}[\mathcal{I},\mathcal{M}]_{R_0}}\left(\mathcal{I}_1^2 + \mathcal{I}_2^2\right)\right), \\ r \leqslant R_0\,, \\ \dfrac{1}{[\mathcal{M},\mathcal{W}]}\Bigg(\dfrac{\left[\mathcal{K}^0,\mathcal{M}\right]_{R_1}[\mathcal{W},\mathcal{I}]_{R_0} + \left[\mathcal{W},\mathcal{K}^0\right]_{R_1}[\mathcal{I},\mathcal{M}]_{R_0}}{[\mathcal{K}^0,\mathcal{M}]_{R_1}[\mathcal{W},\mathcal{I}]_{R_0} - [\mathcal{W},\mathcal{K}^0]_{R_1}[\mathcal{I},\mathcal{M}]_{R_0}}(\mathcal{M}_1\mathcal{W}_1 + \mathcal{M}_2\mathcal{W}_2) + \\ \quad + \dfrac{\left[\mathcal{K}^0,\mathcal{M}\right]_{R_1}[\mathcal{I},\mathcal{M}]_{R_0}\left(\mathcal{W}_1^2 + \mathcal{W}_2^2\right) + \left[\mathcal{W},\mathcal{K}^0\right]_{R_1}[\mathcal{W},\mathcal{I}]_{R_0}\left(\mathcal{M}_1^2 + \mathcal{M}_2^2\right)}{[\mathcal{K}^0,\mathcal{M}]_{R_1}[\mathcal{W},\mathcal{I}]_{R_0} - [\mathcal{W},\mathcal{K}^0]_{R_1}[\mathcal{I},\mathcal{M}]_{R_0}}\Bigg), \\ R_0 < r < R_1\,, \\ \dfrac{1}{[\mathcal{I}^0,\mathcal{K}^0]}\left(\mathcal{I}_1^0\mathcal{K}_1^0 + \mathcal{I}_2^0\mathcal{K}_2^0 + \dfrac{\left[\mathcal{I}^0,\mathcal{W}\right]_{R_1}[\mathcal{I},\mathcal{M}]_{R_0} + \left[\mathcal{I}^0,\mathcal{M}\right]_{R_1}[\mathcal{W},\mathcal{I}]_{R_0}}{[\mathcal{W},\mathcal{K}^0]_{R_1}[\mathcal{I},\mathcal{M}]_{R_0} + [\mathcal{M},\mathcal{K}^0]_{R_1}[\mathcal{W},\mathcal{I}]_{R_0}}\times\right. \\ \left.\times\left((\mathcal{K}_1^0)^2 + (\mathcal{K}_2^0)^2\right)\right), \quad r \geqslant R_1\,, \end{cases} \tag{2.90}$$

где в дополнение к (2.28)

$$[\mathcal{I}^0,\mathcal{K}^0] = \epsilon - 1\,, \tag{2.91}$$

в то время как вронскиан (2.20), который входит в выражение для $\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}_{m_j}$ (2.19), теперь будет равен

$$J_{m_j}(\epsilon) = \frac{1}{[\mathcal{M},\mathcal{W}]}\left(\left[\mathcal{K}^0,\mathcal{M}\right]_{R_1}[\mathcal{I},\mathcal{W}]_{R_0} + \left[\mathcal{W},\mathcal{K}^0\right]_{R_1}[\mathcal{I},\mathcal{M}]_{R_0}\right)\,. \tag{2.92}$$

Асимптотики $\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}_{m_j}(r,r;\epsilon)$ на дугах большого круга (рис.1) для $r \leqslant R_0$ и $R_0 < r < R_1$ совпадают с соответствующими выражениями для необрезанного потенциала (2.30) и (2.31), поскольку зависящие от R_1 члены в $\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}_{m_j}$ дают только экспоненциально убывающую асимптотику. Для $r \geqslant R_1$ асимптотика $\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}_{m_j}(r,r;\epsilon)$ имеет вид:

на дугах $C_1(R)$ и $C_2(R)$ в верхней полуплоскости, где $|\epsilon| \to \infty$, $0 < \operatorname{Arg}\epsilon < \pi$,

$$\operatorname{Tr} \mathrm{G}_{m_j}(r,r;\epsilon) \to \frac{i}{r} + \frac{i}{2r\epsilon^2}\left(\frac{m_j^2}{r^2}+1\right) - \frac{im_j}{2r^3\epsilon^3} + \mathrm{O}\left(|\epsilon|^{-4}\right) , \quad r \geqslant R_1 \; ; \tag{2.93}$$

на дугах большого круга в нижней полуплоскости $C_3(R)$ и $C_4(R)$, где $|\epsilon| \to \infty$, $-\pi < \operatorname{Arg}\epsilon < 0$,

$$\operatorname{Tr} \mathrm{G}_{m_j}(r,r;\epsilon) \to -\frac{i}{r} - \frac{i}{2r\epsilon^2}\left(\frac{m_j^2}{r^2}+1\right) + \frac{im_j}{2r^3\epsilon^3} + \mathrm{O}\left(|\epsilon|^{-4}\right) , \quad r \geqslant R_1 \; . \tag{2.94}$$

Как и ранее, из приведенных выше асимптотик $\operatorname{Tr} \mathrm{G}_{m_j}(r,r;\epsilon)$ на дугах большого круга следует, что интегрирование по контурам $P(R)$ и $E(R)$ в (2.17) может быть сведено к мнимой оси, откуда следует такое же окончательное представление для вакуумной плотности, как и в необрезанном случае (2.32–2.34) с теми же свойствами (2.35), (2.36).

В то же время, асимптотика $\operatorname{Tr} \mathrm{G}_{m_j}(r,r;\epsilon)$ для $r \to \infty$ претерпевает существенные изменения, обусловленные другой структурой (2.89) решений системы (2.21) для $r \geqslant R_1$, а именно

$$\operatorname{Tr} \mathrm{G}_{m_j}(r,r;iy) \to \frac{iy}{\sqrt{1+y^2}}\frac{1}{r} + \frac{m_j\left(1-im_jy\right)}{2\left(1+y^2\right)^{3/2}}\frac{1}{r^3} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{r^5}\right) \quad , \quad r \to \infty \; . \tag{2.95}$$

Из (2.95) следует, что в случае конечного R_1 полный индуцированный заряд для любого m_j будет конечным с самого начала. Тем не менее, индуцированная плотность требует перенормировки, поскольку неперенормированный полный заряд в докритической области не исчезает. Для этого снова требуется ввести компоненту $\rho^{(3+)}_{\mathrm{VP},|m_j|}(r)$ таким же соотношением (2.39), в котором $\operatorname{Tr} \mathrm{G}^{(1)}_{m_j}(r;iy)$ теперь заменяется на:

для $r \leqslant R_0$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}^{(1)}_{m_j}(r;iy) = \frac{Q}{(iy-1)^2}\Bigg[&\Big(\tilde\gamma^2 K^2_{|m_j-1/2|}(\tilde\gamma r) + (1-iy)^2 K^2_{|m_j+1/2|}(\tilde\gamma r)\Big)\times \\
&\times\int\limits_0^r dr'\,\frac{r'}{R_0}\Big(\tilde\gamma^2 I^2_{|m_j-1/2|}(\tilde\gamma r') + (1-iy)^2 I^2_{|m_j+1/2|}(\tilde\gamma r')\Big) + \\
&+\Big(\tilde\gamma^2 I^2_{|m_j-1/2|}(\tilde\gamma r) + (1-iy)^2 I^2_{|m_j+1/2|}(\tilde\gamma r)\Big)\times \\
&\times\Bigg\{\int\limits_r^{R_0} dr'\,\frac{r'}{R_0}\Big(\tilde\gamma^2 K^2_{|m_j-1/2|}(\tilde\gamma r') + (1-iy)^2 K^2_{|m_j+1/2|}(\tilde\gamma r')\Big) + \\
&+\int\limits_{R_0}^{R_1} dr'\,\Big(\tilde\gamma^2 K^2_{|m_j-1/2|}(\tilde\gamma r') + (1-iy)^2 K^2_{|m_j+1/2|}(\tilde\gamma r')\Big)\Bigg\}\Bigg]\ ,
\end{aligned}
\tag{2.96}
$$

для $R_0 < r < R_1$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}^{(1)}_{m_j}(r;iy) = \frac{Q}{(iy-1)^2}\Bigg[&\Big(\tilde\gamma^2 K^2_{|m_j-1/2|}(\tilde\gamma r) + (1-iy)^2 K^2_{|m_j+1/2|}(\tilde\gamma r)\Big)\times \\
&\times\Bigg\{\int\limits_0^{R_0} dr'\,\frac{r'}{R_0}\Big(\tilde\gamma^2 I^2_{|m_j-1/2|}(\tilde\gamma r') + (1-iy)^2 I^2_{|m_j+1/2|}(\tilde\gamma r')\Big) + \\
&+\int\limits_{R_0}^{r} dr'\,\Big(\tilde\gamma^2 I^2_{|m_j-1/2|}(\tilde\gamma r') + (1-iy)^2 I^2_{|m_j+1/2|}(\tilde\gamma r')\Big)\Bigg\} + \\
&+\Big(\tilde\gamma^2 I^2_{|m_j-1/2|}(\tilde\gamma r) + (1-iy)^2 I^2_{|m_j+1/2|}(\tilde\gamma r)\Big)\times \\
&\times\int\limits_r^{R_1} dr'\,\Big(\tilde\gamma^2 K^2_{|m_j-1/2|}(\tilde\gamma r') + (1-iy)^2 K^2_{|m_j+1/2|}(\tilde\gamma r')\Big)\Bigg]\ ,
\end{aligned}
\tag{2.97}
$$

для $r \geqslant R_1$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Tr} \mathrm{G}^{(1)}_{m_j}(r;iy) = \frac{Q}{(iy-1)^2} \Bigg[\Big(\tilde\gamma^2 K^2_{|m_j-1/2|}(\tilde\gamma r) + (1-iy)^2 K^2_{|m_j+1/2|}(\tilde\gamma r) \Big) \times \\
\times \left\{ \int\limits_0^{R_0} dr' \, \frac{r'}{R_0} \left(\tilde\gamma^2 I^2_{|m_j-1/2|}(\tilde\gamma r') + (1-iy)^2 I^2_{|m_j+1/2|}(\tilde\gamma r') \right) + \right. \\
\left. + \int\limits_{R_0}^{R_1} dr' \, \left(\tilde\gamma^2 I^2_{|m_j-1/2|}(\tilde\gamma r') + (1-iy)^2 I^2_{|m_j+1/2|}(\tilde\gamma r') \right) \right\} \Bigg] \ ,
\end{aligned}
\tag{2.98}
$$

где $\tilde\gamma = \sqrt{1+y^2}$. После чего определяем перенормированную $\rho^{\mathrm{ren}}_{\mathrm{VP}}(r)$ выражением

$$
\rho^{\mathrm{ren}}_{\mathrm{VP}}(r) = 2 \left[\rho^{(1)}_{\mathrm{VP}}(r;R_1) + \sum_{m_j=1/2,\,3/2,..} \rho^{(3+)}_{\mathrm{VP},|m_j|}(r) \right] \ , \tag{2.99}
$$

где $\rho^{(1)}_{\mathrm{VP}}(r;R_1)$ суть пертурбативная вакуумная плотность (2.88) в случае конечного R_1.

Поведение перенормированной вакуумной плотности (2.99) на качественном уровне повторяет случай отсутствия экранировки ($R_1 \to \infty$): для $Z < Z_{cr,1}$ полный индуцированный заряд тождественно равен нулю, каждый дискретный уровень $\psi_{n,m_j}(r)$ при достижении нижнего континуума приводит к изменениям в вакуумной плотности в соответствии с (2.44), тогда как полный заряд изменяется на $(-2|e|)$.

2.5 Специфические двумерные эффекты при конечном R_1

В 2+1D в случае кулоновского потенциала сферического источника (2.1), обрезанного при конечном R_1, поведение дискретных уровней на порогах обоих континуумов имеет свои специфические особенности, которые отсутствуют в одно- и трехмерной системах ДК. Начнем исследование этих особенностей непосредственно со спектральной задачи ДК (2.21) на пороге нижнего континуума.

При $\epsilon = -1$ система (2.21) запишется в виде

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dr}\psi_1(r) + \dfrac{1/2 - m_j}{r}\,\psi_1(r) = -V(r)\psi_2(r)\ , \\ \dfrac{d}{dr}\psi_2(r) + \dfrac{1/2 + m_j}{r}\,\psi_2(r) = (2 + V(r))\psi_1(r)\ . \end{cases} \tag{2.100}$$

Для $r \leqslant R_0$ решения (2.100) удобно представить в виде

$$\begin{aligned} \psi_1(r) &= \sqrt{V_0}\, I_{|m_j - 1/2|}\left(\sqrt{V_0(2 - V_0)}\, r\right), \\ \psi_2(r) &= \sqrt{2 - V_0}\, I_{|m_j + 1/2|}\left(\sqrt{V_0(2 - V_0)}\, r\right)\ , \end{aligned} \tag{2.101}$$

тогда как для $R_0 < r < R_1$ они имеют вид

$$\begin{aligned} \psi_1(r) &= \sqrt{\frac{2Q}{r}}\left(I_{2i|\varkappa|}\left(\sqrt{8Qr}\right) + \lambda K_{2i|\varkappa|}\left(\sqrt{8Qr}\right)\right)\ , \\ \psi_2(r) &= 2I_{1+2i|\varkappa|}\left(\sqrt{8Qr}\right) + (i|\varkappa| - m_j)\sqrt{\frac{2}{Qr}} I_{2i|\varkappa|}\left(\sqrt{8Qr}\right) \\ &- \lambda\left(2K_{1+2i|\varkappa|}\left(\sqrt{8Qr}\right) - (i|\varkappa| - m_j)\sqrt{\frac{2}{Qr}} K_{2i|\varkappa|}\left(\sqrt{8Qr}\right)\right)\ , \end{aligned} \tag{2.102}$$

где $|\varkappa| = \sqrt{Q^2 - m_j^2}$. Коэффициент λ определяется из условия сшивки решений (2.101) и (2.102) при $r = R_0$.

Для $r \geqslant R_1$ решения системы (2.100) будут иметь степенной вид, причем показатели степени разделяют каналы с $|m_j| = 1/2$, $m_j = -3/2$ и другими m_j на две существенно отличающиеся друг от друга группы решений. А именно, для $m_j \geqslant 3/2$ и $m_j \leqslant -5/2$ решения системы (2.100) в области $r \geqslant R_1$ с точностью до общего нормировочного множителя имеют вид

$$\begin{aligned} m_j \geqslant 3/2\ &: \psi_1(r) = 0, \quad \psi_2(r) = r^{-(m_j + 1/2)}, \\ m_j \leqslant -5/2\ &: \psi_1(r) = r^{m_j - 1/2}, \quad \psi_2(r) = \frac{r^{m_j + 1/2}}{m_j + 1/2}\ . \end{aligned} \tag{2.103}$$

Решения (2.103) являются нормируемыми при $\epsilon = -1$. Критические заряды для этой группы решений определяются из условия сшивки (2.102) и (2.103) при $r = R_1$, которое для $m_j \geqslant 3/2$ приводит к уравнению

$$W^{-}_{1,m_j} = 0\ , \tag{2.104}$$

а для $m_j \leqslant -5/2$ соответственно к

$$W^{-}_{2,|m_j|} = 0 \ , \tag{2.105}$$

где $W^{\mp}_{i,m_j}\,,\ i = 1{,}2$ определяются следующими выражениями ($m_j > 0$)

$$\begin{aligned}
W^{\mp}_{1,m_j} = K_{2i|\varkappa|}\left(\sqrt{\pm 8QR_1}\right)\Bigg(& I_{m_j-1/2}(\sqrt{\pm V_0(2\mp V_0)}\,R_0)\times \\
&\times\left(2I_{1+2i|\varkappa|}(\sqrt{\pm 8QR_0}) \pm (i|\varkappa| - m_j)\,\sqrt{\frac{2}{\pm QR_0}}\,I_{2i|\varkappa|}\left(\sqrt{\pm 8QR_0}\right)\right) - \\
&- \sqrt{2\,(2\mp V_0)}\,I_{m_j+1/2}\left(\sqrt{\pm V_0(2\mp V_0)}\,R_0\right) I_{2i|\varkappa|}\left(\sqrt{\pm 8QR_0}\right)\Bigg) + \\
&+ I_{2i|\varkappa|}\left(\sqrt{\pm 8QR_1}\right)\Bigg(I_{m_j-1/2}(\sqrt{\pm V_0(2\mp V_0)}\,R_0)\times \\
&\times\left(2K_{1+2i|\varkappa|}(\sqrt{\pm 8QR_0}) \mp (i|\varkappa| - m_j)\,\sqrt{\frac{2}{\pm QR_0}}\,K_{2i|\varkappa|}\left(\sqrt{\pm 8QR_0}\right)\right) + \\
&+ \sqrt{2\,(2\mp V_0)}\,I_{m_j+1/2}\left(\sqrt{\pm V_0(2\mp V_0)}\,R_0\right) K_{2i|\varkappa|}\left(\sqrt{\pm 8QR_0}\right)\Bigg)\ ,
\end{aligned} \tag{2.106}$$

$$\begin{aligned}
W^{\mp}_{2,m_j} = \Bigg(&\sqrt{\pm 2Q}K_{2i|\varkappa|}\left(\sqrt{\pm 8QR_1}\right) - \frac{m_j - 1/2}{\sqrt{R_1}}\Bigg(2K_{1+2i|\varkappa|}(\sqrt{\pm 8QR_1})\mp \\
&\mp (i|\varkappa| + m_j)\sqrt{\frac{2}{\pm QR_1}}K_{2i|\varkappa|}\left(\sqrt{\pm 8QR_1}\right)\Bigg)\Bigg)\Bigg(I_{m_j+1/2}(\sqrt{\pm V_0(2\mp V_0)}\,R_0)\times \\
&\times\left(2I_{1+2i|\varkappa|}(\sqrt{\pm 8QR_0}) \pm (i|\varkappa| + m_j)\sqrt{\frac{2}{\pm QR_0}}I_{2i|\varkappa|}\left(\sqrt{\pm 8QR_0}\right)\right) - \\
&- \sqrt{2\,(2\mp V_0)}I_{m_j-1/2}\left(\sqrt{\pm V_0(2\mp V_0)}\,R_0\right) I_{2i|\varkappa|}\left(\sqrt{\pm 8QR_0}\right)\Bigg) + \\
&+ \Bigg(\sqrt{\pm 2Q}I_{2i|\varkappa|}\left(\sqrt{\pm 8QR_1}\right) + \frac{m_j - 1/2}{\sqrt{R_1}}\Bigg(2I_{1+2i|\varkappa|}(\sqrt{\pm 8QR_1})\pm \\
&\pm (i|\varkappa| + m_j)\sqrt{\frac{2}{\pm QR_1}}I_{2i|\varkappa|}\left(\sqrt{\pm 8QR_0}\right)\Bigg)\Bigg)\Bigg(I_{m_j+1/2}(\sqrt{\pm V_0(2\mp V_0)}\,R_0)\times \\
&\times\left(2K_{1+2i|\varkappa|}(\sqrt{\pm 8QR_0}) \mp (i|\varkappa| + m_j)\sqrt{\frac{2}{\pm QR_0}}K_{2i|\varkappa|}\left(\sqrt{\pm 8QR_0}\right)\right) + \\
&+ \sqrt{2\,(2\mp V_0)}\,I_{m_j-1/2}\left(\sqrt{\pm V_0(2\mp V_0)}\,R_0\right)\,K_{2i|\varkappa|}\left(\sqrt{\pm 8QR_0}\right)\Bigg)\ .
\end{aligned} \tag{2.107}$$

В то же время, для $|m_j| = 1/2$ и $m_j = -3/2$ система уравнений (2.100) не имеет нормируемых на пороге нижнего континуума решений, т.к. для этих m_j при $r \geqslant R_1$ последние имеют вид

$$\begin{aligned} m_j = 1/2 \ &: \quad \psi_1(r) = 0 \ , \quad \psi_2(r) = A/r \ , \\ m_j = -1/2 \ &: \ \psi_1(r) = 0 \ , \quad \psi_2(r) = B \ , \\ m_j = -3/2 \ &: \ \psi_1(r) = C/r^2 \ , \psi_2(r) = -C/r \ . \end{aligned} \tag{2.108}$$

Отдельно отметим, что такое поведение электронной ВФ на пороге нижнего континуума выводится и непосредственно через предел $\epsilon \to -1$ из решений системы (2.21) для $-1 < \epsilon < 1$ и $|m_j| < Q$ в случае обрезанного кулоновского потенциала (2.1). Более того, решения (2.108) не соответствуют состояниям рассеяния на пороге нижнего континуума ввиду того, что обе компоненты волновой функции состояния рассеяния в двумерном случае должны в асимптотике иметь поведение, соответствующее цилиндрическим волнам, а именно $\sim 1/\sqrt{r}$. Такой вид решений (2.108) для $r > R_1$ является специфической особенностью двумерной задачи ДК. В одномерном случае соответствующие решения на обоих порогах континуумов являются состояниями рассеяния с нулевым волновым числом. Напротив, в трехмерном случае на пороге нижнего континуума электронная волновая функция для всех орбитальных чисел l содержит только одну ненулевую компоненту, которая ведет себя как $\mathrm{O}(r^{-(l+2)})$ и поэтому принадлежит дискретному спектру, тогда как на пороге верхнего континуума s-волна является состоянием рассеяния, а остальные опять принадлежат дискретному спектру.

На рис. 2.6а,б показаны компоненты $\psi_1(r)$ и $\psi_2(r)$ электронной ВФ, соответствующей $m_j = \pm 1/2$, лежащей очень близко к порогу нижнего континуума, а именно $\epsilon = -0.99999999999999999538$ ($Z = 150.6336858338345544$) для $m_j = 1/2$ и $\epsilon = -0.9999999999999999998$ ($Z = 213$) для $m_j = -1/2$. На рис. 2.6в,г представлены $\psi_1(r)$ и $\psi_2(r)$ уровней с $m_j = \pm 3/2$ для $\epsilon = -0.999999477$ ($Z = 284.07944$) и $\epsilon = -0.999999249$ ($Z = 289.56426$), соответственно.

Несмотря на то что в данном случае мы имеем дело с ненормируемыми решениями, уравнения для соответствующих критических зарядов получаются из условия сшивки решений (2.102) и (2.108) при $r = R_1$:

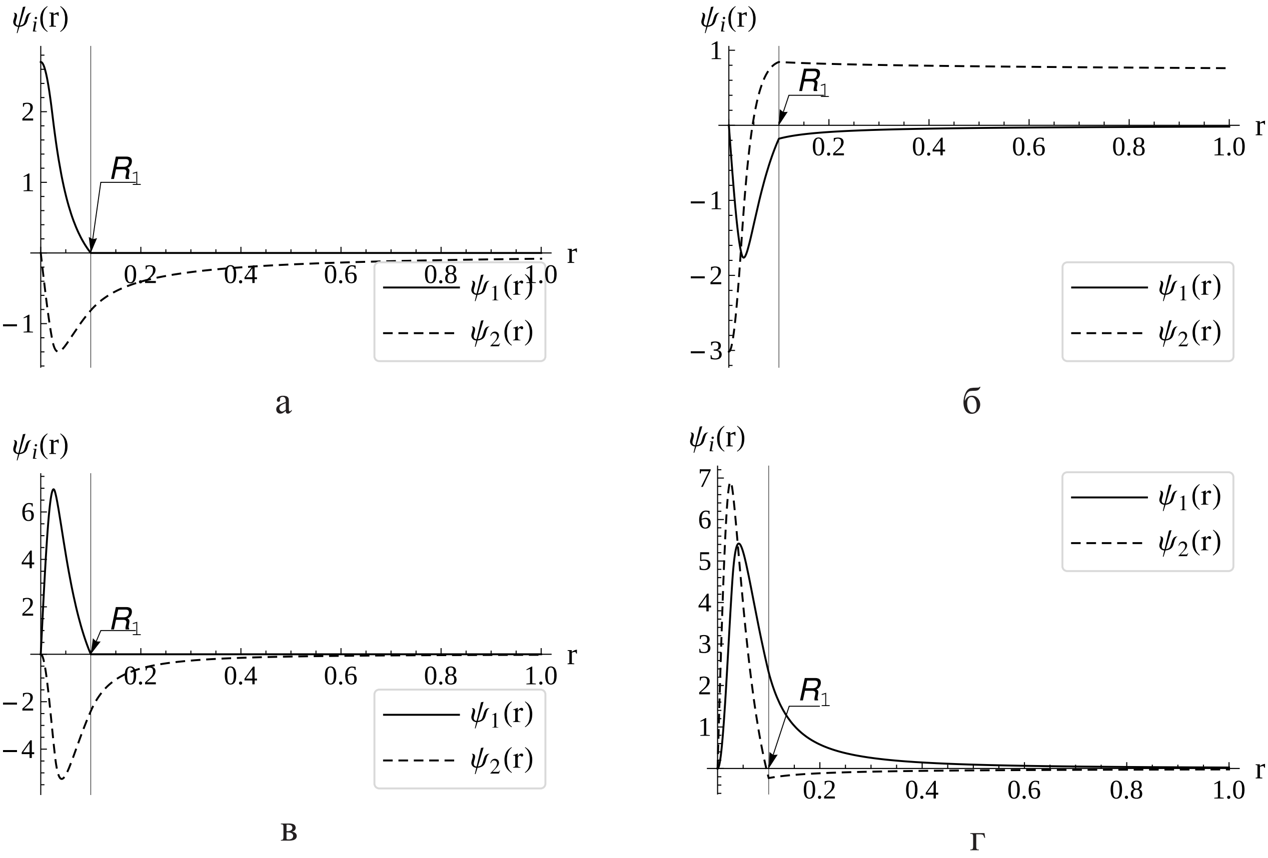


Рисунок 2.6 — Компоненты радиальной волновой функции $\psi_1(r)$ и $\psi_2(r)$ при $R_1 = 1/10$ для а) $m_j = 1/2$, $Z = 150.6336858338345544$ б) $m_j = -1/2$, $Z = 213$ в) $m_j = 3/2$, $Z = 284.07944$ г) $m_j = -3/2$, $Z = 289.56426$.

для $m_j = 1/2$

$$\mathrm{Im}\Bigg[\Bigg(Q\sqrt{1-\frac{2}{V_0}}\,J_{-2i|\varkappa|}(-2\sqrt{-2QR_0})\,J_1(\sqrt{V_0(V_0-2)}\,R_0)+ \\ +\left(\sqrt{-2QR_0}\,J_{1-2i|\varkappa|}(-2\sqrt{-2QR_0})-(1/2+i|\varkappa|)J_{-2i|\varkappa|}(-2\sqrt{-2QR_0})\right)\times \\ \times J_0(\sqrt{V_0(V_0-2)}\,R_0)\Bigg)J_{2i|\varkappa|}\left(2\sqrt{-2QR_1}\right)\Bigg]=0\,, \quad (2.109)$$

для $m_j = -1/2$

$$\mathrm{Im}\Bigg[\Bigg(\Bigg(Q\sqrt{1-\frac{2}{V_0}}\,J_{-2i|\varkappa|}(-2\sqrt{-2QR_0})\,J_0(\sqrt{V_0(V_0-2)}\,R_0)-$$
$$-\Big(\sqrt{-2QR_0}\,J_{1-2i|\varkappa|}(-2\sqrt{-2QR_0})+(1/2-i|\varkappa|)\,J_{-2i|\varkappa|}(-2\sqrt{-2QR_0})\Big)\times$$
$$\times J_1(\sqrt{V_0(V_0-2)}\,R_0)\Bigg)J_{2i|\varkappa|}(2\sqrt{-2QR_1})\Bigg]=0\ , \quad (2.110)$$

и для $m_j = -3/2$

$$\mathrm{Im}\Bigg[\Bigg(\Bigg(Q\sqrt{1-\frac{2}{V_0}}\,J_{-2i|\varkappa|}(-2\sqrt{-2QR_0})J_1(\sqrt{V_0(V_0-2)}\,R_0)-$$
$$-\Big(\sqrt{-2QR_0}\,J_{1-2i|\varkappa|}(-2\sqrt{-2QR_0})+(3/2-i|\varkappa|)J_{-2i|\varkappa|}(-2\sqrt{-2QR_0})\Big)\times$$
$$\times J_2(\sqrt{V_0(V_0-2)}\,R_0)\Bigg)\Big((QR_1+3/2+i|\varkappa|)\,J_{2i|\varkappa|}(2\sqrt{-2QR_1})-$$
$$-\sqrt{-2QR_1}\,J_{1+2i|\varkappa|}(2\sqrt{-2QR_1})\Big)\Bigg]=0\ . \quad (2.111)$$

На пороге верхнего континуума имеет место зеркально-симметричная ситуация. В случае кулоновского потенциала протяженного сферического источника, обрезанного на конечном R_1, точка сгущения уровней дискретного спектра ($\epsilon \to 1$) исчезает и общее число дискретных уровней становится конечным. Вся разница заключается в изменении знаков m_j. А именно, для $\epsilon = 1$ система уравнений (2.21) принимает вид

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dr}\psi_1(r)+\dfrac{1/2-m_j}{r}\,\psi_1(r)=(2-V(r))\psi_2(r)\ , \\ \dfrac{d}{dr}\psi_2(r)+\dfrac{1/2+m_j}{r}\,\psi_2(r)=V(r)\psi_1(r)\ . \end{cases} \quad (2.112)$$

В этом случае для $r \leqslant R_0$ решения системы (2.110) выбираем в виде

$$\begin{aligned} \psi_1(r) &= \sqrt{V_0+2}\,I_{|m_j-1/2|}\left(\sqrt{-V_0(2+V_0)}\,r\right)\ , \\ \psi_2(r) &= \sqrt{V_0}\,I_{|m_j+1/2|}\left(\sqrt{-V_0(2+V_0)}\,r\right)\ , \end{aligned} \quad (2.113)$$

тогда как для $R_0 < r < R_1$

$$
\begin{aligned}
&\psi_1(r) = 2I_{1+2i|\varkappa|}\left(\sqrt{-8Qr}\right) + (i|\varkappa| - m_j)\sqrt{\frac{2}{-Qr}}\, I_{2i|\varkappa|}\left(\sqrt{-8Qr}\right) - \\
&- \lambda\left(2K_{1+2i|\varkappa|}\left(\sqrt{-8Qr}\right) - (i|\varkappa| - m_j)\sqrt{\frac{2}{-Qr}}\, K_{2i|\varkappa|}\left(\sqrt{-8Qr}\right)\right) \ , \qquad (2.114)\\
&\psi_2(r) = \sqrt{\frac{-2Q}{r}}\left(I_{2i|\varkappa|}\left(\sqrt{-8Qr}\right) + \lambda K_{2i|\varkappa|}\left(\sqrt{-8Qr}\right)\right) \ ,
\end{aligned}
$$

где коэффициент λ, аналогично ситуации на пороге нижнего континуума, определяется из условия сшивки решений (2.113) и (2.114) при $r = R_0$.

Опять же, для $r \geqslant R_1$ решения (2.112) имеют степенной вид. Показатели степени разделяют каналы с $|m_j| = 1/2$, $m_j = 3/2$ и другими m_j на две существенно отличающиеся друг от друга группы решений. А именно, для $m_j \geqslant 5/2$ и $m_j \leqslant -3/2$ решения (2.112) в области $r \geqslant R_1$ с точностью до общего нормировочного множителя могут быть записаны в виде

$$
\begin{aligned}
m_j \geqslant 5/2 \ &: \psi_1(r) = \frac{r^{1/2-m_j}}{1/2 - m_j}, \quad \psi_2(r) = r^{-m_j-1/2} \ , \\
m_j \leqslant -3/2 \ &: \psi_1(r) = r^{m_j-1/2}, \ \psi_2(r) = 0 \ .
\end{aligned}
\qquad (2.115)
$$

Решения (2.115) являются нормируемыми на пороге верхнего континуума. Соответствующие «критические» заряды, когда виртуальные уровни, опускающиеся к порогу верхнего континуума сверху, преобразуются в реальные, находятся из сшивки в точке $r = R_1$, а именно

$$
W^+_{2,m_j} = 0 \qquad (2.116)
$$

для $m_j \geqslant 5/2$ и

$$
W^+_{1,|m_j|} = 0 \qquad (2.117)
$$

для $m_j \leqslant -3/2$.

Для $|m_j| = 1/2$ и $m_j = 3/2$ система уравнений (2.112) не имеет нормируемых решений на пороге верхнего континуума, которые могут быть определены либо как дискретные уровни, либо как состояния рассеяния, т.к. для $r \geqslant R_1$ они имеют вид

$$\begin{aligned}
&m_j = 1/2\ :\quad \psi_1(r) = B\ ,\qquad \psi_2(r) = 0\ ,\\
&m_j = -1/2\ :\ \psi_1(r) = A/r\ ,\quad \psi_2(r) = 0\ ,\\
&m_j = 3/2\ :\quad \psi_1(r) = -C/r\ ,\quad \psi_2(r) = C/r^2\ .
\end{aligned} \tag{2.118}$$

Соответствующие «критические» заряды находятся по той же схеме, что и для порога нижнего континуума:
для $m_j = 1/2$

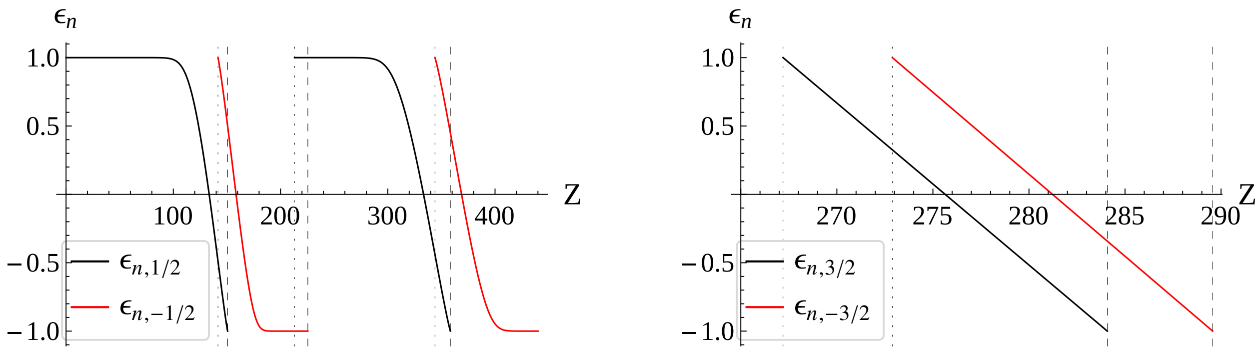
$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}\Bigg[\Bigg(&Q\sqrt{1+\frac{2}{V_0}}\,J_{-2i|\varkappa|}(2\sqrt{2QR_0})\,J_0(\sqrt{V_0(V_0+2)}\,R_0)+\\
&+\Big(\sqrt{2QR_0}\,J_{1-2i|\varkappa|}(2\sqrt{2QR_0})-(1/2-i|\varkappa|)J_{-2i|\varkappa|}(2\sqrt{2QR_0})\Big)\times\\
&\times J_1(\sqrt{V_0(V_0+2)}\,R_0)\Bigg)J_{2i|\varkappa|}(2\sqrt{2QR_1})\Bigg]=0\ ,
\end{aligned} \tag{2.119}$$

для $m_j = -1/2$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}\Bigg[\Bigg(&-Q\sqrt{1+\frac{2}{V_0}}\,J_{-2i|\varkappa|}(2\sqrt{2QR_0})\,J_1(\sqrt{V_0(V_0+2)}\,R_0)+\\
&+\Big(\sqrt{2QR_0}\,J_{1-2i|\varkappa|}(2\sqrt{2QR_0})+(1/2+i|\varkappa|)\,J_{-2i|\varkappa|}(2\sqrt{2QR_0})\Big)\times\\
&\times J_0(\sqrt{V_0(V_0+2)}R_0)\Bigg)J_{2i|\varkappa|}(2\sqrt{2QR_1})\Bigg]=0\ ,
\end{aligned} \tag{2.120}$$

и для $m_j = 3/2$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}\Bigg[\Bigg(&Q\sqrt{1+\frac{2}{V_0}}\,J_{-2i|\varkappa|}(2\sqrt{2QR_0})\,J_1(\sqrt{V_0(V_0+2)}\,R_0)+\\
&+\Big(\sqrt{2QR_0}\,J_{1-2i|\varkappa|}(2\sqrt{2QR_0})-(3/2-i|\varkappa|)J_{-2i|\varkappa|}(2\sqrt{2QR_0})\Big)\times\\
&\times J_2(\sqrt{V_0(V_0+2)}\,R_0)\Bigg)\Big((QR_1-3/2-i|\varkappa|)\,J_{2i|\varkappa|}(2\sqrt{2QR_1})+\\
&+\sqrt{2QR_1}\,J_{1+2i|\varkappa|}(2\sqrt{2QR_1})\Big)\Bigg]=0\ .
\end{aligned} \tag{2.121}$$



а б

Рисунок 2.7 — Эволюция дискретных уровней с увеличением Z при $R_1 = 1/10$ и (а) $|m_j| = 1/2$; (б) $|m_j| = 3/2$. (Вертикальные штриховые пунктирные линии соответствуют критическим зарядам, а вертикальные точечные пунктирные линии – зарядам, отвечающим моментам превращения виртуальных уровней в дискретные.)

Примечательной особенностью канала $|m_j| = 1/2$ является существенное отличие в поведении дискретных уровней в этом канале при приближении к обоим порогам не только между этим каналом и другими, но и между $m_j = \pm 1/2$. Последнее отличие оказывается наиболее впечатляющим. На рис. 2.7а,б продемонстрирована эволюция уровней дискретного спектра с увеличением Z при $R_1 = 1/10$ и $|m_j| = 1/2,\, 3/2$. Вертикальные штриховые пунктирные линии обозначают положения критических зарядов, когда уровни приближаются к порогу нижнего континуума, а точечные пунктирные – моменты преобразования виртуальных уровней в реальные на пороге верхнего континуума. Однако более детальное обсуждение этого эффекта представляет интерес прежде всего для физики планарных гетероструктур на основе графена и поэтому рассмотрено в нашей отдельной работе [85].

Другой спецификой каналов с $|m_j| = 1/2$ и $m_j = -3/2$ является изменение индуцированных плотностей заряда при пересечении соответствующих Z_{cr}, так как в этом случае правило Фано (2.44) для $\Delta\rho_{\mathrm{VP}}(r)$ следует понимать в виде предельного перехода

$$\Delta\rho_{\mathrm{VP}}(r) = -2|e| \lim_{\epsilon_n \to \pm 1} \psi_{n,m_j}(r)^\dagger \psi_{n,m_j}(r) \ , \tag{2.122}$$

поскольку ненормируемые решения (2.108) и (2.118) являются предельными случаями соответствующих дискретных уровней при $\epsilon \to \pm 1$.

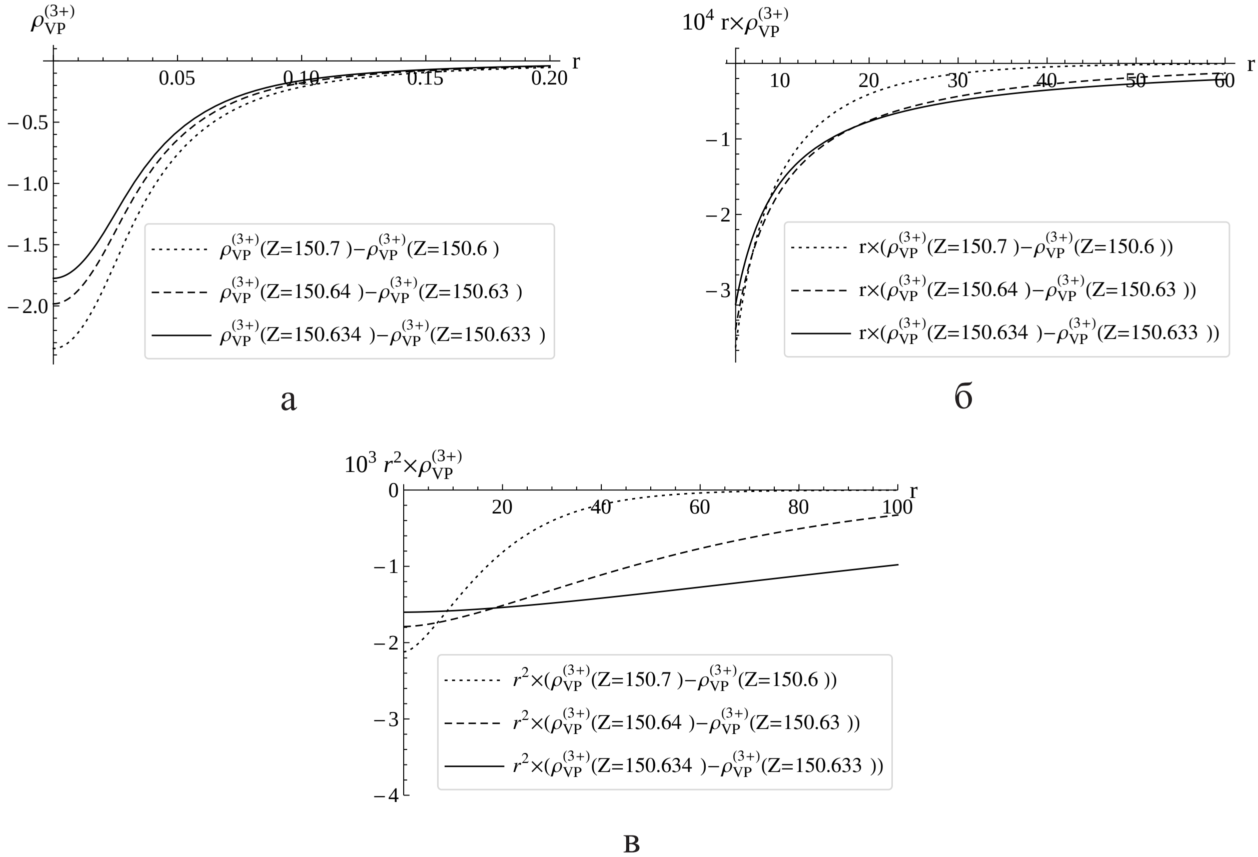


Рисунок 2.8 — Скачок вакуумной плотности $\rho_{\rm VP}^{(3+)}$ при переходе через Z_{cr} при $R_1 = 1/10$ для $|m_j| = 1/2$.

В частности, скачок в вакуумной плотности заряда при погружении соответствующего уровня с $|m_j| = 1/2$ и $m_j = -3/2$ в нижний континуум оказывается (несобственным) пределом нормируемого распределения заряда, «размазанного» по всей полуоси $0 \leqslant r \leqslant \infty$, который несет $(-2|e|)$ от суммарного индуцированного заряда. Последний факт надежно подтверждается прямыми численными расчетами. Зависящее от ΔZ поведение скачков индуцированной плотности заряда при пересечения порога нижнего континуума показано на рис. 2.8 для $|m_j| = 1/2$. На этих рисунках представлена разность индуцированных плотностей заряда для $Z_{cr} - \Delta Z/2$ и $Z_{cr} + \Delta Z/2$ при последовательном уменьшении ΔZ. Как уже было указано в разделе 2.3.1, скачки индуцированной плотности заряда при опускании уровней дискретного спектра в нижний континуум представляют собой по существу непертурбативный эффект, полностью содержащийся в $\rho_{\rm VP}^{(3+)}$, тогда как $\rho_{\rm VP}^{(1)}$ не содержит никакой информации о непертурбативных изменениях вакуумной плотности и для всех значений Z дает нулевой вклад в полный индуцированный заряд. Чтобы продемонстрировать эффект «размазывания» скачков индуцированной плотности заряда на пороге нижнего континуума более четко, на рис. 2.8б,в показаны взвешенные плотности заряда $r \times \rho^{(3+)}_{\mathrm{VP},|m_j|}(r)$ и $r^2 \times \rho^{(3+)}_{\mathrm{VP},|m_j|}(r)$. Из рис. 2.8 ясно видно, что чем меньше ΔZ, тем сильнее «размазывается» разность (скачок) между индуцированными плотностями заряда до и после падения дискретного уровня в нижних континуум, но изменение полного индуцированного заряда, равное $(-2|e|)$, остается при этом неизменным.

2.6 Непертурбативная вакуумная энергия в 2+1D

Как показано в главе 1 и в разделе 2.3 формирование локализованных вакуумных оболочек, вызванное опусканием дискретных уровней в нижний континуум, существенно влияет на $\rho^{\mathrm{ren}}_{\mathrm{VP}}$. Этот эффект также вносит существенный и нелинейный вклад в $\mathcal{E}^{\mathrm{ren}}_{\mathrm{VP}}$ в сверхкритической области. Соответствующие изменения в $\mathcal{E}^{\mathrm{ren}}_{\mathrm{VP}}$, вызванные образованием локализованных вакуумных оболочек с ростом Z, сильно зависят от числа пространственных измерений. В случае $1+1$ КЭД скорость роста общего числа оболочек сравнительно небольшая, поэтому неперенормированная $\mathcal{E}_{\mathrm{VP}}$ в сверхкритической области ведет себя как $\sim Z^\nu$, $1 < \nu < 2$. Поэтому в этом случае определяющий вклад в перенормированную вакуумную энергию вносит перенормировочный член (раздел 1.4). В $2+1$ КЭД эта картина существенно изменяется, как показано в нашей работе [91] и ниже для рассматриваемой сверхкритической системы ДК.

2.6.1 Теоретическая часть для непертурбативной вакуумной энергии в 2+1D

Аналогично разделу 1.4 в физически мотивированном виде, согласованном с ρ_{VP}, выражение для вакуумной энергии запишем в виде вид

$$\mathcal{E}_{\mathrm{VP}} = \frac{1}{2}\left(\sum_{\epsilon_n<\epsilon_F}\epsilon_n - \sum_{\epsilon_n\geqslant\epsilon_F}\epsilon_n + \sum_{-1\leqslant\epsilon_n<1} 1\right)_A - \frac{1}{2}\left(\sum_{\epsilon_n<0}\epsilon_n - \sum_{\epsilon_n>0}\epsilon_n\right)_0 . \quad (2.123)$$

Определенная таким образом вакуумная энергия при выключении внешнего поля исчезает, а при включении содержит только эффекты взаимодействия, так что разложение $\mathcal{E}_{\rm VP}$ по (четным) степеням внешнего поля будет начинаться с $\mathrm{O}(Z^2)$.

Теперь выделим в (2.123) по отдельности вклады от дискретного и непрерывного спектров для каждого фиксированного значения m_j, и для разности интегралов по непрерывному спектру $(\int dk\sqrt{k^2+1})_A - (\int dk\sqrt{k^2+1})_0$ используем известный прием, представляющий эту разность в виде интеграла от фазы упругого рассеяния $\delta(k)$ (см. раздел 1.4). Опуская ряд почти очевидных выкладок, подробно рассмотренных в разделе 1.4, приведем сразу окончательный ответ

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_{\rm VP} &= 2 \sum_{m_j=1/2,3/2,..} \mathcal{E}_{{\rm VP},|m_j|} = \\
&= 2 \sum_{m_j=1/2,3/2,..} \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{\infty} \frac{k\,dk}{\sqrt{k^2+1}}\, \delta_{{\rm tot},|m_j|}(k) + \frac{1}{2} \sum_{-2\leqslant \epsilon_{n,|m_j|}<2} \left(2-\epsilon_{n,|m_j|}\right) \right) .
\end{aligned}
\tag{2.124}
$$

В (2.124) $\delta_{{\rm tot},|m_j|}(k)$ представляет собой суммарный фазовый сдвиг при данном значении волнового числа k и модуля полного момента $|m_j|$, включающий вклады от состояний рассеяния из верхнего и нижнего континуумов и $\pm m_j$ для двумерной радиальной задачи ДК с внешним потенциалом (2.1).

Такой подход к вычислению $\mathcal{E}_{\rm VP}$ оказывается весьма эффективен, поскольку $\delta_{{\rm tot},|m_j|}(k)$ ведет себя как в инфракрасном, так и в ультрафиолетовом пределах по k гораздо лучше, чем каждая из упругих фаз по отдельности (см. ниже). Кроме того, $\delta_{{\rm tot},|m_j|}(k)$ по построению автоматически будет четной функцией внешнего поля. В свою очередь, в полной энергии связи дискретных уровней $\sum_n (2-\epsilon_{n,|m_j|})$ точка сгущения $\epsilon_{n,m_j} \to 1$ для каждого m_j является регулярной, и в результате представление $\mathcal{E}_{\rm VP}$ в виде (2.124) позволяет обойтись без промежуточной регуляризации кулоновской асимптотики внешнего потенциала при $r \to \infty$, что существенно упрощает все дальнейшие вычисления при отсутствии обрезания на конечном R_1. В результате, как и в 1+1D, так и в 2+1D для внешних потенциалов типа (2.1) каждый член суммы по m_j в выражении для $\mathcal{E}_{\rm VP}$ является конечной величиной без какой-либо специальной УФ перенормировки.

В то же время, существенное отличие двумерной задачи от одномерной с аналогичным модельным потенциалом состоит в том, что теперь $\mathcal{E}_{\rm VP}$, также как $\rho_{\rm VP}$, представляется в виде бесконечного парциального ряда по m_j. Поэтому естественным образом возникает вопрос о сходимости этой суммы для $\mathcal{E}_{\rm VP}$. Для анализа поведения членов ряда (2.124) при $m_j \to \infty$ удобно воспользоваться квазиклассическим (ВКБ)-приближением для фазы рассеяния $\delta_{{\rm tot},|m_j|}$

$$\delta_{WKB,|m_j|}(k) = 2\int dr\, \left(\sqrt{(\epsilon+V(r))^2 - 1 - \frac{m_j^2}{r^2}} + \sqrt{(\epsilon-V(r))^2 - 1 - \frac{m_j^2}{r^2}} - \right.$$
$$\left. -2\sqrt{k^2 - \frac{m_j^2}{r^2}}\right) \ , \quad (2.125)$$

где $\epsilon = \sqrt{k^2+1}$, а интегрирование ведется по областям, в которых подкоренные выражения неотрицательны. Опуская ряд громоздких выкладок, связанных с вычислением соответствующих интегралов для ВКБ-фазы и фазового интеграла, а также для энергии связи дискретного спектра, которые все аналитически вычисляются методами компьютерной алгебры [91], приведем сразу окончательное выражение для $\mathcal{E}_{{\rm VP},|m_j|}$ при $|m_j| \to \infty$:

$$\mathcal{E}_{{\rm VP},|m_j|} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty dr\ V^2(r) + {\rm O}\left(\frac{1}{|m_j|^3}\right) \ , \quad |m_j| \to \infty \ . \quad (2.126)$$

В этом месте следует специально отметить, что при вычислении суммы дискретных уровней в (2.124) необходимо обязательно учитывать следующее обстоятельство. А именно, по определению $(2-\epsilon_{n,|m_j|})$ есть сумма энергий связи двух дискретных уровней системы (2.124), соответствующих $\pm m_j$ при одном и том же радиальном числе n. Однако в системе (2.124) наинизший уровень с $n=0$ существует только для $m_j>0$, в то время как для $m_j<0$ дискретный спектр начинается с $n=1$. В то же время, для зеркально-симметричной системы с противоположной сигнатурой двухрядных матриц Дирака или, что эквивалентно, для другой подсистемы в 4-компонентном представлении, которое связана с исходной (2.124) через замену $m_j \to -m_j$, такой же по величине наинизший уровень с $n=0$ существует только при $m_j<0$. Этот эффект является прямым аналогом 3+1 случая, когда в релятивистском атоме водорода вырождение nj-уровней с $j=n-1/2$ оказывается в два раза меньше чем у других [74].

Поэтому на самом деле с учетом этой разницы в кратности вырождения в (2.124) вклад от дискретных уровней в $\mathcal{E}_{\mathrm{VP}}$ должен быть расписан более тщательно, а именно

$$2 \sum_{-2 \leqslant \epsilon_{n,|m_j|} < 2} \left(2 - \epsilon_{n,|m_j|}\right) = \left(2 - \epsilon_{0,|m_j|}\right) + 2 \sum_{n=1} \left(2 - \epsilon_{n,|m_j|}\right) \ , \tag{2.127}$$

где общий фактор вырождения 2, который в (2.124) вынесен за знак ряда по m_j, находится в соответствии с множителем 2 перед суммами в (2.127), тогда как у вклада от нижнего уровня такой множитель отсутствует. В то же время, это обстоятельство еще раз показывает, что в $\mathcal{E}_{\mathrm{VP}}$ и ρ_{VP} обязательно должны учитываться обе подсистемы (или обе сигнатуры), и кратность уровней, за исключением нижнего дискретного, равна 2.

Из (2.126) следует, что парциальный ряд по m_j в (2.124), определяющий вакуумную энергию $\mathcal{E}_{\mathrm{VP}}$, линейно расходится, откуда следует необходимость его регуляризации и перенормировки. При этом каждое отдельное парциальное слагаемое в (2.124) само по себе уже сразу конечно без каких-либо дополнительных манипуляций. Обратим внимание, что степень расходимости парциального ряда (2.124) для $\mathcal{E}_{\mathrm{VP}}$ при этом оказывается формально такой же (линейной), как у единственной расходящейся диаграммы в виде фермионной петли с двумя внешними линиями в рамках ТВ в 2+1D. Последнее обстоятельство показывает, что при вычислении $\mathcal{E}_{\mathrm{VP}}$ принципиально другим непертурбативным способом, не связанным с ТВ, мы тем не менее приходим к такой же расходимости теории, что и в рамках ТВ. На самом деле так и должно быть, поскольку рассматривается одно и то же физическое явление (поляризация вакуума кулоновским полем), только различными методами. И тем самым в нашем подходе устранение расходимости должно проходить по тем же правилам, что и в ТВ, на основе регуляризации фермионной петли с двумя внешними концами, что сохраняет и физическую сущность всей перенормировочной процедуры, и одновременно обеспечивает взаимное согласование пертурбативного и непертурбативного подходов к вычислению $\mathcal{E}_{\mathrm{VP}}$.

Необходимость перенормировки через фермионную петлю следует также из анализа свойств ρ_{VP}, который показывает, что без такой УФ перенормировки интегральный вакуумный заряд не будет иметь ожидаемого целочисленного значения (см. раздел 2.3). Свойства ρ_{VP} фактически здесь играют роль контролера, обеспечивающего выполнение необходимых физических условий для корректного описания эффекта поляризации вакуума вне рамок ТВ, которые не отслеживаются при вычислении $\mathcal{E}_{\text{VP}}$ через исходные соотношения (2.123), (2.124). Необходимость перенормировки также следует из условия, чтобы при $Z \to 0$ вакуумная энергия совпадала с $\mathcal{E}_{\text{VP}}^{(1)}$, полученной в первом порядке ТВ (2.12).

При этом в силу аксиальной симметрии внешнего поля как пертурбативные плотность, так и вакуумная энергия принадлежат парциальному каналу с $|m_j| = 1/2$. Легко видеть, однако, что неперенормированная $\mathcal{E}_{\text{VP},1/2}$, найденная из (2.124), при $Z \to 0$ в общем случае пертурбативный ответ не восстанавливает. В частности, для внешнего поля (2.1) прямым вычислением легко убедиться, что аналитические ответы (2.11) для $\rho_{\text{VP}}^{(1)}(r)$ и для $\rho_{\text{VP},1/2}(r)$, который находится из первого борновского приближения для функции Грина спектральной задачи ДК (2.33,2.40–2.42), а тем самым и $\mathcal{E}_{\text{VP}}^{(1)}$ и $\mathcal{E}_{\text{VP},1/2}$, при $Z \to 0$ существенно отличаются.

Таким образом, в полной аналогии с перенормировкой вакуумной плотности, мы должны перейти к перенормированной вакуумной энергии через соотношение

$$\mathcal{E}_{\text{VP}}^{\text{ren}}(Z) = 2 \sum_{m_j=1/2,3/2,..} \mathcal{E}_{\text{VP},|m_j|}^{\text{ren}}(Z) \ , \quad \mathcal{E}_{\text{VP},|m_j|}^{\text{ren}}(Z) = \mathcal{E}_{\text{VP},|m_j|}(Z) + \eta_{|m_j|}(R_0) Z^2 \ , \tag{2.128}$$

где

$$\eta_{|m_j|}(R_0) = \lim_{Z_0 \to 0} \left[\frac{\mathcal{E}_{\text{VP}}^{(1)}(Z_0)\delta_{|m_j|,1/2} - \mathcal{E}_{\text{VP},|m_j|}(Z_0)}{Z_0^2} \right]_{R_0=R_0(Z)} . \tag{2.129}$$

Основное содержание (2.128) состоит в том, что в исходном выражении для неперенормированных парциальных слагаемых $\mathcal{E}_{\text{VP},|m_j|}(Z)$ в (2.124) выделяются теперь уже квадратичные по Z члены, которые далее заменяются на перенормированные $\mathcal{E}_{\text{VP}}^{(1)}\delta_{|m_j|,1/2}$, найденные в рамках ТВ. Это полностью аналогично перенормировке ρ_{VP}, только в последнем случае такой же процедуре подвергаются линейные по Z слагаемые. Более того, при такой перенормировке мы автоматически обеспечиваем сразу и сходимость всего парциального ряда для $\mathcal{E}_{\text{VP}}^{\text{ren}}$, поскольку расходящиеся члены в сумме (2.124) согласно (2.126) пропорциональны $(Z\alpha)^2$. Тем самым перенормировка через фермионную петлю оказывается универсальным приемом, устраняющим расходимость теории как в чисто пертурбативном, так и в существенно непертурбативном подходах к поляризации вакуума.

Специально подчеркнем, что фактически перенормировочные коэффициенты $\eta_{|m_j|}$ определяются профилем внешнего поля, и в данном случае являются функциями радиуса центральной сферы $R_0(Z)$ потенциала (2.1) и тем самым текущего Z. Легко видеть, что они представляются в виде двойного интеграла от $A_0^{\text{ext}}(r)/Z$, для чего находим $\mathcal{E}_{\text{VP}}^{(1)}(Z_0)$ через (2.4), а $\mathcal{E}_{\text{VP},|m_j|}(Z_0)$ через первое борновское приближение для $\rho_{\text{VP},|m_j|}(r)$ (2.33,2.40–2.42) с зарядом Z_0, но с радиусом центральной сферы $R_0 = R_0(Z)$. В результате

$$\mathcal{E}_{\text{VP}}^{(1)}(Z_0)\delta_{|m_j|,1/2} - \mathcal{E}_{\text{VP},|m_j|}(Z_0) = \frac{1}{2}\int d^2r \ \left(Z_0 A_0^{\text{ext}}(r)/Z\right) \times \\ \times \left[\left(\rho_{\text{VP}}^{(1)}\right)_{PT}(r)\delta_{|m_j|,1/2} - \left(\rho_{\text{VP},|m_j|}^{(1)}\right)_B(r)\right] \ , \quad (2.130)$$

где $\left(\rho_{\text{VP}}^{(1)}\right)_{PT}(r)$ - перенормированная пертурбативная вакуумная плотность из первого порядка ТВ (2.11), а $\left(\rho_{\text{VP},|m_j|}^{(1)}\right)_B(r) = (|e|/\pi^2) \int dy \ \mathrm{Re\,Tr}\, \mathrm{G}_{m_j}^{(1)}(r, iy) = -(|e|/\pi^2) \int dy \ \mathrm{Tr}\left(\mathrm{G}_{m_j}^{(0)} V\, \mathrm{G}_{m_j}^{(0)}\right)$ – вакуумная плотность, найденная через первое борновское приближение (2.33,2.40–2.42), и обе плотности в свою очередь выражаются через интегралы от $Z_0 A_0^{\text{ext}}(r)/Z$.

Таким образом, окончательно перенормировка $\mathcal{E}_{\text{VP}}$ сводится к тому, что члены парциального ряда по m_j в выражении (2.124) заменяются на

$$\mathcal{E}_{\text{VP},|m_j|}^{\text{ren}}(Z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\infty} \frac{k\,dk}{\sqrt{k^2+1}}\,\delta_{\text{tot},|m_j|}(k) + \frac{1}{2}\sum_{-2\leqslant\epsilon_{n,|m_j|}<2}\left(2-\epsilon_{n,|m_j|}\right) + \eta_{|m_j|}(R_0(Z))Z^2 \,. \quad (2.131)$$

При этом каждый парциальный канал в (2.131) по своей структуре воспроизводит практически точно перенормированную $\mathcal{E}_{\text{VP}}$ в одномерном случае (см. раздел 1.4). Вся разница заключается в том, что в одномерном случае $\mathcal{E}_{\text{VP}}^{\text{ren}}$ всегда содержит в перенормировочном коэффициенте η разность $\left(\mathcal{E}_{\text{VP}}^{(1)}(Z_0) - \mathcal{E}_{\text{VP}}(Z_0)\right)/Z_0^2$, а теперь такая разность имеется только в парциальном слагаемом с $|m_j| = 1/2$. Но если в одномерном случае $\eta(R_0)$ является нетривиальной знакопеременной функцией радиуса R_0 (см. раздел 2.6), то в 2+1D все $\eta_{|m_j|}$, включая и $\eta_{1/2}$, будут всегда отрицательны (см. далее рис.5).

Рассмотрим теперь явное вычисление $\mathcal{E}^{\rm ren}_{\rm VP}(Z)$ через соотношения (2.124) и (2.131) для потенциала (2.1) при $R_1 \to +\infty$. При $r \leqslant R_0$ регулярные в нуле решения системы (2.21) с точностью до общего множителя удобно записать в виде

$$\begin{aligned} &\psi^{\rm int}_{1,m_j}(r,\epsilon) = (-i)^{(m_j-1/2)\theta(1-|\epsilon+V_0|)}\sqrt{|\epsilon+V_0+1|}\, J_{m_j-1/2}(\zeta r),\\ &\psi^{\rm int}_{2,m_j}(r,\epsilon) = (-i)^{(m_j+1/2)\theta(1-|\epsilon+V_0|)}(-1)^{\theta(\epsilon+V_0-1)}\sqrt{|\epsilon+V_0-1|}\, J_{m_j+1/2}(\zeta r)\ , \end{aligned} \tag{2.132}$$

где $J_\nu(z)$ – функция Бесселя,

$$V_0 = Q/R_0, \quad \zeta = \sqrt{(\epsilon+V_0)^2-1}\,. \tag{2.133}$$

а фазовые множители $(-i)^{(m_j\mp1/2)\theta(1-|\epsilon+V_0|)}$ добавлены для того, чтобы обеспечить действительность решений (2.132) при переходе через область гиперболического режима $|\epsilon+V_0|<1$, когда функции Бесселя заменяются на соответствующие функции Инфельда.

Для непрерывного спектра с $|\epsilon|>1$ решения системы (2.21) при $r>R_0$ будем записывать в терминах функции Куммера $\Phi(b,c,z)$ и модифицированной функции $\tilde\Phi(b,c,z) = z^{1-c}\Phi\left(b-c+1,2-c,z\right)$ [92]. Для $|m_j|>Q$ эти решения имеют следующий вид

$$\begin{aligned} &\psi^{\rm ext}_{1,\,m_j}(r,\epsilon) = \sqrt{|\epsilon+1|}r^{\varkappa-1/2}\left(\mathrm{Re}\left[\mathrm{e}^{i\phi_+}\mathrm{e}^{ikr}\Phi_r\right] + B_{m_j}(\epsilon)\mathrm{Re}\left[i\mathrm{e}^{-i\pi\varkappa}\mathrm{e}^{i\phi_-}\mathrm{e}^{ikr}\tilde\Phi_r\right]\right),\\ &\psi^{\rm ext}_{2,\,m_j}(r,\epsilon) = -\mathrm{sgn}(\epsilon)\sqrt{|\epsilon-1|}r^{\varkappa-1/2}\left(\mathrm{Im}\left[\mathrm{e}^{i\phi_+}\mathrm{e}^{ikr}\Phi_r\right] + \right.\\ &\left. +B_{m_j}(\epsilon)\mathrm{Im}\left[i\mathrm{e}^{-i\pi\varkappa}\mathrm{e}^{i\phi_-}\mathrm{e}^{ikr}\tilde\Phi_r\right]\right), \end{aligned} \tag{2.134}$$

где $\epsilon = \pm\sqrt{k^2+1}$,

$$\begin{aligned} &\varkappa = \sqrt{m_j^2-Q^2}\ , \qquad b = \varkappa - i\epsilon Q/k\ , \qquad c = 1+2\varkappa\ ,\\ &\phi_+ = \frac{1}{2}\mathrm{Arg}\left[\frac{m_j+iQ/k}{b}\right], \qquad \phi_- = \frac{1}{2}\mathrm{Arg}\left[\frac{b}{m_j-iQ/k}\right]\ ,\\ &\Phi_r = \Phi\left(b,c,-2ikr\right)\ , \qquad \tilde\Phi_r = \tilde\Phi\left(b,c,-2ikr\right)\ , \end{aligned} \tag{2.135}$$

$$B_{m_j}(\epsilon) = -\frac{C_{1,\,m_j}(\epsilon)\mathrm{Im}\left[\mathrm{e}^{i\phi_+}\mathrm{e}^{ikR_0}\Phi_{R_0}\right] - C_{2,\,m_j}(\epsilon)\mathrm{Re}\left[\mathrm{e}^{i\phi_+}\mathrm{e}^{ikR_0}\Phi_{R_0}\right]}{C_{1,\,m_j}(\epsilon)\mathrm{Im}\left[i\mathrm{e}^{-i\pi\varkappa}\mathrm{e}^{i\phi_-}\mathrm{e}^{ikR_0}\tilde\Phi_{R_0}\right] - C_{2,\,m_j}(\epsilon)\mathrm{Re}\left[i\mathrm{e}^{-i\pi\varkappa}\mathrm{e}^{i\phi_-}\mathrm{e}^{ikR_0}\tilde\Phi_{R_0}\right]}\ , \tag{2.136}$$

где

$$C_{1,\,m_j}(\epsilon) = -\mathrm{sgn}(\epsilon)\sqrt{|\epsilon-1|}\;\psi^{\mathrm{int}}_{1,m_j}(R_0,\epsilon)\;, \quad C_{2,\,m_j}(\epsilon) = \sqrt{|\epsilon+1|}\;\psi^{\mathrm{int}}_{2,m_j}(R_0,\epsilon)\;. \tag{2.137}$$

Для $|m_j| < Q$ соответствующие решения при $r > R_0$ имеют вид:

$$\begin{aligned}
&\psi^{\mathrm{ext}}_{1,\,m_j}(r,\epsilon) = \sqrt{|\epsilon+1|}\mathrm{Re}\left[\mathrm{e}^{i\lambda_{m_j}(\epsilon)}\mathrm{e}^{ikr}(2kr)^{-1/2+i|\varkappa|}\left((m_j+iQ/k)\Phi_r + b\Phi_r(b+)\right)\right]\;,\\
&\psi^{\mathrm{ext}}_{2,\,m_j}(r,\epsilon) = -\mathrm{sgn}(\epsilon)\sqrt{|\epsilon-1|}\mathrm{Re}\left[\mathrm{e}^{i\lambda_{m_j}(\epsilon)}i\mathrm{e}^{ikr}(2kr)^{-1/2+i|\varkappa|}\left(-(m_j+iQ/k)\Phi_r+\right.\right.\\
&\left.\left.+b\Phi_r(b+)\right)\right]\;,
\end{aligned} \tag{2.138}$$

где теперь

$$\begin{aligned}
&|\varkappa| = \sqrt{Q^2-m_j^2}\,, \qquad b = i\left(|\varkappa| - \epsilon Q/k\right), \qquad c = 1+2i|\varkappa|\;,\\
&\Phi_r = \Phi\left(b,c,-2ikr\right)\;, \qquad \Phi_r(b+) = \Phi\left(b+1,c,-2ikr\right)\;,
\end{aligned} \tag{2.139}$$

$$\lambda_{m_j}(\epsilon) = -\mathrm{Arg}\left[i\mathrm{e}^{ikR_0}(2kR_0)^{i|\varkappa|}\left((C_{2,\,m_j}+iC_{1,\,m_j})(m_j+iQ/k)\Phi_{R_0}+\right.\right.$$
$$\left.\left.(C_{2,\,m_j}-iC_{1,\,m_j})b\Phi_{R_0}(b+)\right)\right]\;. \tag{2.140}$$

В свою очередь, дискретный спектр определяется из условий убывания решений на бесконечности и сшивки в точке $r = R_0$. Поскольку теперь $|\epsilon| < 1$, то решения системы (2.124) при $r > R_0$ записываются теперь через ф. Куммера $\Phi(b,c,z)$ и Трикоми $\Psi(b,c,z)$. А именно, если

$$\gamma = \sqrt{1-\epsilon^2}\;, \quad z = 2\gamma r\;, \tag{2.141}$$

то при $|m_j| > Q$ наиболее удобна оказывается запись решений через функции Трикоми

$$\begin{aligned}
&\psi^{\mathrm{ext}}_{1,m_j}(r,\epsilon) = \sqrt{1+\epsilon}\,\mathrm{e}^{-\gamma r}r^{-1/2+\varkappa}\left[\Psi + (Q/\gamma - m_j)\,\Psi(b+)\right]\;,\\
&\psi^{\mathrm{ext}}_{2,m_j}(r,\epsilon) = \sqrt{1-\epsilon}\,\mathrm{e}^{-\gamma r}r^{-1/2+\varkappa}\left[-\Psi + (Q/\gamma - m_j)\,\Psi(b+)\right]\;,
\end{aligned} \tag{2.142}$$

где $b = \varkappa - \epsilon Q/\gamma$, $c = 1 + 2\varkappa$, и уравнение на дискретные уровни имеет вид

$$\sqrt{(\epsilon + V_0 + 1)(1-\epsilon)}\, J_{m_j-1/2}(\zeta R_0)\ \left[-\Psi(b,c,2\gamma R_0) + \right. \\ \left. +(Q/\gamma - m_j)\,\Psi(b+1,c,2\gamma R_0)\right] + \sqrt{(\epsilon + V_0 - 1)(1+\epsilon)}\, J_{m_j+1/2}(\zeta R_0)\times \\ \times\left[\Psi(b,c,2\gamma R_0) + (Q/\gamma - m_j)\,\Psi(b+1,c,2\gamma R_0)\right] = 0\ . \quad (2.143)$$

В то же время, для $|m_j| < Q$ наиболее корректной формой представления решений системы (2.124) при $r > R_0$ оказывается использование функций Куммера

$$\psi^{\text{ext}}_{1,m_j}(r,\epsilon) = \sqrt{1+\epsilon}\,\mathrm{e}^{-\gamma r}\mathrm{Re}\left[\mathrm{e}^{i\lambda}(2\gamma r)^{-1/2+i|\varkappa|}\left((Q/\gamma + m_j)\,\Phi + b\,\Phi(b+)\right)\right]\ , \\ \psi^{\text{ext}}_{2,m_j}(r,\epsilon) = \sqrt{1-\epsilon}\,\mathrm{e}^{-\gamma r}\mathrm{Re}\left[\mathrm{e}^{i\lambda}(2\gamma r)^{-1/2+i|\varkappa|}\left(-(Q/\gamma + m_j)\,\Phi + b\,\Phi(b+)\right)\right]\ , \quad (2.144)$$

где $b = i|\varkappa| - \epsilon Q/\gamma$, $c = 1 + 2i|\varkappa|$. При этом фаза λ определяется из сшивки внутреннего и внешнего решений, а уравнение на дискретные уровни находится из условия убывания решений на бесконечности $r \to \infty$ и представляется в следующем виде

$$\mathrm{Arg}\Big[(2\gamma R_0)^{i|\varkappa|}\,\Gamma(c^*)\Gamma(b)\Big(\sqrt{(\epsilon + V_0 + 1)(1-\epsilon)}\,J_{m_j-1/2}(\zeta R_0)\times \\ \times\left(-(Q/\gamma + m_j)\Phi(b,c,2\gamma R_0) + b\Phi(b+1,c,2\gamma R_0)\right) + \\ + \sqrt{(\epsilon + V_0 - 1)(1+\epsilon)}\,J_{m_j+1/2}(\zeta R_0)\times \\ \times\left((Q/\gamma + m_j)\Phi(b,c,2\gamma R_0) + b\Phi(b+1,c,2\gamma R_0)\right)\Big)\Big] = 0\ . \quad (2.145)$$

Полная фаза $\delta_{\text{tot},|m_j|}(k)$, включающая вклады от обоих континуумов $(\pm)$ и $\pm|m_j|$, по определению есть сумма

$$\delta_{\text{tot},|m_j|}(k) = \left(\delta^+_{|m_j|} + \delta^+_{-|m_j|} + \delta^-_{|m_j|} + \delta^-_{-|m_j|}\right)(k)\ , \quad (2.146)$$

в которой отдельные фазовые сдвиги $\delta^{\pm}_{\pm|m_j|}(k)$ определяются из асимптотики решений (2.134) или (2.138) при $r \to \infty$ и содержат кулоновские логарифмы $\pm Q\,(|\epsilon|/k)\,\ln(2kr)$, которые в суммарной фазе (2.146) взаимно сокращаются, и поэтому далее в выражениях (2.147), (2.148) для отдельных фаз сразу опускаются.

В результате при $|m_j| > Q$ фазовые сдвиги без кулоновских логарифмов имеют вид

$$\delta_{m_j}(k) = \mathrm{Arg}\left[\mathrm{e}^{(\pi i/2)|m_j|}\left(\frac{\mathrm{e}^{i\phi_+}\mathrm{e}^{-i\pi\varkappa/2}}{\Gamma(1+b^*)} + iB_{m_j}(\epsilon)\frac{\Gamma(2-c)}{\Gamma(c)}\frac{\mathrm{e}^{i\phi_-}\mathrm{e}^{i\pi\varkappa/2}}{\Gamma(1-b)}\right)\right] , \qquad (2.147)$$

а при $|m_j| < Q$

$$\delta_{m_j}(k) = \mathrm{Arg}\left[\mathrm{e}^{(\pi i/2)|m_j|}\left(\frac{(m_j + iQ/k)\Gamma(c)}{\Gamma(c-b)}\,\mathrm{e}^{i\lambda_{m_j}(\epsilon)}\mathrm{e}^{\pi|\varkappa|} + \frac{\Gamma(c^*)}{\Gamma(b^*)}\,\mathrm{e}^{-i\lambda_{m_j}(\epsilon)}\right)\right] . \qquad (2.148)$$

Следует особо отметить, что формулами (2.147), (2.148) фазовые сдвиги определяются только с точностью до πn, причем этот произвол вытекает из самой возможности изменять общий коэффициент в волновых функциях. Поэтому при восстановлении фазовых сдвигов как непрерывных функций волнового числа необходимо различать скачки в фазах на π чисто математического происхождения, происходящие из определения arctg-функции и являющиеся тем самым вычислительными артефактами, от физических, обусловленных резонансами, и которые для предельно узких низкоэнергетических резонансов выглядят точно так же, как вычислительные артефакты. Ликвидация последних обязательна, поскольку обеспечивает непрерывность фаз, а физические скачки, наоборот, играют существенную роль. Следовательно, независимо от того, насколько бы узкими не были резонансы, они должны быть обязательно сохранены в фазовых сдвигах. Поэтому процедура восстановления фазовых сдвигов должна проводиться с очень высокой степенью точности.

Отметим также, что после выделения кулоновских логарифмов отдельные фазовые сдвиги по-прежнему содержат сингулярности при $k \to 0$ и $k \to \infty$. А именно, при $k \to \infty$ в асимптотиках отдельных фаз присутствуют сингулярные члены $\mp Q|\epsilon|\ln(2kR_0)/k$, но которые исчезают в суммарной фазе. В результате асимптотическое поведение $\delta_{\mathrm{tot},|m_j|}(k)$ при $k \to \infty$ имеет вид

$$\delta_{\mathrm{tot},|m_j|}(k \to \infty) = \frac{Q}{R_0^3 k^3}\left(\frac{4Q}{3}(m_j^2 - 3R_0^2) - |m_j|\cos(2Q + \pi|m_j|)\sin(2kR_0)\right) + \\ + \mathrm{O}(k^{-4}) . \qquad (2.149)$$

Следует отметить, что вывод асимптотики (2.149) с учетом следующих порядков разложения по $1/k$ за разумное время возможен только с использованием систем аналитических вычислений.

В инфракрасных асимптотиках отдельных фаз также содержатся особенности вида $\pm Q\,(1-\ln(Q/k))/k$. Однако эти особенности в $\delta_{\mathrm{tot},|m_j|}(k)$ снова сокращаются, и суммарная фаза при $k\to 0$ имеет конечный предел. А именно, при $|m_j|>Q$ предельное значение суммарной фазы при $k\to 0$ имеет вид

$$\delta_{\mathrm{tot},|m_j|}(k\to 0)=\mathrm{Arg}\left[-\mathrm{e}^{-2i\pi\varkappa}v_{1,+}v_{1,-}v_{2,+}v_{2,-}\right]\ , \tag{2.150}$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} v_{1,\pm}={}&J_{|m_j|\mp1/2}(R_0\sqrt{V_0(V_0+2)})\,\left(\mp J_{-2\varkappa}(\sqrt{8QR_0})\pm\mathrm{e}^{2i\pi\varkappa}J_{2\varkappa}(\sqrt{8QR_0})\right)\times\\ &\times\sqrt{(V_0+2)/V_0}+J_{|m_j|\pm1/2}(R_0\sqrt{V_0(V_0+2)})\left[\left(\sqrt{2QR_0}J_{1+2\varkappa}(\sqrt{8QR_0})+\right.\right.\\ &\left.+(\mp|m_j|-\varkappa)J_{2\varkappa}(\sqrt{8QR_0})\right)\mathrm{e}^{2i\pi\varkappa}-\\ &\left.-\left(\sqrt{2QR_0}J_{1-2\varkappa}(\sqrt{8QR_0})+(\mp|m_j|+\varkappa)J_{-2\varkappa}(\sqrt{8QR_0})\right)\right]/Q\ , \end{aligned} \tag{2.151}$$

$$\begin{aligned} v_{2,\pm}={}&\mathrm{Im}\left[(-i)^{(|m_j|\mp1/2)\theta(2-V_0)}J_{|m_j|\mp1/2}(R_0\sqrt{V_0(V_0-2)})\times\right.\\ &\left.\times\left(J_{-2\varkappa}(\sqrt{-8QR_0})\mathrm{e}^{-i\pi\varkappa}-J_{2\varkappa}(\sqrt{-8QR_0})\mathrm{e}^{i\pi\varkappa}\right)\right]\ . \end{aligned} \tag{2.152}$$

Для случая $|m_j|<Q$ соответствующий предел может быть представлен следующим образом

$$\begin{aligned} &\delta_{\mathrm{tot},|m_j|}(k\to 0)=\\ &=\mathrm{Arg}\left[-\left(\mathrm{e}^{\pi|\varkappa|}\mathrm{e}^{i\varphi^{+}_{|m_j|}}-\mathrm{e}^{-\pi|\varkappa|}\mathrm{e}^{-i\varphi^{+}_{|m_j|}}\right)\left(\mathrm{e}^{\pi|\varkappa|}\mathrm{e}^{i\varphi^{+}_{-|m_j|}}-\mathrm{e}^{-\pi|\varkappa|}\mathrm{e}^{-i\varphi^{+}_{-|m_j|}}\right)\times\right.\\ &\left.\times\sin(\varphi^{-}_{|m_j|})\sin(\varphi^{-}_{-|m_j|})\right]\ , \end{aligned} \tag{2.153}$$

где вспомогательные фазы $\varphi^{\pm}_{\pm|m_j|}$ определены выражениями

$$\begin{aligned} \varphi^{+}_{\pm|m_j|}={}&-\mathrm{Arg}\left[\pm\sqrt{2QR_0}J_{1+2i|\varkappa|}(\sqrt{8QR_0})J_{|m_j|\pm1/2}(R_0\sqrt{V_0(V_0+2)})+\right.\\ &\left.+J_{2i|\varkappa|}(\sqrt{8QR_0})w^{+}_{\pm|m_j|}\right]\ , \end{aligned} \tag{2.154}$$

$$\varphi^{-}_{\pm|m_j|} = -\mathrm{Arg}\Big[(-i)^{(|m_j|-1/2)\theta(2-V_0)}\Big(\sqrt{-2QR_0}J_{1+2i|\varkappa|}\times$$
$$\times(\sqrt{-8QR_0})J_{|m_j|\mp1/2}(R_0\sqrt{V_0(V_0-2)})\mp J_{2i|\varkappa|}(\sqrt{-8QR_0})w^{-}_{\pm|m_j|}\Big)\Big]\ , \quad (2.155)$$

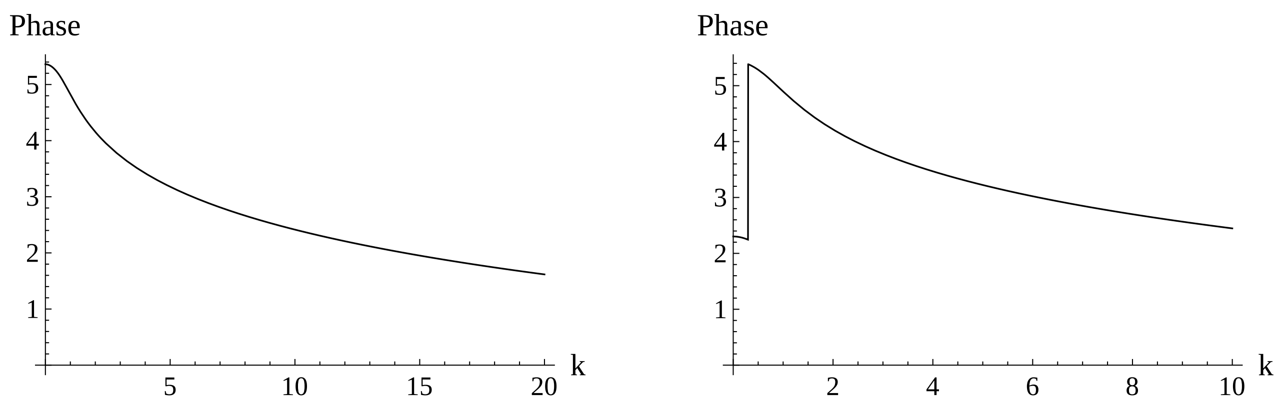
с коэффициентами

$$w^{+}_{\pm|m_j|} = Q\sqrt{\frac{V_0+2}{V_0}}J_{|m_j|\mp1/2}(R_0\sqrt{V_0(V_0+2)})-$$
$$-(|m_j|\pm i|\varkappa|)J_{|m_j|\pm1/2}(R_0\sqrt{V_0(V_0+2)})\ , \quad (2.156)$$

$$w^{-}_{\pm|m_j|} = Q\sqrt{\frac{V_0-2}{V_0}}J_{|m_j|\pm1/2}(R_0\sqrt{V_0(V_0-2)})-$$
$$-(|m_j|\mp i|\varkappa|)J_{|m_j|\mp1/2}(R_0\sqrt{V_0(V_0-2)})\ . \quad (2.157)$$

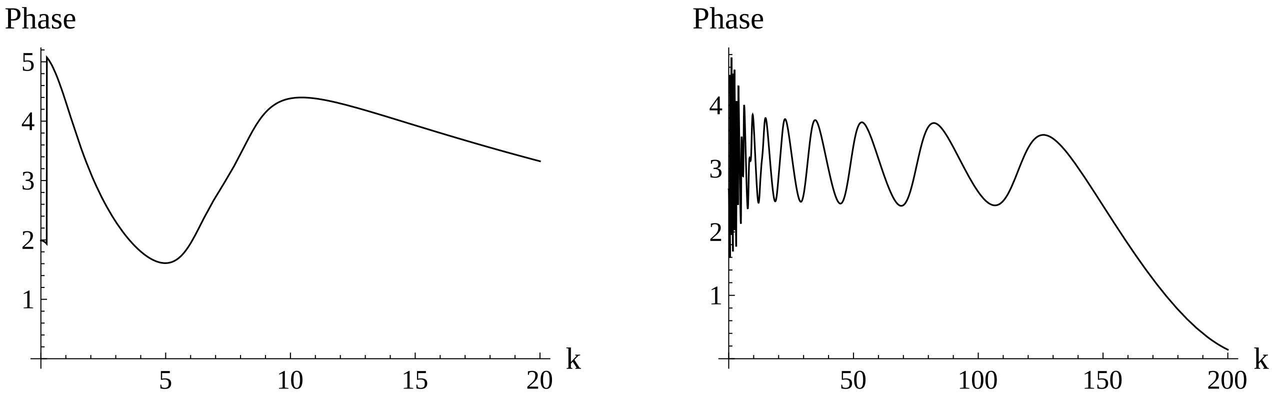
2.6.2 Результаты численных расчетов для непертурбативной вакуумной энергии в 2+1D

Характерной чертой в поведении $\delta_{\mathrm{tot},|m_j|}(k)$ является появление (позитронных) упругих резонансов при достижении каждым следующим дискретным уровнем нижнего континуума. На рис. 2.9 приведены графики зависимости полной фазы при $|m_j| = 1/2$ от волнового числа для различных значений Z.



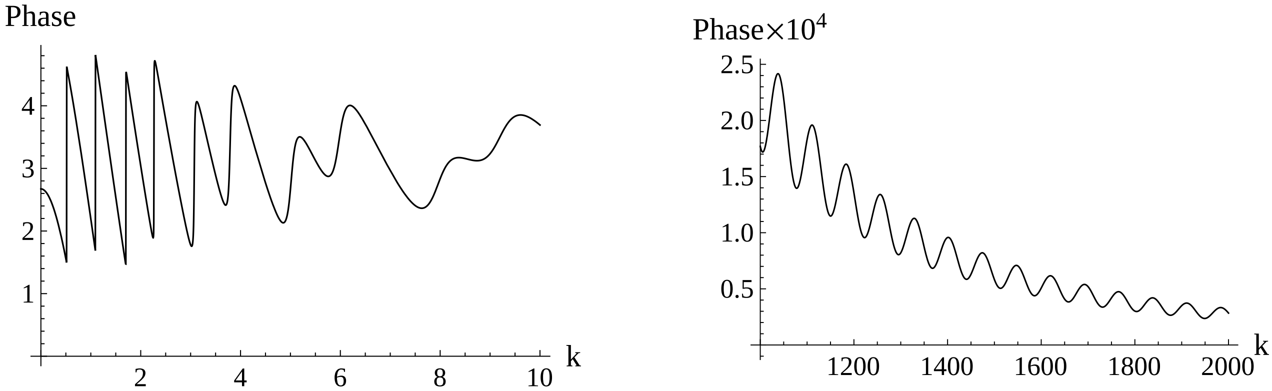
а б

Рис. 2.9а отвечает $Z = 108$, при котором еще ни один уровень не достиг нижнего континуума. При $Z = 109$ (рис. 2.9б) нижнего континуума уже достиг первый уровень, что на фазе отражается в появлении первого достаточно узкого низко-



в г

Рисунок 2.9 — Зависимость полной фазы $\delta_{\mathrm{tot},|m_j|}$ от волнового числа k при $|m_j| = 1/2$ для (а) $Z = 108$; (б) $Z = 109$; (в) $Z = 193$; (г) $Z = 1000$.



а б

Рисунок 2.10 — Зависимость полной фазы $\delta_{\mathrm{tot},|m_j|}$ от волнового числа k при $|m_j| = 1/2$ для $Z = 1000$.

энергетического упругого резонанса. При дальнейшем увеличении Z вплоть до следующего критического значения этот скачок на π постепенно сглаживается и смещается в сторону больших k. На рис. 2.9в продемонстрировано поведение фазы при $Z = 193$, при котором в нижний континуум опустилось уже три уровня, причем последний соответствует $Z_{cr,3} = 192.1$. Этому уровню в фазе соответствует первый предельно узкий резонанс. Два других резонанса, отвечающие двум предыдущим уровням, расположены правее и имеют существенно менее выраженную форму. На рис. 2.9г показана фаза при $Z = 1000$, когда число опустившихся в нижний континуум уровней в канале $|m_j| = 1/2$ равно 22 (а полное число возникших из опустившихся в нижний континуум уровней вакуумных оболочек по всем каналам с учетом удвоения за счет общего коэффициента мультиплетности при этом равно 210). Как именно ведет себя фаза при $Z = 1000$ и $|m_j| = 1/2$ в области малых и больших k, показано на рис. 2.10.

В области малых k (рис. 2.10а) поведение фазы вначале почти иррегулярное за счет скачков, соответствующих уровням, которые только что достигли нижнего континуума. В то же время, при больших k фаза монотонно убывает и при этом осциллирует, что показано на рис.2.10б. Для других значений m_j фаза ведет себя аналогичным образом. Таким образом, суммарная фаза $\delta_{\mathrm{tot},|m_j|}(k)$ регулярна на всем диапазоне изменения волнового числа, а в области больших k убывает достаточно быстро, чтобы гарантировать сходимость фазового интеграла в выражениях (2.124), (2.131).

Фактическое вычисление фазового интеграла основано на существенно более масштабном использовании современных методов компьютерной алгебры, с помощью которых асимптотика $\delta_{\mathrm{tot},|m_j|}(k)$ при $k \to \infty$ может быть найдена в аналитическом виде до любой конечной степени обратного волнового числа k^{-N}. Это позволяет численно восстанавливать фазу по формулам (2.146–2.148) только до некоторого k_{max}, при достижении которого точная и асимптотическая фаза уже совпадают с требуемой точностью, и для вычисления фазового интеграла по области $k_{max} \leqslant k < \infty$ использовать аналитический вид асимптотики. Последний в свою очередь при разложении $(k^2+1)^{-1/2}$ по обратным степеням волнового числа позволяет свести интегрирование по этой области к интегралам типа $\int_{k_{max}}^{\infty} \sin(kR_0)/k^n$ и $\int_{k_{max}}^{\infty} \cos(kR_0)/k^n$, которые находятся аналитически, а интеграл по конечной области $0 \leqslant k \leqslant k_{max}$ вычисляется стандартными методами типа Ромберга. Чем выше требуемая точность, тем больше должны быть N и k_{max}. В то же время, при фиксированной точности чем больше N, тем меньше k_{max}. При реальных расчетах для достижения точности $10^{-16} - 10^{-20}$ потребовалось $N \simeq 10$ и $10000 < k_{max} < 100000$, что не выходило за рамки разумных временных затрат. Отметим, что без использования аналитической асимптотики достижение такой же точности при вычислении фазового интеграла потребовало бы восстановления фазы и последующее интегрирование до $k \sim 10^9 - 10^{12}$, что привело бы к значительным большим временным затратам из-за необходимости вычислять значения гипергеометрических функций при больших значениях как параметров, так и главного аргумента.

Характерная зависимость фазового интеграла от Z приведена на рис. 2.11. Как следует из рис. 2.11, фазовый интеграл как функция Z монотонно возрастает и всегда положителен. Перегиб, а на самом деле скачок производной, на графике соответствует $Z = Z_{cr,1}$, когда первый дискретный уровень достигает нижнего

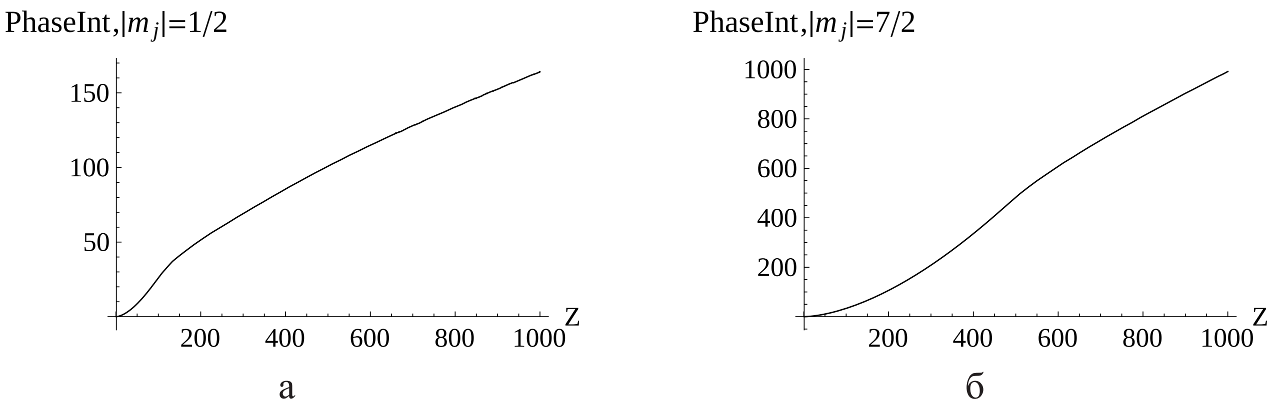


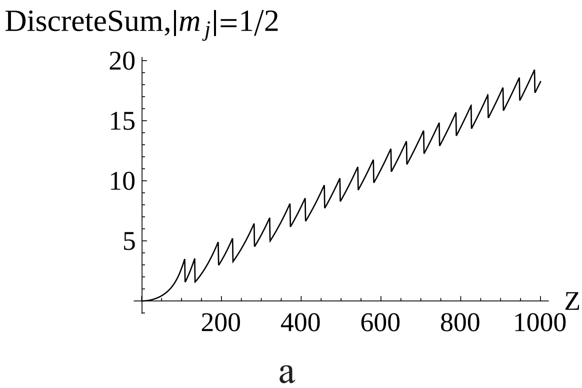
Рисунок 2.11 — Зависимость фазового интеграла от Z для (а) $|m_j| = 1/2$; (б) $|m_j| = 7/2$.

континуума. В этот момент поведение фазового интеграла как функции Z заметно меняется, поскольку возникает отрицательный скачок производной, обусловленный тем, что в суммарной фазе за счет появившегося резонанса возникает резкий скачок на π (см. рис. 2.9б,в). Следующие резонансы также вызывают скачки производной в фазовом интеграле, но они уже существенно менее выражены, так как с ростом Z_{cr} возникает эффект «отравления катализатора» – сразу под порогом нижнего континуума при $Z = Z_{cr} + \Delta Z$, $\Delta Z \ll Z_{cr}$ уширение резонанса и скорость его опускания в нижний континуум являются экспоненциально медленными в соответствии с известным результатом [93], согласно которому ширина резонанса под порогом ведет себя $\sim \exp\left(-\sqrt{Z_{cr}/\Delta Z}\right)$. Этот эффект приводит к тому, что для каждого следующего резонанса область скачка фазы на π с ростом Z увеличивается экспоненциально медленнее, и настолько же медленнее изменяется производная в фазовом интеграле. Если бы не этот эффект, то каждый следующий уровень, достигающий нижнего континуума, приводил бы к такому же отрицательному скачку производной, что и первый, и кривая фазового интеграла в закритической области имела бы постоянно растущую отрицательную кривизну со всеми вытекающими последствиями для скорости убывания $\mathcal{E}^{\text{ren}}_{\text{VP}}(Z)$.

Фактическое вычисление суммарной энергии связи дискретных уровней также основано на использовании методов компьютерной алгебры, которые в данном случае позволяют в аналитическом виде отсуммировать все дискретные уровни, начиная с некоторого n_{max}, при достижении которого уровни с заданной точностью начинают совпадать с соответствующими шредингеровскими с учетом тонкой структуры и поправки за счет конечных размеров ядра [91], [94]

$$1-\epsilon_{n,\pm m_j}=\frac{(Z\alpha)^2}{2(n+|m_j|)^2}\left(1+\frac{(Z\alpha)^2}{(n+|m_j|)^2}\left(\frac{n+|m_j|}{|m_j|}-\frac{3}{4}\right)-\right.$$
$$\left.-\left(\frac{2Z\alpha R}{n+|m_j|}\right)^{2|m_j|}\frac{(n+2|m_j|-1)!}{n!}\frac{2|m_j|(2|m_j|+1)}{((2|m_j|)!)^2}\right)\ ,\quad n\to\infty\ . \tag{2.158}$$

Типичное поведение суммарной энергии связи дискретных уровней (с учетом коэффициента 1/2 в (2.124), (2.131)) приведено на рис. 2.12. Суммарная энергия связи представляет собой разрывную функцию, скачки которой возникают при достижении зарядом источника соответствующих критических значений, когда в нижний континуум погружается очередной дискретный уровень, за счет чего энергия связи убывает на $(-2)\times mc^2$. На интервалах между двумя соседними Z_{cr} энергия связи всегда положительна и монотонно растет, поскольку растут энергии связи каждого из дискретных уровней. Но в отличие от 1+1D в двумерном случае как в пертурбативной области, так и в непертурбативной энергия связи всегда существенно меньше фазового интеграла, что непосредственно следует из рис. 2.11, 2.12.



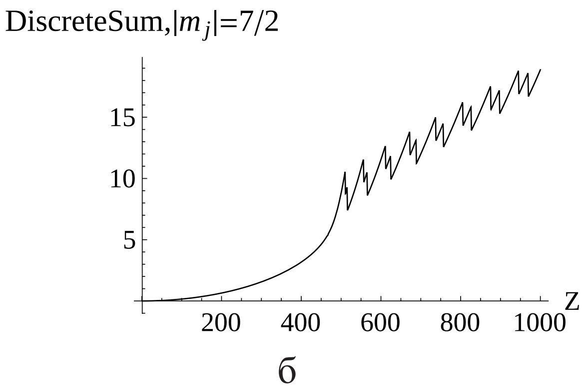


Рисунок 2.12 — Зависимость полной энергии связи дискретного спектра от Z для (а) $|m_j|=1/2$; (б) $|m_j|=7/2$.

На рис. 2.13а,б отдельно приведены характерные особенности парциального канала с $|m_j|=1/2$, поскольку в этом канале структура перенормировочного коэффициента $\eta_{1/2}$ отличается от остальных с $|m_j|\neq 1/2$. А именно, $\eta_{1/2}=\eta_{PT}-\eta_{B,1/2}$, где η_{PT} соответствует теоретико-возмущенческой части перенормировочного коэффициента, а $\eta_{B,1/2}$ – первому члену борновского ряда для $\rho_{\mathrm{VP},1/2}$ (см. (2.130) и последующие комментарии).

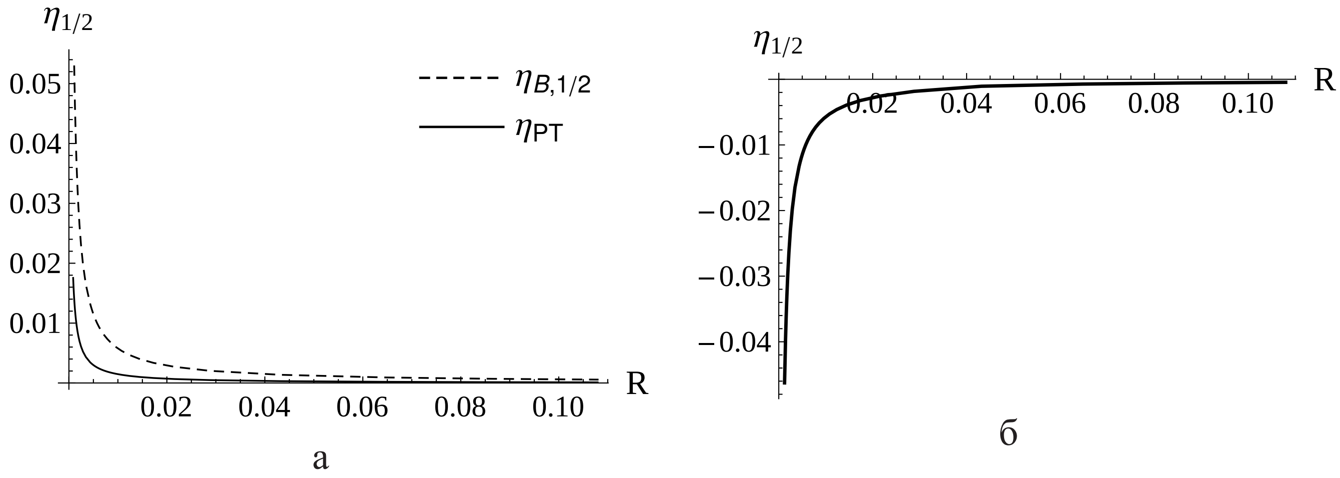


Рисунок 2.13 — Структура и детали поведения перенормировочного коэффициента $\eta_{1/2}$ как функция радиуса R_0 центральной сферы.

Кроме того, в этом канале наиболее четко видна смена режима поведения перенормированной энергии с пертурбативного квадратичного роста при $Z \ll Z_{cr,1}$, когда доминирующий вклад возникает из пертурбативной части $\mathcal{E}^{(1)}_{\text{VP}}$, полученной по ТВ согласно (2.5), на режим убывания в отрицательную область при с ростом Z после достижения Z_{cr} (см. рис. 2.14). Отметим, что рис. 2.13, 2.14 с точностью до несущественных деталей и значений критических зарядов воспроизводят поведение перенормировочного коэффициента и энергии в s-канале для аналогичной трехмерной задачи.

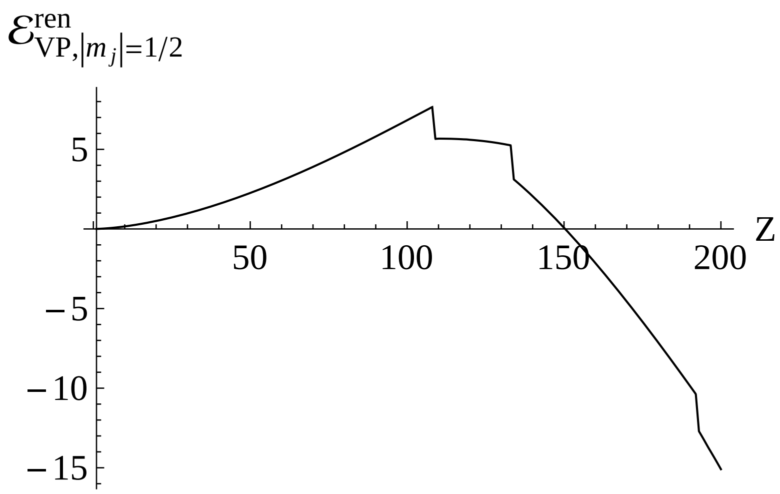
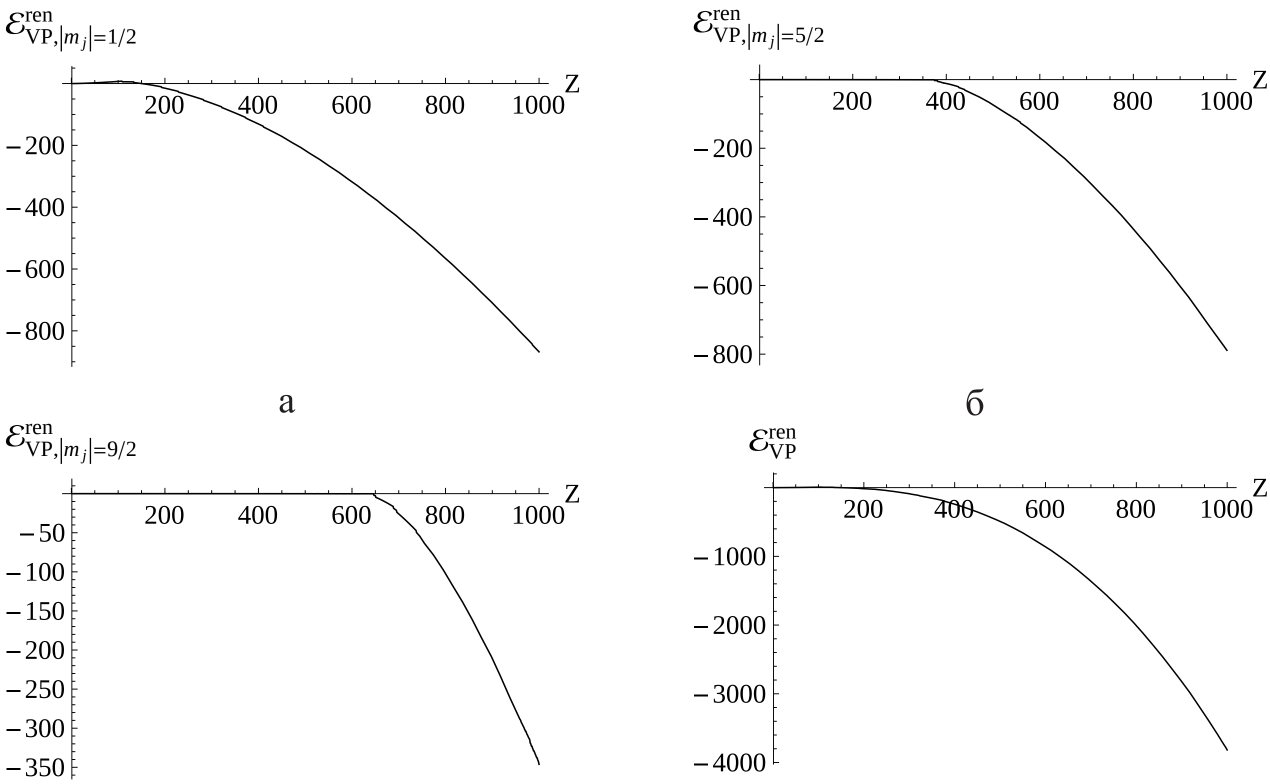


Рисунок 2.14 — Поведение $\mathcal{E}^{\text{ren}}_{\text{VP},1/2}(Z)$ на начальном интервале $0 < Z < 200$ со сменой режима пертурбативного квадратичного роста на режим убывания в отрицательную область при переходе через первые три Z_{cr}.

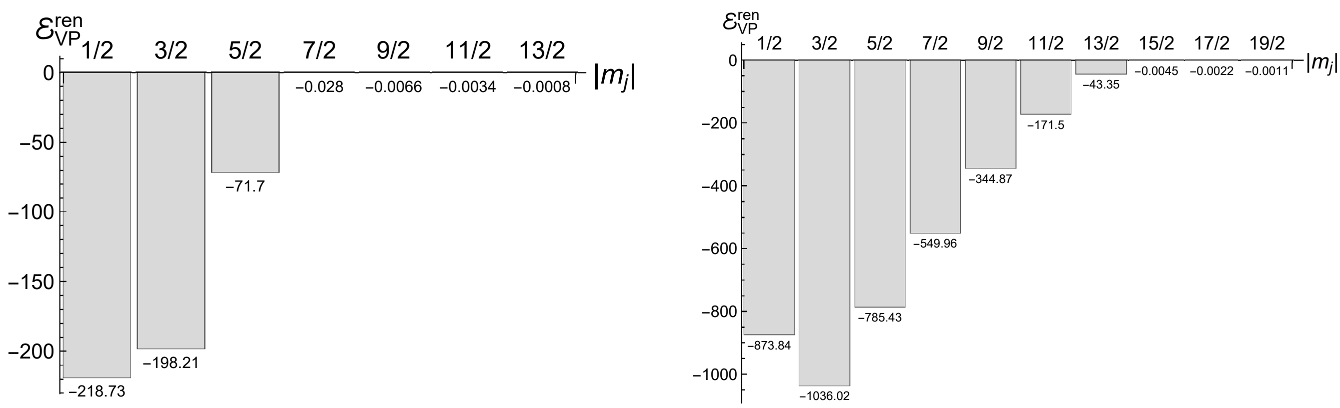
На рис. 2.15 показана зависимость $\mathcal{E}^{\text{ren}}_{\text{VP},|m_j|}(Z)$ в интервале $0 < Z < 1000$ для трех наиболее репрезентативных значений $|m_j| = 1/2,\ 5/2,\ 9/2$, а также полной перенормированной энергии $\mathcal{E}_{\mathrm{VP}}^{\mathrm{ren}}(Z)$. Гистограммы, демонстрирующие



а б в г

Рисунок 2.15 — $\mathcal{E}_{\mathrm{VP},|m_j|}^{\mathrm{ren}}(Z)$ на интервале $0 < Z < 1000$ при (а) $|m_j| = 1/2$; (б) $|m_j| = 5/2$; (в) $|m_j| = 9/2$; (г) полная перенормированная энергия $\mathcal{E}_{\mathrm{VP}}^{\mathrm{ren}}(Z)$ на том же интервале по Z.

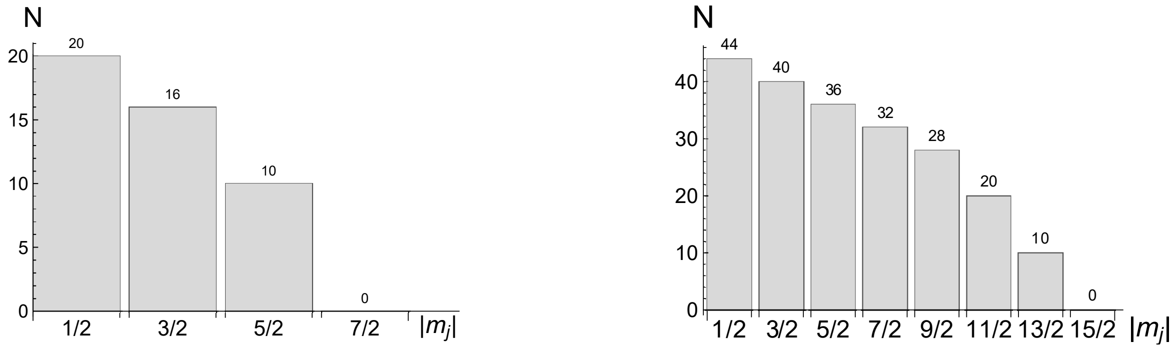
вклад различных парциальных каналов в $\mathcal{E}_{\mathrm{VP}}^{\mathrm{ren}}(Z)$, показаны на рис. 2.16 для $Z = 500$ и $Z = 1000$. На рис. 2.17 для тех же Z приведены гистограммы, демон-



а б

Рисунок 2.16 — Вклад различных $|m_j|$ в $\mathcal{E}_{\mathrm{VP}}^{\mathrm{ren}}(Z)$ при (а) $Z = 500$; (б) $Z = 1000$.

стрирующие вклад различных парциальных каналов в полное число $N(Z)$ уровней, достигших нижнего континуума. Из сравнения рис. 2.16, 2.17 четко видно, что основной вклад в полную вакуумную энергию при данном Z дают именно те парциальные каналы, в которых дискретные уровни уже достигают нижнего континуума. На рис. 2.18 приведены графики $\mathcal{E}_{\text{VP}}^{\text{ren}}(Z)$ и полного числа $N(Z)$ вакуум-

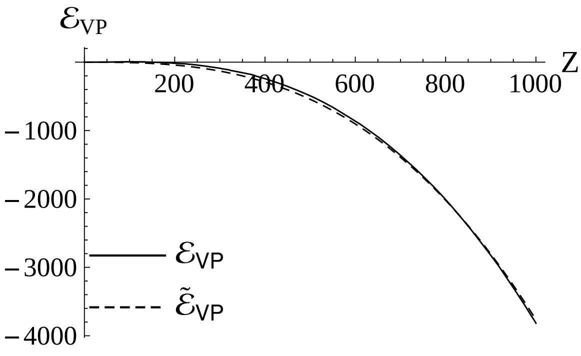


а б

Рисунок 2.17 — Вклад различных $|m_j|$ в $Q_{\text{VP}}^{\text{ren}}(Z)$ при (а) $Z = 500$; (б) $Z = 1000$.

ных оболочек, сформировавшихся из уровней, достигших нижнего континуума, и их степенные аппроксимации. Хорошим приближением для $\mathcal{E}_{\text{VP}}^{\text{ren}}(Z)$ является функция $\tilde{\mathcal{E}}_{\text{VP}}(Z) = -1.55 \times 10^{-5} \times Z^{2.8}$, а число вакуумных оболочек с достаточной точностью аппроксимируется зависимостью $\tilde{N}(Z) = 6.69 \times 10^{-5} \times Z^{2.17}$. Следует, однако, отметить, что обе эти аппроксимации являются лишь оценками снизу истинной зависимости $\mathcal{E}_{\text{VP}}^{\text{ren}}(Z)$ и $N(Z)$ от Z при $Z \gg Z_{cr,1}$, поскольку для аппроксимации используется только диапазон $0 < Z < 1000$, в котором при $0 < Z < Z_{cr,1}$ обе функции имеют совершенно иное поведение. При расширении диапазона по Z вправо скорость роста $|\mathcal{E}_{\text{VP}}^{\text{ren}}(Z)|$ и $N(Z)$ существенно увеличивается, и более правильная степенная оценка скорости роста $|\mathcal{E}_{\text{VP}}^{\text{ren}}(Z)|$ будет близка к $\mathrm{O}(Z^3)$ или даже превышать ее, все будет зависеть от диапазона изменения Z, по которому производится аппроксимация. В нашей работе по умолчанию подробно рассматривается лишь диапазон $0 < Z < 1000$.

Кроме того, в силу кулоновской природы эффекта и из очевидных размерных аргументов главная зависимость $\mathcal{E}_{\text{VP}}^{\text{ren}}(Z)$ от радиуса R_0 центральной сферы должна быть $1/R_0$, поэтому главной компонентой для оценки вакуумной энергии $\mathcal{E}_{\text{VP}}$ в данной задаче при $Z \gg Z_{cr,1}$ оказывается множитель $\sim -|\eta_{eff}|Z^3/R_0$, модулированный уже существенно более медленно меняющейся функцией от Z и R_0, содержащей заведомо меньшие степени Z и R_0 и/или их логарифмы. Более детальное обсуждение этого свойства приведено в [91]. Отметим также, что нечетная степень Z в множителе Z^3/R_0 подразумевает, что рассматривается случай $Z > 0$. На самом деле $\mathcal{E}_{\text{VP}}$ является заведомо четной функцией Z, поскольку



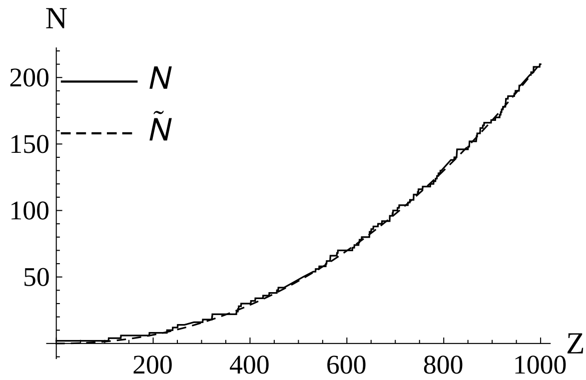


Рисунок 2.18 — Энергия поляризации вакуума $\mathcal{E}_{\text{VP}}^{\text{ren}}(Z)$, число вакуумных оболочек $N(Z)$ и их аппроксимации степенными функциями.

связана с ρ_{VP} швингеровским соотношением [59; 95]

$$\delta\mathcal{E}_{\text{VP}} = \int \rho_{\text{VP}}\delta A_0 + \delta\mathcal{E}_N \ , \tag{2.159}$$

где ρ_{VP} прямо по построению всегда является нечетной функцией Z, а $\mathcal{E}_N$ является разрывной ступенчато-постоянной функцией, скачки которой возникают при достижении зарядом источника соответствующих критических значений, когда в нижний континуум погружается очередной дискретный уровень, за счет чего энергия связи убывает на $-2\,(\times mc^2)$, и которая также является четной функцией Z [59; 95] . Поэтому, чтобы подчеркнуть этот факт, в общей случае этот множитель должен записываться в виде $\sim -|\eta_{eff}Z^3|/R_0$, а кубическая нелинейность вакуумной энергии является спецификой поляризации вакуума в 2+1D.

2.7 Непертурбативная вакуумная энергия при экранировке кулоновской асимптотики в 2+1D

2.7.1 Теоретическая часть для непертурбативной вакуумной энергии при экранировке кулоновской асимптотики в 2+1D

Для конечных R_1 исходные соотношения (2.124), (2.131) для вычисления перенормированной вакуумной энергии остаются неизменными, но составляющие части этих формул значительно меняются. В частности, в этом случае потенциал Юлинга имеет вид

$$A^{(1)}_{\mathrm{VP},0}(r) = \frac{Q_1}{4}\int\limits_0^\infty dq\,\frac{J_0(qr)}{q}\left[\frac{2}{q}+\left(1-\frac{4}{q^2}\right)\mathrm{arctg}\left(\frac{q}{2}\right)\right]\times$$
$$\times\Big(2\big[qR_1J_0(qR_1)-qR_0J_0(qR_0)+J_1(qR_0)-J_1(qR_1)\big]+$$
$$+\pi qR_0\left[J_0(qR_0)\mathbf{H}_1(qR_0)-J_1(qR_0)\mathbf{H}_0(qR_0)\right]-$$
$$-\pi qR_1\left[J_0(qR_1)\mathbf{H}_1(qR_1)-J_1(qR_1)\mathbf{H}_0(qR_1)\right]\Big)\ , \quad (2.160)$$

а вакуумная плотность заряда задается выражением

$$\rho^{(1)}_{\mathrm{VP}}(r) = \frac{Q_1}{16\pi}\int\limits_0^\infty dq\,qJ_0(qr)\left[\frac{2}{q}+\left(1-\frac{4}{q^2}\right)\mathrm{arctg}\left(\frac{q}{2}\right)\right]\times$$
$$\times\Big(2\big[qR_1J_0(qR_1)-qR_0J_0(qR_0)+J_1(qR_0)-J_1(qR_1)\big]+$$
$$+\pi qR_0\left[J_0(qR_0)\mathbf{H}_1(qR_0)-J_1(qR_0)\mathbf{H}_0(qR_0)\right]-$$
$$-\pi qR_1\left[J_0(qR_1)\mathbf{H}_1(qR_1)-J_1(qR_1)\mathbf{H}_0(qR_1)\right]\Big)\ , \quad (2.161)$$

где

$$Q_1 = Z\alpha/(1-R_0/R_1)\ . \quad (2.162)$$

Следует отметить, что теперь вакуумная плотность (2.161) в обеих точках R_0, R_1 имеет только логарифмические особенности, поскольку исходный потенциал является непрерывным с разрывами в производной.

В соответствии с этим изменяется и выражение для пертурбативной вакуумной энергии $\mathcal{E}^{(1)}_{\mathrm{VP}}$. Для экранировки с разрывом при $r=R_1$, рассмотренной в разделе 2.3.1, пертурбативная вакуумная энергия имела бы вид

$$\mathcal{E}^{(1)}_{\mathrm{VP}} = \frac{Q^2}{32}\int\limits_0^\infty dq\left[\frac{2}{q}+\left(1-\frac{4}{q^2}\right)\mathrm{arctg}\left(\frac{q}{2}\right)\right]\left(2\left[J_1(qR_0)+qR_1J_0(qR_1)-\right.\right.$$
$$-qR_0J_0(qR_0)]+\pi qR_0\left[J_0(qR_0)\mathbf{H}_1(qR_0)-J_1(qR_0)\mathbf{H}_0(qR_0)\right]-$$
$$\left.-\pi qR_1\left[J_0(qR_1)\mathbf{H}_1(qR_1)-J_1(qR_1)\mathbf{H}_0(qR_1)\right]\right)^2\ . \quad (2.163)$$

Подынтегральная функция в (2.163) при $q\to+\infty$ ведет себя $\sim 1/q$ и приводит к логарифмической расходимости в интеграле для $\mathcal{E}^{(1)}_{\mathrm{VP}}$. Причиной этой расходимости является медленное убывание Фурье-образа внешнего потенциала $\tilde{A}_0(q)$ при $q \to +\infty$ вследствие наличия разрыва в $A_0^{\rm ext}(r)$ при $r = R_1$. В виду этого обстоятельства для расчета вакуумной энергии в данной работе используется потенциал (2.1), который является непрерывной функцией. Выражение для $\mathcal{E}_{\rm VP}^{(1)}$ в этом случае имеет вид

$$\mathcal{E}_{\rm VP}^{(1)} = \frac{Q_1^2}{32} \int\limits_0^\infty dq \left[\frac{2}{q} + \left(1 - \frac{4}{q^2}\right) \mathrm{arctg}\left(\frac{q}{2}\right)\right] \Big(2\big[J_1(qR_0) - J_1(qR_1) + \\ + qR_1 J_0(qR_1) - qR_0 J_0(qR_0)\big] + \pi q R_0 \left[J_0(qR_0)\mathbf{H}_1(qR_0) - J_1(qR_0)\mathbf{H}_0(qR_0)\right] - \\ - \pi q R_1 \left[J_0(qR_1)\mathbf{H}_1(qR_1) - J_1(qR_1)\mathbf{H}_0(qR_1)\right]\Big)^2 . \quad (2.164)$$

Подынтегральная функция в (2.164) при $q \to +\infty$ ведет себя уже $\sim 1/q^3$, и, таким образом, $\mathcal{E}_{\rm VP}^{(1)}$ является конечной величиной. Более того, такой непрерывный потенциал (2.1) с экранированной кулоновской асимптотикой позволяет выполнить большую часть вычислений, необходимых для расчета перенормированной вакуумной энергии $\mathcal{E}_{\rm VP}^{\rm ren}$, в аналитическом виде.

Далее рассмотрим изменения, которые вносит такая экранировка кулоновской асимптотики в фазовый метод расчета вакуумной энергии. Для $r \leqslant R_0$ решения системы (2.124) по сравнению с неэкранированным случаем не изменяются, для $R_0 < r < R_1$ снова используются функции Куммера $\Phi(b,c,z)$ и $\tilde{\Phi}(b,c,z) = z^{1-c}\Phi(b - c + 1,2 - c,z)$. Приведенные далее соотношения справедливы как для непрерывного спектра, где $\epsilon = \pm\sqrt{k^2+1}$ для верхнего и нижнего континуума соответственно, так и для дискретного спектра $-1 \leqslant \epsilon < 1$.

Для $|m_j| > Q_1$ решения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \psi_{1,m_j}^{\rm mid}(r,\epsilon) &= \sqrt{|\epsilon - V_1 + 1|}\; r^{\varkappa - 1/2} \left(F_{1,r} + B_{m_j}(\epsilon)\tilde{F}_{1,r}\right) , \\ \psi_{2,m_j}^{\rm mid}(r,\epsilon) &= \mathrm{sgn}(1 + V_1 - \epsilon)\sqrt{|\epsilon - V_1 - 1|}\; r^{\varkappa - 1/2} \left(F_{2,r} + B_{m_j}(\epsilon)\, \tilde{F}_{2,r}\right) , \end{aligned} \quad (2.165)$$

где

$$F_{1,r} = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\gamma_1 r}\left((m_j + Q_1/\gamma_1)\Phi_r + b\Phi_r(b+)\right), & |\epsilon - V_1| \leqslant 1 , \\ \mathrm{Re}\left[\mathrm{e}^{i\phi_+}\mathrm{e}^{-\gamma_1 r}\Phi_r\right], & |\epsilon - V_1| > 1 , \end{cases} \quad (2.166)$$

$$F_{2,r} = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\gamma_1 r}\left(-(m_j + Q_1/\gamma_1)\Phi_r + b\Phi_r(b+)\right), & |\epsilon - V_1| \leqslant 1, \\ \mathrm{Im}\left[\mathrm{e}^{i\phi_+}\mathrm{e}^{-\gamma_1 r}\Phi_r\right] , & |\epsilon - V_1| > 1 , \end{cases} \tag{2.167}$$

$$\tilde{F}_{1,r} = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\gamma_1 r}\Big((m_j + Q_1/\gamma_1)\tilde{\Phi}_r + (1+b-c)\tilde{\Phi}_r(b+)\Big) , & |\epsilon - V_1| \leqslant 1 , \\ \mathrm{Re}\left[i\mathrm{e}^{-i\pi\varkappa}\mathrm{e}^{i\phi_-}\mathrm{e}^{-\gamma_1 r}\tilde{\Phi}_r\right] , & |\epsilon - V_1| > 1 , \end{cases} \tag{2.168}$$

$$\tilde{F}_{2,r} = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\gamma_1 r}\Big(-(m_j + Q_1/\gamma_1)\tilde{\Phi}_r + (1+b-c)\tilde{\Phi}_r(b+)\Big) , & |\epsilon - V_1| \leqslant 1, \\ \mathrm{Im}\left[i\mathrm{e}^{-i\pi\varkappa}\mathrm{e}^{i\phi_-}\mathrm{e}^{-\gamma_1 r}\tilde{\Phi}_r\right] , & |\epsilon - V_1| > 1 . \end{cases} \tag{2.169}$$

В формулах (2.165–2.169) введены следующие обозначения

$$V_1 = Q_1/R_1 , \quad \varkappa = \sqrt{m_j^2 - Q_1^2} , \quad b = \varkappa - (\epsilon - V_1)\, Q_1/\gamma_1 , \quad c = 1 + 2\varkappa ,$$
$$\phi_+ = \frac{1}{2}\mathrm{Arg}\left[\frac{m_j + Q_1/\gamma_1}{b}\right] , \quad \phi_- = \frac{1}{2}\mathrm{Arg}\left[\frac{b}{m_j - Q_1/\gamma_1}\right] , \tag{2.170}$$

при этом γ_1 определяется как

$$\gamma_1 = \begin{cases} \sqrt{1 - (\epsilon - V_1)^2}, & |\epsilon - V_1| \leqslant 1, \\ -i\sqrt{(\epsilon - V_1)^2 - 1}, & |\epsilon - V_1| > 1 , \end{cases} \tag{2.171}$$

и

$$\Phi_r = \Phi(b,c,2\gamma_1 r) , \quad \tilde{\Phi}_r = \tilde{\Phi}(b,c,2\gamma_1 r) ,$$
$$\Phi_r(b+) = \Phi(b+1,c,2\gamma_1 r) , \quad \tilde{\Phi}_r(b+) = \tilde{\Phi}(b+1,c,2\gamma_1 r) . \tag{2.172}$$

Коэффициенты $B_{m_j}(\epsilon)$ определяются из сшивки решений $\psi^{\mathrm{int}}_{m_j}(r,\epsilon)$ и $\psi^{\mathrm{mid}}_{m_j}(r,\epsilon)$ при $r = R_0$:

$$B_{m_j}(\epsilon) = -\frac{C_{1,\,m_j}(\epsilon)\, F_{2,R_0} - C_{2,\,m_j}(\epsilon)\, F_{1,R_0}}{C_{1,\,m_j}(\epsilon)\, \tilde{F}_{2,R_0} - C_{2,\,m_j}(\epsilon)\, \tilde{F}_{1,R_0}} , \tag{2.173}$$

где

$$C_{1,\,m_j}(\epsilon) = \mathrm{sgn}(1 + V_1 - \epsilon)\sqrt{|\epsilon - V_1 - 1|}\ \psi^{\mathrm{int}}_{1,m_j}(R_0,\epsilon) ,$$
$$C_{2,\,m_j}(\epsilon) = \sqrt{|\epsilon - V_1 + 1|}\ \psi^{\mathrm{int}}_{2,m_j}(R_0,\epsilon) . \tag{2.174}$$

В случае $|m_j| < Q_1$ решения записываются в следующем виде:

$$\psi^{\rm mid}_{1,\,m_j}(r,\epsilon) = \sqrt{|\epsilon - V_1 + 1|}\,\mathrm{Re}\left[\mathrm{e}^{i\lambda_{m_j}(\epsilon)}\mathrm{e}^{-\gamma_1 r}(2\gamma_1 r)^{i|\varkappa|-\frac{1}{2}}\left(b\Phi_r(b+)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+(m_j + Q_1/\gamma_1)\Phi_r\right)\right]\ ,$$
$$\psi^{\rm mid}_{2,\,m_j}(r,\epsilon) = \mathrm{sgn}(1 + V_1 - \epsilon)\sqrt{|\epsilon - V_1 - 1|}\,\times$$
$$\times\,\mathrm{Re}\left[i^{\theta((\epsilon-V_1)^2-1)}\,\mathrm{e}^{i\lambda_{m_j}(\epsilon)}\mathrm{e}^{-\gamma_1 r}(2\gamma_1 r)^{i|\varkappa|-\frac{1}{2}}\left(b\Phi_r(b+) - (m_j + Q_1/\gamma_1)\Phi_r\right)\right]\ , \tag{2.175}$$

где

$$|\varkappa| = \sqrt{Q_1^2 - m_j^2}\ ,\quad b = i|\varkappa| - (\epsilon - V_1)\,Q_1/\gamma_1\ ,\quad c = 1 + 2i|\varkappa|\ , \tag{2.176}$$

тогда как $\lambda_{m_j}(\epsilon)$ определяется из условия сшивки решений при $r = R_0$ и имеет вид

$$\lambda_{m_j}(\epsilon) = -\mathrm{Arg}\left[i\mathrm{e}^{-\gamma_1 R_0}(2\gamma_1 R_0)^{i|\varkappa|}\left(-\left(C_{2,\,m_j} + i^{\theta((\epsilon-V_1)^2-1)}C_{1,\,m_j}\right)\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times(m_j + Q_1/\gamma_1)\Phi_{R_0} + (-C_{2,\,m_j} + i^{\theta((\epsilon-V_1)^2-1)}C_{1,\,m_j})b\Phi_{R_0}(b+)\right)\right]\ . \tag{2.177}$$

В области $r \geqslant R_1$ для непрерывного спектра используем функции Бесселя и Неймана

$$\psi^{\rm ext}_{1,\,m_j}(r,\epsilon) = \sqrt{|\epsilon + 1|}\ \left(J_{m_j-1/2}(kr) + D_{m_j}(\epsilon)N_{m_j-1/2}(kr)\right)\ ,$$
$$\psi^{\rm ext}_{2,\,m_j}(r,\epsilon) = -\mathrm{sgn}(\epsilon)\sqrt{|\epsilon - 1|}\ \left(J_{m_j+1/2}(kr) + D_{m_j}(\epsilon)N_{m_j+1/2}(kr)\right)\ , \tag{2.178}$$

$$D_{m_j}(\epsilon) =$$
$$-\frac{\sqrt{|\epsilon+1|}\,J_{m_j-1/2}(kR_1)\psi^{\rm mid}_{2,\,m_j}(R_1,\epsilon) + \mathrm{sgn}(\epsilon)\sqrt{|\epsilon-1|}\,J_{m_j+1/2}(kR_1)\psi^{\rm mid}_{1,\,m_j}(R_1,\epsilon)}{\sqrt{|\epsilon+1|}\,N_{m_j-1/2}(kR_1)\psi^{\rm mid}_{2,\,m_j}(R_1,\epsilon) + \mathrm{sgn}(\epsilon)\sqrt{|\epsilon-1|}\,N_{m_j+1/2}(kR_1)\psi^{\rm mid}_{1,\,m_j}(R_1,\epsilon)}\ , \tag{2.179}$$

тогда как в дискретном спектре $-1 \leqslant \epsilon < 1$ решения записываются через функции Макдональда

$$\psi^{\rm ext}_{1,\,m_j}(r,\epsilon) = \sqrt{1+\epsilon}\,K_{m_j-1/2}(\gamma r)\ ,\quad \psi^{\rm ext}_{2,\,m_j}(r,\epsilon) = -\sqrt{1-\epsilon}\,K_{m_j+1/2}(\gamma r)\ . \tag{2.180}$$

Уравнение на дискретные уровни $-1 \leqslant \epsilon < 1$ находится из сшивки решений в точках $r = R_0$ и $r = R_1$. Для $|m_j| > Q_1$ оно имеет вид

$$\begin{aligned}&\Big(C_{1,m_j}(\epsilon)\tilde{F}_{2,R_0} - C_{2,m_j}(\epsilon)\tilde{F}_{1,R_0}\Big)\Big(\mathrm{sgn}(1+V_1-\epsilon)\sqrt{|(\epsilon-V_1-1)(\epsilon+1)|}\times\\ &\quad\times K_{m_j-1/2}(\gamma R_1)F_{2,R_1} + \sqrt{|(\epsilon-V_1+1)(\epsilon-1)|}\,K_{m_j+1/2}(\gamma R_1)F_{1,R_1}\Big)-\\ &\quad-\Big(C_{1,m_j}(\epsilon)F_{2,R_0} - C_{2,m_j}(\epsilon)F_{1,R_0}\Big)\times\\ &\quad\times\Big(-\mathrm{sgn}(\epsilon-V_1-1)\sqrt{|(1+V_1-\epsilon)(\epsilon+1)|}\,K_{m_j-1/2}(\gamma R_1)\tilde{F}_{2,R_1}+\\ &\quad+\sqrt{|(\epsilon-V_1+1)(\epsilon-1)|}\,K_{m_j+1/2}(\gamma R_1)\tilde{F}_{1,R_1}\Big) = 0\ , \end{aligned} \tag{2.181}$$

а для $|m_j| < Q_1$ записывается следующим образом

$$\begin{aligned}&\mathrm{Im}\Big[\mathrm{e}^{-\gamma_1 R_1-\gamma_1^* R_0}(2\gamma_1 R_1)^{i|\varkappa|-1/2}(2\gamma_1^* R_0)^{-i|\varkappa|-1/2}\Big(\sqrt{|(\epsilon-V_1+1)(\epsilon-1)|}\times\\ &\quad\times K_{m_j+1/2}(\gamma R_1)\Big((m_j+Q_1/\gamma_1)\Phi_{R_1} + b\Phi_{R_1}(b+)\Big)+\\ &\quad+\mathrm{sgn}(1+V_1-\epsilon)\,\sqrt{|(\epsilon-V_1-1)(\epsilon+1)|}\,K_{m_j-1/2}(\gamma R_1)\times\\ &\quad\times i^{\theta((\epsilon-V_1)^2-1)}\left(-(m_j+Q_1/\gamma_1)\,\Phi_{R_1} + b\Phi_{R_1}(b+)\right)\Big)\times\\ &\quad\times\Big(C_{1,m_j}(\epsilon)i^{\theta((\epsilon-V_1)^2-1)}\left(-(Q_1/\gamma_1+m_j)\,\Phi_{R_0} + b\,\Phi_{R_0}(b+)\right)-\\ &\quad-C_{2,m_j}(\epsilon)\ \left((Q_1/\gamma_1+m_j)\,\Phi_{R_0} + b\,\Phi_{R_0}(b+)\right)\Big)^*\Big] = 0\ . \end{aligned} \tag{2.182}$$

Отметим также, что из явного вида решений (2.180) в области $r \geqslant R_1$ легко выводится их степенное поведение при $\epsilon \to \pm 1$, приведенное в разделе 2.5, и которое в свою очередь для $|m_j| = 1/2,\, 3/2$ порождает ряд специфических для 2+1D эффектов на порогах обоих континуумов [85].

Критические заряды внешнего источника в экранированном случае также приобретают новые аспекты, поскольку при этом точка сгущения уровней дискретного спектра при $\epsilon \to 1$ исчезает и общее число дискретных уровней становится конечным. Таким образом, теперь имеются критические заряды, при которых уровни дискретного спектра достигают нижнего континуума, и кроме того, появляются «критические» заряды, которые соответствуют моментам превращения виртуальных уровней в реальные (и наоборот) на пороге верхнего континуума. Уравнения для обоих типов критических зарядов выводятся из уравнений (2.181) и (2.182) в пределе $\epsilon \to \pm 1$ с учетом хорошо известных предельных соотношений для функций Макдональда [92]. Далее для определенности мы будем рассматривать случай $|m_j| < Q_1$, так как только при выполнении именно этого условия уровни дискретного спектра достигают порога нижнего континуума, что является условием для возникновения рассматриваемых в работе непертурбативных вакуумных эффектов. Соответствующие уравнения на критические заряды удобно представить в виде

$$X^{\mp}_{\pm|m_j|} = 0 \ , \tag{2.183}$$

где

$$X^{-}_{|m_j|} = \psi^{\mathrm{mid}}_{1,\,|m_j|}(R_1, -1) \ , \quad X^{-}_{-|m_j|} = \psi^{\mathrm{mid}}_{1,\,-|m_j|}(R_1, -1) + \frac{|m_j| - 1/2}{R_1}\psi^{\mathrm{mid}}_{2,\,-|m_j|}(R_1, -1) \tag{2.184}$$

относятся к случаю, когда уровни с $\pm|m_j|$ достигают нижнего континуума, в то время как

$$X^{+}_{|m_j|} = \psi^{\mathrm{mid}}_{2,\,|m_j|}(R_1,1) + \frac{|m_j| - 1/2}{R_1}\psi^{\mathrm{mid}}_{1,\,|m_j|}(R_1,1) \ , \quad X^{+}_{-|m_j|} = \psi^{\mathrm{mid}}_{2,\,-|m_j|}(R_1,1) \tag{2.185}$$

к рождению уровней с $\pm|m_j|$ на пороге верхнего континуума. Отметим также, что уравнения (2.183–2.185) охватывают все случаи, в том числе специфические, с $m_j = \pm 1/2, \pm 3/2$, когда решения с $\epsilon = \pm 1$ не относятся ни к дискретному спектру, ни к состояниям рассеяния [85].

Суммарная фаза по-прежнему определяется формулой (2.146), в то время как отдельные сдвиги определяются через асимптотику решений (2.178) и имеют вид

$$\delta_{m_j}(\epsilon) = \mathrm{Arg}\left[1 - iD_{m_j}(\epsilon)\right] \ . \tag{2.186}$$

Экранировка внешнего потенциала (2.1) несущественно меняет асимптотику полных парциальных фаз $\delta_{\mathrm{tot},|m_j|}(k)$ при $k \to \infty$, так как теперь потенциал является непрерывным и парциальные фазы оказываются существенно ближе к кулоновскому случаю, чем к рассеянию на потенциальной яме, хотя и без кулоновских логарифмов в отдельных слагаемых $\delta^{\pm}_{\pm m_j}(k)$. В результате, совершенно аналогично неэкранированному случаю, полные парциальные фазы при $k \to \infty$

убывают $\sim 1/k^3$, а именно

$$\delta_{\text{tot},|m_j|}(k) \to \frac{Q_1}{k^3}\left[\frac{2Q_1}{3}\left\{\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_0}\right)\left(6+m_j^2\left(\frac{1}{R_1^2}+\frac{1}{R_0R_1}-\frac{2}{R_0^2}\right)\right)-\right.\right.$$
$$\left.-\frac{6}{R_1}\ln\left(\frac{R_0}{R_1}\right)\right\}+|m_j|(-1)^{|m_j|-1/2}\left\{\frac{\sin(2Q)\sin(2kR_0)}{R_0^3}-\right.$$
$$\left.\left.-\frac{\sin(2Q_1\ln(R_1/R_0))\sin(2kR_1)}{R_1^3}\right\}\right]+\mathrm{O}(1/k^4). \quad (2.187)$$

Для $R_1 \to \infty$ этот результат воспроизводит ответ для неэкранированного случая (2.149). Отметим, что в случае потенциала (2.1) с разрывом при $r = R_1$ главное слагаемое в асимптотике $\delta_{\text{tot},|m_j|}(k)$ при $k \to \infty$ соответствовало бы рассеянию на потенциальной яме конечной глубины и ширины и тем самым $\sim 1/k^2$, что легко проверяется через борновское приближение.

Эффекты экранировки также влияют на инфракрасное поведение полной фазы. А именно, асимптотика $\delta_{\text{tot},|m_j|}(k)$ при $k \to 0$ имеет следующий вид:

$$\delta_{\text{tot},\,|m_j|}(k \to 0) = \mathrm{Arg}\left[\prod_{\pm} X^{-}_{\pm|m_j|}X^{+}_{\pm|m_j|}\right], \quad (2.188)$$

что приводит к скачкообразному поведению $\delta_{\text{tot},|m_j|}(0)$ как функции Z, поскольку, проходя через каждое верхнее и нижнее критическое значение Z, соответствующий множитель $X^{\mp}_{\pm|m_j|}$ меняет знак, и поэтому в $\delta_{\text{tot},|m_j|}(0)$ появляется скачок равный $\pm\pi$. Следует отметить, что выражение (2.188) определяет предельное значение полной парциальной фазы с точностью до 2π. Для избежания этой неопределенности требуется сохранять мнимую часть функции под знаком (Arg). Однако, в любом случае это соотношение правильно воспроизводит скачки в $\delta_{\text{tot},|m_j|}(k \to 0)$ при погружении или появлении уровней дискретного спектра на порогах обоих континуумов соответственно. Детали изменений в поведении фазовых сдвигов в случае экранировке кулоновской асимптотики подробно рассмотрены в нашей статье [86] и здесь представлены не будут.

2.7.2 Результаты численных расчетов непертурбативной вакуумной энергии при экранировке кулоновской асимптотики в 2+1D

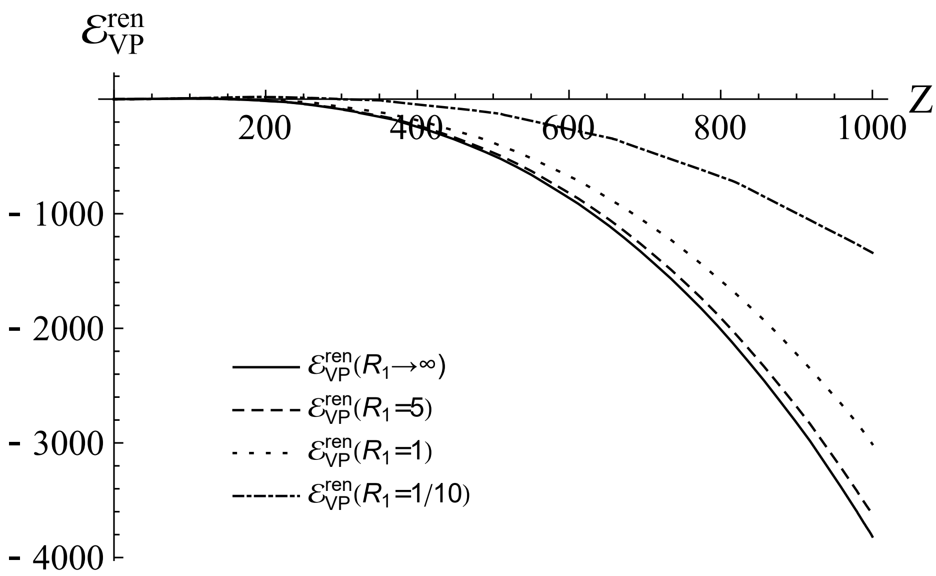


Рисунок 2.19 — $\mathcal{E}_{\mathrm{VP}}^{\mathrm{ren}}(Z)$ для различных значений параметра R_1 обрезания кулоновской асимптотики.

Зависимость вакуумной энергии $\mathcal{E}_{\mathrm{VP}}^{\mathrm{ren}}(Z)$ от эффектов обрезания кулоновской асимптотики показано на рис. 2.19 для $R_1 = 1/10,\ 1,\ 5$ в сравнении со случаем отсутствия обрезания. При убывающем R_1 в силу сжатия кулоновской ямы значения критических зарядов растут, а число вакуумных оболочек тем самым убывает. На кривых для $\mathcal{E}_{\mathrm{VP}}^{\mathrm{ren}}(Z)$ скачки при достижении уровнями нижнего континуума не видны из-за эффектов масштабирования на выбранном интервале изменения $0 < Z < 1000$. В частности, для $Z = 1000$ без обрезания в нижний континуум опустилось 210 дискретных уровней (с учетом фактора мультиплетности), для $R_1 = 5$ их число становится 178, для $R_1 = 1$ – 116, а для $R_1 = 1/10$ – всего лишь 40. И по сути в том же режиме происходит замедление скорости опускания полной вакуумной энергии в область отрицательных значений: для $R_1 = 5$ оно не превосходит 1% и практически незаметно, для $R_1 = 1$ оно составляет $\sim 10\%$, и только для $R_1 = 1/10$ возникает заметное различие в скоростях $\sim 60\%$.

2.8 Заключение к главе 2

В заключение необходимо прежде всего отметить, что как и в случае одномерного «атома водорода» (глава 1), в 2+1D собственно вычисление вакуумной энергии при УФ перенормировке через фермионную петлю может быть проведено исключительно на основе соотношений (2.123), (2.124) и (2.131) без обращения к вакуумной плотности и оболочечным эффектам. Существенно, что при такой перенормировке мы автоматически обеспечиваем сразу и сходимость всего парциального ряда для $\mathcal{E}_{\mathrm{VP}}^{\mathrm{ren}}$, поскольку расходящиеся члены в сумме (2.124) согласно (2.126) пропорциональны $(Z\alpha)^2$. Тем самым перенормировка через фермионную петлю оказывается универсальным приемом, устраняющим расходимость теории как в чисто пертурбативном, так и в существенно непертурбативном режимах поляризации вакуума внешним кулоновским полем.

Двумерный случай существенно отличается от одномерного в первую очередь тем, что $\rho_{\mathrm{VP}}^{\mathrm{ren}}(r)$ теперь представляется в виде бесконечного ряда по вращательному квантовому числу m_j, вследствие этого возникает дополнительный вопрос о его сходимости. Как было показано в главе 1, этот вопрос успешно решается через перенормировку вакуумной плотности заряда в первом порядке ТВ, т.е. регуляризацией расходящейся фермионной петли с двумя внешними линиями. При этом интегральный вакуумный заряд равен нулю в докритической области и изменяется на $(-2|e|)$ при погружении каждого последующего дважды вырожденного дискретного уровня в нижний континуум.

Особого внимания заслуживает рассмотренный в разделе 2.5 специфический эффект, возникающий в случае кулоновского потенциала сферического источника, обрезанного на конечном R_1 (2.1), для $|m_j| = 1/2, -3/2$ в виду того, что дискретные уровни именно в этих каналах погружаются в нижний континуум в первую очередь. Наиболее примечательным обстоятельством здесь является то, что скачок индуцированной плотности при достижении соответствующего Z_{cr} может быть очень слабо выражен, так как изменение индуцированного плотности должно равномерно распределяться по всей двумерной поверхности. А поскольку экранировка внешнего кулоновского источника в реальных условиях неизбежна, то обнаружение такого изменения в индуцированной плотности в планарных гетероструктурах может быть значительно затруднено. Более того, даже при достижении нижнего континуума нормируемыми дискретными уровнями с $m_j = 3/2, \pm 5/2, \ldots$, которые обеспечивают требуемую степень убывания электронной ВФ на радиальной бесконечности, скачок индуцированной плотности заряда также будет достаточно сильно «размазан» по всей поверхности.

Эффект убывания $\mathcal{E}^{\mathrm{ren}}_{\mathrm{VP}}(Z)$ в закритической области $\sim -|\eta Z^3|$ имеет вполне корректное обьяснение через свойства парциального ряда (2.124). Каждый отдельный член этого ряда $\mathcal{E}^{\mathrm{ren}}_{\mathrm{VP},|m_j|}(Z)$ имеет структуру (2.131), по своей сути аналогичную $\mathcal{E}^{\mathrm{ren}}_{\mathrm{VP}}(Z)$ в 1+1D (см. главу 1), и поэтому в закритической области главным слагаемым в $\mathcal{E}^{\mathrm{ren}}_{\mathrm{VP},|m_j|}(Z)$ оказывается отрицательный вклад от перенормировочного члена $\eta_{|m_j|} Z^2$, поскольку в этой области скорость роста неперенормированной энергии, как и в 1+1D, будет $\sim Z^{\nu}$, $1 < \nu < 2$. Но теперь общее число опустившихся в нижний континуум уровней при данном Z представляет из себя сумму вкладов конечного числа первых парциальных каналов с $1/2 \leqslant |m_j| \leqslant |m_j|_{max}(Z)$, где $|m_j|_{max}(Z)$ является последний каналом, в котором число опустившихся в нижний континуум дискретных уровней отлично от нуля, и именно эти парциальные каналы дают основной вклад в вакуумную энергию (см. гистограммы на рис. 2.16 и 2.17). При этом $|m_j|_{max}(Z)$ с ростом Z растет примерно линейно. А поскольку полная вакуумная энергия $\mathcal{E}^{\mathrm{ren}}_{\mathrm{VP}}(Z)$ теперь определяется прежде всего суммой вкладов от этих каналов, то ее скорость убывания увеличивается на множитель порядка Z, что и дает $\sim -|\eta_{eff} Z^3|$ в закритической области.

Однако по существу убывание $\mathcal{E}^{\mathrm{ren}}_{\mathrm{VP}}$ в закритической области обусловлено прежде всего непертурбативными изменениями в вакуумной плотности при $Z > Z_{cr,1}$ за счет дискретных уровней, достигающих нижнего континуума («оболочечный эффект»). В 1+1D рост числа вакуумных оболочек $\sim Z^s$, $1 < s < 2$, по крайней мере в рассмотренном в главе 1 диапазоне внешних параметров. Поэтому в закритической области скорость роста неперенормированной $\mathcal{E}_{\mathrm{VP}}$ не превышает $\sim Z^{\nu}$, $1 < \nu < 2$, и в результате доминирующий вклад в $\mathcal{E}^{\mathrm{ren}}_{\mathrm{VP}}$ возникает от перенормировочного члена ηZ^2. В 2+1D (и тем более в 3+1D) оболочечный эффект выражен гораздо более явно, скорость роста полного числа оболочек $N(Z)$ заведомо превышает Z^2, и в результате $\mathcal{E}^{\mathrm{ren}}_{\mathrm{VP}}(Z)$ в закритической области убывает на порядок быстрее. Такое поведение $\mathcal{E}^{\mathrm{ren}}_{\mathrm{VP}}(Z)$ в закритической области показывает правильность вывода о превращении нейтрального вакуума в заряженный, который оказывается основным состоянием электрон-позитронного поля в таких полях[5; 7; 58], [11], и тем самым о спонтанном излучении вакуумных позитронов, которые должны возникать при рождении очередной вакуумной оболочки вследствие закона сохранения полного заряда.

Нетривиальная зависимость $\mathcal{E}_{\mathrm{VP}}^{\mathrm{ren}}$ от параметра обрезания кулоновской асимптотики R_1 в закритической области также обьясняется прежде всего в терминах оболочек пропорциональным изменением их числа (см. конец раздела 4), а также тем обстоятельством, что при необрезанной асимптотике ВФ уровня на нижнем континууме ведет себя при $r \to \infty$ как $\mathrm{O}(\exp(-\sqrt{8Qr}))$, т.е. амплитуда ВФ убывает существенно медленнее, чем обычный атомный уровень. В частности, когда в 3+1D при $Z_{cr,1} \simeq 170$ первый $1s$-уровень достигает порога нижнего континуума, то вероятность обнаружить электрон в области кулоновской ямы ядра при той же зависимости $R_0(Z)$ (2.3) составляет всего лишь $\simeq 2.2\%$, а средний радиус оболочки оказывается порядка комптоновской длины, хотя амплитуды верхней и нижней компонент дираковской ВФ внутри ядра существенно больше, чем вне его [96]. Поэтому чувствительность оболочечного эффекта к обрезанию возникает и быстро возрастает только тогда, когда ВФ оболочек локализуются в области кулоновской ямы ядра, а это происходит только при обрезании асимптотики на масштабах $R_1 \ll 1$, когда за счет сжатия кулоновской ямы асимптотика ВФ на нижнем континууме становится обычной экспоненциальной.

Следует также отметить, что рассмотренные в данной работе методы расчета вакуумной энергии для внешнего потенциала типа (2.1) в 2+1D с минимальными дополнениями переносятся и на трехмерный случай, хотя сложность и обьем вычислений растут экспоненциально. Основная разница состоит в том, что в 3+1D вращательных квантовых чисел становится два – jm_j, а мультиплетность каждого энергетического уровня вместо 2 становится $2j+1$. В результате парциальные ряды для вакуумных плотности заряда и энергии будут иметь структуру $2\sum_\kappa |\kappa| f_{|\kappa|}$, где $\kappa = \pm(j+1/2)$ [61], что приводит к повышению скорости роста $\mathcal{E}_{\mathrm{VP}}^{\mathrm{ren}}(Z)$ и $N(Z)$ в закритической области еще примерно на один порядок по сравнению с 2+1D. Более конкретно, расчеты показывают, что при том же соотношении между радиусом R_0 и зарядом кулоновского источника (2.3) при $Z \gg Z_{cr,1}$ полное число вакуумных оболочек $N(Z)$ ведет себя не медленнее чем $\sim Z^{3.17}$, а перенормированная вакуумная энергия $\mathcal{E}_{\mathrm{VP}}^{\mathrm{ren}}(Z,R_0)$ убывает примерно как $-|\eta| Z^4/R_0$. При этом скорость убывания последней оказывается такова, что она становится конкурентноспособной с классической электростатической энергией кулоновского источника. Проведенные расчеты показывают, что в случае источника в виде сферы $\mathcal{E}^{\mathrm{ren}}_{\mathrm{VP}}(Z,R_0(Z)) + Z^2\alpha/2R_0(Z) \simeq 0$ при $Z^* \simeq 3000$. Таким образом, в 3+1D эффекты поляризации вакуума оказываются способными полностью экранировать классическое кулоновское отталкивание. При этом оценка $Z^* \simeq 3000$ оказывается во многом универсальной, в частности, она очень слабо зависит от отклонения радиуса R_0 от реперного значения (2.3) как минимум на порядок в обе стороны, а также от конкретной структуры кулоновского источника – сферы, шара или сферического слоя. Основная причина, по которой детальные расчеты трехмерного случая нами до сих пор не опубликованы, состоит в том, что при $Z \sim 2000$ достигается критический заряд для пионного поля [97], и для последовательного описания поведения вакуума в таких полях уже следует учитывать эффекты сильных взаимодействий. Поэтому вопрос о том, не могут ли другие существенно нелинейные динамические эффекты поляризации вакуума чисто электромагнитной природы понизить Z^* до значения, меньшего 2000, является весьма актуальным.

Глава 3. Непертурбативные эффекты поляризации вакуума в двумерной сверхкритической системе Дирака-Кулона при наличии магнитного поля с аксиальным вектор-потенциалом

3.1 Введение к главе 3

Двумерные гетероструктуры (типа графена [21; 98]) вызывают значительный интерес в качестве реальных физических систем для наблюдения непертурбативных эффектов поляризации вакуума. Как известно [12; 77; 99—102], поведение электронов в графене характеризуется уравнением Дирака с сильной константой связи (~ 1) для массивных или безмассовых фермионов. Так как эффективная константа связи становится существенно большой по сравнению с 3+1 КЭД ($\alpha \simeq 1/137$), то даже небольшой кластер ионов может создавать закритическое электромагнитное поле. Работы по расчету эффектов поляризации вакуума в графене уже проводились, однако, в основном, были сфокусированы на точечных кулоновских или аароно-бомовских источниках.

В [103] рассмотрены эффекты поляризации вакуума в модели заряженных фермионов с аномальным магнитным моментом и аксиально-векторным взаимодействием в постоянном однородном магнитном поле. Вычислены поправки к эффективному лагранжиану от аномального момента и члена аксиально-векторного взаимодействия при различных конфигурациях параметров модели. Получено выражение для индуцированного тока в модели дираковских фермионов с аномальным магнитным моментом, взаимодействующих с фоновым аксиально-векторным конденсатом и магнитным полем.

Задача о движении электрона в окрестности тонкой трубки магнитного потока была решена точно в работе [25]. Вакуумная плотность тока, которая индуцируется вокруг внесенной в вакуум трубки, рассчитана путем прямого суммирования по состояниям «морских» электронов. Также получены выражения для вакуумной плотности энергии и тока методом собственного времени Швингера-Фока.

Кроме того, в работе [26] было исследовано влияние на вакуум бесконечно тонкого соленоида вдали от его оси, в [27; 28] – точечного кулоновского источника, а в [29] – скрещенных кулоновского и магнитного аароно-бомовского потенциала. Кроме того, следует отметить работы, исследующие другие конфигурации потенциалов, пусть и в некоторых асимптотических пределах, как [30; 31], где исследовалось отдельно однородное магнитное поле и получены аналитические результаты для поляризации вакуума в пределе малых расстояний, или же предел больших расстояний для некоторых электрических потенциалов. Кроме того, существуют и работы, направленные на изучение поляризации вакуума при наличии в графене топологических дефектов, как в [32]. При этом расчеты проводились как для массивных [28], так и для безмассовых [27; 29—31] случаев.

В настоящей главе рассматриваются существенно непертурбативные эффекты поляризации вакуума в сверхкритических кулоновских полях и магнитных полях с аксиальным векторным потенциалом в 2+1D. В качестве основных характеристик поляризации вакуума в нашей работе выступают вакуумная плотность заряда ρ_{VP} и тока $\vec{j}_{\mathrm{VP}}$. При наличии внешнего магнитного поля отсутствует вырождение по третьей проекции полного углового момента m_j. Таким образом, вакуумная плотность тока в рассматриваемом случае отлична от нуля и является не менее информативной и без сомнений должна рассматриваться наравне с вакуумной плотностью заряда.

Внешнее кулоновское поле $A_0^{\mathrm{ext}}(\vec{r})$, как и в главах 1, 2, выбирается в виде проекции потенциала равномерно заряженной сферы на плоскость

$$A_0^{\mathrm{ext}}(r) = Z|e|\left[\frac{1}{R_0}\theta\left(R_0 - r\right) + \frac{1}{r}\theta\left(r - R_0\right)\right] , \tag{3.1}$$

с потенциальной энергией

$$V(r) = -Z\alpha\left[\frac{1}{R_0}\theta\left(R_0 - r\right) + \frac{1}{r}\theta\left(r - R_0\right)\right] . \tag{3.2}$$

Внешний векторный потенциал $\vec{A}^{\mathrm{ext}}(\vec{r})$ выбирается в виде потенциала бесконечного тонкого соленоида с радиусом R_1

$$\begin{aligned} &\vec{A}^{\mathrm{ext}}(\vec{r}) = A^{\mathrm{ext}}(r)\,\vec{e}_{\varphi} , \\ &A^{\mathrm{ext}}(r) = \frac{\lambda}{|e|}\left[r\,\theta\left(R_1 - r\right) + \frac{R_1^2}{r}\theta\left(r - R_1\right)\right] , \quad \lambda = |e|H_0/2 , \end{aligned} \tag{3.3}$$

где H_0 – модуль вектора напряженности магнитного поля внутри соленоида

$$\vec{H}\left(\vec{r}\right) = \vec{e}_z\, H_0\, \theta\left(R_1 - r\right) \ . \tag{3.4}$$

Несмотря на то что со стандартным выбором постоянной тонкой структуры $\alpha \simeq 1/137$ и без специального обрезания кулоновского потенциала такая система может рассматриваться лишь как приближение к соответствующему трехмерному аналогу, детальное рассмотрение задачи для $Z > Z_{cr,1}$ представляет большой теоретический интерес ввиду того, что она воспроизводит основные характеристики более реалистичной 3+1D задачи поляризации вакуума сверхтяжелым ядром или ядерной квазимолекулой, но со значительными упрощениями, связанными с меньшим числом вращательных степеней свободы. По этой причине радиус внешнего кулоновского источника выбирается таким же как и в аналогичной 3+1D задаче со сверхтяжелым ядром в виде

$$R_0 = R_0(Z) \simeq 1.2(2.5Z)^{1/3}\,\text{Фм} \ . \tag{3.5}$$

Отдельно подчеркнем то, что выбор внешнего магнитного поля в виде поля соленоида с бесконечно тонкими стенками обусловлен прежде всего тем, что при такой постановке задачи уравнение Дирака допускает разделение радиальных и угловых переменных. Эта возможность значительно упрощает дальнейшие аналитические и численные расчеты.

При вычислении ρ_{VP} и $\vec{j}_{\text{VP}}$ используется комбинация аналитических и численных методов, которые позволяют исследовать эффекты поляризации вакуума для широкого класса аксиальных векторных потенциалов. При радиусе соленоида $R_1 = R_0$, как будет показано далее, система радиальных уравнений Дирака имеет аналитические решения. Этот случай рассматривается отдельно. При $R_1 > R_0$, основываясь на известных аналитических асимптотиках волновых функций, применяется численный метод решения системы дифференциальных уравнений. Полученные результаты для вакуумной плотности заряда в присутствие магнитного поля сравниваются с результатами полученными ранее в разделе 2.3.

В используемой системе единиц квантовые электродинамические напряженности $E_{QED} = H_{QED} = |e|^{-1}\ E_{QED} = H_{QED} = m^2c^3/(|e|\hbar)$.

3.2 Теория возмущений для вакуумной плотности тока в 2+1D

В этом разделе рассматривается пертурбативная вакуумная плотность тока. Результаты для вакуумной плотности заряда были подробно рассмотрены в разделе 2.2. В 2+1D в первом порядке ТВ, пертурбативная вакуумная плотность тока $j^{(1)}_{\rm VP}(\vec r)$ определяется через вакуумный поляризационный вектор-потенциал (потенциал Юлинга) как

$$\vec j^{(1)}_{\rm VP}(\vec r) = -\frac{1}{4\pi}\Delta_2 \vec A^{(1)}_{\rm VP}(\vec r) \ , \tag{3.6}$$

где Δ_2 – двумерный оператор Лапласа. В свою очередь, в первом порядке ТВ вектор-потенциал $\vec A^{(1)}_{VP}$, аналогичный потенциалу Юлинга для вакуумной плотности заряда, выражается через поляризационный оператор $\Pi_{\rm R}(-\vec q^{\,2})$ и фурье-образ внешнего потенциала $\vec{\widetilde A}_{\rm ext}(\vec q)$:

$$\begin{aligned} \vec A^{(1)}_{\rm VP}(\vec r) &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int d^2q\, e^{i\vec q\vec r}\Pi_{\rm R}\left(-\vec q^{\,2}\right)\vec{\widetilde A}_{\rm ext}(\vec q) \ , \\ \vec{\widetilde A}_{\rm ext}(\vec q) &= \int d^2r'\, e^{-i\vec q\vec r'}\vec A_{\rm ext}(\vec r') \ , \end{aligned} \tag{3.7}$$

где поляризационная функция имеет вид

$$\Pi_{\rm R}(-q^2) = \frac{\alpha}{q}\left[\frac{2}{q} + \left(1-\frac{4}{q^2}\right)\mathrm{arctg}\left(\frac{q}{2}\right)\right], \quad q = |\vec q|. \tag{3.8}$$

При вычислении поляризационной функции использовалось четырехрядное представление матриц Дирака. Из (3.7) для внешнего источника (3.3) получаем выражение для соответствующего вакуумного вектор-потенциала:

$$\begin{aligned} \vec A^{(1)}_{\rm VP}(\vec r) &= A^{(1)}_{VP}(r)\,\vec e_\varphi \ , \\ \vec A^{(1)}_{\rm VP}(r) &= \frac{\alpha H_0 R_1}{2}\int\limits_0^\infty \frac{dq}{q^2}J_1(qr)J_1(qR_1)\left[\frac{2}{q} + \left(1-\frac{4}{q^2}\right)\mathrm{arctg}\left(\frac{q}{2}\right)\right] \ , \end{aligned} \tag{3.9}$$

где $J_\nu(z)$ — функция Бесселя.

Далее из (3.6) и (3.9) находим аксиально-симметричную вакуумную плотность тока $j^{(1)}_{\rm VP}(r)$. Для выяснения возможности внесения оператора Лапласа под знак интеграла по dq в (3.9) рассмотрим асимптотику подынтегральной функции при больших q. Главный член асимптотики имеет вид

$$\frac{\cos(q(r-R_1))-\sin(q(r+R_1))}{2\sqrt{rR_1}q^3}+\mathrm{O}\left(q^{-4}\right)\ . \tag{3.10}$$

В результате действия оператора Лапласа на (3.10) возникает слагаемое, которое ведет себя как $1/q$ при $r=R_0$, а именно

$$-\frac{\cos(q(r-R_1))-\sin(q(r+R_1))}{2\sqrt{rR_1}q}+\mathrm{O}\left(q^{-2}\right)\ . \tag{3.11}$$

Поэтому при $r=R_1$ отсутствует возможность внесения оператора Лапласа под знак интеграла в (3.9), т.к. в этом случае интеграл по dq, согласно (3.11), будет логарифмически расходящимся. Таким образом, найденная из (3.6) с учетом (3.11) вакуумная плотность тока

$$\begin{aligned}&\vec{j}^{(1)}_{\mathrm{VP}}(\vec{r})=j^{(1)}_{VP}(r)\,\vec{e}_{\varphi}\,,\\&j^{(1)}_{\mathrm{VP}}(r)=\frac{\alpha H_0R_1}{4\pi}\int_0^{\infty}\,dqJ_1(qr)J_1(qR_1)\left[\frac{2}{q}+\left(1-\frac{4}{q^2}\right)\mathrm{arctg}\left(\frac{q}{2}\right)\right]\,,\end{aligned} \tag{3.12}$$

будет конечна при всех $r\neq R_1$ с логарифмической особенностью при $r=R_1$.

3.3 Теоретическая часть для вакуумной плотности тока в 2+1D. Формализм Вихманна-Кролла для вакуумной плотности тока в 2+1D.

В этом разделе рассматривается непертурбативный метод расчета вакуумной плотности тока. Отправной точкой является выражение для вакуумной плотности тока:

$$\vec{j}_{\mathrm{VP}}(\vec{r})=-\frac{|e|}{2}\left[\sum_{\epsilon_n<\epsilon_F}\psi_n(\vec{r})^{\dagger}\vec{\alpha}\,\psi_n(\vec{r})-\sum_{\epsilon_n\geqslant\epsilon_F}\psi_n(\vec{r})^{\dagger}\vec{\alpha}\,\psi_n(\vec{r})\right]\ . \tag{3.13}$$

Для матриц Дирака используется четырехрядное представление:

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \ , \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \ . \tag{3.14}$$

Как было отмечено ранее в разделе 2.3.1, рассматриваемая задача допускает использование двухрядного представления для матриц Дирака. Однако, четырехрядное представление позволяет одновременно учесть обе сигнатуры и оказывается наиболее удобным для уравнения Дирака при наличии вектор-потенциала. В силу аксиальной симметрии рассматриваемой задачи, (3.13) записывается в виде

$$\vec{j}_{\mathrm{VP}}(\vec{r}) = -\frac{|e|}{2}\left[\sum_{\epsilon_n<\epsilon_F}\psi_n(\vec{r})^{\dagger}\alpha_{\varphi}\,\psi_n(\vec{r}) - \sum_{\epsilon_n\geqslant\epsilon_F}\psi_n(\vec{r})^{\dagger}\alpha_{\varphi}\,\psi_n(\vec{r})\right]\vec{e}_{\varphi} \ , \tag{3.15}$$

где

$$\alpha_{\varphi} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{\varphi} \\ \sigma_{\varphi} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{\varphi} = \begin{pmatrix} 0 & -i\mathrm{e}^{-i\varphi} \\ i\mathrm{e}^{i\varphi} & 0 \end{pmatrix} \ . \tag{3.16}$$

Так как рассматриваемая задача обладает аксиальной симметрией, то система уравнений Дирака допускает разделение радиальных и угловых переменных, а решения определяются квантовым числом третьей проекции полного момента m_j:

$$\psi(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\begin{pmatrix} \phi_1(r)\mathrm{e}^{i(m_j-1/2)\varphi} \\ \phi_2(r)\mathrm{e}^{i(m_j+1/2)\varphi} \\ -i\chi_1(r)\mathrm{e}^{i(m_j-1/2)\varphi} \\ -i\chi_2(r)\mathrm{e}^{i(m_j+1/2)\varphi} \end{pmatrix} , \tag{3.17}$$

Подставляя (3.17) в (3.15), с учетом (3.16) для вакуумной плотности тока имеем

$$\begin{gathered} \vec{j}_{\mathrm{VP}}(\vec{r}) = j_{\mathrm{VP}}(r)\,\vec{e}_{\varphi} \\ j_{\mathrm{VP}}(r) = -\frac{|e|}{2}\frac{1}{2\pi}\left[\sum_{\epsilon_n<\epsilon_F} - \sum_{\epsilon_n\geqslant\epsilon_F}\right]\Big[-\phi_{1,n}(r)^*\chi_{2,n}(r) - \phi_{1,n}(r)\chi_{2,n}(r)^* + \\ + \phi_{2,n}(r)^*\chi_{1,n}(r) + \phi_{2,n}(r)\chi_{1,n}(r)^*\Big] \ , \end{gathered} \tag{3.18}$$

Далее, аналогично разделам 1.3.1 и 2.3.1, представим суммы по позитронным и электронным состояниям в выражении для вакуумной плотности (3.15) через интеграл по мнимой оси на первом физическом листе римановой поверхности в комплексной плоскости по энергетической переменной (см. рис. 1.2) от функцию Грина, соответствующей задачи Дирака-Кулона при наличии аксиального вектор-потенциала (3.3). Тот факт, что интегралы по дугам $C_1(R)$, $C_2(R)$, $C_3(R)$ и $C_4(R)$ зануляются и не дают вклада в окончательный ответ, будет доказано для случая, когда $R_1 = R_0$, допускающий аналитическое решение системы радиальных уравнений.

Дифференциальный оператор для радиального уравнения Дирака имеет вид

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} \epsilon - V(r) - 1 & 0 & 0 & \partial_r + \frac{1/2+m_j}{r} + |e|A(r) \\ 0 & \epsilon - V(r) - 1 & \partial_r + \frac{1/2-m_j}{r} - |e|A(r) & 0 \\ 0 & \partial_r + \frac{1/2+m_j}{r} + |e|A(r) & -\epsilon + V(r) - 1 & 0 \\ \partial_r + \frac{1/2-m_j}{r} - |e|A(r) & 0 & 0 & -\epsilon + V(r) - 1 \end{pmatrix} . \tag{3.19}$$

Из вида дифференциального оператора (3.19) следует, что для фиксированного m_j система уравнений

$$\mathcal{D} \begin{pmatrix} \phi_{1,m_j}(r) \\ \phi_{2,m_j}(r) \\ \chi_{1,m_j}(r) \\ \chi_{2,m_j}(r) \end{pmatrix} = 0 \tag{3.20}$$

распадается на две независимые системы уравнений:

$$\begin{cases} \left[\partial_r - \left(\dfrac{m_j - 1/2}{r} + |e|A^{\text{ext}}(r)\right)\right] \phi_{1,m_j}(r) = (\epsilon - V(r) + 1)\, \chi_{2,m_j}(r) \ , \\ \left[\partial_r + \left(\dfrac{m_j + 1/2}{r} + |e|A^{\text{ext}}(r)\right)\right] \chi_{2,m_j}(r) = -\,(\epsilon - V(r) - 1)\, \phi_{1,m_j}(r) \ . \end{cases} \tag{3.21}$$

$$\begin{cases} \left[\partial_r + \left(\dfrac{m_j + 1/2}{r} + |e|A^{\text{ext}}(r)\right)\right] \phi_{2,m_j}(r) = (\epsilon - V(r) + 1)\, \chi_{1,m_j}(r) \ , \\ \left[\partial_r - \left(\dfrac{m_j - 1/2}{r} + |e|A^{\text{ext}}(r)\right)\right] \chi_{1,m_j}(r) = -\,(\epsilon - V(r) - 1)\, \phi_{2,m_j}(r) \ . \end{cases} \tag{3.22}$$

Таким образом (3.20) имеет два типа решений

$$\psi^{(14)}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{pmatrix} \phi_1(r) \mathrm{e}^{i(m_j-1/2)\varphi} \\ 0 \\ 0 \\ -i\chi_2(r)\mathrm{e}^{i(m_j+1/2)\varphi} \end{pmatrix} , \quad \psi^{(23)}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_2(r) \mathrm{e}^{i(m_j+1/2)\varphi} \\ -i\chi_1(r)\mathrm{e}^{i(m_j-1/2)\varphi} \\ 0 \end{pmatrix} . \tag{3.23}$$

Будем говорить, что решения (3.23) двух независимых систем радиальных уравнений являются решениями (14)-системы (3.21) и (23)-системы (3.22) соответственно.

В рассматриваемой задаче функция Грина удовлетворяет уравнению

$$\left(\vec{\alpha}(-i\vec{\nabla} - e\vec{A}^{\text{ext}}(\vec{r})) + \beta + V(r)\right) \mathrm{G}(\vec{r},\vec{r'};\epsilon) = \delta(\vec{r}-\vec{r'}) \ , \tag{3.24}$$

формальное решение которого можно записать в виде

$$\mathrm{G}(\vec{r},\vec{r}';\epsilon) = \sum_n \frac{\psi_n(\vec{r})\psi_n(\vec{r}')^\dagger}{\epsilon_n - \epsilon}. \tag{3.25}$$

Для интересующего нас случая $\vec{r'} = \vec{r}$, согласно (3.23), выражение для функции Грина (3.25) запишется в следующем виде:

$$\mathrm{G}(\vec{r},\vec{r};\epsilon) = \sum_n \frac{1}{\epsilon_n - \epsilon} \begin{pmatrix} \phi_{1,n}(r)\phi_{1,n}(r)^* & 0 & 0 & i\phi_{1,n}(r)\chi_{2,n}(r)^*\mathrm{e}^{-i\varphi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i\phi_{1,n}(r)^*\chi_{2,n}(r)\mathrm{e}^{i\varphi} & 0 & 0 & \chi_{2,n}(r)\chi_{2,n}(r)^* \end{pmatrix} +$$
$$+ \sum_{n'} \frac{1}{\epsilon_{n'} - \epsilon} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_{2,n'}(r)\phi_{2,n'}(r)^* & i\phi_{2,n'}(r)\chi_{1,n'}(r)^*\mathrm{e}^{i\varphi} & 0 \\ 0 & -i\phi_{2,n'}(r)^*\chi_{1,n'}(r)\mathrm{e}^{-i\varphi} & \chi_{1,n'}(r)\chi_{1,n'}(r)^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \tag{3.26}$$

Умножая (3.26) на матрицу α_φ (3.16), а затем вычисляя след, получим комбинацию компонент ВФ, необходимую для вычисления радиальной вакуумной плотности тока согласно (3.18):

$$\operatorname{Tr}\alpha_{\varphi}\,\mathrm{G}(\vec{r},\vec{r};\epsilon) = -\sum_{n}\frac{\phi_{1,n}(r)^{*}\chi_{2,n}(r)+\phi_{1,n}(r)\chi_{2,n}(r)^{*}}{\epsilon_{n}-\epsilon}+ \\ +\sum_{n'}\frac{\phi_{2,n'}(r)^{*}\chi_{1,n'}(r)+\phi_{2,n'}(r)\chi_{1,n'}(r)^{*}}{\epsilon_{n'}-\epsilon}\,. \quad (3.27)$$

Далее, заметим, что правая часть выражения (3.27) представляет из себя комбинацию матричных элементов радиальной функции Грина (при $r' = r$), удовлетворяющей уравнению

$$\mathcal{D}\,\mathrm{G}\,(r,r';\epsilon) = \frac{\delta\,(r-r')}{\sqrt{rr'}}\,. \quad (3.28)$$

Таким образом, явно выделив из (3.27) сумму по m_j, имеем

$$\operatorname{Tr}\alpha_{\varphi}\,\mathrm{G}(\vec{r},\vec{r};\epsilon) = \sum_{m_j=\pm 1/2\,,\pm 3/2\,,\ldots} -\,\mathrm{G}_{41,m_j}(r,r;\epsilon) -\,\mathrm{G}_{14,m_j}(r,r;\epsilon)+ \\ +\,\mathrm{G}_{32,m_j}(r,r;\epsilon)+\,\mathrm{G}_{23,m_j}(r,r;\epsilon) = \sum_{m_j=\pm 1/2\,,\pm 3/2\,,\ldots}\operatorname{Tr}\mathcal{A}\,\mathrm{G}_{m_j}\,(r,r;\epsilon)\ , \quad (3.29)$$

где

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\,. \quad (3.30)$$

Выражение для радиальной функции Грина имеет вид

$$\mathrm{G}^{\sigma}_{ij,m_j}(r,r';\epsilon) = \frac{1}{J^{\sigma}_{m_j}(\epsilon)}\left[\theta(r'-r)\psi^{\sigma}_{R,i}(r)\psi^{\sigma}_{I,j}(r')^{\mathrm{T}}+\theta(r-r')\psi^{\sigma}_{I,i}(r)\psi^{\sigma}_{R,j}(r')^{\mathrm{T}}\right]\ , \quad (3.31)$$

где $\sigma = (14)$ или (23), $\psi_R(r)$ и $\psi_I(r)$ – регулярные в нуле и на бесконечности решения системы радиальных уравнений Дирака соответственно, а их вронскиан определен как

$$J^{(14)}_{m_j}(\epsilon) = r\left(\psi^{(14)}_{R,4}(r)\psi^{(14)}_{I,1}(r)-\psi^{(14)}_{R,1}(r)\psi^{(14)}_{I,4}(r)\right), \\ J^{(23)}_{m_j}(\epsilon) = r\left(\psi^{(23)}_{R,3}(r)\psi^{(23)}_{I,2}(r)-\psi^{(23)}_{R,2}(r)\psi^{(23)}_{I,3}(r)\right)\,. \quad (3.32)$$

Получим выражение для $\mathrm{Tr}\,\mathcal{A}\,\mathrm{G}$ для случая $R_1 = R_0$, когда (14)- и (23)-системы радиальных уравнений имеют аналитические решения (см. приложение B). Регулярные в нуле решения будем обозначать в виде

$$\mathcal{U}^{(14)} = \begin{pmatrix} \mathcal{U}_1^{(14)} \\ 0 \\ 0 \\ \mathcal{U}_2^{(14)} \end{pmatrix}, \ \mathcal{U}^{bc} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{U}_1^{(23)} \\ \mathcal{U}_2^{(23)} \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathcal{M}^{(14)} = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_1^{(14)} \\ 0 \\ 0 \\ \mathcal{M}_2^{(14)} \end{pmatrix}, \ \mathcal{M}^{(23)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{M}_1^{(23)} \\ \mathcal{M}_2^{(23)} \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{3.33}$$

а регулярные на бесконечности –

$$\mathcal{V}^{(14)} = \begin{pmatrix} \mathcal{V}_1^{(14)} \\ 0 \\ 0 \\ \mathcal{V}_2^{(14)} \end{pmatrix}, \mathcal{V}^{bc} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{V}_1^{(23)} \\ \mathcal{V}_2^{(23)} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{W}^{(14)} = \begin{pmatrix} \mathcal{W}_1^{(14)} \\ 0 \\ 0 \\ \mathcal{W}_2^{(14)} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{W}^{(23)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{W}_1^{(23)} \\ \mathcal{W}_2^{(23)} \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{3.34}$$

где

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_1^{(14)} &= \left[\frac{1}{2}\left(\frac{m_j}{|m_j|}+1\right)(1+2m_j)\sqrt{\lambda} - \right. \\
&\qquad \left. -\frac{1}{2}\left(\frac{m_j}{|m_j|}-1\right)(1+\epsilon+V_0)\right]\frac{1}{\sqrt{z}}M_{b,|c|}(z), \\
\mathcal{U}_2^{(14)} &= \left[\frac{1}{2}\left(\frac{m_j}{|m_j|}+1\right)(1-\epsilon-V_0) - \right. \\
&\qquad \left. -\frac{1}{2}\left(\frac{m_j}{|m_j|}-1\right)(1-2m_j)\sqrt{\lambda}\right]\frac{1}{\sqrt{z}}M_{b+1/2,|c+1/2|}(z), \\
\mathcal{V}_1^{(14)} &= \frac{1+\epsilon+V_0}{\sqrt{z}}W_{b,|c|}(z), \\
\mathcal{V}_2^{(14)} &= -2\sqrt{\frac{\lambda}{z}}W_{b+1/2,|c+1/2|}(z), \\
\mathcal{M}_1^{(14)} &= \frac{1+\epsilon}{r}\left[(s-\nu)\,M_{\nu-1/2,s}(\zeta) + \left(m_j+\lambda R_0^2+\frac{Q}{\gamma}\right)M_{\nu+1/2,s}(\zeta)\right], \\
\mathcal{M}_2^{(14)} &= \frac{\gamma}{r}\left[(s-\nu)\,M_{\nu-1/2,s}(\zeta) - \left(m_j+\lambda R_0^2+\frac{Q}{\gamma}\right)M_{\nu+1/2,s}(\zeta)\right], \\
\mathcal{W}_1^{(14)} &= \frac{1+\epsilon}{r}\left(\left[m_j+\lambda R_0^2-\frac{Q}{\gamma}\right]W_{\nu-1/2,s}(\zeta) - W_{\nu+1/2,s}(\zeta)\right), \\
\mathcal{W}_2^{(14)} &= \frac{\gamma}{r}\left(\left[m_j+\lambda R_0^2-\frac{Q}{\gamma}\right]W_{\nu-1/2,s}(\zeta) + W_{\nu+1/2,s}(\zeta)\right),
\end{aligned} \tag{3.35}$$

и

$$
\begin{aligned}
\mathcal{U}_1^{(23)} &= \left[\frac{1}{2}\left(\frac{m_j}{|m_j|}+1\right)(1+\epsilon+V_0)-\right.\\
&\qquad\left.-\frac{1}{2}\left(\frac{m_j}{|m_j|}-1\right)(1-2m_j)\sqrt{\lambda}\right]\frac{1}{\sqrt{z}}M_{b+1/2,|c+1/2|}(z),\\
\mathcal{U}_2^{(23)} &= \left[\frac{1}{2}\left(\frac{m_j}{|m_j|}+1\right)(1+2m_j)\sqrt{\lambda}-\right.\\
&\qquad\left.-\frac{1}{2}\left(\frac{m_j}{|m_j|}-1\right)(1-\epsilon-V_0)\right]\frac{1}{\sqrt{z}}M_{b,|c|}(z),\\
\mathcal{V}_1^{(23)} &= -2\sqrt{\frac{\lambda}{z}}W_{b+1/2,|c+1/2|}(z),\\
\mathcal{V}_2^{(23)} &= \frac{1-\epsilon-V_0}{\sqrt{z}}W_{b,|c|}(z),\\
\mathcal{M}_1^{(23)} &= \frac{1+\epsilon}{r}\left[(s-\nu)\,M_{\nu-1/2,s}(\zeta)-\left(m_j+\lambda R_0^2-\frac{Q}{\gamma}\right)M_{\nu+1/2,s}(\zeta)\right],\\
\mathcal{M}_2^{(23)} &= \frac{\gamma}{r}\left[(s-\nu)\,M_{\nu-1/2,s}(\zeta)+\left(m_j+\lambda R_0^2-\frac{Q}{\gamma}\right)M_{\nu+1/2,s}(\zeta)\right],\\
\mathcal{W}_1^{(23)} &= \frac{1+\epsilon}{r}\left(\left[m_j+\lambda R_0^2+\frac{Q}{\gamma}\right]W_{\nu-1/2,s}(\zeta)+W_{\nu+1/2,s}(\zeta)\right),\\
\mathcal{W}_2^{(23)} &= \frac{\gamma}{r}\left(\left[m_j+\lambda R_0^2+\frac{Q}{\gamma}\right]W_{\nu-1/2,s}(\zeta)-W_{\nu+1/2,s}(\zeta)\right),
\end{aligned}
\tag{3.36}
$$

где $M_{\lambda,\mu}(z)$, $W_{\lambda,\mu}(z)$ – линейно независимые решения дифференциального уравнения Уитеккера [67] и введены следующие обозначения:

$$
\begin{gathered}
Q = Z\alpha, \quad V_0 = \frac{Q}{R_0}, \quad c = \frac{1}{2}\left(m_j-\frac{1}{2}\right), \quad b = \frac{(\epsilon+V_0)^2-1}{4\lambda}-\frac{1}{2}\left(m_j+\frac{1}{2}\right),\\
z = \lambda r^2, \quad s = \sqrt{(m_j+\lambda R_0^2)^2-Q^2}, \quad \gamma = \sqrt{1-\epsilon^2}, \quad \nu = \frac{\epsilon Q}{\gamma}, \quad \zeta = 2\gamma r.
\end{gathered}
\tag{3.37}
$$

Следующим пунктом строим решения регулярные в нуле и на бесконечности в виде

$$
\begin{aligned}
\psi_R^\sigma &= \theta(R_0-r)\mathcal{U}^\sigma+\theta(r-R_0)\left[C_1\mathcal{M}^\sigma+C_2\mathcal{W}^\sigma\right]\,,\\
\psi_I^\sigma &= \theta(R_0-r)\left[C_3\mathcal{U}^\sigma+C_4\mathcal{V}^\sigma\right]+\theta(r-R_0)\mathcal{W}^\sigma\,,
\end{aligned}
\qquad \sigma = (14)\ \text{или}\ (23)\,. \tag{3.38}
$$

Коэффициенты определяются из условия непрерывности решений (3.38) в точке $r = R_0$ ($\sigma = (14)$ или (23)):

$$C_1 = \frac{[\mathcal{U}^\sigma,\mathcal{W}^\sigma]_{R_0}}{[\mathcal{M}^\sigma,\mathcal{W}^\sigma]_{R_0}},\ C_2 = -\frac{[\mathcal{U}^\sigma,\mathcal{M}^\sigma]_{R_0}}{[\mathcal{M}^\sigma,\mathcal{W}^\sigma]_{R_0}},\ C_3 = -\frac{[\mathcal{V}^\sigma,\mathcal{W}^\sigma]_{R_0}}{[\mathcal{U}^\sigma,\mathcal{V}^\sigma]_{R_0}},\ C_4 = \frac{[\mathcal{U}^\sigma,\mathcal{W}^\sigma]_{R_0}}{[\mathcal{U}^\sigma,\mathcal{V}^\sigma]_{R_0}}\ , \tag{3.39}$$

где введено удобное обозначение

$$[f,g]_a = a\left(f_2(a)g_1(a) - f_1(a)g_2(a)\right). \tag{3.40}$$

Из (3.38) с учетом (3.31) и (3.32), получаем выражение для необходимых матричных элементов радиальной функции Грина (3.29):

$$\left\{\begin{array}{c} \mathrm{G}_{41,m_j}(r,r;\epsilon) = \mathrm{G}_{41,m_j}(r,r;\epsilon) \\ \text{или} \\ \mathrm{G}_{23,m_j}(r,r;\epsilon) = \mathrm{G}_{32,m_j}(r,r;\epsilon) \end{array}\right\} = \qquad \sigma = (14) \text{ или } (23)$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{[\mathcal{V}^\sigma,\mathcal{W}^\sigma]_{R_0}}{[\mathcal{U}^\sigma,\mathcal{W}^\sigma]_{R_0}[\mathcal{U}^\sigma,\mathcal{V}^\sigma]}\mathcal{U}_1^\sigma\mathcal{U}_2^\sigma + \dfrac{1}{2\,[\mathcal{U}^\sigma,\mathcal{V}^\sigma]}\left(\mathcal{U}_2^\sigma\mathcal{V}_1^\sigma + \mathcal{U}_1^\sigma\mathcal{V}_2^\sigma\right), & r \leqslant R_0, \\ -\dfrac{[\mathcal{U}^\sigma,\mathcal{M}^\sigma]_{R_0}}{[\mathcal{U}^\sigma,\mathcal{W}^\sigma]_{R_0}[\mathcal{M}^\sigma,\mathcal{W}^\sigma]}\mathcal{W}_1^\sigma\mathcal{W}_2^\sigma + \dfrac{1}{2\,[\mathcal{M}^\sigma,\mathcal{W}^\sigma]}\left(\mathcal{M}_2^\sigma\mathcal{W}_1^\sigma + \mathcal{M}_1^\sigma\mathcal{W}_2^\sigma\right), & r > R_0\ , \end{cases} \tag{3.41}$$

где

$$\begin{aligned} \left[\mathcal{U}^{(14)},\mathcal{V}^{(14)}\right] &= \left[\left(\frac{m_j}{|m_j|}+1\right)2\sqrt{\lambda} - \left(\frac{m_j}{|m_j|}-1\right)\frac{4\lambda}{1-\epsilon-V_0}\right]\frac{\Gamma\left(|m_j|+3/2\right)}{\Gamma\left(|c+1/2|-b\right)}\ , \\ \left[\mathcal{U}^{(23)},\mathcal{V}^{(23)}\right] &= \left[-\left(\frac{m_j}{|m_j|}+1\right)2\sqrt{\lambda} + \left(\frac{m_j}{|m_j|}-1\right)\frac{4\lambda}{1+\epsilon+V_0}\right]\frac{\Gamma\left(|m_j|+3/2\right)}{\Gamma\left(|c+1/2|-b\right)}\ , \\ \left[\mathcal{M}^{(14)},\mathcal{W}^{(14)}\right] &= -\left[\mathcal{M}^{(23)},\mathcal{W}^{(23)}\right] = -4(1+\epsilon)\gamma^2\frac{\Gamma(2s+1)}{\Gamma(s-\nu)}\ . \end{aligned} \tag{3.42}$$

Окончательно, из (3.41) с учетом (3.29) имеем

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}\,\mathcal{A}\,\mathrm{G}_{m_j}(r,r;\epsilon) = \\
&= \begin{cases}
\dfrac{\left[\mathcal{V}^{ad},\mathcal{W}^{ad}\right]_{R_0}}{\left[\mathcal{U}^{ad},\mathcal{W}^{ad}\right]_{R_0}\left[\mathcal{U}^{ad},\mathcal{V}^{ad}\right]} 2\,\mathcal{U}_1^{ad}\mathcal{U}_2^{ad} - \dfrac{1}{\left[\mathcal{U}^{ad},\mathcal{V}^{ad}\right]}\left(\mathcal{U}_2^{ad}\mathcal{V}_1^{ad} + \mathcal{U}_1^{ad}\mathcal{V}_2^{ad}\right) - \\
- \dfrac{\left[\mathcal{V}^{bc},\mathcal{W}^{bc}\right]_{R_0}}{\left[\mathcal{U}^{bc},\mathcal{W}^{bc}\right]_{R_0}\left[\mathcal{U}^{bc},\mathcal{V}^{bc}\right]} 2\,\mathcal{U}_1^{bc}\mathcal{U}_2^{bc} + \dfrac{1}{\left[\mathcal{U}^{bc},\mathcal{V}^{bc}\right]}\left(\mathcal{U}_2^{bc}\mathcal{V}_1^{bc} + \mathcal{U}_1^{bc}\mathcal{V}_2^{bc}\right) \ , \quad r \leqslant R_0 \ , \\
\dfrac{\left[\mathcal{U}^{ad},\mathcal{M}^{ad}\right]_{R_0}}{\left[\mathcal{U}^{ad},\mathcal{W}^{ad}\right]_{R_0}\left[\mathcal{M}^{ad},\mathcal{W}^{ad}\right]} 2\,\mathcal{W}_1^{ad}\mathcal{W}_2^{ad} - \dfrac{1}{\left[\mathcal{M}^{ad},\mathcal{W}^{ad}\right]}\left(\mathcal{M}_2^{ad}\mathcal{W}_1^{ad} + \mathcal{M}_1^{ad}\mathcal{W}_2^{ad}\right) - \\
- \dfrac{\left[\mathcal{U}^{bc},\mathcal{M}^{bc}\right]_{R_0}}{\left[\mathcal{U}^{bc},\mathcal{W}^{bc}\right]_{R_0}\left[\mathcal{M}^{bc},\mathcal{W}^{bc}\right]} 2\,\mathcal{W}_1^{bc}\mathcal{W}_2^{bc} + \dfrac{1}{\left[\mathcal{M}^{bc},\mathcal{W}^{bc}\right]}\left(\mathcal{M}_2^{bc}\mathcal{W}_1^{bc} + \mathcal{M}_1^{bc}\mathcal{W}_2^{bc}\right) \ , \\
\hfill r > R_0 \ .
\end{cases}
\end{aligned}
\tag{3.43}
$$

На следующем шаге находим асимптотики $\mathrm{Tr}\mathcal{A}\,\mathrm{G}$ (3.43) на дугах большого круга верхней полуплоскости (рис. 1.2) C_1 и C_2 $|\epsilon| \to \infty$, $0 < \mathrm{Arg}\ \epsilon < \pi$:

$$
\mathrm{Tr}\mathcal{A}\,\mathrm{G}_{m_j}(r,r;\epsilon) \to \begin{cases}
\dfrac{2i}{r}\left(\dfrac{m_j}{r} + \lambda r\right)\dfrac{1}{\epsilon} - \dfrac{2i}{r}V_0\left(\dfrac{m_j}{r} + \lambda r\right)\dfrac{1}{\epsilon^2} + \mathrm{O}\left(|\epsilon|^{-3}\right) \ , \\
\hfill r < R_0 \ , \\
\dfrac{2i}{r}\left(\dfrac{m_j}{r} + \lambda\dfrac{R_0^2}{r}\right)\dfrac{1}{\epsilon} - \dfrac{2i}{r}\dfrac{Q}{r}\left(\dfrac{m_j}{r} + \lambda\dfrac{R_0^2}{r}\right)\dfrac{1}{\epsilon^2} + \mathrm{O}\left(|\epsilon|^{-3}\right) \ , \\
\hfill r > R_0 \ ,
\end{cases}
\tag{3.44}
$$

на дугах большого круга нижней полуплоскости C_3 и C_4
$|\epsilon| \to \infty$, $-\pi \ < \ \mathrm{Arg}\ \epsilon < \ 0$:

$$
\mathrm{Tr}\mathcal{A}\,\mathrm{G}_{m_j}(r,r;\epsilon) \to \begin{cases}
-\dfrac{2i}{r}\left(\dfrac{m_j}{r} + \lambda r\right)\dfrac{1}{\epsilon} + \dfrac{2i}{r}V_0\left(\dfrac{m_j}{r} + \lambda r\right)\dfrac{1}{\epsilon^2} + \mathrm{O}\left(|\epsilon|^{-3}\right) \ , \\
\hfill r < R_0 \ , \\
-\dfrac{2i}{r}\left(\dfrac{m_j}{r} + \lambda\dfrac{R_0^2}{r}\right)\dfrac{1}{\epsilon} + \dfrac{2i}{r}\dfrac{Q}{r}\left(\dfrac{m_j}{r} + \lambda\dfrac{R_0^2}{r}\right)\dfrac{1}{\epsilon^2} + \mathrm{O}\left(|\epsilon|^{-3}\right) \ , \\
\hfill r > R_0 \ .
\end{cases}
\tag{3.45}
$$

Из (3.44) и (3.45) следует, что слагаемые содержащие $1/\epsilon$ компенсируют друг друга при интегрировании по дугам большого круга, а остальные зануляются при устремлении $R \to \infty$ (см. рис. 1.2). В итоге интегрирование по контурам

$P(R)$ и $E(R)$ может быть сведено к мнимой оси, откуда находим окончательное выражение для вакуумной плотности тока:

$$j_{\mathrm{VP}}(r) = \sum_{m_j=1/2,\,3/2,\ldots} j_{\mathrm{VP},|m_j|}(r) \ , \tag{3.46}$$

где

$$\begin{gathered} j_{\mathrm{VP},|m_j|}(r) = \frac{|e|}{4\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dy \ \mathrm{Tr}\mathcal{A}\,\mathrm{G}_{|m_j|}\left(r,r;iy\right) \ , \\ \mathrm{Tr}\mathcal{A}\,\mathrm{G}_{|m_j|}\left(r,r;iy\right) = \mathrm{Tr}\mathcal{A}\,\mathrm{G}_{m_j}\left(r,r;iy\right) + \mathrm{Tr}\mathcal{A}\,\mathrm{G}_{-m_j}\left(r,r;iy\right) \ . \end{gathered} \tag{3.47}$$

При наличии отрицательных дискретных уровней с $-1 \leqslant \epsilon < 0$ по аналогии с разделом 2.3.1 получим

$$\begin{aligned} j_{\mathrm{VP},|m_j|}(r) = \frac{|e|}{2\pi} \Bigg[\sum_{m_j=\pm m_j} \sum_{-1\leqslant\epsilon_n<0} \psi^{\dagger}_{m_j}\left(r;\epsilon_n\right) \mathcal{A}\psi_{m_j}\left(r;\epsilon_n\right) + \\ + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dy \ \mathrm{Tr}\mathcal{A}\,\mathrm{G}_{|m_j|}\left(r,r;iy\right) \Bigg] \ . \end{aligned} \tag{3.48}$$

Далее отметим общее свойство $\mathrm{Tr}\mathcal{A}\,\mathrm{G}_{m_j}$ при смене знаков внешнего кулоновского поля ($Q \to -Q$), магнитного поля ($\lambda \to -\lambda$) и комплексном сопряжении

$$\begin{gathered} \mathrm{Tr}\mathcal{A}\,\mathrm{G}_{-m_j}(Q,\lambda;r,r;\epsilon) = -\mathrm{Tr}\mathcal{A}\,\mathrm{G}_{m_j}(-Q,-\lambda;r,r;-\epsilon) \ , \\ \mathrm{Tr}\mathcal{A}\,\mathrm{G}_{m_j}(Q,\lambda;r,r;\epsilon)^* = \mathrm{Tr}\mathcal{A}\,\mathrm{G}_{m_j}(Q,\lambda;r,r;\epsilon^*) \ , \end{gathered} \tag{3.49}$$

а также вытекающее из этих двух свойств соотношение

$$\mathrm{Tr}\mathcal{A}\,\mathrm{G}_{m_j}(Q,\lambda;r,r;iy)^* = -\mathrm{Tr}\mathcal{A}\,\mathrm{G}_{-m_j}(-Q,-\lambda;r,r;iy) \ . \tag{3.50}$$

Из (3.49) и (3.50) следует, что $j_{\mathrm{VP},|m_j|}(r)$ определяется только через $\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}\mathcal{A}\,\mathrm{G}_{|m_j|}(Q;r,r;iy)$ и является заведомо действительной величиной, нечетной по Q и λ (в полном согласии с теоремой Фарри).

Легко видеть, что выражение для вакуумной плотности тока (3.46–3.48) требует перенормировки, поскольку, например, из асимптотики (3.44)

$$\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}\mathcal{A}\,\mathrm{G}_{|m_j|}\left(r,r;iy\right) \to \frac{4\lambda R_0^2}{r^2}\frac{1}{y} + \mathrm{O}\left(y^{-3}\right) \ , \quad y \to +\infty \ , \ r > R_0 \ . \tag{3.51}$$

следует, что входящий в выражение для вакуумной плотности тока интеграл по dy (3.48) при больших y расходится логарифмически.

Таким образом, аналогично разделу 2.3.1, для вычисления перенормированной вакуумной плотности тока $j^{\mathrm{ren}}_{\mathrm{VP}}(r)$ необходимо выделить в выражении для $\mathrm{Tr}\mathcal{A}\,\mathrm{G}_{m_j}$ в (3.44) линейные по λ члены и заменить их на перенормированную пертурбативную плотность тока $j^{(1)}_{\mathrm{VP}}(r)$, приведенную в (3.12), которая соответствует первому порядку ТВ и отлична от нуля только для $|m_j| = 1/2$. Для этого сначала находим компоненту вакуумной плотности тока $j^{(3+)}_{\mathrm{VP},|m_j|}(r)$, которая определяется следующим образом

$$j^{(3+)}_{\mathrm{VP},|m_j|}(r) = \frac{|e|}{2\pi}\left[\sum_{m_j=\pm m_j}\ \sum_{-1\leqslant\epsilon_n<0}\psi^{\dagger}_{m_j}(r;\epsilon_n)\,\mathcal{A}\psi_{m_j}(r;\epsilon_n) + \right.$$
$$\left. +\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}dy\ \mathrm{Re}\left(\mathrm{Tr}\mathcal{A}\,\mathrm{G}_{|m_j|}(r,r;iy) - 2\,\mathrm{Tr}\mathcal{A}\,\mathrm{G}^{(1)}_{m_j}(r;iy)\right)\right]\ , \tag{3.52}$$

где $\mathrm{G}^{(1)}_{m_j}(r;iy)$ является компонентой парциальной функции Грина, линейной по λ, и находится из первого борновского приближения для G_{m_j}. Для внешнего вектор-потенциала (3.3) явное выражение для $\mathrm{Tr}\,\mathcal{A}\,\mathrm{G}^{(1)}_{m_j}(r;iy)$ при $r\leqslant R_1$ имеет следующий вид

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}\,\mathcal{A}\,\mathrm{G}^{(1)}_{m_j}(r;iy) = \\ &= 8\tilde{\gamma}^2\lambda\left(K_{|m_j-1/2|}(\tilde{\gamma}r)K_{|m_j+1/2|}(\tilde{\gamma}r)\int\limits_0^r dr_1\,r_1^2\,I_{|m_j-1/2|}(\tilde{\gamma}r_1)I_{|m_j+1/2|}(\tilde{\gamma}r_1) + \right.\\ &+I_{|m_j-1/2|}(\tilde{\gamma}r)I_{|m_j+1/2|}(\tilde{\gamma}r)\times\\ &\qquad\left.\times\left[\left(\int_r^{R_1}dr_1\,r_1^2 + R_1^2\int_{R_1}^{\infty}dr_1\right)K_{|m_j-1/2|}(\tilde{\gamma}r_1)K_{|m_j+1/2|}(\tilde{\gamma}r_1)\right]\right)\ ,\end{aligned} \tag{3.53}$$

а для $r > R_1$

$$\begin{aligned}&8\tilde{\gamma}^2\lambda\left(K_{|m_j-1/2|}(\tilde{\gamma}r)K_{|m_j+1/2|}(\tilde{\gamma}r)\times\right.\\ &\qquad\times\left[\left(\int_0^{R_1}dr_1\,r_1^2 + R_1^2\int_{R_1}^{r}dr_1\right)I_{|m_j-1/2|}(\tilde{\gamma}r_1)I_{|m_j+1/2|}(\tilde{\gamma}r_1)\right] + \\ &\left.+I_{|m_j-1/2|}(\tilde{\gamma}r)I_{|m_j+1/2|}(\tilde{\gamma}r)R_1^2\int_r^{\infty}dr_1K_{|m_j-1/2|}(\tilde{\gamma}r_1)K_{|m_j+1/2|}(\tilde{\gamma}r_1)\right)\ ,\end{aligned} \tag{3.54}$$

где $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$ – функции Инфельда и Макдональда, а $\tilde{\gamma} = \sqrt{1+y^2}$.

Таким образом, перенормированная вакуумная плотность тока принимает вид

$$j^{\text{ren}}_{\text{VP}}(r) = \left[j^{(1)}_{\text{VP}}(r) + \sum_{m_j=1/2,\,3/2,\ldots} j^{(3+)}_{\text{VP}}(r) \right] \,, \tag{3.55}$$

где $j^{(1)}_{\text{VP}}(r)$ – пертурбативная плотность тока (3.12), рассчитанная с помощью поляризационной функции (3.8) в первом порядке ТВ.

Наряду с вакуумной плотностью тока в следующем разделе будут представлены результаты численных расчетов вакуумной плотности заряда в присутствии аксиального вектор-потенциала. Следующим пунктом рассмотрим изменения, которые вносит наличие аксиального вектор-потенциала, в структуру перенормированной вакуумной плотности заряда.

В отличие от раздела 2.3.1 перенормированная вакуумная плотность заряда будет иметь следующий вид:

$$\rho^{\text{ren}}_{\text{VP}}(r) = \left[2\,\rho^{(1)}_{\text{VP}}(r) + \sum_{m_j=1/2,\,3/2,..} \rho^{(3+)}_{\text{VP},|m_j|}(r) \right] \,, \tag{3.56}$$

где $\rho^{(1)}_{\text{VP}}(r)$ – пертурбативная вакуумная плотность (2.5), рассчитанная с помощью поляризационной функции (2.7) в первом порядке ТВ. Коэффициент 2 перед $\rho^{(1)}_{\text{VP}}(r)$ в (3.56) учитывает то обстоятельство, что поляризационная функция в этом разделе рассчитывалась с использованием четырехрядного представления для матриц Дирака. Регуляризованная вакуумная плотность заряда $\rho^{(3+)}_{\text{VP},|m_j|}(r)$ теперь будет выглядеть как

$$\rho^{(3+)}_{\text{VP},|m_j|}(r) = \frac{|e|}{2\pi} \left[\sum_{m_j=\pm|m_j|} \sum_{-1\leqslant\epsilon_n<0} \psi^{\dagger}_{m_j}(r;\epsilon_n)\psi_{m_j}(r;\epsilon_n) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty dy\, \mathrm{Re}\left(\mathrm{Tr}\, \mathrm{G}_{|m_j|}(r,r;iy) - 4\,\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}^{(1)}_{m_j}(r;iy) \right) \right] \,, \tag{3.57}$$

где теперь $\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}_{|m_j|}(r,r;iy) = \mathrm{Tr}\,\mathrm{G}^{(14)}_{|m_j|}(r,r;iy) + \mathrm{Tr}\,\mathrm{G}^{(23)}_{|m_j|}(r,r;iy)$, а $\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}^{(14)}_{|m_j|}(r,r;iy)$ и $\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}^{(23)}_{|m_j|}(r,r;iy)$ имеют такой же вид как и в разделе 2.3.1, но используются полученные в этом разделе решения. При этом $\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}^{(1)}$ определяется формулами (2.41) и (2.42).

Свойства $\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}_{m_j}$ при смене знаков внешнего кулоновского поля ($Q \to -Q$), магнитного поля ($\lambda \to -\lambda$) и комплексном сопряжении вместо (2.35) и (2.36) теперь будут иметь вид

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}_{-m_j}(Q,\lambda;r,r;\epsilon) = -\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}_{m_j}(-Q,-\lambda;r,r;-\epsilon)\ , \\
&\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}_{m_j}(Q,\lambda;r,r;\epsilon)^* = \mathrm{Tr}\,\mathrm{G}_{m_j}(Q,\lambda;r,r;\epsilon^*)\ , \\
&\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}_{m_j}(Q,\lambda;r,r;iy)^* = -\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}_{-m_j}(-Q,-\lambda;r,r;iy)\ .
\end{aligned} \tag{3.58}$$

Таким образом, в рассматриваемой задаче справедливы все утверждения относительно $\rho^{\mathrm{ren}}_{\mathrm{VP}}$, полученные в разделе 2.3.1.

Наличие магнитного поля с аксиальным вектор-потенциалом вносит изменения в асимптотику $\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}$ на дугах большого круга в комплексной плоскости по энергии:
$|\epsilon| \to \infty,\ 0\ <\ \mathrm{Arg}\ \epsilon <\ \pi$:

$$\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}_{m_j}(r,r;\epsilon) \to \begin{cases} \dfrac{2i}{r} + \dfrac{i}{r\epsilon^2}\left(\left(\dfrac{m_j}{r} + \lambda r\right)^2 + 1\right) + \mathrm{O}\left(|\epsilon|^{-3}\right)\ , & r < R_0\ , \\ \dfrac{2i}{r} + \dfrac{i}{r\epsilon^2}\left(\left(\dfrac{m_j}{r} + \lambda \dfrac{R_0^2}{r}\right)^2 + 1\right) + \mathrm{O}\left(|\epsilon|^{-3}\right)\ , & r > R_0\ , \end{cases} \tag{3.59}$$

$|\epsilon| \to \infty,\ -\pi\ <\ \mathrm{Arg}\ \epsilon <\ 0$:

$$\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}_{m_j}(r,r;\epsilon) \to \begin{cases} -\dfrac{2i}{r} - \dfrac{i}{r\epsilon^2}\left(\left(\dfrac{m_j}{r} + \lambda r\right)^2 + 1\right) + \mathrm{O}\left(|\epsilon|^{-3}\right)\ , & r < R_0\ , \\ -\dfrac{2i}{r} - \dfrac{i}{r\epsilon^2}\left(\left(\dfrac{m_j}{r} + \lambda \dfrac{R_0^2}{r}\right)^2 + 1\right) + \mathrm{O}\left(|\epsilon|^{-3}\right)\ , & r > R_0\ . \end{cases} \tag{3.60}$$

Несмотря на изменения в асимптотиках (3.59), (3.60), интегрирование по контурам $P(R)$ и $E(R)$ (рис. 1.2) снова может быть сведено к интегрированию по мнимой оси, что подтверждает справедливость формул для расчета $\rho^{\mathrm{ren}}_{\mathrm{VP}}$ (3.56), (3.57).

Как отмечалось ранее, существенное отличие вакуумных поляризационных эффектов в 2+1 и 3+1D от одномерного случая проявляется еще и в том, что перенормированная вакуумная плотность (3.55) представляется в виде бесконечного парциального ряда по m_j. Таким образом, возникает естественный вопрос о сходимости этого ряда. Для ответа рассмотрим асимптотики $\rho^{(3+)}_{\mathrm{VP},|m_j|}(r)$ и $j^{(3+)}_{\mathrm{VP},|m_j|}(r)$ при больших $|m_j|$. Прежде всего рассмотрим подынтегральное выражение в (3.57). Асимптотика $\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}_{m_j}(r,r;iy)$ при $|m_j|\to\infty$ имеет вид

$$\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}_{m_j}(r,r;iy)\to\begin{cases}2\,(iy+V_0)\left(\dfrac{1}{|m_j|}-\mathrm{sgn}(m_j)\,\dfrac{\lambda r^2}{m_j^2}\right)+\mathrm{O}\left(|m_j|^{-3}\right)\;, & r<R_0\;,\\ 2\left(iy+\dfrac{Q}{r}\right)\left(\dfrac{1}{|m_j|}-\mathrm{sgn}(m_j)\,\dfrac{\lambda R_0^2}{m_j^2}\right)+\mathrm{O}\left(|m_j|^{-3}\right)\;, & r>R_0\;.\end{cases} \tag{3.61}$$

Асимптотики $\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}^{(1)}_{m_j}$ при $|m_j|\to\infty$ имеют следующий вид:

$$\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}^{(1)}_{m_j}(r;iy)\to\begin{cases}V_0\dfrac{1}{|m_j|}+\mathrm{O}\left(|m_j|^{-3}\right)\;, & r<R_0\;,\\ \dfrac{Q}{r}\dfrac{1}{|m_j|}+\mathrm{O}\left(|m_j|^{-3}\right)\;, & r>R_0\;.\end{cases} \tag{3.62}$$

Таким образом,

$$\mathrm{Re}\left[\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}_{|m_j|}(r,r;iy)-4\,\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}^{(1)}_{m_j}(r;iy)\right]=\mathrm{O}(|m_j|^{-3})\;,\quad |m_j|\to\infty\;. \tag{3.63}$$

Асимптотика $\mathrm{Tr}\mathcal{A}\,\mathrm{G}_{m_j}$ при $|m_j|\to\infty$ имеет следующий вид:

$$\mathrm{Tr}\mathcal{A}\,\mathrm{G}_{m_j}(r,r;iy)\to\mathrm{sgn}(m_j)\frac{2}{r}+\mathrm{sgn}(m_j)\mathrm{O}\left(|m_j|^{-2}\right)+\mathrm{O}\left(|m_j|^{-3}\right)\;. \tag{3.64}$$

Асимптотика $\mathrm{Tr}\mathcal{A}\,\mathrm{G}^{(1)}_{m_j}$ при $|m_j|\to\infty$ записывается в виде

$$\mathrm{Tr}\mathcal{A}\,\mathrm{G}^{(1)}_{m_j}(r;iy)\to\mathrm{O}\left(|m_j|^{-3}\right)\;. \tag{3.65}$$

Таким образом,

$$\mathrm{Re}\left[\mathrm{Tr}\mathcal{A}\,\mathrm{G}_{|m_j|}(r,r;iy)-4\,\mathrm{Tr}\mathcal{A}\,\mathrm{G}^{(1)}_{m_j}(r;iy)\right]=\mathrm{O}(|m_j|^{-3})\;,\quad |m_j|\to\infty\;. \tag{3.66}$$

Кроме того, с ростом $|m_j|$ дискретные уровни обязательно поднимаются, поэтому для заданных Q и λ при $|m_j|\to\infty$ дискретных уровней с отрицательной энергией не будет, и суммы $\sum\psi^{\dagger}_{m_j}(r;\epsilon_n)\psi_{m_j}(r;\epsilon_n)$ в (3.57) и $\sum\psi^{\dagger}_{m_j}(r;\epsilon_n)\mathcal{A}\psi_{m_j}(r;\epsilon_n)$ (3.52) исчезнут. Далее, учитывая то обстоятельство, что интегралы по dy в (3.52) и (3.57) сходятся равномерно относительно $|m_j|$ и r, рассматриваемых как внешние параметры, заключаем, что парциальные ряды по m_j для $\rho^{(3+)}_{\mathrm{VP},|m_j|}(r)$ и $j^{(3+)}_{\mathrm{VP},|m_j|}(r)$ также сходятся.

В итоге, в этом разделе мы рассмотрели непертурбативный метод расчета вакуумной плотности тока в двумерной системе Дирака-Кулона при наличии магнитного поля с аксиальным векторным потенциалом. Все результаты были получены для случая $R_1 = R_0$. Однако, все остается справедливым и для случая $R_1 \neq R_0$, с тем отличием, что системы радиальных уравнений (3.21) и (3.22) необходимо решать численно. Далее будут представлены результаты численных расчетов для наиболее репрезентативных значений внешних параметров Z, λ и R_1.

3.4 Результаты численных расчетов вакуумной плотности тока и наведенного магнитного поля в 2+1D

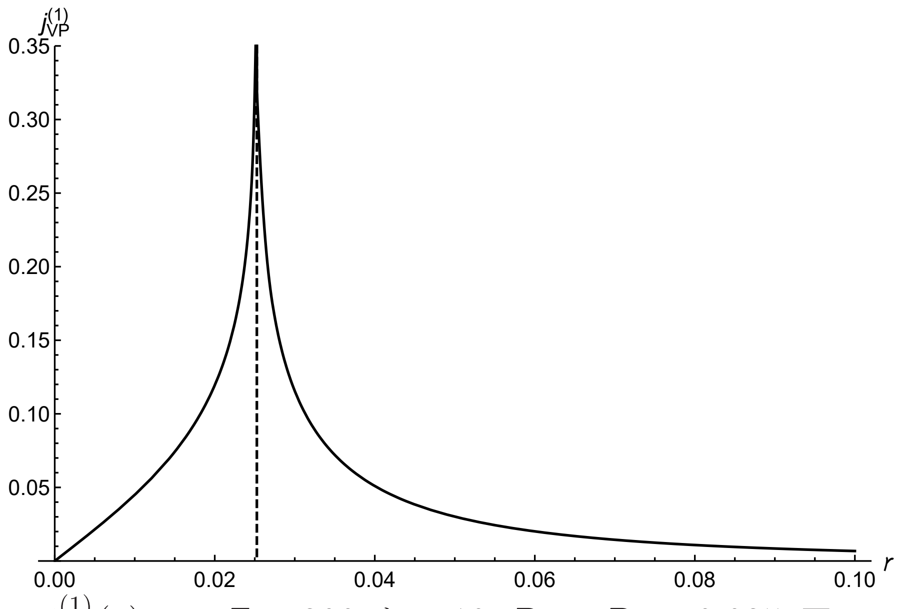


Рисунок 3.1 — $j^{(1)}_{\mathrm{VP}}(r)$ для $Z = 200$, $\lambda = 10$, $R_1 = R_0 = 0.025$. При $r = R_1$ $j^{(1)}_{\mathrm{VP}}(r)$ имеет логарифмическую особенность.

На рис. 3.1 показана пертурбативная вакуумная плотность тока $j^{(1)}_{\mathrm{VP}}(r)$ (3.12) для внешних параметров $Z = 200$, $\lambda = 10$, $R_1 = R_0$. При $r = R_1$ пертурбативная вакуумная плотность тока логарифмически расходится в виду того, что плотность тока, порождающая векторный потенциал (3.3), сосредоточена в

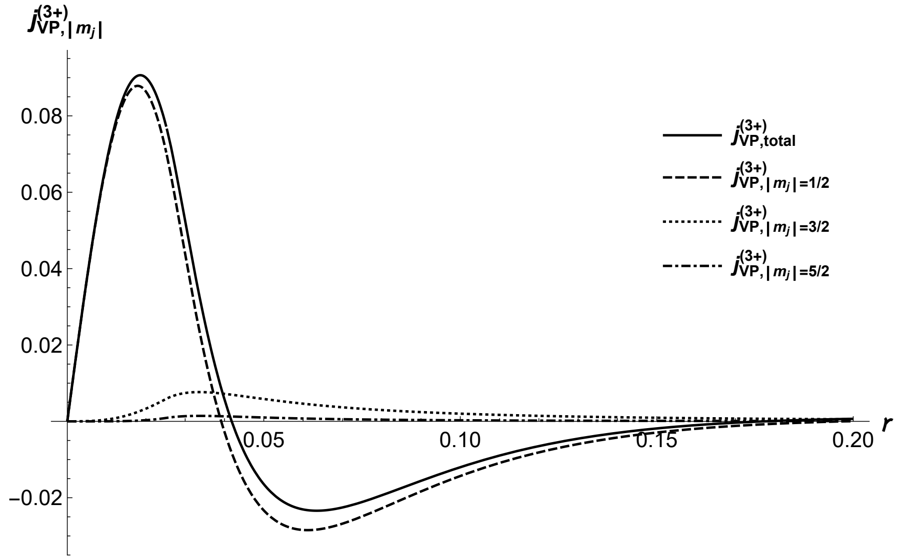


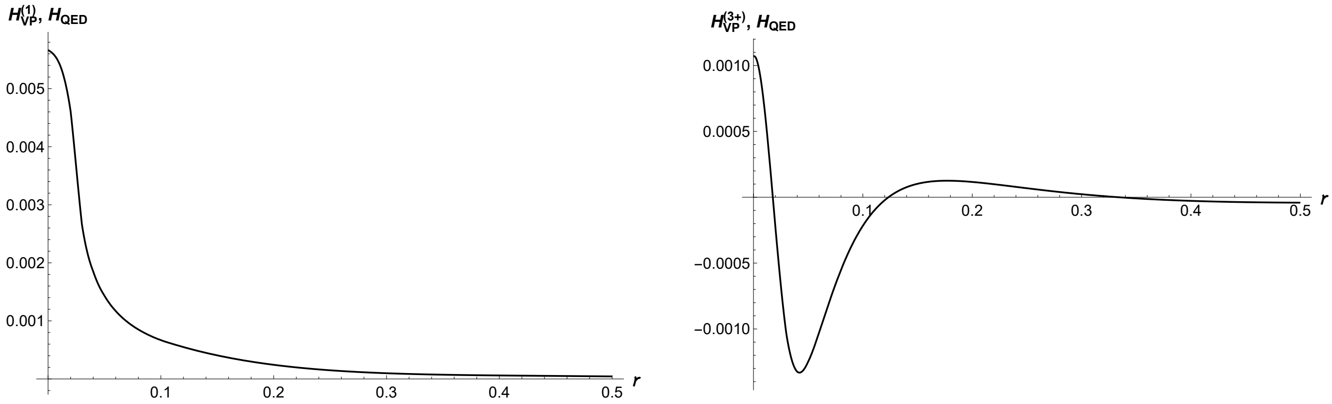
Рисунок 3.2 — $j^{(3+)}_{\mathrm{VP}}(r)$ для $Z = 200$, $\lambda = 10$, $R_1 = R_0 = 0.025$.

бесконечно тонком кольце с $r = R_0$ и имеет вид

$$\vec{j}_{\mathrm{ext}}\,(\vec{r}) = \vec{e}_{\varphi}\frac{H_0}{4\pi}\delta(r - R_0)\ . \tag{3.67}$$

С физической точки зрения тот факт, что $\vec{j}^{(1)}_{\mathrm{VP}}(r)$ имеет то же направление что и $\vec{j}_{\mathrm{ext}}\,(r)$ (3.67) в окрестности $r = R_1$, объясняется хорошо известным явлением притяжения одинаково направленных токов. Перенормированный радиальный вакуумный ток ($\int dr\, r\, j^{\mathrm{ren}}_{\mathrm{VP}}(r)$) остается при этом конечным.

На рис. 3.2 показана вакуумная плотность тока $j^{(3+)}_{\mathrm{VP}}(r)$ для внешних параметров $Z = 200$, $\lambda = 10$, $R_1 = R_0$. Из рис. 3.2 видно, что определяющий вклад в вакуумную плотность тока вносит парциальный член с $|m_j| = 1/2$, т.к. уровни дискретного спектра погружаются в нижний континуум только в этом канале. Парциальные каналы с $|m_j| = 3/2$ и $|m_j| = 5/2$ вносят несущественный вклад в $j^{(3+)}_{\mathrm{VP,total}}(r)$ по сравнению с каналом $|m_j| = 1/2$. Вкладом парциальных каналов с $|m_j| \geqslant 7/2$ в регуляризованную вакуумную плотность тока $j^{(3+)}_{\mathrm{VP,total}}(r)$ можно пренебречь. Подчеркнём, что в рассматриваемом случае амплитуды $j^{(1)}_{\mathrm{VP}}(r)$ и $j^{(3+)}_{\mathrm{VP}}(r)$ имеют одинаковый порядок. В представленном на рис. (3.2) случае для $|m_j| = 1/2$ критические значения зарядов для (14)-системы (3.21) равны $Z^{(14)}_{\mathrm{cr},m_j=1/2} \simeq 108$ и $Z^{(14)}_{\mathrm{cr},m_j=-1/2} \simeq 132$, а для (23)-системы (3.22) равны $Z^{(23)}_{\mathrm{cr},m_j=1/2} \simeq 133$ и $Z^{(23)}_{\mathrm{cr},m_j=-1/2} \simeq 107$. В то время как, для $|m_j| = 3/2$ соответственно равны $Z^{(14)}_{\mathrm{cr},m_j=3/2} \simeq 241$ и $Z^{(14)}_{\mathrm{cr},m_j=-3/2} \simeq 250$, $Z^{(23)}_{\mathrm{cr},m_j=3/2} \simeq 251$ и $Z^{(23)}_{\mathrm{cr},m_j=-3/2} \simeq 239$. Таким образом, для $Z = 200$ и $\lambda = 10$ (3.2) дискретные уровни в канале $|m_j| = 3/2$ ещё не погрузились в нижний континуум. Из этого следует, что вывод для вакуумной плотности заряда, сделанный в [89], о том, что существенный вклад в суммарную плотность дают каналы, в которых уровни дискретного спектра уже погрузились в нижний континуум, остается справедливым и для вакуумной плотности тока.



а б

Рисунок 3.3 — Вклады в наведённое (вакуумное) магнитное поле при $Z = 200$, $\lambda = 10$, $R_1 = R_0 = 0.025$ а) от пертурбативного члена $j_{\text{VP}}^{(1)}(r)$; б) от $j_{\text{VP}}^{(3+)}(r)$.

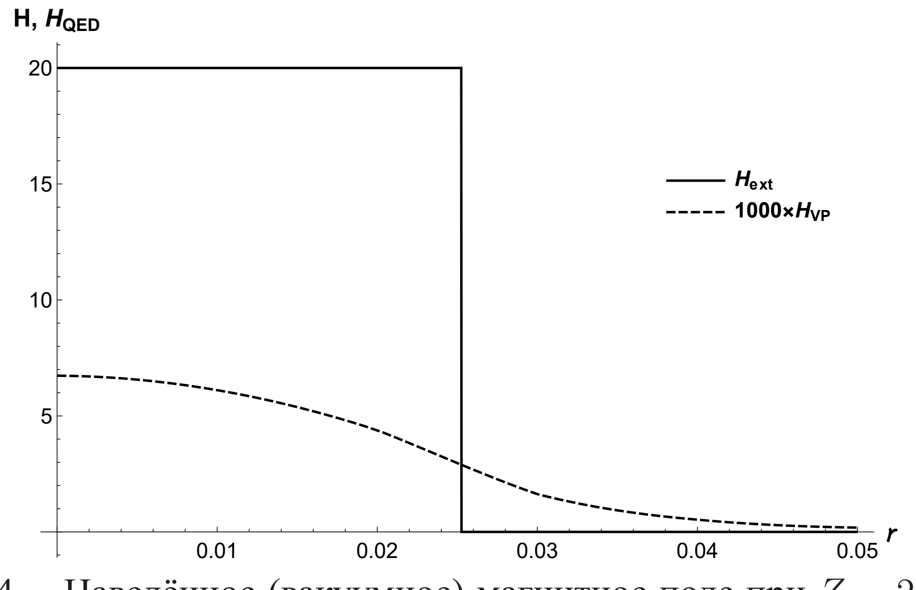


Рисунок 3.4 — Наведённое (вакуумное) магнитное поле при $Z = 200$, $\lambda = 10$, $R_1 = R_0 = 0.025$ в сравнении с исходным магнитным полем H_{ext}.

На рис. 3.3 показаны графики для наведенных (вакуумных) магнитных полей H_{VP}, порожденных соответствующими вакуумными плотностями тока, представленными на рис. 3.1 и 3.2, согласно формуле

$$H_{\text{VP}}(r) = 4\pi \int\limits_r^\infty dr\, j_{\text{VP}}^{\text{ren}}(r) \ . \tag{3.68}$$

При этом наведенное магнитное поле направлено по нормали к рассматриваемой плоскости (по оси $\vec{e}_z$). При рассмотренных на рис. 3.1 и 3.2 внешних параметрах, H_{VP} мало по сравнению с исходным магнитным полем, т.к., учитывая введенные ранее обозначения (3.3), амплитуда постоянного магнитного поля внутри бесконечно тонкого соленоида радиуса $R_1 = R_0$ равна $H_0 = 20\,H_{QED}$ (рис. 3.4). При $Z = 200$, $\lambda = 10$, $R_1 = R_0$ максимальная амплитуда наведённого магнитного поля на три порядка меньше амплитуды исходного магнитного поля (рис. 3.4). Несмотря на это, направление наведённого магнитного поля совпадает с исходным, и, таким образом, наведённое магнитное поле усиливает исходное.

На рис. 3.5 представлена перенормированная вакуумная плотность заряда для $Z = 200$ и $R_1 = R_0$ при разных значениях параметра $\lambda = |e|H_0/2$. При

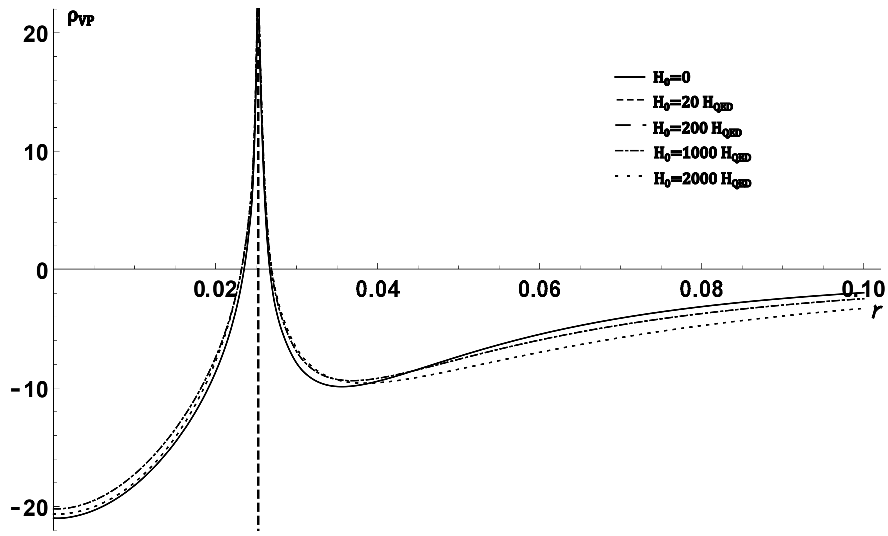
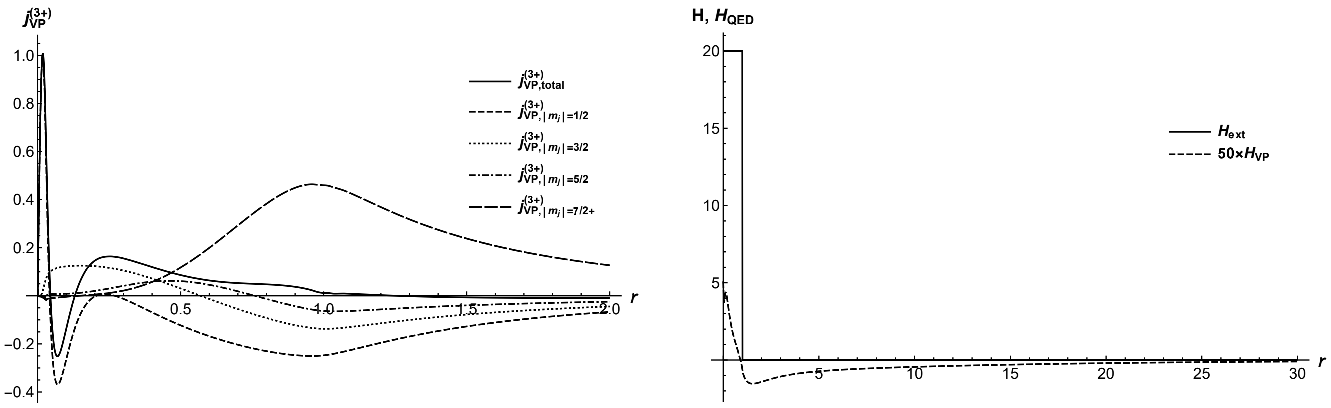


Рисунок 3.5 — Перенормированная вакуумная плотность заряда как функция λ при $Z = 200$, $R_1 = R_0 = 0.025$. Графики при $H_0 = 0, 20, 200$ практически неразличимы.

этом, как и в [89], непосредственным численным интегрированием показывается, что полный вакуумный заряд Q_{VP} равен числу упавших в нижний континуум дискретных уровней: $Q_{\text{VP}} = -7|e|$ для случая $\lambda = 1000$ (критические заряды равны 1-й $Z^{(23)}_{\text{cr},m_j=-1/2} \simeq 70$, 1-й $Z^{(14)}_{\text{cr},m_j=-1/2} \simeq 110$, 2-й $Z^{(23)}_{\text{cr},m_j=-1/2} \simeq 163$, 1-й $Z^{(23)}_{\text{cr},m_j=-3/2} \simeq 166$, 1-й $Z^{(14)}_{\text{cr},m_j=-3/2} \simeq 180$, 1-й $Z^{(14)}_{\text{cr},m_j=1/2} \simeq 183$, 1-й $Z^{(23)}_{\text{cr},m_j=1/2} \simeq 199$) и $Q_{\text{VP}} = -6|e|$ во всех остальных (в чём можно убедиться из решения уравнений (3.21) и (3.22) при $\epsilon = -1$ относительно Z). Из рис. 3.5 следует, что вакуумная плотность заряда очень слабо зависит от амплитуды внешнего магнитного поля в случае векторного потенциала вида (3.3) даже при амплитудах равных тысячам H_{QED}.



а б

Рисунок 3.6 — $Z = 200$, $\lambda = 10$, $R_1 = 1$, $R_0 = 0.025$: (а) парциальные вакуумные плотности тока; (б) индуцированное магнитное поле.

На рис. 3.6 представлены результаты численных расчетов для вакуумной плотности тока и наведенного магнитного поля для случая, когда системы радиальных уравнений (3.21) и (3.22) не имеют аналитических решений, при $Z = 200$, $\lambda = 10$, $R_1 = 1$.

Из рис. 3.6а видно, что поведение $j_{\text{VP}}^{(3+)}(r)$ отличается от случая $R_1 = R_0$ (рис. 3.2) тем, что наличие аксиальной плотности тока бесконечно тонкого соленоида вытягивает вакуумную плотность тока из области $r < R_0$. Таким образом, заметный вклад в результирующую плотность тока вносят каналы и с $|m_j| \geqslant 7/2$. Стоит отметить, что этот эффект связан исключительно с присутствием внешнего магнитного поля, локализованного в области с радиусом $R_1 > R_0$: результирующая наведенная вакуумная плотность тока вытягивается магнитным полем до радиуса внешней плотности тока (3.67) за счет старших парциальных каналов по m_j. В этом случае, как видно из рис. 3.6б, наведенное магнитное поле будет обладать усиливающим эффектом в области $r < R_1$, т.к. имеет направление соответствующее исходному магнитному полю.

Полученные в настоящей работе нетривиальные результаты являются следствием существенно нелинейного и непертурбативного вакуумного отклика на изменение параметров внешнего магнитного поля.

3.5 Заключение к главе 3

В настоящей главе представлен непертурбативный расчет вакуумной плотности тока в присутствии магнитного поля с аксиальным векторным потенциалом в 2+1-мерной системе Дирака-Кулона. Показано, что в отличие от вакуумной плотности заряда для вычисления вакуумной плотности тока в присутствии локализованного при $R_1 > R_0$ внешнего магнитного поля необходимо учитывать парциальные каналы с большими $|m_j|$. Наряду с вакуумной плотностью тока рассмотрена и вакуумная плотность заряда. Результаты, полученные в этой главе для вакуумной плотности заряда, согласуются с полученными в главе 2. Показано, что в присутствии закритического кулоновского источника наведенное магнитное поле при определенных значениях параметров внешнего векторного потенциала способно усиливать исходное магнитное поле. В связи с этим, возникает возможность существования стабильной конфигурации внешнего электромагнитного потенциала, при котором наведенное поле будет не ослаблять и не усиливать исходное, а равняться ему во всей области, т.е. стабильного и самосогласованного (с учетом вакуумных эффектов) решения уравнений КЭД [104]. Поиск подобного решения в двумерном случае является перспективной задачей, прокладывающей дорогу к поиску подобных явлений и в случае 3+1 КЭД.

Заключение

В заключении перечислим основные результаты работы, выносимые на защиту.

1. Разработан непертурбативный метод расчета вакуумной плотности заряда и вакуумной энергии, которые являются основными характеристиками поляризации вакуума, в сверхкритических системах Дирака-Кулона. Также представлен метод расчета вакуумной плотности тока для двумерной сверхкритической системы Дирака-Кулона в присутствии магнитного поля с аксиальным вектор-потенциалом.
2. Показано, что перенормировка через фермионную петлю с двумя внешними линиями оказывается универсальным приемом, который устраняет расходимость теории как в чисто пертурбативном, так и в существенно непертурбативном режимах для вакуумной плотности заряда, вакуумной плотности тока и для вакуумной энергии.
3. Показано, что для широкого диапазона параметров внешнего источника (с зарядом Z и радиусом R_0), нелинейные эффекты в закритической области могут приводить к существенно отличному от пертурбативного квадратичного роста поведению вакуумной энергии вплоть до чётко выраженного убывания в отрицательную область со скачками, вызванными погружением дискретных уровней в нижний континуум. В рассматриваемом диапазоне изменения параметров Z и R_0, вакуумная энергия ведет себя $\sim -Z^2/R_0$ в 1+1 измерениях и $\sim -Z^3/R_0$ в 2+1 измерениях, достигая больших отрицательных значений. Подчеркивается, что методы, примененные для расчета вакуумной энергии в 2+1 измерениях, с минимальным числом изменений могут быть перенесены на трёхмерный случай, где поведение вакуумной энергии, как ожидается, должно быть $\sim -Z^4/R_0$, и, следовательно, вакуумная энергия будет конкурировать с классической электростатической энергией кулоновского источника.
4. Показано, что в присутствии закритического кулоновского источника наведенное магнитное поле при определенных значениях параметров внешнего векторного потенциала способно усиливать исходное магнитное поле.

5. Представленные теоретические и численные результаты полностью подтверждают предположение о превращении нейтрального вакуума в заряженный в сверхкритических внешних полях, приводящее к спонтанному излучению вакуумных позитронов при погружении уровней дискретного спектра в нижний континуум вследствие закона сохранения заряда.

Благодарности

Автор выражает огромную благодарность профессору Свешникову Константину Алексеевичу за крайне внимательное отношение к этой работе и научной деятельности автора в общем и за передачу части своего богатого жизненного и научного опыта. Он также выражает особую благодарность профессорам Дмитрию Алексеевичу Славнову и Петру Константиновичу Силаеву за полезные обсуждения и всему коллективу сотрудников и аспирантов кафедры квантовой теории и физики высоких энергий физического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова за создание творческой и рабочей атмосферы.

Автор выражает отдельную благодарность своему соавтору научному сотруднику кафедры квантовой теории и физики высоких энергий Ворониной Юлии Сергеевне за плодотворную совместную научную работу и помощь при подготовке публикаций.

Автор сердечно благодарит своего научного руководителя профессора Кузьмина Владимира Александровича за всевозможную помощь при подготовке диссертации и за передачу огромного жизненного и научного опыта.

Автор искренне признателен своим родителям и друзьям, а также жене Яне за поддержку.

Работа была выполнена при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС».

Список литературы

1. *Pomeranchuk I.*, *Smorodinsky Y.* On the energy levels of systems with Z>137 // J. Phys. Ussr. — 1945. — Т. 9. — С. 97.
2. *Gershtein S.*, *Zel'dovich Y. B.* The critical charge of the nucleus and the vacuum polarization // Lettere Al Nuovo Cimento (1969-1970). — 1969. — Т. 1, № 16. — С. 835—836.
3. *Pieper W.*, *Greiner W.* Interior electron shells in superheavy nuclei // Zeitschrift für Physik A Hadrons and nuclei. — 1969. — Т. 218, № 4. — С. 327—340.
4. *Зельдович Я. Б.*, *Попов В. С.* Электронная структура сверхтяжелых атомов // Успехи физических наук. — 1971. — Т. 105, № 11. — С. 403—440.
5. *Greiner W.*, *Müller B.*, *Rafelski J.* Quantum Electrodynamics of Strong Fields: With an Introduction into Modern Relativistic Quantum Mechanics. — Springer Science & Business Media, 2012.
6. *Гриб А. А.*, *Мамаев С. Г.*, *Мостепаненко В. М.* Вакуумные квантовые эффекты в сильных полях. — Энергоатомиздат, 1988.
7. *Greiner W.*, *Reinhardt J.* Quantum electrodynamics. — Springer Science & Business Media, 2012.
8. Creation dynamics of bound states in supercritical fields / P. Krekora [и др.] // Physical review letters. — 2005. — Т. 95, № 7. — С. 070403.
9. *Zagrebaev V.*, *Greiner W.* Shell effects in damped collisions: a new way to superheavies // Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics. — 2007. — Т. 34, № 11. — С. 2265.
10. *Ruffini R.*, *Vereshchagin G.*, *Xue S.-S.* Electron–positron pairs in physics and astrophysics: from heavy nuclei to black holes // Physics Reports. — 2010. — Т. 487, № 1—4. — С. 1—140.
11. Probing QED vacuum with heavy ions / J. Rafelski [и др.] // New horizons in fundamental physics. — Springer, 2017. — С. 211—251.
12. Coulomb problem for a nucleus / V. M. Kuleshov [и др.] // Physics Uspekhi. — 2015. — Т. 58, № 8. — С. 785.

13. *Godunov S.*, *Machet B.*, *Vysotsky M.* Resonances in positron scattering on a supercritical nucleus and spontaneous production of e^{+} e^{-} pairs // The European Physical Journal C. — 2017. — Т. 77, № 11. — С. 782.

14. Electron-positron pair creation in low-energy collisions of heavy bare nuclei / I. Maltsev [и др.] // Physical Review A. — 2015. — Т. 91, № 3. — С. 032708.

15. *Artemyev A.*, *Surzhykov A.* Quantum electrodynamical corrections to energy levels of diatomic quasimolecules // Physical review letters. — 2015. — Т. 114, № 24. — С. 243004.

16. *Yerokhin V.*, *Shabaev V.* Lamb Shift of $n = 1$ and $n = 2$ States of Hydrogen-like Atoms, $1 \leqslant Z \leqslant 110$ // Journal of Physical and Chemical Reference Data. — 2015. — Т. 44, № 3. — С. 033103.

17. Positron creation probabilities in low-energy heavy-ion collisions / A. I. Bondarev [и др.] // The European Physical Journal D. — 2015. — Т. 69, № 4. — С. 110.

18. One-center calculations of the electron-positron pair creation in low-energy collisions of heavy bare nuclei / R. V. Popov [и др.] // The European Physical Journal D. — 2018. — Т. 72, № 6. — С. 115.

19. K-shell ionization of heavy hydrogenlike ions / O. Novak [и др.] // Physical Review A. — 2018. — Т. 97, № 3. — С. 032518.

20. *Yerokhin V.* Two-loop self-energy in the Lamb shift of the ground and excited states of hydrogenlike ions // Physical Review A. — 2018. — Т. 97, № 5. — С. 052509.

21. *Shytov A. V.*, *Katsnelson M. I.*, *Levitov L. S.* Vacuum polarization and screening of supercritical impurities in graphene // Physical review letters. — 2007. — Т. 99, № 23. — С. 236801.

22. *Gamayun O.*, *Gorbar E.*, *Gusynin V.* Supercritical Coulomb center and excitonic instability in graphene // Physical Review B. — 2009. — Т. 80, № 16. — С. 165429.

23. *Sobol O.*, *Gorbar E.*, *Gusynin V.* Supercritical instability in graphene with two charged impurities // Physical Review B. — 2013. — Т. 88, № 20. — С. 205116.

24. Observing atomic collapse resonances in artificial nuclei on graphene / Y. Wang [и др.] // Science. — 2013. — Т. 340, № 6133. — С. 734—737.

25. *Górnicki P.* Aharonov-bohm effect and vacuum polarization // Annals of Physics. — 1990. — T. 202, № 2. — C. 271—296.

26. Induced current and Aharonov-Bohm effect in graphene / R. Jackiw [и др.] // Physical Review B. — 2009. — T. 80, № 3.

27. *Nishida Y.* Vacuum polarization of graphene with a supercritical Coulomb impurity: Low-energy universality and discrete scale invariance // Physical Review B. — 2014. — T. 90, № 16. — C. 165414.

28. *Khalilov V.*, *Mamsurov I.* Planar density of vacuum charge induced by a supercritical Coulomb potential // Physics Letters B. — 2017. — T. 769. — C. 152—158.

29. *Khalilov V. R.*, *Lee K. E.* Planar massless fermions in Couloumb and Aharonov–Bohm potentials // International J. of Modern Phys. A. — 2012. — T. 27, № 29. — C. 1250169.

30. *Milstein A. I.*, *Terekhov I. S.* Induced charge generated by a potential well in graphene // Phys. Rev. B. — 2010. — T. 81, № 12.

31. *Milstein A. I.*, *Terekhov I. S.* Induced current in the presence of a magnetic flux tube of small radius // Phys. Rev. B. — 2011. — T. 83, № 7.

32. *Sitenko Y. A.*, *Vlasii N. D.* Vacuum polarization effects on graphitic nanocones // J. of Phys.: Conference Series. — 2008. — T. 129. — C. 012008.

33. *Barbieri R.* Hydrogen atom in superstrong magnetic fields: Relativistic treatment // Nuclear Physics A. — 1971. — T. 161, № 1. — C. 1—11.

34. *Krainov V.* A hydrogen-like atom in a superstrong magnetic field // JETP. — 1973. — T. 37, № 3. — C. 406.

35. *Shabad A.*, *Usov V.* Electric field of a pointlike charge in a strong magnetic field and ground state of a hydrogenlike atom // Physical Review D. — 2008. — T. 77, № 2. — C. 025001.

36. *Oraevskii V.*, *Rex A.*, *Semikoz V.* Spontaneous production of positrons by a Coulomb center in a homogeneous magnetic field // JETP. — 1977. — T. 45, № 3. — C. 428.

37. *Karnakov B.*, *Popov V.* A hydrogen atom in a superstrong magnetic field and the Zeldovich effect // Journal of Experimental and Theoretical Physics. — 2003. — T. 97, № 5. — C. 890—914.

38. *Высоцкий М. И.*, *Годунов С. И.* Критический заряд в сверхсильном магнитном поле // Успехи физических наук. — 2014. — Т. 184, № 2. — С. 206—210.

39. *Pyykko P.* The physics behind chemistry and the periodic table // Chemical reviews. — 2011. — T. 112, № 1. — C. 371—384.

40. *Indelicato P.*, *Bieroń J.*, *Jönsson P.* Are MCDF calculations 101% correct in the super-heavy elements range? // Theoretical Chemistry Accounts. — 2011. — T. 129, № 3—5. — C. 495—505.

41. *Loudon R.* One-dimensional hydrogen atom // American journal of physics. — 1959. — T. 27, № 9. — C. 649—655.

42. *Elliott R.*, *Loudon R.* Theory of the absorption edge in semiconductors in a high magnetic field // Journal of Physics and Chemistry of Solids. — 1960. — T. 15, № 3/4. — C. 196—207.

43. *Care C.* One dimensional hydrogen atom with a repulsive core // Journal of Physics C: Solid State Physics. — 1972. — T. 5, № 14. — C. 1799.

44. *Cole M. W.* Properties of image-potential-induced surface states of insulators // Physical Review B. — 1970. — T. 2, № 10. — C. 4239.

45. *Nieto M. M.* Electrons above a helium surface and the one-dimensional Rydberg atom // Physical Review A. — 2000. — T. 61, № 3. — C. 034901.

46. *Delone N. B.*, *Krainov B.*, *Shepelyanskii D.* Highly-excited atoms in the electromagnetic field // Soviet Physics Uspekhi. — 1983. — T. 26, № 7. — C. 551.

47. *Jensen R. V.*, *Susskind S.*, *Sanders M. M.* Chaotic ionization of highly excited hydrogen atoms: Comparison of classical and quantum theory with experiment // Physics Reports. — 1991. — T. 201, № 1. — C. 1—56.

48. *Pen U.-L.*, *Jiang T.* Strong-field effects of the one-dimensional hydrogen atom in momentum space // Physical Review A. — 1992. — T. 46, № 7. — C. 4297.

49. *López-Castillo A.*, *Oliveira C. R. de*. Classical ionization for the aperiodic driven hydrogen atom // Chaos, Solitons & Fractals. — 2003. — Т. 15, № 5. — С. 859—869.

50. *Essler F.*, *Gebhard F.*, *Jeckelmann E.* Excitons in one-dimensional Mott insulators // Physical Review B. — 2001. — Т. 64, № 12. — С. 125119.

51. Auger recombination of excitons in one-dimensional systems / F. Wang [и др.] // Physical Review B. — 2006. — Т. 73, № 24. — С. 245424.

52. *Canuto V.*, *Kelly D.* Hydrogen atom in intense magnetic field // Astrophysics and Space Science. — 1972. — Т. 17, № 2. — С. 277—291.

53. *Friedrich H.*, *Wintgen H.* The hydrogen atom in a uniform magnetic field—an example of chaos // Physics Reports. — 1989. — Т. 183, № 2. — С. 37—79.

54. *Guan X.*, *Li B.*, *Taylor K.* Strong parallel magnetic field effects on the hydrogen molecular ion // Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics. — 2003. — Т. 36, № 17. — С. 3569.

55. Atoms in strong magnetic fields: quantum mechanical treatment and applications in astrophysics and quantum chaos / H. Ruder [и др.]. — Springer Science & Business Media, 2012.

56. *Shabad A. E.*, *Usov V. V.* Positronium collapse and the maximum magnetic field in pure QED // Physical Review Letters. — 2006. — Т. 96, № 18. — С. 180401.

57. *Shabad A.*, *Usov V.* Bethe-Salpeter approach for relativistic positronium in a strong magnetic field // Physical Review D. — 2006. — Т. 73, № 12. — С. 125021.

58. *Reinhardt J.*, *Greiner W.* Quantum electrodynamics of strong fields // Reports on Progress in Physics. — 1977. — Т. 40, № 3. — С. 219.

59. *Plunien G.*, *Müller B.*, *Greiner W.* The casimir effect // Physics Reports. — 1986. — Т. 134, № 2/3. — С. 87—193.

60. *Wichmann E. H.*, *Kroll N. M.* Vacuum polarization in a strong Coulomb field // Physical Review. — 1956. — Т. 101, № 2. — С. 843.

61. *Gyulassy M.* Higher order vacuum polarization for finite radius nuclei // Nuclear Physics A. — 1975. — Т. 244, № 3. — С. 497—525.

62. *Brown L. S.*, *Cahn R. N.*, *McLerran L. D.* Vacuum polarization in a strong Coulomb field. I. Induced point charge // Physical Review D. — 1975. — T. 12, № 2. — C. 581.

63. *Neghabian A.* Vacuum polarization for an electron in a strong Coulomb field // Physical Review A. — 1983. — T. 27, № 5. — C. 2311.

64. *Mohr P. J.*, *Plunien G.*, *Soff G.* QED corrections in heavy atoms // Physics Reports. — 1998. — T. 293, № 5/6. — C. 227—369.

65. *Adorno T.*, *Gitman D.*, *Shabad A.* Coulomb field in a constant electromagnetic background // Physical Review D. — 2016. — T. 93, № 12. — C. 125031.

66. *Sveshnikov K. A.*, *Khomovskii D. I.* Schrödinger and Dirac particles in quasi-one-dimensional systems with a Coulomb interaction // Theoretical and Mathematical Physics. — 2012. — T. 173, № 2. — C. 1587—1603.

67. *Бэйтмен Г.*, *Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции, т. 1: Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра, 2-е изд. — 1973.

68. *Fano U.* Effects of configuration interaction on intensities and phase shifts // Physical Review. — 1961. — T. 124, № 6. — C. 1866.

69. *Rajaraman R.* Solitons and Instantons. — NorthHolland, Amsterdam, 1982.

70. *Sveshnikov K.* Dirac sea correction to the topological soliton mass // Physics Letters B. — 1991. — T. 255, № 2. — C. 255—260.

71. New extended model of hadrons / A. Chodos [и др.] // Physical Review D. — 1974. — T. 9, № 12. — C. 3471.

72. NIST handbook of mathematical functions hardback and CD-ROM / F. W. Olver [и др.]. — Cambridge University Press, 2010.

73. *Yerokhin V.*, *Indelicato P.*, *Shabaev V.* Two-loop QED corrections with closed fermion loops // Physical Review A. — 2008. — T. 77, № 6. — C. 062510.

74. *Itzykson C.*, *Zuber J.-B.* Quantum field theory. — Courier Corporation, 2012.

75. *Katsnelson M.* Nonlinear screening of charge impurities in graphene // Physical Review B. — 2006. — T. 74, № 20. — C. 201401.

76. *Nomura K.*, *MacDonald A.* Quantum transport of massless Dirac fermions // Physical review letters. — 2007. — T. 98, № 7. — C. 076602.

77. *Kotov V. N.*, *Pereira V. M.*, *Uchoa B.* Polarization charge distribution in gapped graphene: Perturbation theory and exact diagonalization analysis // Physical Review B. — 2008. — T. 78, № 7. — C. 075433.
78. *Pereira V. M.*, *Kotov V. N.*, *Neto A. C.* Supercritical Coulomb impurities in gapped graphene // Physical Review B. — 2008. — T. 78, № 8. — C. 085101.
79. *Herbut I. F.* Topological insulator in the core of the superconducting vortex in graphene // Physical review letters. — 2010. — T. 104, № 6. — C. 066404.
80. Limiting charge for electrostatic point sources / P. Gärtner [и др.] // Zeitschrift für Physik A Atoms and Nuclei. — 1981. — T. 300, № 2/3. — C. 143—155.
81. *Aleksandrov I. A.*, *Plunien G.*, *Shabaev V. M.* Nuclear recoil and vacuum-polarization effects on the binding energies of supercritical H-like ions // The European Physical Journal D. — 2016. — T. 70, № 1. — C. 18.
82. *Voronov B. L.*, *Gitman D. M.*, *Tyutin I. V.* The Dirac Hamiltonian with a superstrong Coulomb field // Theoretical and Mathematical Physics. — 2007. — T. 150, № 1. — C. 34—72.
83. *Gitman D. M.*, *Tyutin I. V.*, *Voronov B. L.* Self-adjoint extensions in quantum mechanics: general theory and applications to Schrödinger and Dirac equations with singular potentials. T. 62. — Springer Science & Business Media, 2012.
84. Electronic structure of super heavy atoms revisited / D. Gitman [и др.] // Physica Scripta. — 2013. — T. 87, № 3. — C. 038104.
85. Essentially non-perturbative and peculiar polarization effects in planar QED with strong coupling / Y. Voronina [и др.] // Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures. — 2019. — T. 106. — C. 298—311.
86. Casimir (vacuum) energy in planar QED with strong coupling / Y. Voronina [и др.] // Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures. — 2019. — T. 109. — C. 209—224.
87. *Hosotani Y.* Spontaneously broken Lorentz invariance in three-dimensional gauge theories // Physics Letters B. — 1993. — T. 319, № 1—3. — C. 332—338.
88. *Khalilov V.*, *Mamsurov I.* Vacuum polarization of planar charged fermions with Coulomb and Aharonov–Bohm potentials // Modern Physics Letters A. — 2016. — T. 31, № 07. — C. 1650032.

89. *Davydov A.*, *Sveshnikov K.*, *Voronina Y.* Nonperturbative vacuum polarization effects in two-dimensional supercritical Dirac–Coulomb system I. Vacuum charge density // International Journal of Modern Physics A. — 2018. — Т. 33, № 01. — С. 1850004.

90. *Davydov A.*, *Sveshnikov K.*, *Voronina Y.* Vacuum energy of one-dimensional supercritical Dirac–Coulomb system // International Journal of Modern Physics A. — 2017. — Т. 32, № 11. — С. 1750054.

91. *Davydov A.*, *Sveshnikov K.*, *Voronina Y.* Nonperturbative vacuum polarization effects in two-dimensional supercritical Dirac–Coulomb system II. Vacuum energy // International Journal of Modern Physics A. — 2018. — Т. 33, № 01. — С. 1850005.

92. Higher transcendental functions. Т. 2 / H. Bateman, A. Erdélyi [и др.]. — McGraw-Hill New York, 1953.

93. *Zeldovich Y. B.*, *Popov V. S.* Electronic structure of superheavy atoms // Physics-Uspekhi. — 1972. — Т. 14, № 6. — С. 673—694.

94. Analytic solution of a two-dimensional hydrogen atom. I. Nonrelativistic theory / X. Yang [и др.] // Physical Review A. — 1991. — Т. 43, № 3. — С. 1186.

95. *Voronina Y.*, *Davydov A.*, *Sveshnikov K.* // Theoretical and Mathematical Physics. — 2017. — Т. 193, № 2. — С. 1647—1674.

96. *Sveshnikov K.*, *Khomovskii D.* High Z effects in accounting for radiative component of the electron magnetic moment in hydrogen-like atoms // Physics of Particles and Nuclei Letters. — 2013. — Т. 10, № 2. — С. 119—131.

97. *Rafelski J.*, *Fulcher L. P.*, *Klein A.* Fermions and bosons interacting with arbitrarily strong external fields // Physics Reports. — 1978. — Т. 38, № 5. — С. 227—361.

98. *Geim A. K.*, *Novoselov K. S.* The rise of graphene // Nature Materials. — 2007. — Т. 6, № 3. — С. 183—191.

99. Two-dimensional gas of massless Dirac fermions in graphene / K. S. Novoselov [и др.] // Nature. — 2005. — Т. 438, № 7065. — С. 197—200.

100. Giant Intrinsic Carrier Mobilities in Graphene and Its Bilayer / S. V. Morozov [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2008. — Т. 100, № 1.

101. Coulomb problem for graphene with the gapped electron spectrum / V. M. Kuleshov [и др.] // Jetp Lett. — 2015. — T. 101, № 4. — C. 264—270.

102. Electron-Electron Interactions in Graphene: Current Status and Perspectives / V. N. Kotov [и др.] // Reviews of Modern Physics. — 2012. — T. 84, № 3. — C. 1067—1125.

103. *Bubnov A.*, *Gubina N.*, *Zhukovsky V.* Vacuum current induced by an axial-vector condensate and electron anomalous magnetic moment in a magnetic field // Physical Review D. — 2017. — T. 96, № 1.

104. *Grashin P.*, *Sveshnikov K.* Ferromagnetic Phase in Graphene-Based Planar Heterostructures Induced by Charged Impurity // Annalen der Physik. — 2020. — T. 532, № 1. — C. 1900351.

105. Integrals and series / A. P. Prudnikov [и др.]. — AAPT, 1988.

Приложение А

Потенциал Юлинга в 2+1D

В этом приложении подробно рассмотрен вывод потенциала Юлинга в 2+1D для внешнего потенциала $A_0^{\text{ext}}(r)$ (2.1). Стартовой точкой является формула (2.6)

$$A^{(1)}_{\text{VP},0}(\vec{r}) = \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \mathrm{e}^{i\vec{q}\vec{r}} \Pi_{\text{R}}\left(-q^2\right) \tilde{A}_0^{\text{ext}}\left(\vec{q}\right), \qquad \tilde{A}_0\left(\vec{q}\right) = \int d^2y\, \mathrm{e}^{-i\vec{q}\vec{y}} A_0^{\text{ext}}(y)\ . \tag{A.1}$$

Далее, используя формулу разложения плоской волны по цилиндрическим функциям:

$$\mathrm{e}^{ikr\cos\varphi} = \sum_{m_l=-\infty}^{+\infty} i^{m_l} J_{m_l}(kr) \mathrm{e}^{im_l\varphi}\ , \tag{A.2}$$

имеем

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_0\left(\vec{q}\right) &= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi_y \int\limits_0^{\infty} dy\, y\, \mathrm{e}^{-iqy\cos\varphi_y} A_0^{\text{ext}}(y) = \\
&= \sum_{m_l=-\infty}^{+\infty} (-i)^{m_l} \int\limits_0^{\infty} dy\, y\, J_{m_l}(qy) A_0^{\text{ext}}(y) \int\limits_0^{2\pi} d\varphi_y\, \mathrm{e}^{im_l\varphi_y} = \\
&= \sum_{m_l=-\infty}^{+\infty} (-i)^{m_l} 2\pi \delta_{m_l,0} \int\limits_0^{\infty} dy\, y\, J_{m_l}(qy) A_0^{\text{ext}}(y) = \\
&= 2\pi \int\limits_0^{\infty} dy\, y\, J_0(qy) A_0^{\text{ext}}(y) = \\
&= 2\pi Z|e| \left[\frac{1}{R_0} \int\limits_0^{R_0} dy\, y\, J_0(qy) + \int\limits_{R_0}^{\infty} dy\, J_0(qy)\right] = \\
&= \frac{\pi Z|e|}{q} \left(2\left[1 + J_1(qR_0) - qR_0 J_0(qR_0)\right] + \right. \\
&\left. + \pi q R_0 \left[J_0(qR_0)\mathbf{H}_1(qR_0) - J_1(qR_0)\mathbf{H}_0(qR_0)\right]\right)\ ,
\end{aligned} \tag{A.3}$$

где $\mathbf{H}_\nu(z)$ – функция Струве. Окончательно,

$$A^{(1)}_{\mathrm{VP},0}(\vec{r}) = \frac{Z|e|\alpha}{8\pi}\int\limits_0^\infty dq\,\frac{1}{q}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi_q\,\mathrm{e}^{iqr\cos\varphi_q}\left[\frac{2}{q}+\left(1-\frac{4}{q^2}\right)\mathrm{arctg}\left(\frac{q}{2}\right)\right]\times$$
$$\times\left(2\left[1+J_1(qR_0)-qR_0J_0(qR_0)\right]+\pi qR_0\left[J_0(qR_0)\mathbf{H}_1(qR_0)-J_1(qR_0)\mathbf{H}_0(qR_0)\right]\right)=$$
$$=\frac{Z|e|\alpha}{8\pi}\sum_{m_l=-\infty}^{+\infty} i^{m_l}\int\limits_0^\infty dq\,\frac{J_{m_l}(qr)}{q}\left[\frac{2}{q}+\left(1-\frac{4}{q^2}\right)\mathrm{arctg}\left(\frac{q}{2}\right)\right]\times$$
$$\times\left(2\left[1+J_1(qR_0)-qR_0J_0(qR_0)\right]+\pi qR_0\left[J_0(qR_0)\mathbf{H}_1(qR_0)-J_1(qR_0)\boldsymbol{H}_0(qR_0)\right]\right)$$
$$\times\int\limits_0^{2\pi} d\varphi_q\,\mathrm{e}^{im_l\varphi_q}=$$
$$=\frac{Z|e|\alpha}{8\pi}\sum_{m_l=-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta_{m_l,0}\int\limits_0^\infty dq\,\frac{J_{m_l}(qr)}{q}\left[\frac{2}{q}+\left(1-\frac{4}{q^2}\right)\mathrm{arctg}\left(\frac{q}{2}\right)\right]\times$$
$$\times\left(2\left[1+J_1(qR_0)-qR_0J_0(qR_0)\right]+\pi qR_0\left[J_0(qR_0)\mathbf{H}_1(qR_0)-J_1(qR_0)\mathbf{H}_0(qR_0)\right]\right)=$$
$$=\frac{Z|e|\alpha}{4}\int\limits_0^\infty dq\,\frac{J_0(qr)}{q}\left[\frac{2}{q}+\left(1-\frac{4}{q^2}\right)\mathrm{arctg}\left(\frac{q}{2}\right)\right]\times$$
$$\times\left(2\left[1+J_1(qR_0)-qR_0J_0(qR_0)\right]+\pi qR_0\left[J_0(qR_0)\mathbf{H}_1(qR_0)-J_1(qR_0)\mathbf{H}_0(qR_0)\right]\right)\ . \tag{A.4}$$

В итоге мы получили окончательное выражение для потенциала Юлинга (2.8) в случае внешнего потенциала вида (2.1). Особо отметим, что в разложении по цилиндрическим волнам $A^{(1)}_{\mathrm{VP},0}(r)$ (таким образом и $\rho^{(1)}_{\mathrm{VP}}(r)$ и $\mathcal{E}^{(1)}_{\mathrm{VP}}$) отличны от нуля только члены с $m_l = 0$. Это есть следствие того, что потенциал Юлинга собирается исключительно из двух аксиально-симметричных функций — внешнего потенциала (2.1) и поляризационной функции (2.7). Т.е. в рамках парциального разложения ρ_{VP} и $\mathcal{E}_{\mathrm{VP}}$ по $m_j = m_l + m_s$ пертурбативные $\rho^{(1)}_{\mathrm{VP}}$ и $\mathcal{E}^{(1)}_{\mathrm{VP}}$ всегда соответствуют $|m_j| = 1/2$.

Приложение Б

Вычисление перенормированного индуцированного вакуумного заряда Q_{VP}^{ren}

В этом приложении мы покажем, что во внешнем потенциале вида (2.1) перенормированный индуцированный заряд Q_{VP}^{ren} равен нулю в докритической области $Z < Z_{cr,1}$. Стартовые выражения для Q_{VP}^{ren} имеют вид

$$Q_{\mathrm{VP}}^{ren} = \int d^2r\, \rho_{\mathrm{VP}}^{ren}(r) = Q_{\mathrm{VP}}^{(1)} + Q_{\mathrm{VP}}^{(3+)} \ , \tag{Б.1}$$

где

$$Q_{\mathrm{VP}}^{(1)} = 2\int d^2r\, \rho_{\mathrm{VP}}^{(1)}(r), \quad Q_{\mathrm{VP}}^{(3+)} = 2\int d^2r \sum_{m_j=1/2,\,3/2,..} \rho_{\mathrm{VP},|m_j|}^{(3+)}(r) \ . \tag{Б.2}$$

Прежде всего, заметим, что равенство нулю пертурбативного индуцированного заряда $Q_{\mathrm{VP}}^{(1)}$ в задачах с убывающим на пространственной бесконечности кулоновским потенциалом следует из более общих соображений (при условии отсутствия граничных условий специального вида и/или нетривиальной топологии полевого многообразия) и не требует прямого интегрирования выражения (2.11).

Из соображений простоты рассмотрим соответствующую 1+1-мерную задачу, хотя такой анализ также может быть легко проведен в 2+1- и 3+1-мерном случае. В импульсном пространстве (с точностью до множителей 2π и общих знаков) уравнение для потенциала $A_0(q)$, порожденного зарядовой плотностью $\rho(q)$, имеет следующий вид:

$$(q^2 - \tilde{\Pi}_R(q))A_0(q) = \rho(q) \ , \tag{Б.3}$$

где $\tilde{\Pi}_R(q)$ – поляризационный оператор, имеющий размерность $[q^2]$, который вводится через соотношение $\Pi_R^{\mu\nu}(q) = \left(g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu/q^2\right)\tilde{\Pi}_R(q)$. В рамках ТВ полагается, что $\tilde{\Pi}_R(q) \ll q^2$, тогда как потенциал A_0 следует рассматривать в виде разложения $A_0(q) = A^{(0)}(q) + A^{(1)}(q) + \ldots$. Классическая часть потенциала определяется из уравнения

$$q^2 A^{(0)}(q) = \rho(q) \ , \tag{Б.4}$$

тогда как первая квантовая поправка — из уравнения

$$q^2 A^{(1)}(q) = \tilde{\Pi}_R(q) A^{(0)}(q) \ . \tag{Б.5}$$

Правая часть уравнения (Б.5) представляет из себя индуцированную вакуумную плотность заряда $\rho^{(1)}_{\text{VP}}(q)$ в первом порядке ТВ. Тогда в координатном представлении (с точностью до множителей 2π)

$$\rho^{(1)}_{\text{VP}}(x) = \int dy\ \tilde{\Pi}_R(x-y) A^{(0)}(y) = \int dq\ \tilde{\Pi}_R(q) A^{(0)}(q) \mathrm{e}^{iqx} \ . \tag{Б.6}$$

Интегрируя (Б.6) по x, получим индуцированный вакуумный заряд $Q^{(1)}_{\text{VP}}$ в первом порядке ТВ в виде

$$Q^{(1)}_{\text{VP}} = \int dq\ \delta(q) \tilde{\Pi}_R(q) A^{(0)}(q) \ . \tag{Б.7}$$

Т.к. в рамках ТВ имеет место перенормировочное условие $\tilde{\Pi}_R(q) \sim q^2$ длч $q^2 \to 0$, то из (Б.7) следует, что $Q^{(1)}_{\text{VP}} = 0$ при условии, что сингулярность Фурье-образа внешнего потенциала $A^{(0)}(q)$ при $q \to 0$ слабее, чем $1/q^2$. Для кулоновского потенциала вида (2.22) в 1+1D сингулярность $A^{(0)}(q)$ при $q \to 0$ логарифмическая, и $Q^{(1)}_{\text{VP}} \equiv 0$. В 2+1 и 3+1D сингулярность $A^{(0)}(q)$ уже сильнее, $1/|\vec{q}|$ и $1/\vec{q}^2$ соответственно, но в этих случаях появляется дополнительный множитель $|\vec{q}|^{D-1}$ из меры интегрирования, который уже сам компенсирует имеющиеся сингулярности. Таким образом, для кулоновских потенциалов вида (2.1) во всех трех пространственных измерениях $Q^{(1)}_{\text{VP}} \equiv 0$ в первом порядке ТВ.

Однако, за рамками первого порядка ТВ и особенно в докритической области $Z < Z_{cr,1}$, когда в присутствии отрицательных дискретных уровней зависимость ρ_{VP} от параметров внешнего поля более не может быть описана степенным рядом (2.37), проверка равенства нулю Q^{ren}_{VP} требует существенно более детального рассмотрения. Тогда как в 1+1D эта проверка проделана в чисто аналитическом виде (см. раздел 1.3.1) и [90]), в 2+1D и 3+1D требуется численная проверка.

В 2+1D эта проверка наиболее эффективно может быть проделана следующим образом. Во-первых, примем во внимание равномерную сходимость парциального ряда по m_j относительно r (см. раздел 2.3.1). Тогда имеется возможность внесения интеграла под знак суммы в выражении для $Q^{(3+)}_{\mathrm{VP}}$

$$Q^{(3+)}_{\mathrm{VP}} = \sum_{m_j=1/2,\,3/2,..} Q^{(3+)}_{\mathrm{VP},|m_j|}\,, \qquad Q^{(3+)}_{\mathrm{VP},|m_j|} = 4\pi \int\limits_0^\infty r\,dr\,\rho^{(3+)}_{\mathrm{VP},|m_j|}(r)\,. \tag{Б.8}$$

Далее, учитывая явное выражение для $\rho^{(3+)}_{\mathrm{VP},|m_j|}(r)$ (2.39), для $Q^{(3+)}_{\mathrm{VP},|m_j|}$ имеем

$$\begin{aligned} Q^{(3+)}_{\mathrm{VP},|m_j|} = 2|e| \Bigg[&\sum_{m_j=\pm|m_j|} \sum_{-1\leqslant\epsilon_{n,m_j}<0} 1 \\ &+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty r\,dr \int\limits_0^\infty dy\,\mathrm{Re}\left(\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}_{|m_j|}(r,r;iy) - 2\,\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}^{(1)}_{m_j}(r;iy)\right)\Bigg]\,, \end{aligned} \tag{Б.9}$$

Теперь покажем, что в докритической области $Q^{(3+)}_{\mathrm{VP},|m_j|}$ (и тем самым Q^{ren}_{VP}) для всех m_j равен нулю. Самым напрашивающимся методом является прямой численный расчет двойного интеграла в (Б.9). Однако, это процедура является существенно времязатратной. Преимуществом альтернативного метода является учет следующих обстоятельств. Во-первых, как было отмечено в разделе 2.3.1, достаточно проверить зануление Q^{ren}_{VP} в докритической области при отсутствии отрицательных уровней. Во-вторых, заметим, что если интегралы по dr в (Б.9) станут внутренними, то они могут быть вычислены аналитически [105]. Для этих целей поменяем порядок интегрирования в (Б.9), вводя промежуточную регуляризацию интегралов по dr на верхнем пределе, иначе изменение порядка интегрирования и в особенности внесение интеграла по dr под знак взятия производной по Q недопустимо, ввиду того, что $\int r\,dr\ \mathrm{Tr}\,\mathrm{G}_{|m_j|}(r,r;iy)$ логарифмически расходится при больших r в силу асимптотики (2.38) для $\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}_{|m_j|}(r,r;iy)$.

С учетом всех перечисленных обстоятельств, выражение для $Q^{(3+)}_{\mathrm{VP},|m_j|}$ запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned} Q^{(3+)}_{\mathrm{VP},|m_j|} = \frac{2|e|}{\pi}\int\limits_0^\infty dy\ \lim_{R_1\to\infty}\mathrm{Re}\Bigg[&\int\limits_0^{R_1} r\,dr\ \mathrm{Tr}\,\mathrm{G}_{|m_j|}(r,r;iy) \\ &-2\,Q\left(\frac{\partial}{\partial Q}\int\limits_0^{R_1} r\,dr\,\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}_{m_j}(r,r;iy)\right)_{Q=0}\Bigg]\,. \end{aligned} \tag{Б.10}$$

Рассмотрим $\int_0^{R_1} r\,dr\,\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}_{m_j}(r,r;iy)$ в (Б.10). Принимая во внимание выражения для следующих неопределенных интегралов [105]:

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1}{x} U_{\rho,\sigma}(x)\hat{U}_{\rho,\sigma}(x)dx = -U_{\rho,\sigma}(x)\frac{\partial}{\partial\rho}\hat{U}'_{\rho,\sigma}(x) + U'_{\rho,\sigma}(x)\frac{\partial}{\partial\rho}\hat{U}'_{\rho,\sigma}(x)\ ,\\
&\int \frac{1}{x} W_{\mu,\sigma}(x)W_{\rho,\sigma}(x)dx = \frac{1}{\mu-\rho}\left(W'_{\rho,\sigma}(x)W_{\mu,\sigma}(x) - W_{\rho,\sigma}(x)W'_{\mu,\sigma}(x)\right)\ ,\\
&\int \left(\frac{b^2-a^2}{4} + \frac{\mu a - \rho b}{x} + \frac{\nu^2-\sigma^2}{x^2}\right) U_{\mu,\nu}(ax)\hat{U}_{\rho,\sigma}(bx)dx\\
&= U_{\mu,\nu}(ax)\hat{U}'_{\rho,\sigma}(bx) - U'_{\mu,\nu}(ax)\hat{U}_{\rho,\sigma}(bx)\ ,
\end{aligned} \tag{Б.11}$$

где $U_{\rho,\sigma}(x), \hat{U}_{\rho,\sigma}(x) = M_{\rho,\sigma}(x)$ или $W_{\rho,\sigma}(x)$ (штрих означает дифференцирование по аргументу), и явное выражение для $\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}_{m_j}(r,r;iy)$ (2.27), получим

$$\begin{aligned}
&\int_0^{R_1} r\,dr\,\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}_{m_j}(r,r;iy)\\
&= \frac{1}{[\mathcal{I},\mathcal{K}]}\left(J_1 - \frac{[\mathcal{K},\mathcal{W}]_R}{[\mathcal{I},\mathcal{W}]_R}J_2\right)\Bigg|_{\epsilon=iy} + \frac{1}{[\mathcal{M},\mathcal{W}]}\left(J_3 - \frac{[\mathcal{I},\mathcal{M}]_R}{[\mathcal{I},\mathcal{W}]_R}J_4\right)\Bigg|_{\epsilon=iy}\ ,
\end{aligned} \tag{Б.12}$$

где

$$\begin{aligned}
J_1 &= \int_0^R r\,dr\ (\mathcal{I}_1\mathcal{K}_1 + \mathcal{I}_2\mathcal{K}_2)\\
&= (1-\epsilon-V_0)^2\left\{\frac{R^2}{2}\left[\left(\frac{(m_j+1/2)^2}{(\xi R)^2}+1\right) I_{|m_j+1/2|}(\xi R)K_{|m_j+1/2|}(\xi R)\right.\right.\\
&\left.+\frac{1}{4}\left(I_{|m_j+1/2|-1}(\xi R) + I_{|m_j+1/2|+1}(\xi R)\right)\left(K_{|m_j+1/2|-1}(\xi R) + K_{|m_j+1/2|+1}(\xi R)\right)\right]\\
&\left.-\frac{|m_j+1/2|}{2\xi^2}\right\} - \xi^2\left\{\frac{R^2}{2}\left[\left(\frac{(m_j-1/2)^2}{(\xi R)^2}+1\right) I_{|m_j-1/2|}(\xi R)K_{|m_j-1/2|}(\xi R)\right.\right.\\
&\left.+\frac{1}{4}\left(I_{|m_j-1/2|-1}(\xi R) + I_{|m_j-1/2|+1}(\xi R)\right)\left(K_{|m_j-1/2|-1}(\xi R) + K_{|m_j-1/2|+1}(\xi R)\right)\right]\\
&\left.-\frac{|m_j-1/2|}{2\xi^2}\right\}\ ,
\end{aligned} \tag{Б.13}$$

$$
\begin{aligned}
J_2 &= \int_0^R r\,dr\,\left(\mathcal{I}_1^2+\mathcal{I}_2^2\right)\\
&= \frac{r^2}{2}\left\{ (V_0+(\epsilon-1))^2\left[I_{|m_j+1/2|}\left(\xi R\right)^2 - I_{|m_j+1/2|-1}\left(\xi R\right) I_{|m_j+1/2|+1}\left(\xi R\right)\right]\right.\\
&\left. +\xi^2\left[I_{|m_j-1/2|}\left(\xi R\right)^2 - I_{|m_j-1/2|-1}\left(\xi R\right) I_{|m_j-1/2|+1}\left(\xi R\right)\right]\right\}\ ,
\end{aligned}
\tag{Б.14}
$$

$$
\begin{aligned}
&J_3 = \int_R^{R_1} r\,dr\,\left(\mathcal{M}_1\mathcal{W}_1+\mathcal{M}_2\mathcal{W}_2\right) = \overline{J_3}(R_1) - \overline{J_3}(R)\ ,\\
&\overline{J_3}(r) = -2(\epsilon+1)\left\{\left(m_j+\frac{Q}{\gamma}\right)\right.\\
&\times\left[\left(\left(\frac{1}{2}-\frac{\nu+1/2}{2\gamma r}\right)M_{\nu+1/2,s}(2\gamma r)+\frac{s+\nu+1}{2\gamma r}M_{\nu+3/2,s}(2\gamma r)\right)\frac{\partial}{\partial\mu_1}W_{\mu_1,s}(2\gamma r)\Big|_{\mu_1=\nu+1/2}\right.\\
&\left.-M_{\nu+1/2,s}(2\gamma r)\,\frac{\partial}{\partial\mu_1}\left(\left(\frac{1}{2}-\frac{\mu_1}{2\gamma r}\right)W_{\mu_1,s}(2\gamma r)-\frac{W_{\mu_1+1,s}(2\gamma r)}{2\gamma r}\right)\Big|_{\mu_1=\nu+1/2}\right]\\
&+(s-\nu)\left\{\left(\frac{Q}{\gamma}-m_j\right)\right.\\
&\times\left[\left(\left(\frac{1}{2}-\frac{\nu-1/2}{2\gamma r}\right)M_{\nu-1/2,s}(2\gamma r)+\frac{s+\nu}{2\gamma r}M_{\nu+1/2,s}(2\gamma r)\right)\frac{\partial}{\partial\mu_2}W_{\mu_2,s}(2\gamma r)\Big|_{\mu_2=\nu-1/2}\right.\\
&\left.-M_{\nu-1/2,s}(2\gamma r)\,\frac{\partial}{\partial\mu_2}\left(\left(\frac{1}{2}-\frac{\mu_2}{2\gamma r}\right)W_{\mu_2,s}(2\gamma r)-\frac{W_{\mu_2+1,s}(2\gamma r)}{2\gamma r}\right)\Big|_{\mu_2=\nu-1/2}\right]\\
&-\epsilon\left[M_{\nu-1/2,s}(2\gamma r)\left(\left(\frac{1}{2}-\frac{\nu+1/2}{2\gamma r}\right)W_{\nu+1/2,s}(2\gamma r)-\frac{W_{\nu+3/2,s}(2\gamma r)}{2\gamma r}\right)\right.\\
&\left.\left.-\left(\left(\frac{1}{2}-\frac{\nu-1/2}{2\gamma r}\right)M_{\nu-1/2,s}(2\gamma r)+\frac{s+\nu}{2\gamma r}M_{\nu+1/2,s}(2\gamma r)\right)W_{\nu+1/2,s}(2\gamma r)\right]\right\}\\
&+\epsilon\left(\frac{Q^2}{\gamma^2}-m_j^2\right)\left[M_{\nu+1/2,s}(2\gamma r)\left(\left(\frac{1}{2}-\frac{\nu-1/2}{2\gamma r}\right)W_{\nu-1/2,s}(2\gamma r)-\frac{W_{\nu+1/2,s}(2\gamma r)}{2\gamma r}\right)\right.\\
&\left.\left.-\left(\left(\frac{1}{2}-\frac{\nu+1/2}{2\gamma r}\right)M_{\nu+1/2,s}(2\gamma r)+\frac{s+\nu+1}{2\gamma r}M_{\nu+3/2,s}(2\gamma r)\right)W_{\nu-1/2,s}(2\gamma r)\right]\right\}\ ,
\end{aligned}
\tag{Б.15}
$$

$$
\begin{aligned}
&J_4 = \int\limits_{R}^{R_1} r\,dr\,\left(\mathcal{W}_1^2 + \mathcal{W}_2^2\right) = \overline{J_{41}}(R_1) - \overline{J_{41}}(R) + \overline{J_{42}}(R_1) - \overline{J_{42}}(R)\,,\\
&\begin{bmatrix}\overline{J_{41}}(r)\\ \overline{J_{42}}(r)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(1+\epsilon)^2\\ \gamma^2\end{bmatrix}\Bigg\{\left(m_j - \frac{Q}{\gamma}\right)^2\\
&\times\Bigg[\left(\left(\frac{1}{2} - \frac{\mu_1}{2\gamma r}\right)W_{\mu_1,s}(2\gamma r) - \frac{W_{\mu_1+1,s}(2\gamma r)}{2\gamma r}\right)\frac{\partial}{\partial\mu_1}W_{\mu_1,s}(2\gamma r)\\
&-W_{\mu_1,s}(2\gamma r)\,\frac{\partial}{\partial\mu_1}\left(\left(\frac{1}{2} - \frac{\mu_1}{2\gamma r}\right)W_{\mu_1,s}(2\gamma r) - \frac{W_{\mu_1+1,s}(2\gamma r)}{2\gamma r}\right)\Bigg]\Bigg|_{\mu_1=\nu-1/2}\\
&+\Bigg[\left(\left(\frac{1}{2} - \frac{\mu_2}{2\gamma r}\right)W_{\mu_2,s}(2\gamma r) - \frac{W_{\mu_2+1,s}(2\gamma r)}{2\gamma r}\right)\frac{\partial}{\partial\mu_2}W_{\mu_2,s}(2\gamma r)\\
&-W_{\mu_2,s}(2\gamma r)\,\frac{\partial}{\partial\mu_2}\left(\left(\frac{1}{2} - \frac{\mu_2}{2\gamma r}\right)W_{\mu_2,s}(2\gamma r) - \frac{W_{\mu_2+1,s}(2\gamma r)}{2\gamma r}\right)\Bigg]\Bigg|_{\mu_2=\nu+1/2}\\
&\begin{bmatrix}+\\ -\end{bmatrix} 2\left(m_j - \frac{Q}{\gamma}\right)\\
&\times\Bigg[\left(\left(\frac{1}{2} - \frac{\nu+1/2}{2\gamma r}\right)W_{\nu+1/2,s}(2\gamma r) - \frac{W_{\nu+3/2,s}(2\gamma r)}{2\gamma r}\right)W_{\nu-1/2,s}(2\gamma r)\\
&-\left(\left(\frac{1}{2} - \frac{\nu-1/2}{2\gamma r}\right)W_{\nu-1/2,s}(2\gamma r) - \frac{W_{\nu+1/2,s}(2\gamma r)}{2\gamma r}\right)W_{\nu+1/2,s}(2\gamma r)\Bigg]\Bigg\}\ .
\end{aligned}
\tag{Б.16}
$$

В (Б.13–Б.16) использованы те же обозначения что и в разделе 2.3.1. На следующем шаге вычисляется предел $R_1 \to \infty$. При этом линейные по Q логарифмически расходящиеся члены, следующие из асимптотики (2.38), сокращаются, и

$$
\begin{aligned}
&\lim_{R_1\to\infty} \mathrm{Re}\left[\int\limits_0^{R_1} r\,dr\,\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}_{|m_j|}(r,r;iy) - 2Q\left(\frac{\partial}{\partial Q}\int\limits_0^{R_1} r\,dr\,\mathrm{Tr}\,\mathrm{G}_{m_j}(r,r;iy)\right)_{Q=0}\right] \\
&= \mathrm{Re}\Bigg[\frac{1}{[\mathcal{I},\mathcal{K}]}\left(J_1 - \frac{[\mathcal{K},\mathcal{W}]_R}{[\mathcal{I},\mathcal{W}]_R}J_2\right) + \frac{1}{[\mathcal{I},\mathcal{K}]}\left(J_1 - \frac{[\mathcal{K},\mathcal{W}]_R}{[\mathcal{I},\mathcal{W}]_R}J_2\right)_{m_j\to -m_j} \\
&-\frac{1}{[\mathcal{M},\mathcal{W}]}\left(\overline{J_3}(R) - \frac{[\mathcal{I},\mathcal{M}]_R}{[\mathcal{I},\mathcal{W}]_R}\left(\overline{J_{41}}(R)+\overline{J_{42}}(R)\right)\right) \\
&-\frac{1}{[\mathcal{M},\mathcal{W}]}\left(\overline{J_3}(R) - \frac{[\mathcal{I},\mathcal{M}]_R}{[\mathcal{I},\mathcal{W}]_R}\left(\overline{J_{41}}(R)+\overline{J_{42}}(R)\right)\right)_{m_j\to -m_j} \\
&-2Q\Bigg[\frac{\partial}{\partial Q}\Bigg(\frac{1}{[\mathcal{I},\mathcal{K}]}\left(J_1 - \frac{[\mathcal{K},\mathcal{W}]_R}{[\mathcal{I},\mathcal{W}]_R}J_2\right) \\
&-\frac{1}{[\mathcal{M},\mathcal{W}]}\left(\overline{J_3}(R) - \frac{[\mathcal{I},\mathcal{M}]_R}{[\mathcal{I},\mathcal{W}]_R}\left(\overline{J_{41}}(R)+\overline{J_{42}}(R)\right)\right)\Bigg)\Bigg]_{Q=0}\Bigg]_{\epsilon=iy}.
\end{aligned} \tag{Б.17}
$$

В (Б.17) производные по Q не выписаны явно из-за их громоздкого вида.

В результате остается всего лишь один интеграл по dy, который, несмотря на сложный вид подынтегрального выражения, не приводит к каким-либо трудностям, т.к. его сходимость доказана. Более того, асимптотическое поведение подынтегрального выражения оценивается $\sim 1/|y|^5$ (см. раздел 2.3.1). Таким образом, интегрирование может быть проделано стандартными численными методами, и с помощью (Б.10–Б.17) проверяется, что в докритической области при отсутствии отрицательных дискретных уровней индуцированный вакуумный заряд равен нулю. Более конкретно, численные расчеты с рабочей точностью 100 и относительной точностью 15 показали, что при $Z = 50$ (отрицательные дискретные уровни отсутствуют) $Q^{(3+)}_{\mathrm{VP},1/2} = 2.5582\times 10^{-30}|e|$, $Q^{(3+)}_{\mathrm{VP},3/2} = 2.4007\times 10^{-41}|e|$, тогда как остальные парциальные индуцированные заряды $Q^{(3+)}_{\mathrm{VP},|m_j|}$ при увеличении m_j становятся еще меньше по закону $|m_j|^{-3}$. Эти результаты подтверждают, что в докритической области $Q^{ren}_{\mathrm{VP}} \equiv 0$. Таким же способом показывается, что в закритической области $Z > Z_{cr,1}$ индуцированный вакуумный заряд Q^{ren}_{VP} равен целому числу $(-2|e|)$ (с учетом кратности вырождения) в зависимости от количества погрузившихся в нижний континуум уровней дискретного спектра.

Приложение B

Решение систем радиальных уравнений во внешних аксиально-симметричном кулоновском и аксиальном векторном потенциалах в 2+1D. Трансцендентные уравнения для определения критических зарядов.

Системы радиальных уравнений Дирака в кулоновском поле сферического источника и аксиальном векторном поле в 2+1D имеют вид

$$\begin{cases} \phi_1'(r) + \left(\dfrac{1/2 - m_j}{r} - |e|A^{\text{ext}}(r)\right)\phi_1(r) = (\epsilon - V(r) + 1)\,\chi_2(r)\ , \\ \chi_2'(r) + \left(\dfrac{1/2 + m_j}{r} + |e|A^{\text{ext}}(r)\right)\chi_2(r) = -\,(\epsilon - V(r) - 1)\,\phi_1(r)\ , \end{cases} \tag{B.1}$$

и

$$\begin{cases} \phi_2'(r) + \left(\dfrac{1/2 + m_j}{r} + |e|A^{\text{ext}}(r)\right)\phi_2(r) = (\epsilon - V(r) + 1)\,\chi_1(r)\ , \\ \chi_1'(r) + \left(\dfrac{1/2 - m_j}{r} - |e|A^{\text{ext}}(r)\right)\chi_1(r) = -\,(\epsilon - V(r) - 1)\,\phi_2(r)\ , \end{cases} \tag{B.2}$$

где

$$V(r) = \begin{cases} -\,V_0\ , & r \leqslant R_0\ , \\ -\,\dfrac{Q}{r}\ , & r > R_0\ , \end{cases} \qquad A^{\text{ext}}(r) = \frac{\lambda}{|e|}\begin{cases} r, & r \leqslant R_0\ , \\ \dfrac{R_0^2}{r}, & r > R_0\ , \end{cases} \tag{B.3}$$
$$Q = Z\alpha\ , \quad V_0 = Q/R_0\ , \quad \lambda = |e|H_0/2\ .$$

Получим решение системы уравнений (B.1). Решение системы уравнений (B.2) получится заменой $m_j \to -m_j$, $\lambda \to -\lambda$, $\phi_1 \to \phi_2$, $\chi_2 \to \chi_1$ в решениях системы (B.1).

$\boxed{\mathbf{1}}$ Система уравнений (B.1) при $r < R_0$ запишется в следующем виде:

$$\begin{cases} \phi_1'(r) + \left(\dfrac{1/2 - m_j}{r} - \lambda r\right)\phi_1(r) = (\epsilon + V_0 + 1)\,\chi_2(r)\ , \\ \chi_2'(r) + \left(\dfrac{1/2 + m_j}{r} + \lambda r\right)\chi_2(r) = -\,(\epsilon + V_0 - 1)\,\phi_1(r)\ , \end{cases} \tag{B.4}$$

Определим согласованное друг с другом регулярное поведение решений системы (B.4) при $r \to 0$ и $r \to \infty$.

При $r \to 0$ система уравнений (B.4) запишется в виде

$$\begin{cases} \phi_1'(r) + \dfrac{1/2 - m_j}{r}\phi_1(r) = (\epsilon + V_0 + 1)\,\chi_2(r) \ , \\ \chi_2'(r) + \dfrac{1/2 + m_j}{r}\chi_2(r) = -(\epsilon + V_0 - 1)\,\phi_1(r) \ . \end{cases} \tag{B.5}$$

Выразим χ_2 через ϕ_1 из первого уравнения системы (B.5):

$$\begin{aligned} \chi_2(r) &= \frac{1}{\epsilon + V_0 + 1}\left[\phi_1'(r) + \frac{1/2 - m_j}{r}\phi_1(r)\right] \ , \\ \chi_2'(r) &= \frac{1}{\epsilon + V_0 + 1}\left[\phi_1''(r) + \frac{1/2 - m_j}{r}\phi_1'(r) - \frac{1/2 - m_j}{r^2}\phi_1(r)\right] \ . \end{aligned} \tag{B.6}$$

Подставляя (B.6) во второе уравнение системы (B.5), получаем

$$\phi_1''(r) + \frac{1}{r}\phi_1'(r) - \frac{(m_j - 1/2)^2}{r^2}\phi_1(r) + \left[(\epsilon + V_0)^2 - 1\right]\phi_1(r) = 0 \ . \tag{B.7}$$

Т.к. рассматривается поведение при $r \to 0$, то последним членом в (B.7) можно пренебречь.

$$\phi_1''(r) + \frac{1}{r}\phi_1'(r) - \frac{(m_j - 1/2)^2}{r^2}\phi_1(r) = 0 \ . \tag{B.8}$$

Решение (B.8) ищем в виде

$$\phi_1(r) = A\,r^{\sigma} \ . \tag{B.9}$$

Подставляя (B.9) в (B.8), получаем алгебраическое уравнение на σ:

$$\sigma(\sigma - 1) + \sigma - (m_j - 1/2)^2 = 0 \ , \quad \sigma^2 = (m_j - 1/2)^2 \ , \quad \sigma = |m_j - 1/2| \ . \tag{B.10}$$

В итоге определяем регулярное поведение решений (B.4) при $r \to 0$:

$$\phi_1(r) = A\,r^{|m_j - 1/2|} \ , \qquad \chi_2(r) = \frac{A}{\epsilon + V_0 + 1}\left(|m_j - 1/2| + 1/2 - m_j\right) r^{|m_j - 1/2| - 1} \ . \tag{B.11}$$

Из (B.11) видно, что выражая χ_2 из второго уравнения системы и подставляя в первое, мы определяем регулярное поведение решений при $r \to 0$ только для

$m_j \leqslant -1/2$ (при $m_j \geqslant 1/2$ из (B.11) следует, что $\chi_2(r) \equiv 0$):

$$\phi_1\left(r\right) = A\,r^{1/2-m_j}, \qquad \chi_2\left(r\right) = \frac{A}{\epsilon + V_0 + 1}\left(1 - 2m_j\right)r^{-m_j-1/2}. \tag{B.12}$$

Для определения регулярного поведения решений в нуле для $m_j \geqslant 1/2$, выразим ϕ_1 через χ_2 из второго уравнения системы (B.5):

$$\begin{aligned} \phi_1\left(r\right) &= -\frac{1}{\epsilon + V_0 - 1}\left[\chi_2'\left(r\right) + \frac{1/2 + m_j}{r}\chi_2\left(r\right)\right]\,, \\ \phi_1'\left(r\right) &= -\frac{1}{\epsilon + V_0 - 1}\left[\chi_2''\left(r\right) + \frac{1/2 + m_j}{r}\chi_2'\left(r\right) - \frac{1/2 + m_j}{r^2}\chi_2\left(r\right)\right]\,. \end{aligned} \tag{B.13}$$

Подставляя (B.13) во второе уравнение системы (B.5), получаем

$$\chi_2''\left(r\right) + \frac{1}{r}\chi_2'\left(r\right) - \frac{\left(m_j + 1/2\right)^2}{r^2}\chi_2\left(r\right) + \left[\left(\epsilon + V_0\right)^2 - 1\right]\chi_2\left(r\right) = 0\,. \tag{B.14}$$

Т.к. рассматривается поведение при $r \to 0$, то последним членом в (B.14) можно пренебречь.

$$\chi_2''\left(r\right) + \frac{1}{r}\chi_2'\left(r\right) - \frac{\left(m_j + 1/2\right)^2}{r^2}\chi_2\left(r\right) = 0\,. \tag{B.15}$$

Решение (B.15) ищем в виде

$$\chi_2\left(r\right) = B\,r^{\sigma}\,. \tag{B.16}$$

Подставляя (B.16) в (B.15), получаем алгебраическое уравнение на σ:

$$\sigma\left(\sigma - 1\right) + \sigma - \left(m_j + 1/2\right)^2 = 0\,, \quad \sigma^2 = \left(m_j + 1/2\right)^2\,, \quad \sigma = \left|m_j + 1/2\right|\,. \tag{B.17}$$

В итоге определяем регулярное поведение решений (B.4) при $r \to 0$ и $m_j \geqslant 1/2$:

$$\phi_1\left(r\right) = -B\frac{1}{\epsilon + V_0 - 1}\left(1 + 2m_j\right)r^{m_j-1/2}\,, \qquad \chi_2\left(r\right) = B\,r^{m_j+1/2}\,. \tag{B.18}$$

Переопределяя константы A и B в (B.12) и (B.18), запишем регулярное поведение решений при $r \to 0$ в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
&m_j \geqslant 1/2: \quad && \phi_1(r) = B(1+2m_j)\, r^{m_j-1/2}, \quad && \chi_2(r) = B(1-\epsilon-V_0)\, r^{m_j+1/2}; \\
&m_j \leqslant -1/2: \quad && \phi_1(r) = A(1+\epsilon+V_0)\, r^{1/2-m_j}, \quad && \chi_2(r) = A(1-2m_j)\, r^{-m_j-1/2}.
\end{aligned}
\tag{B.19}
$$

Определим согласованное друг с другом регулярное поведение решений системы уравнений (B.4) на бесконечности. При $r \to \infty$ (B.4) запишется в виде

$$
\begin{cases}
\phi_1'(r) - \lambda r\, \phi_1(r) = (\epsilon + V_0 + 1)\, \chi_2(r), \\
\chi_2'(r) + \lambda r\, \chi_2(r) = -(\epsilon + V_0 - 1)\, \phi_1(r).
\end{cases}
\tag{B.20}
$$

Выражая χ_2 через ϕ_1 из первого уравнения системы (B.20)

$$
\begin{aligned}
\chi_2(r) &= \frac{1}{\epsilon + V_0 + 1}\left[\phi_1'(r) - \lambda r \phi_1(r)\right], \\
\chi_2'(r) &= \frac{1}{\epsilon + V_0 + 1}\left[\phi_1''(r) - \lambda r \phi_1'(r) - \lambda \phi_1(r)\right],
\end{aligned}
\tag{B.21}
$$

и подставляя во второе уравнение, имеем

$$
\phi_1''(r) - \lambda^2 r^2 \phi_1(r) + \left[(\epsilon + V_0)^2 - 1 - \lambda\right] \phi_1(r) = 0. \tag{B.22}
$$

Т.к. рассматривается поведение решений при $r \to \infty$, то последним членом в (B.22) можно пренебречь.

$$
\phi_1''(r) - \lambda^2 r^2 \phi_1(r) = 0. \tag{B.23}
$$

Общее решение (B.23) запишется в виде линейной комбинации функций параболического цилиндра (функций Вебера):

$$
\phi_1(r) = C_1 D_{-\frac{1}{2}}\left(\sqrt{2\lambda} r\right) + C_2 D_{-\frac{1}{2}}\left(i\sqrt{2\lambda} r\right). \tag{B.24}
$$

Из (B.24), с учетом асимптотики функций параболического цилиндра при больших значениях аргумента, получаем регулярное на бесконечности поведение решений системы (B.4):

$$
\phi_1(r) = A\frac{1}{\sqrt{r}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|\lambda| r^2}, \quad \chi_2(r) = -A\frac{1}{\epsilon + V_0 + 1} \frac{1 + 2r^2(\lambda + |\lambda|)}{2r^{3/2}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|\lambda| r^2}. \tag{B.25}
$$

Таким образом, при $\lambda > 0$

$$\phi_1(r) = A\frac{1}{\sqrt{r}}e^{-\frac{1}{2}\lambda r^2}\ , \quad \chi_2(r) = -A\frac{2\lambda\sqrt{r}}{\epsilon + V_0 + 1}e^{-\frac{1}{2}\lambda r^2}\ , \tag{B.26}$$

при $\lambda < 0$

$$\phi_1(r) = A\frac{1}{\sqrt{r}}e^{-\frac{1}{2}|\lambda| r^2}\ , \quad \chi_2(r) = -A\frac{1}{\epsilon + V_0 + 1}\frac{1}{2r^{3/2}}e^{-\frac{1}{2}|\lambda| r^2}\ . \tag{B.27}$$

При рассмотрении регулярного на бесконечности поведения решений системы уравнений (B.4) необходимо помнить о том, что в рассматриваемой задаче $\lambda > 0$. Для получения решений второй системы уравнений (B.2) необходимо провести замену $\phi_1 \to \phi_2$, $\chi_2 \to \chi_1$, $m_j \to -m_j$, $\lambda \to -\lambda$. Однако, как можно заметить из (B.26), замена $\lambda \to -\lambda$ ($\lambda > 0$) в регулярном на бесконечности поведении решений системы (B.4) приводит к иррегулярному поведению решений соответствующей системы для ϕ_2 и χ_1. Поэтому правильные решения системы (B.2) при $r < R_0$ получается из решений системы (B.4) с $\lambda < 0$ с последующей заменой $\phi_1 \to \phi_2$, $\chi_2 \to \chi_1$, $m_j \to -m_j$. В связи с этим, далее рассматриваются четыре случая параметров системы уравнений (B.4): 1) $m_j \geqslant 1/2$, $\lambda > 0$; 2) $m_j \leqslant -1/2$, $\lambda > 0$; 3) $m_j \geqslant 1/2$, $\lambda < 0$; 4) $m_j \leqslant 1/2$, $\lambda < 0$.

1) Для $m_j \geqslant 1/2$ и $\lambda > 0$, согласно (B.19) и (B.26), решения системы(B.4) ищем в виде

$$\phi_1(r) = (1 + 2m_j)\, r^{m_j - 1} e^{-\frac{1}{2}\lambda r^2} f(r)\ , \quad \chi_2(r) = -2\lambda\frac{1 - \epsilon - V_0}{1 + \epsilon + V_0} r^{m_j + 1} e^{-\frac{1}{2}\lambda r^2} g(r)\ . \tag{B.28}$$

Подставляя (B.28) в (B.4), получаем

$$\begin{cases} f'(r) - \left(2\lambda r + \dfrac{1}{2r}\right) f(r) = -\dfrac{\lambda r^2}{m_j + 1/2}(1 - \epsilon - V_0)\, g(r)\ , \\ g'(r) + \dfrac{4m_j + 3}{2r} g(r) = -\left(m_j + \dfrac{1}{2}\right)(1 + \epsilon + V_0)\dfrac{1}{\lambda r^2} f(r)\ . \end{cases} \tag{B.29}$$

Выражая g через f из первого уравнения системы (B.29)

$$g(r) = -\frac{m_j + 1/2}{\lambda r^2 (1 - \epsilon - V_0)}\left[f'(r) - \left(2\lambda r + \frac{1}{2r}\right) f(r)\right]\ , \tag{B.30}$$

и подставляя во второе уравнение, имеем

$$f''(r) + \frac{2m_j - 2\lambda r^2 - 1}{r} f'(r) + \left[(\epsilon + V_0)^2 - 4m_j\lambda - \lambda - 1 + \frac{3/4 - m_j}{r^2} \right] f(r) = 0 \; . \tag{B.31}$$

Общее решение уравнения (B.31) записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} f(z) = C_1 z^{1/4} \Phi \left[\frac{1 - (\epsilon + V_0)^2}{4\lambda} + m_j + \frac{1}{2}, m_j + \frac{1}{2}, z \right] + \\ + C_2 z^{1/4} \Psi \left[\frac{1 - (\epsilon + V_0)^2}{4\lambda} + m_j + \frac{1}{2}, m_j + \frac{1}{2}, z \right] \; , \end{aligned} \tag{B.32}$$

где $\Phi(a,b,x)$, $\Psi(a,b,x)$ – функции Куммера и Трикоми соответственно [67], а $z = \lambda r^2$. Из (B.30) имеем

$$\begin{aligned} g(z) = -C_1 \frac{1 + \epsilon + V_0}{2\sqrt{\lambda} z^{1/4}} \Phi \left[\frac{1 - (\epsilon + V_0)^2}{4\lambda} + m_j + \frac{1}{2}, m_j + \frac{3}{2}, z \right] + \\ + C_2 \frac{1 + 2m_j}{1 - \epsilon - V_0} \frac{\sqrt{\lambda}}{z^{1/4}} \Psi \left[\frac{1 - (\epsilon + V_0)^2}{4\lambda} + m_j + \frac{1}{2}, m_j + \frac{3}{2}, z \right] \; . \end{aligned} \tag{B.33}$$

Из (B.28) с учетом (B.32) и (B.33) получаем общее решение системы уравнений (B.4):

$$\begin{aligned} \phi_1(z) = (1 + 2m_j) \lambda^{1/2 - m_j/2} z^{m_j/2 - 1/4} \mathrm{e}^{-z/2} \times \\ \times \Bigg(C_1 \Phi \left[\frac{1 - (\epsilon + V_0)^2}{4\lambda} + m_j + \frac{1}{2}, m_j + \frac{1}{2}, z \right] + \\ + C_2 \Psi \left[\frac{1 - (\epsilon + V_0)^2}{4\lambda} + m_j + \frac{1}{2}, m_j + \frac{1}{2}, z \right] \Bigg) \; , \\ \chi_2(z) = C_1 (1 - \epsilon - V_0) \lambda^{-m_j/2} z^{m_j/2 + 1/4} \mathrm{e}^{-z/2} \times \\ \times \Phi \left[\frac{1 - (\epsilon + V_0)^2}{4\lambda} + m_j + \frac{1}{2}, m_j + \frac{3}{2}, z \right] + \\ + C_2 (-2) \frac{1 + 2m_j}{1 + \epsilon + V_0} \lambda^{-m_j/2 + 1} z^{m_j/2 + 1/4} \mathrm{e}^{-z/2} \times \\ \times \Psi \left[\frac{1 - (\epsilon + V_0)^2}{4\lambda} + m_j + \frac{1}{2}, m_j + \frac{3}{2}, z \right] . \end{aligned} \tag{B.34}$$

Переопределяя постоянные в (B.34)

$$C_1 \to \lambda^{m_j/2} C_1, \quad C_2 \to \frac{1+\epsilon+V_0}{1+2m_j}\lambda^{m_j/2-1/2} C_2 \ , \tag{B.35}$$

запишем решения в виде

$$\begin{aligned}
\phi_1(z) &= C_1(1+2m_j)\sqrt{\lambda} z^{m_j/2-1/4} \mathrm{e}^{-z/2} \Phi\left[\frac{1-(\epsilon+V_0)^2}{4\lambda} + m_j + \frac{1}{2}, m_j + \frac{1}{2}, z\right] + \\
&\quad + C_2\left(1+\epsilon+V_0\right) z^{m_j/2-1/4} \mathrm{e}^{-z/2} \Psi\left[\frac{1-(\epsilon+V_0)^2}{4\lambda} + m_j + \frac{1}{2}, m_j + \frac{1}{2}, z\right], \\
\chi_2(z) &= C_1\left(1-\epsilon-V_0\right) z^{m_j/2+1/4} \mathrm{e}^{-z/2} \Phi\left[\frac{1-(\epsilon+V_0)^2}{4\lambda} + m_j + \frac{1}{2}, m_j + \frac{3}{2}, z\right] + \\
&\quad + C_2(-2)\sqrt{\lambda} z^{m_j/2+1/4} \mathrm{e}^{-z/2} \Psi\left[\frac{1-(\epsilon+V_0)^2}{4\lambda} + m_j + \frac{1}{2}, m_j + \frac{3}{2}, z\right].
\end{aligned} \tag{B.36}$$

Оказывается удобным перейти к функциям Уиттекера [72], которые связаны с вырожденными гипергеометрическими функциями через соотношения:

$$\begin{aligned}
M_{b,c}(z) &= \mathrm{e}^{-z/2} z^{c+1/2} \Phi(1/2+c-b, 1+2c, z), \\
W_{b,c}(z) &= \mathrm{e}^{-z/2} z^{c+1/2} \Psi(1/2+c-b, 1+2c, z).
\end{aligned} \tag{B.37}$$

Окончательно, решения (B.4) для $m_j \geqslant 1/2$ и $\lambda > 0$ примут вид

$$\begin{aligned}
\phi_1(z) &= C_1(1+2m_j)\sqrt{\frac{\lambda}{z}} M_{b,c}(z) + C_2 \frac{1+\epsilon+V_0}{\sqrt{z}} W_{b,c}(z) \ , \\
\chi_2(z) &= C_1\left(1-\epsilon-V_0\right)\frac{1}{\sqrt{z}} M_{b+1/2,c+1/2}(z) + C_2(-2)\sqrt{\frac{\lambda}{z}} W_{b+1/2,c+1/2}(z) \ ,
\end{aligned} \tag{B.38}$$

где

$$c = \frac{1}{2}\left(m_j - \frac{1}{2}\right) \ , \quad \omega = \frac{1-(\epsilon+V_0)^2}{4} \ , \quad b = -\frac{\omega}{\lambda} - \frac{1}{2}\left(m_j + \frac{1}{2}\right) \ , \quad z = \lambda r^2 \ . \tag{B.39}$$

2) Для $m_j \leqslant -1/2$ и $\lambda > 0$, согласно (B.19) и (B.26), решения системы (B.4) ищем в виде

$$\phi_1(r) = (1+\epsilon+V_0)\, r^{-m_j} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\lambda r^2} f(r) \ , \quad \chi_2(r) = -2\lambda \frac{1-2m_j}{1+\epsilon+V_0} r^{-m_j} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\lambda r^2} g(r) \ . \tag{B.40}$$

Подставляя (B.40) в (B.4), получаем

$$\begin{cases} f'(r) + \dfrac{1-4m_j-4\lambda r^2}{2r} f(r) = -2\lambda \dfrac{1-2m_j}{1+\epsilon+V_0}\, g(r) \ , \\ g'(r) + \dfrac{1}{2r} g(r) = -\dfrac{1}{2\lambda(1-2m_j)} (1+\epsilon+V_0)^2 (1-\epsilon-V_0) f(r) \ . \end{cases} \tag{B.41}$$

Выражая f через g из второго уравнения системы (B.41)

$$f(r) = -\frac{2\lambda(1-2m_j)}{(1-\epsilon-V_0)(1+\epsilon+V_0)^2} \left[g'(r) + \frac{1}{2r} g(r) \right] \ , \tag{B.42}$$

и подставляя в первое уравнение, имеем

$$g''(r) + \frac{1-2m_j-2\lambda r^2}{r} f'(r) + \left[(\epsilon+V_0)^2 - \lambda - 1 - \frac{m_j+1/4}{r^2} \right] f(r) = 0 \ . \tag{B.43}$$

Общее решение (B.43) записывается в следующем виде:

$$g(z) = C_1 \frac{1}{z^{1/4}} \Phi\left[\frac{\omega}{\lambda}, \frac{1}{2} - m_j, z \right] + C_2 \frac{1}{z^{1/4}} \Psi\left[\frac{\omega}{\lambda}, \frac{1}{2} - m_j, z \right] \ . \tag{B.44}$$

Из (B.42) имеем

$$\begin{aligned} f(z) = {} & C_1 (-2) \sqrt{\lambda} z^{1/4} \frac{1}{1+\epsilon+V_0} \Phi\left[\frac{\omega}{\lambda} + 1, \frac{3}{2} - m_j, z \right] + \\ & + C_2 (1-2m_j) \sqrt{\lambda} z^{1/4} \frac{1}{1+\epsilon+V_0} \Psi\left[\frac{\omega}{\lambda} + 1, \frac{3}{2} - m_j, z \right] \ . \end{aligned} \tag{B.45}$$

Из (B.40) с учетом (B.44) и (B.45) получаем общее решение системы уравнений (B.4):

$$\begin{aligned}
\phi_1(z) &= C_1(-2)\lambda^{1/2+m_j/2} z^{1/4-m_j/2} \mathrm{e}^{-z/2} \Phi\left[\frac{\omega}{\lambda}+1, \frac{3}{2}-m_j, z\right] + \\
&\quad + C_2(1-2m_j)\lambda^{1/2+m_j/2} z^{1/4-m_j/2} \mathrm{e}^{-z/2} \Psi\left[\frac{\omega}{\lambda}+1, \frac{3}{2}-m_j, z\right], \\
\chi_2(z) &= C_1(-2)\lambda^{m_j/2+1} \frac{1-2m_j}{1+\epsilon+V_0} z^{-m_j/2-1/4} \mathrm{e}^{-z/2} \Phi\left[\frac{\omega}{\lambda}, \frac{1}{2}-m_j, z\right] + \\
&\quad + C_2(-2)\lambda^{m_j/2+1} \frac{1-2m_j}{1+\epsilon+V_0} z^{-m_j/2-1/4} \mathrm{e}^{-z/2} \Psi\left[\frac{\omega}{\lambda}, \frac{1}{2}-m_j, z\right].
\end{aligned} \tag{B.46}$$

Переопределяя постоянные в (B.46)

$$C_1 \to -C_1 \frac{1+\epsilon+V_0}{2} \lambda^{-m_j/2-1/2}, \quad C_2 \to C_2 \frac{1+\epsilon+V_0}{1-2m_j} \lambda^{-m_j/2-1/2}, \tag{B.47}$$

запишем решения в виде

$$\begin{aligned}
\phi_1(z) &= C_1 (1+\epsilon+V_0)\, z^{1/4-m_j/2} \mathrm{e}^{-z/2} \Phi\left[\frac{\omega}{\lambda}+1, \frac{3}{2}-m_j, z\right] + \\
&\quad + C_2 (1+\epsilon+V_0)\, z^{1/4-m_j/2} \mathrm{e}^{-z/2} \Psi\left[\frac{\omega}{\lambda}+1, \frac{3}{2}-m_j, z\right], \\
\chi_2(z) &= C_1 \sqrt{\lambda}\, (1-2m_j)\, z^{-m_j/2-1/4} \mathrm{e}^{-z/2} \Phi\left[\frac{\omega}{\lambda}, \frac{1}{2}-m_j, z\right] + \\
&\quad + C_2(-2)\sqrt{\lambda} z^{-m_j/2-1/4} \mathrm{e}^{-z/2} \Psi\left[\frac{\omega}{\lambda}, \frac{1}{2}-m_j, z\right].
\end{aligned} \tag{B.48}$$

Удобно записать (B.48) через функции Уиттекера с теми же c и b (B.39):

$$\begin{aligned}
\phi_1(z) &= C_1 \frac{1+\epsilon+V_0}{\sqrt{z}} M_{b,|c|}(z) + C_2 \frac{1+\epsilon+V_0}{\sqrt{z}} W_{b,|c|}(z), \\
\chi_2(z) &= C_1 (1-2m_j) \sqrt{\frac{\lambda}{z}} M_{b+1/2,|c+1/2|}(z) + C_2(-2)\sqrt{\frac{\lambda}{z}} W_{b+1/2,|c+1/2|}(z).
\end{aligned} \tag{B.49}$$

Из (B.38) и (B.49) следует, что для $\lambda > 0$ и произвольного m_j решения системы уравнений (B.1) при $r < R_0$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
\phi_1(z) &= C_1 \left[\frac{1}{2}\left(\frac{m_j}{|m_j|}+1\right)(1+2m_j)\sqrt{\lambda} - \frac{1}{2}\left(\frac{m_j}{|m_j|}-1\right)(1+\epsilon+V_0)\right] \times \\
&\times \frac{1}{\sqrt{z}} M_{b,|c|}(z) + C_2 \frac{1+\epsilon+V_0}{\sqrt{z}} W_{b,|c|}(z) \ , \\
\chi_2(z) &= C_1 \left[\frac{1}{2}\left(\frac{m_j}{|m_j|}+1\right)(1-\epsilon-V_0) - \frac{1}{2}\left(\frac{m_j}{|m_j|}-1\right)(1-2m_j)\sqrt{\lambda}\right] \times \\
&\times \frac{1}{\sqrt{z}} M_{b+1/2,|c+1/2|}(z) + C_2(-2)\sqrt{\frac{\lambda}{z}} W_{b+1/2,|c+1/2|}(z) \ .
\end{aligned} \tag{B.50}$$

3) Для $m_j \geqslant 1/2$ и $\lambda < 0$, согласно (B.19) и (B.27), решения системы (B.4) ищем в виде

$$\phi_1(r) = (1+2m_j)\, r^{m_j-1} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|\lambda| r^2} f(r) \ , \quad \chi_2(r) = -\frac{1}{2}\frac{1-\epsilon-V_0}{1+\epsilon+V_0} r^{m_j-1} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|\lambda| r^2} g(r) \ . \tag{B.51}$$

Подставляя (B.51) в (B.4), получаем

$$\begin{cases}
f'(r) - \dfrac{1}{2r} f(r) = -\dfrac{1}{2(1+2m_j)} (1-\epsilon-V_0)\, g(r) \ , \\
g'(r) - \dfrac{1-4m_j+4|\lambda| r^2}{2r} g(r) = -2(1+2m_j)(1+\epsilon+V_0) f(r) \ .
\end{cases} \tag{B.52}$$

Выражая g через f из первого уравнения системы (B.52)

$$g(r) = -\frac{2(1+2m_j)}{1-\epsilon-V_0}\left[f'(r) - \frac{1}{2r} f(r)\right] \ , \tag{B.53}$$

и подставляя во второе уравнение, имеем

$$f''(r) + \frac{2m_j - 2|\lambda| r^2 - 1}{r} f'(r) + \left[(\epsilon+V_0)^2 + |\lambda| - 1 + \frac{3/4 - m_j}{r^2}\right] f(r) = 0 \ , \tag{B.54}$$

Общее решение (B.54) записывается в следующем виде:

$$f(z) = C_1 |z|^{1/4} \Phi\left[\frac{\omega}{|\lambda|}, m_j + \frac{1}{2}, |z|\right] + C_2 |z|^{1/4} \Psi\left[\frac{\omega}{|\lambda|}, m_j + \frac{1}{2}, |z|\right] \ . \tag{B.55}$$

Из (B.53) имеем

$$g(z) = C_1(-2)|\lambda|^{-1/2}|z|^{3/4}\,(1+\epsilon+V_0)\,\Phi\left[\frac{\omega}{|\lambda|}+1,m_j+\frac{3}{2},|z|\right]+ \\ + C_2|\lambda|^{-1/2}|z|^{3/4}(1+2m_j)\,(1+\epsilon+V_0)\,\Psi\left[\frac{\omega}{|\lambda|}+1,m_j+\frac{3}{2},|z|\right]\ . \tag{B.56}$$

Из (B.51) с учетом (B.55) и (B.56) получаем общее решение системы уравнений (B.4):

$$\phi_1(z) = (1+2m_j)|\lambda|^{1/2-m_j/2}|z|^{m_j/2-1/4}\mathrm{e}^{-|z|/2}\left(C_1\Phi\left[\frac{\omega}{|\lambda|},m_j+\frac{1}{2},|z|\right]+ \right. \\ \left. +C_2\Psi\left[\frac{\omega}{|\lambda|},m_j+\frac{1}{2},|z|\right]\right)\ , \\ \chi_2(z) = |\lambda|^{-m_j/2}|z|^{m_j/2+1/4}\,(1-\epsilon-V_0)\,\mathrm{e}^{-|z|/2}\left(C_1\Phi\left[\frac{\omega}{|\lambda|}+1,m_j+\frac{3}{2},|z|\right]+ \right. \\ \left. +C_2\left(-\frac{1}{2}\right)(1+2m_j)\Psi\left[\frac{\omega}{|\lambda|}+1,m_j+\frac{3}{2},|z|\right]\right)\ . \tag{B.57}$$

Переопределяя постоянные в (B.57)

$$C_1 \to C_1|\lambda|^{m_j/2}\ , \qquad C_2 \to C_2(-2)|\lambda|^{m_j/2}/(1+2m_j)\ , \tag{B.58}$$

запишем решения в виде

$$\phi_1(z) = C_1(1+2m_j)\sqrt{|\lambda|}|z|^{m_j/2-1/4}\mathrm{e}^{-|z|/2}\Phi\left[\frac{\omega}{|\lambda|},m_j+\frac{1}{2},|z|\right]+ \\ + C_2(-2)\sqrt{|\lambda|}|z|^{m_j/2-1/4}\mathrm{e}^{-|z|/2}\Psi\left[\frac{\omega}{|\lambda|},m_j+\frac{1}{2},|z|\right]\ , \\ \chi_2(z) = C_1\,(1-\epsilon-V_0)\,|z|^{m_j/2+1/4}\mathrm{e}^{-|z|/2}\Phi\left[\frac{\omega}{|\lambda|}+1,m_j+\frac{3}{2},|z|\right]+ \\ + C_2\,(1-\epsilon-V_0)\,|z|^{m_j/2+1/4}\mathrm{e}^{-|z|/2}\Psi\left[\frac{\omega}{|\lambda|}+1,m_j+\frac{3}{2},|z|\right]\ . \tag{B.59}$$

Произведя в (B.59) замену $\phi_1 \to \phi_2$, $\chi_2 \to \chi_1$ и $m_j \to -m_j$, получаем решения системы уравнений для ϕ_2 и χ_1 (B.2) при $r < R_0$ для $m_j \leqslant -1/2$ и $\lambda > 0$:

$$
\begin{aligned}
\phi_2(z) &= C_1(1-2m_j)\sqrt{\lambda}z^{-m_j/2-1/4}\mathrm{e}^{-z/2}\Phi\left[\frac{\omega}{\lambda}, -m_j+\frac{1}{2}, z\right] + \\
&\quad + C_2(-2)\sqrt{\lambda}z^{-m_j/2-1/4}\mathrm{e}^{-z/2}\Psi\left[\frac{\omega}{\lambda}, -m_j+\frac{1}{2}, z\right] , \\
\chi_1(z) &= C_1\left(1-\epsilon-V_0\right)z^{-m_j/2+1/4}\mathrm{e}^{-z/2}\Phi\left[\frac{\omega}{\lambda}+1, -m_j+\frac{3}{2}, z\right] + \\
&\quad + C_2\left(1-\epsilon-V_0\right)z^{-m_j/2+1/4}\mathrm{e}^{-z/2}\Psi\left[\frac{\omega}{\lambda}+1, -m_j+\frac{3}{2}, z\right] ,
\end{aligned}
\tag{B.60}
$$

или

$$
\begin{aligned}
\phi_2(z) &= C_1(1-2m_j)\sqrt{\frac{\lambda}{z}}M_{b+1/2,|c+1/2|}(z) + C_2(-2)\sqrt{\frac{\lambda}{z}}W_{b+1/2,|c+1/2|}(z) , \\
\chi_1(z) &= C_1\left(1-\epsilon-V_0\right)\frac{1}{\sqrt{z}}M_{b,|c|}(z) + C_2\frac{1-\epsilon-V_0}{\sqrt{z}}W_{b,|c|}(z) .
\end{aligned}
\tag{B.61}
$$

4) Для $m_j \leqslant -1/2$ и $\lambda < 0$, согласно (B.19) и (B.27), решения (B.4) ищем в виде

$$
\phi_1(r) = (1+\epsilon+V_0)r^{-m_j}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|\lambda|r^2}f(r) , \quad \chi_2(r) = -\frac{1}{2}\frac{1-2m_j}{1+\epsilon+V_0}r^{-m_j-2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|\lambda|r^2}g(r) .
\tag{B.62}
$$

Подставляя (B.62) в (B.4), получаем

$$
\begin{cases}
f'(r) - \dfrac{4m_j-1}{2r}f(r) = -\dfrac{1-2m_j}{1+\epsilon+V_0}\dfrac{1}{2r^2}g(r) , \\
g'(r) - \left(2|\lambda|r + \dfrac{3}{2r}\right)g(r) = -\dfrac{2r^2}{1-2m_j}\left(1-\epsilon-V_0\right)\left(1+\epsilon+V_0\right)^2 f(r) .
\end{cases}
\tag{B.63}
$$

Выражая f через g из второго уравнения системы (B.63)

$$
f(r) = -\frac{1}{2r^2}\frac{1-2m_j}{\left(1-\epsilon-V_0\right)\left(1+\epsilon+V_0\right)^2}\left[g'(r) - \left(2|\lambda|r+\frac{3}{2r}\right)g(r)\right] , \tag{B.64}
$$

и подставляя в первое уравнение, имеем

$$g''(r) - \frac{2|\lambda|r^2 + 2m_j + 3}{r} g'(r) + \\ + \left[(\epsilon + V_0)^2 + |\lambda| \left(4m_j + 1\right) - 1 + \frac{3(5 + 4m_j)}{4r^2} \right] g(r) = 0 \,. \tag{B.65}$$

Общее решение (B.65) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} g(z) = C_1 |z|^{3/4} \Phi \left[\frac{1}{2} - m_j + \frac{\omega}{|\lambda|}, \frac{1}{2} - m_j, |z| \right] + \\ + C_2 |z|^{3/4} \Psi \left[\frac{1}{2} - m_j + \frac{\omega}{|\lambda|}, \frac{1}{2} - m_j, |z| \right] \,, \end{aligned} \tag{B.66}$$

Из (B.64) имеем

$$\begin{aligned} f(z) = C_1 \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{1}{1 + \epsilon + V_0} |\lambda|^{1/2} |z|^{1/4} \Phi \left[\frac{1}{2} - m_j + \frac{\omega}{|\lambda|}, \frac{3}{2} - m_j, |z| \right] + \\ + C_2 \frac{1 - 2m_j}{(1 - \epsilon - V_0)(1 + \epsilon + V_0)^2} |\lambda|^{3/2} |z|^{1/4} \Psi \left[\frac{1}{2} - m_j + \frac{\omega}{|\lambda|}, \frac{3}{2} - m_j, |z| \right] \,. \end{aligned} \tag{B.67}$$

Из (B.62) с учетом (B.66) и (B.67) получаем общее решение системы уравнений (B.4):

$$\begin{aligned} \phi_1(z) = |\lambda|^{m_j/2 + 1/2} |z|^{-m_j/2 + 1/4} \mathrm{e}^{-|z|/2} \left(C_1 \left(-\frac{1}{2} \right) \Phi \left[\frac{1}{2} - m_j + \frac{\omega}{|\lambda|}, \frac{3}{2} - m_j, |z| \right] + \right. \\ \left. + C_2 \frac{1 - 2m_j}{(1 - \epsilon - V_0)(1 + \epsilon + V_0)} |\lambda| \Psi \left[\frac{1}{2} - m_j + \frac{\omega}{|\lambda|}, \frac{3}{2} - m_j, |z| \right] \right) \,, \\ \chi_2(z) = \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{1 - 2m_j}{1 + \epsilon + V_0} |\lambda|^{m_j/2 + 1} |z|^{-m_j/2 - 1/4} \mathrm{e}^{-|z|/2} \times \\ \times \left(C_1 \Phi \left[\frac{1}{2} - m_j + \frac{\omega}{|\lambda|}, \frac{1}{2} - m_j, |z| \right] + C_2 \Psi \left[\frac{1}{2} - m_j + \frac{\omega}{|\lambda|}, \frac{1}{2} - m_j, |z| \right] \right) \,. \end{aligned} \tag{B.68}$$

Переопределяя постоянные в (B.68)

$$\begin{aligned} C_1 \to C_1 (-2) \left(1 + \epsilon + V_0\right) |\lambda|^{-m_j/2 - 1/2} \,, \\ C_2 \to C_2 (-2) \frac{\left(1 + \epsilon + V_0\right) \left(1 - \epsilon - V_0\right)}{1 - 2m_j} |\lambda|^{-m_j/2 - 1} \,, \end{aligned} \tag{B.69}$$

запишем решения в виде

$$\begin{aligned}
\phi_1(z) = |z|^{-m_j/2+1/4}\mathrm{e}^{-|z|/2}\biggl(&C_1\left(1+\epsilon+V_0\right)\Phi\left[\frac{1}{2}-m_j+\frac{\omega}{|\lambda|},\frac{3}{2}-m_j,|z|\right]+\\
&+C_2(-2)\sqrt{|\lambda|}\Psi\left[\frac{1}{2}-m_j+\frac{\omega}{|\lambda|},\frac{3}{2}-m_j,|z|\right]\biggr)\ ,\\
\chi_2(z) = C_1(1-2m_j)\sqrt{|\lambda|}|z|^{-m_j/2-1/4}&\mathrm{e}^{-|z|/2}\Phi\left[\frac{1}{2}-m_j+\frac{\omega}{|\lambda|},\frac{1}{2}-m_j,|z|\right]+\\
&+C_2\left(1-\epsilon-V_0\right)|z|^{-m_j/2-1/4}\mathrm{e}^{-|z|/2}\Psi\left[\frac{1}{2}-m_j+\frac{\omega}{|\lambda|},\frac{1}{2}-m_j,|z|\right]\ .
\end{aligned} \tag{B.70}$$

Произведя в (B.70) замену $\phi_1 \to \phi_2$, $\chi_2 \to \chi_1$ и $m_j \to -m_j$, получаем решения системы уравнений для ϕ_2 и χ_1 (B.2) при $r < R_0$ для $m_j \geqslant 1/2$ и $\lambda > 0$:

$$\begin{aligned}
\phi_2(z) &= C_1\left(1+\epsilon+V_0\right)z^{m_j/2+1/4}\mathrm{e}^{-z/2}\Phi\left[\frac{1}{2}+m_j+\frac{\omega}{\lambda},\frac{3}{2}+m_j,z\right]+\\
&\quad+C_2(-2)\sqrt{\lambda}z^{m_j/2+1/4}\mathrm{e}^{-z/2}\Psi\left[\frac{1}{2}+m_j+\frac{\omega}{\lambda},\frac{3}{2}+m_j,z\right]\ ,\\
\chi_1(z) &= C_1(1+2m_j)\sqrt{\lambda}z^{m_j/2-1/4}\mathrm{e}^{-z/2}\Phi\left[\frac{1}{2}+m_j+\frac{\omega}{\lambda},\frac{1}{2}+m_j,z\right]+\\
&\quad+C_2\left(1-\epsilon-V_0\right)z^{m_j/2-1/4}\mathrm{e}^{-z/2}\Psi\left[\frac{1}{2}+m_j+\frac{\omega}{\lambda},\frac{1}{2}+m_j,z\right]\ .
\end{aligned} \tag{B.71}$$

или

$$\begin{aligned}
\phi_2(z) &= C_1\left(1+\epsilon+V_0\right)\frac{1}{\sqrt{z}}M_{b+1/2,c+1/2}(z)+C_2(-2)\sqrt{\frac{\lambda}{z}}W_{b+1/2,c+1/2}(z)\ ,\\
\chi_1(z) &= C_1(1+2m_j)\sqrt{\frac{\lambda}{z}}M_{b,c}(z)+C_2\frac{1-\epsilon-V_0}{\sqrt{z}}W_{b,c}(z)\ .
\end{aligned} \tag{B.72}$$

Из (B.61) и (B.72) следует, что для $\lambda > 0$ и произвольного m_j решения системы уравнений (B.2) при $r < R_0$ имеют следующий вид:

$$
\begin{aligned}
\phi_2(z) &= C_1\left[\frac{1}{2}\left(\frac{m_j}{|m_j|}+1\right)(1+\epsilon+V_0)-\frac{1}{2}\left(\frac{m_j}{|m_j|}-1\right)(1-2m_j)\sqrt{\lambda}\right]\times\\
&\times\frac{1}{\sqrt{z}}M_{b+1/2,|c+1/2|}(z)+C_2(-2)\sqrt{\frac{\lambda}{z}}W_{b+1/2,|c+1/2|}(z)\ ,\\
\chi_1(z) &= C_1\left[\frac{1}{2}\left(\frac{m_j}{|m_j|}+1\right)(1+2m_j)\sqrt{\lambda}-\frac{1}{2}\left(\frac{m_j}{|m_j|}-1\right)(1-\epsilon-V_0)\right]\times\\
&\times\frac{1}{\sqrt{z}}M_{b,|c|}(z)+C_2\frac{1-\epsilon-V_0}{\sqrt{z}}W_{b,|c|}(z)\ .
\end{aligned}
\tag{B.73}
$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ Система уравнений (B.1) при $r > R_0$ запишется в следующем виде:

$$
\begin{cases}
\phi_1'(r)+\left(\dfrac{1/2-m_j-\lambda R_0^2}{r}\right)\phi_1(r)=\left(\epsilon+\dfrac{Q}{r}+1\right)\chi_2(r)\ ,\\
\chi_2'(r)+\left(\dfrac{1/2+m_j+\lambda R_0^2}{r}\right)\chi_2(r)=-\left(\epsilon+\dfrac{Q}{r}-1\right)\phi_1(r)\ .
\end{cases}
\tag{B.74}
$$

Определим согласованное друг с другом регулярное поведение решений при $r \to 0$ и $r \to \infty$.

При $r \to 0$ система (B.74) запишется в виде

$$
\begin{cases}
\phi_1'(r)+\dfrac{1/2-m_j-\lambda R_0^2}{r}\phi_1(r)=\dfrac{Q}{r}\chi_2(r)\,,\\
\chi_2'(r)+\dfrac{1/2+m_j+\lambda R_0^2}{r}\chi_2(r)=-\dfrac{Q}{r}\phi_1(r)\,.
\end{cases}
\tag{B.75}
$$

Решения (B.75) ищем в виде

$$
\phi_1(r)=Ar^{\sigma}\ ,\quad \chi_2(r)=Br^{\sigma}\ .
\tag{B.76}
$$

Подставляя (B.76) в (B.75), имеем

$$
\begin{cases}
\sigma A+\left(1/2-m_j-\lambda R_0^2\right)A=QB\ ,\\
\sigma B+\left(1/2+m_j+\lambda R_0^2\right)B=-QA\ .
\end{cases}
\tag{B.77}
$$

Из условия совместности системы однородных линейных уравнений из (B.77) имеем

$$
(\sigma+1/2-m_j-\lambda R_0^2)(\sigma+1/2+m_j+\lambda R_0^2)+Q^2=0\ ,
$$
$$
(\sigma+1/2)^2=\left(m_j+\lambda R_0^2\right)^2-Q^2\ ,\quad \sigma=\pm\sqrt{\left(m_j+\lambda R_0^2\right)^2-Q^2}-1/2\ . \tag{B.78}
$$

Соотношение между коэффициентами A и B имеет вид

$$
B=\frac{s-m_j-\lambda R_0^2}{Q}A\ , \tag{B.79}
$$

где $s=\sqrt{\left(m_j+\lambda R_0^2\right)^2-Q^2}$. Из (B.76), (B.78) и (B.79) получаем регулярное поведение решений при $r\to 0$:

$$
\phi_1(r)=Ar^{s-1/2},\quad \chi_2(r)=A\frac{s-m_j-\lambda R_0^2}{Q}r^{s-1/2}. \tag{B.80}
$$

Определим согласованное друг с другом поведение решений системы уравнений (B.74) на бесконечности. При $r\to\infty$ (B.74) запишется в следующем виде:

$$
\begin{cases}\phi_1'\left(r\right)=\left(\epsilon+1\right)\chi_2\left(r\right)\ ,\\ \chi_2'\left(r\right)=-\left(\epsilon-1\right)\phi_1\left(r\right)\ .\end{cases} \tag{B.81}
$$

Решения системы (B.81) ищем в виде

$$
\phi_1(r)=A\,\mathrm{e}^{-\gamma r}\ ,\quad \chi_2(r)=B\mathrm{e}^{-\gamma r}\ . \tag{B.82}
$$

Подставляя (B.82) в (B.81), получаем

$$
\begin{cases}\gamma A+\left(\epsilon+1\right)B=0\ ,\\ \left(\epsilon-1\right)A-\gamma B=0\ .\end{cases} \tag{B.83}
$$

Из условия совместности системы однородных линейных уравнений из (B.83) имеем

$$
-\gamma^2-\epsilon^2+1=0\ ,\quad \gamma=\pm\sqrt{1-\epsilon^2}\ . \tag{B.84}
$$

Далее $\gamma = \sqrt{1-\epsilon^2}$. Соотношение между коэффициентами A и B имеет вид

$$B = -\frac{\gamma}{1+\epsilon} A \,. \tag{B.85}$$

Из (B.82), (B.84) и (B.85) получаем согласованное друг с другом регулярное поведение решений системы (B.74) на бесконечности:

$$\phi_1(r) = A\,\mathrm{e}^{-\gamma r}\,, \quad \chi_2(r) = -A\,\frac{\gamma}{1+\epsilon}\mathrm{e}^{-\gamma r}\,. \tag{B.86}$$

Из (B.80) и (B.86) получаем, что решения системы уравнений (B.74) следует искать в следующем виде:

$$\phi_1(r) = r^{s-1/2}\mathrm{e}^{-\gamma r} f(r), \quad \chi_2(r) = -\gamma\,\frac{s-m_j-\lambda R_0^2}{Q(1+\epsilon)} r^{s-1/2}\mathrm{e}^{-\gamma r} g(r). \tag{B.87}$$

Для удобства записи последующих формул введем обозначение:

$$C = -\gamma\,\frac{s-m_j-\lambda R_0^2}{Q(1+\epsilon)}\,. \tag{B.88}$$

Подставляя (B.87) в (B.74), имеем

$$\begin{cases} f'(r) + \left[\dfrac{s-m_j-\lambda R_0^2}{r} - \gamma\right] f(r) = C\,(1+\epsilon+V_0)\,g(r)\,, \\ g'(r) + \left[\dfrac{s+m_j+\lambda R_0^2}{r} - \gamma\right] g(r) = \dfrac{1}{C}\,(1-\epsilon-V_0)\,f(r)\,. \end{cases} \tag{B.89}$$

Решения системы (B.89) ищем в виде степенного ряда

$$f(r) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n r^n\,, \quad g(r) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n r^n\,. \tag{B.90}$$

Подставляя (B.90) в (B.89), получаем

$$\begin{cases} \left(n+s-m_j-\lambda R_0^2\right) f_n - \gamma f_{n-1} = C\,(1+\epsilon)\,g_{n-1} + CQg_n\,, \\ \left(n+s+m_j+\lambda R_0^2\right) g_n - \gamma g_{n-1} = \dfrac{1}{C}\,(1-\epsilon)\,f_{n-1} - \dfrac{Q}{C} f_n\,. \end{cases} \tag{B.91}$$

или, перегруппировав слагаемые,

$$\begin{cases} \left(n+s-m_j-\lambda R_0^2\right) f_n - CQg_n = \gamma f_{n-1} + C\left(1+\epsilon\right) g_{n-1} \,, \\ \left(n+s+m_j+\lambda R_0^2\right) g_n + \dfrac{Q}{C} f_n = \dfrac{1}{C}\left(1-\epsilon\right) f_{n-1} + \gamma g_{n-1} \,. \end{cases} \tag{B.92}$$

Правые части уравнений в (B.92) линейно зависимые. Действительно, умножая первое уравнение системы (B.92) на $(1-\epsilon)$, а второе – на $C\gamma$, получим

$$\begin{cases} (1-\epsilon)\left[\left(n+s-m_j-\lambda R_0^2\right) f_n - CQg_n\right] = (1-\epsilon)\gamma f_{n-1} + C\left(1-\epsilon^2\right) g_{n-1} \,, \\ C\gamma\left[\left(n+s+m_j+\lambda R_0^2\right) g_n + \dfrac{Q}{C} f_n\right] = \left(1-\epsilon\right)\gamma f_{n-1} + C \underbrace{\gamma^2}_{1-\epsilon^2} g_{n-1} \,. \end{cases} \tag{B.93}$$

Приравнивая левые части уравнений в (B.93), имеем

$$g_n = \frac{1}{C}\frac{\left(1-\epsilon\right)\left(n+s-m_j-\lambda R_0^2\right) - \gamma Q}{\gamma\left(n+s+m_j+\lambda R_0^2\right) + (1-\epsilon)Q} f_n. \tag{B.94}$$

Подставляя g_n (B.94) во второе уравнение системы (B.92), получаем рекуррентное соотношение между коэффициентами f_n и f_{n-1}:

$$f_n = 2\gamma\frac{\gamma(n+s+m_j+\lambda R_0^2) + (1-\epsilon)Q}{\gamma(n+s+m_j+\lambda R_0^2-1) + (1-\epsilon)Q}\,\frac{n+s-1-\epsilon Q/\gamma}{n(n+2s)} f_{n-1} \,. \tag{B.95}$$

Таким образом, с помощью (B.95) выражаем f_n через константу $f_0 = A$:

$$f_n = (2\gamma)^n\left(n+s+m_j+\lambda R_0^2 + \frac{1-\epsilon}{\gamma}Q\right)\frac{\left(n+s-\frac{\epsilon Q}{\gamma}\right)_n}{n!(1+2s)_n} A \,, \tag{B.96}$$

где $(x)_n = \Gamma(x+n)/\Gamma(x)$ – символ Похгаммера. Из (B.90) для f имеем

$$\begin{aligned} f(\zeta) &= A\sum_n\left(n+s+m_j+\lambda R_0^2 + \frac{1-\epsilon}{\gamma}Q\right)\frac{(n+s-\epsilon Q/\gamma)_n}{n!(1+2s)_n}\zeta^n = \\ &= A\sum_n\left(\zeta\frac{d}{d\zeta}+s+m_j+\lambda R_0^2 + \frac{1-\epsilon}{\gamma}Q\right)\frac{(n+s-\epsilon Q/\gamma)_n}{n!(1+2s)_n}\zeta^n = \\ &= A\left(\zeta\frac{d}{d\zeta}+s+m_j+\lambda R_0^2 + \frac{1-\epsilon}{\gamma}Q\right)\Phi\left(s-\frac{\epsilon Q}{\gamma}, 1+2s, \zeta\right) \,, \end{aligned} \tag{B.97}$$

где $\zeta = 2\gamma r$. Из (B.94) и (B.96) для g_n и $g(\zeta)$ получим

$$
\begin{aligned}
g_n &= \frac{1-\epsilon}{C\gamma}(2\gamma)^n \left(n + s - m_j - \lambda R_0^2 - \frac{\gamma}{1-\epsilon}Q\right) \frac{(n+s-\epsilon Q/\gamma)_n}{n!(1+2s)_n} A \ , \\
g(\zeta) &= A\frac{1-\epsilon}{C\gamma}\left(\zeta\frac{d}{d\zeta} + s - m_j - \lambda R_0^2 - \frac{\gamma}{1-\epsilon}Q\right)\Phi\left(s - \frac{\epsilon Q}{\gamma},1+2s,\zeta\right) \ .
\end{aligned}
\tag{B.98}
$$

Учитывая, что

$$
\frac{\gamma}{1-\epsilon} = \frac{1+\epsilon}{\gamma} \ , \tag{B.99}
$$

общее решение системы (B.89) запишется в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
f(\zeta) &= \left(\zeta\frac{d}{d\zeta} + s + m_j + \lambda R_0^2 + \frac{1-\epsilon}{\gamma}Q\right)\left[A_{14}\Phi + B_{14}\Psi\right] \ , \\
g(\zeta) &= \frac{\gamma}{C(1+\epsilon)}\left(\zeta\frac{d}{d\zeta} + s - m_j - \lambda R_0^2 - \frac{1+\epsilon}{\gamma}Q\right)\left[A_{14}\Phi + B_{14}\Psi\right] \ .
\end{aligned}
\tag{B.100}
$$

Используя формулы дифференцирования функций Куммера и Трикоми, (B.100) запишем в виде

$$
\begin{aligned}
f(\zeta) &= A_{14}\left[\left(s - \frac{\epsilon Q}{\gamma}\right)\Phi_+ + \left(m_j + \lambda R_0^2 + \frac{Q}{\gamma}\right)\Phi\right] + \\
&\quad + B_{14}\left(\left[\left(\frac{\epsilon Q}{\gamma}\right)^2 - s^2\right]\Psi_+ + \left(m_j + \lambda R_0^2 + \frac{Q}{\gamma}\right)\Psi\right) \ , \\
g(\zeta) &= A_{14}\frac{\gamma}{C(1+\epsilon)}\left[\left(s - \frac{\epsilon Q}{\gamma}\right)\Phi_+ - \left(m_j + \lambda R_0^2 + \frac{Q}{\gamma}\right)\Phi\right] + \\
&\quad + B_{14}\frac{\gamma}{C(1+\epsilon)}\left(\left[\left(\frac{\epsilon Q}{\gamma}\right)^2 - s^2\right]\Psi_+ - \left(m_j + \lambda R_0^2 + \frac{Q}{\gamma}\right)\Psi\right) \ ,
\end{aligned}
\tag{B.101}
$$

где введены обозначения:

$$
\begin{aligned}
&\Phi = \Phi\left(s - \frac{\epsilon Q}{\gamma},1+2s,\zeta\right), \quad \Psi = \Psi\left(s - \frac{\epsilon Q}{\gamma},1+2s,\zeta\right), \\
&\Phi_+ = \Phi\left(s - \frac{\epsilon Q}{\gamma}+1,1+2s,\zeta\right), \quad \Psi_+ = \Psi\left(s - \frac{\epsilon Q}{\gamma}+1,1+2s,\zeta\right) \ .
\end{aligned}
\tag{B.102}
$$

Учитывая, что

$$\left(\frac{\epsilon Q}{\gamma}\right)^2 - s^2 = \left(\frac{Q}{\gamma}\right)^2 - \left(m_j + \lambda R_0^2\right)^2 = -\left(m_j + \lambda R_0^2 - \frac{Q}{\gamma}\right)\left(m_j + \lambda R_0^2 + \frac{Q}{\gamma}\right) , \tag{B.103}$$

переопределим коэффициент B:

$$B_{14} \to -\frac{B_{14}}{m_j + \lambda R_0^2 + Q/\gamma} . \tag{B.104}$$

С учетом (B.104), (B.101) записывается в следующем виде

$$\begin{aligned} \phi_1(\zeta) &= A_{14}(1+\epsilon)\zeta^{s-1/2}\mathrm{e}^{-\zeta/2}\left[\left(s - \frac{\epsilon Q}{\gamma}\right)\Phi_+ + \left(m_j + \lambda R_0^2 + \frac{Q}{\gamma}\right)\Phi\right] + \\ &+ B_{14}(1+\epsilon)\zeta^{s-1/2}\mathrm{e}^{-\zeta/2}\left(\left[m_j + \lambda R_0^2 - \frac{Q}{\gamma}\right]\Psi_+ - \Psi\right), \\ \chi_2(\zeta) &= A_{14}\gamma\zeta^{s-1/2}\mathrm{e}^{-\zeta/2}\left[\left(s - \frac{\epsilon Q}{\gamma}\right)\Phi_+ - \left(m_j + \lambda R_0^2 + \frac{Q}{\gamma}\right)\Phi\right] + \\ &+ B_{14}\gamma\zeta^{s-1/2}\mathrm{e}^{-\zeta/2}\left(\left[m_j + \lambda R_0^2 - \frac{Q}{\gamma}\right]\Psi_+ + \Psi\right) , \end{aligned} \tag{B.105}$$

Удобно записать (B.105) через функции Уиттекера

$$\begin{aligned} \phi_1(\zeta) &= A_{14}\frac{1+\epsilon}{r}\left[(s-\nu)\, M_{\nu-1/2,s}(\zeta) + \left(m_j + \lambda R_0^2 + \frac{Q}{\gamma}\right) M_{\nu+1/2,s}(\zeta)\right] + \\ &+ B_{14}\frac{1+\epsilon}{r}\left(\left[m_j + \lambda R_0^2 - \frac{Q}{\gamma}\right] W_{\nu-1/2,s}(\zeta) - W_{\nu+1/2,s}(\zeta)\right) , \\ \chi_2(\zeta) &= A_{14}\frac{\gamma}{r}\left[(s-\nu)\, M_{\nu-1/2,s}(\zeta) - \left(m_j + \lambda R_0^2 + \frac{Q}{\gamma}\right) M_{\nu+1/2,s}(\zeta)\right] + \\ &+ B_{14}\frac{\gamma}{r}\left(\left[m_j + \lambda R_0^2 - \frac{Q}{\gamma}\right] W_{\nu-1/2,s}(\zeta) + W_{\nu+1/2,s}(\zeta)\right) , \\ &s = \sqrt{\left(m_j + \lambda R_0^2\right)^2 - Q^2}, \quad \gamma = \sqrt{1-\epsilon^2}, \quad \nu = \frac{\epsilon Q}{\gamma}, \quad \zeta = 2\gamma r . \end{aligned} \tag{B.106}$$

Заменяя в (B.106) $\phi_1 \to \phi_2$, $\chi_2 \to \chi_1$, $m_j \to -m_j$ и $\lambda \to -\lambda$, получим решение системы (B.2) при $r > R_0$ (с дополнительной заменой $B \to -B$)

$$\begin{aligned}
\phi_2(\zeta) &= A_{23}\frac{1+\epsilon}{r}\left[(s-\nu)\, M_{\nu-1/2,s}(\zeta) - \left(m_j + \lambda R_0^2 - \frac{Q}{\gamma}\right) M_{\nu+1/2,s}(\zeta)\right] + \\
&+ B_{23}\frac{1+\epsilon}{r}\left(\left[m_j + \lambda R_0^2 + \frac{Q}{\gamma}\right] W_{\nu-1/2,s}(\zeta) + W_{\nu+1/2,s}(\zeta)\right) \ , \\
\chi_1(\zeta) &= A_{23}\frac{\gamma}{r}\left[(s-\nu)\, M_{\nu-1/2,s}(\zeta) + \left(m_j + \lambda R_0^2 - \frac{Q}{\gamma}\right) M_{\nu+1/2,s}(\zeta)\right] + \\
&+ B_{23}\frac{\gamma}{r}\left(\left[m_j + \lambda R_0^2 + \frac{Q}{\gamma}\right] W_{\nu-1/2,s}(\zeta) - W_{\nu+1/2,s}(\zeta)\right) \ .
\end{aligned} \tag{B.107}$$

Трансцендентные уравнения для определения критических зарядов.

Регулярные на бесконечности решения уравнения Дирака (B.1) на пороге нижнего континуума $\epsilon = -1$ при $r > R_0$ имеют вид

$$\begin{aligned}
\phi_1^F(r) &= B_{14}\frac{1}{\sqrt{r}}K_{2s}\left(\sqrt{8Qr}\right) \ , \\
\chi_4^F(r) &= B_{14}\frac{1}{\sqrt{2rQ}}\left[-\sqrt{2}\left(m_j + \lambda R_0^2\right) K_{2s}\left(\sqrt{8Qr}\right) - \right. \\
&\left. -\sqrt{Qr}\left(K_{2s-1}\left(\sqrt{8Qr}\right) + K_{2s+1}\left(\sqrt{8Qr}\right)\right)\right] \ .
\end{aligned} \tag{B.108}$$

Регулярные на бесконечности решения уравнения Дирака (B.2) на пороге нижнего континуума $\epsilon = -1$ при $r > R_0$ имеют вид

$$\begin{aligned}
\phi_2^F(r) &= B_{23}\frac{1}{\sqrt{r}}K_{2s}\left(\sqrt{8Qr}\right) \ , \\
\chi_3^F(r) &= B_{23}\frac{1}{\sqrt{2rQ}}\left[\sqrt{2}\left(m_j + \lambda R_0^2\right) K_{2s}\left(\sqrt{8Qr}\right) - \right. \\
&\left. -\sqrt{Qr}\left(K_{2s-1}\left(\sqrt{8Qr}\right) + K_{2s+1}\left(\sqrt{8Qr}\right)\right)\right] \ .
\end{aligned} \tag{B.109}$$

Трансцендентные уравнения на критические заряды получаются из условия сшивания решений при $r = R_0$. Для системы (B.1) имеем

$$\phi_1\left(z_{R_0}\right)\chi_4^F(R_0) - \chi_2\left(z_{R_0}\right)\phi_1^F(R_0) = 0 \ , \tag{B.110}$$

где $z_{R_0} = \lambda R_0^2$. Для системы (B.2) –

$$\phi_2\left(z_{R_0}\right)\chi_3^F(R_0) - \chi_1\left(z_{R_0}\right)\phi_2^F(R_0) = 0\ . \tag{B.111}$$

Трансцендентное уравнение (B.110) для $m_j \geqslant 1/2$ удобно записать в виде

$$\begin{gathered}\frac{\Phi\left[\frac{1-(V_0-1)^2}{4\lambda}+m_j+\frac{1}{2},m_j+\frac{3}{2},\lambda R_0^2\right]}{\Phi\left[\frac{1-(V_0-1)^2}{4\lambda}+m_j+\frac{1}{2},m_j+\frac{1}{2},\lambda R_0^2\right]} = -\frac{1+2m_j}{2-V_0}\times\\ \times\left(\frac{m_j+\lambda R_0^2}{QR_0}+\frac{1}{\sqrt{2QR_0}}\frac{K_{2s-1}\left(\sqrt{8QR}\right)+K_{2s+1}\left(\sqrt{8QR}\right)}{K_{2s}\left(\sqrt{8QR}\right)}\right)\ ,\end{gathered} \tag{B.112}$$

для $m_j \leqslant -1/2$ –

$$\begin{gathered}\frac{\Phi\left[\frac{1-(V_0-1)^2}{4\lambda},\frac{1}{2}-m_j,\lambda R_0^2\right]}{\Phi\left[\frac{1-(V_0-1)^2}{4\lambda}+1,\frac{3}{2}-m_j,\lambda R_0^2\right]} = -R_0^2\frac{V_0}{1-2m_j}\times\\ \times\left(\frac{m_j+\lambda R_0^2}{QR_0}+\frac{1}{\sqrt{2QR_0}}\frac{K_{2s-1}\left(\sqrt{8QR}\right)+K_{2s+1}\left(\sqrt{8QR}\right)}{K_{2s}\left(\sqrt{8QR}\right)}\right)\ .\end{gathered} \tag{B.113}$$

Аналогично трансцендентное уравнение (B.111) для $m_j \geqslant 1/2$ –

$$\begin{gathered}\frac{\Phi\left[\frac{1-(V_0-1)^2}{4\lambda}+m_j+\frac{1}{2},m_j+\frac{1}{2},\lambda R_0^2\right]}{\Phi\left[\frac{1-(V_0-1)^2}{4\lambda}+m_j+\frac{1}{2},m_j+\frac{3}{2},\lambda R_0^2\right]} = -R_0^2\frac{V_0}{1+2m_j}\times\\ \times\left[-\frac{m_j+\lambda R_0^2}{QR_0}+\frac{1}{\sqrt{2QR_0}}\frac{K_{2s-1}\left(\sqrt{8QR}\right)+K_{2s+1}\left(\sqrt{8QR}\right)}{K_{2s}\left(\sqrt{8QR}\right)}\right]\ ,\end{gathered} \tag{B.114}$$

для $m_j \leqslant -1/2$ –

$$\begin{gathered}\frac{\Phi\left[\frac{1-(V_0-1)^2}{4\lambda}+1,\frac{3}{2}-m_j,\lambda R_0^2\right]}{\Phi\left[\frac{1-(V_0-1)^2}{4\lambda},\frac{1}{2}-m_j,\lambda R_0^2\right]} = -\frac{1-2m_j}{2-V_0}\times\\ \times\left(-\frac{m_j+\lambda R_0^2}{QR_0}+\frac{1}{\sqrt{2QR_0}}\frac{K_{2s-1}\left(\sqrt{8QR}\right)+K_{2s+1}\left(\sqrt{8QR}\right)}{K_{2s}\left(\sqrt{8QR}\right)}\right)\ .\end{gathered} \tag{B.115}$$