

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
САМАРСКИЙ ФИЛИАЛ ФИЗИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. П.Н. ЛЕБЕДЕВА

На правах рукописи

РАЗУЕВА ЕВГЕНИЯ ВАДИМОВНА

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ СЕМЕЙСТВА ПАРАКСИАЛЬНЫХ СВЕТОВЫХ ПОЛЕЙ

Специальность 01.04.05 — оптика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор
Крутов А.Ф.

САМАРА — 2015

Оглавление

Введение	3
1 Моды Эрмита–Лагерра–Гаусса в линейных оптических системах	9
1.1 Гауссовы пучки и линейные оптические системы (обзор)	9
1.2 HLG-пучки и их свойства (обзор)	16
1.3 Астигматическое преобразование HLG-пучков	21
1.4 Обобщенный закон $ABCD$ для HLG-мод	24
1.5 Сфера Пуанкаре как модель астигматических преобразований . . .	25
1.6 Частные случаи астигматического преобразования HLG-пучков . .	30
1.7 Плоскость перетяжки астигматических гауссовых пучков	40
2 Спиральные пучки с быстрым вращением	51
2.1 Спиральные пучки света (обзор)	51
2.2 Спиральные пучки для целочисленных параметров вращения	59
2.3 Смещённые моды Лагерра–Гаусса	70
3 Пучки негауссова типа и их распространение в зоне Френеля	75
3.1 Пучки Эйри и их распространение в зоне Френеля (обзор)	75
3.2 Три-Эйри пучки и их свойства	78
3.3 Обобщённые три-Эйри пучки	82
3.4 Вычисление функции Вигнера три-Эйри пучков	88
Заключение	97
Список литературы	99

Введение

Диссертационная работа посвящена развитию методов формирования и преобразования параксиальных световых полей с заданными характеристиками.

Актуальность темы. Параксиальное уравнение в теории распространения волн и в оптике было впервые получено М.А. Леонтовичем и В.А. Фоком в 1946 г. Оно широко используется в лазерной оптике и теории резонаторов, поскольку является хорошим приближением для описания дифракции волн, в частности, для световых пучков, генерируемых лазерами, а также для собственных мод открытых резонаторов и линзовых волноводов.

Наиболее известными семействами световых полей, эволюция которых описывается параксиальным уравнением, являются пучки Эрмита–Гаусса (HG-пучки) и Лагерра–Гаусса (LG-пучки). Изучению теоретических и экспериментальных свойств этих пучков посвящено большое число публикаций. Особое значение HG- и LG-пучков оптике связано с их структурной устойчивостью (т.е. распределение интенсивности пучков при распространении изменяется только в масштабе). Кроме того, каждое семейство образует ортогональный базис в пространстве $L_2(\mathbb{R}^2)$, что позволяет осуществлять разложение по ним произвольных пучков.

Довольно долгое время HG- и LG-пучки оставались по сути единственными широко известными примерами структурно устойчивых световых полей, а возникающие в оптических экспериментах другие пучки гауссова типа, обладающие структурной устойчивостью, рассматривались просто как их линейные комбинации, которые не требуют отдельного изучения и не заслуживают собственного названия. Однако в последнее десятилетие интерес к поиску решений параксиального уравнения заметно возрос. Были найдены теоретически и реализованы экспериментально многие новые структурно или функционально устойчивые световые поля — спиральные пучки, пучки Эрмита–Лагерра–Гаусса (HLG-пучки),

гипергеометрические пучки, пучки Эйри-Гаусса и целый ряд других.

Характерным свойством большинства решений параксиального уравнения, найденных в последнее время, является присутствие в аналитической форме записи решения одного или нескольких вещественных параметров, изменение которых позволяет непрерывно трансформировать вид решения (т.е. фактически получаются параметрические семейства решений). Например, HLG-пучки, как результат астигматического преобразования HG-пучков, зависят от вещественного параметра, который равен углу между осями симметрии системы цилиндрических линз и осями симметрии входного HG-пучка.

Среди практических применений полученных пучков следует отметить создание высокоэффективных вихревых дифракционных фазовых элементов для формирования лазерных световых полей априорно заданного типа (спиральные пучки), использование световых полей с ненулевым угловым моментом для задач микробиологии и медицины, связанных с манипулированием и управлением движением микрочастиц (спиральные пучки, пучки Эйри), формирование самоподобных световых полей солитонного типа в нелинейных средах для задач передачи информации (HLG-пучки).

Одной из задач исследования гауссовых световых пучков является описание их преобразования при прохождении различных оптических систем. Для простейшего гауссова пучка и линейных оптических систем решение задачи хорошо известно и формулируется в матричном виде (закон $ABCD$). Для высших гауссовых мод эта задача была решена только в простейшем случае.

Изменение понятия структурной устойчивости путём добавления ещё одной степени свободы — вращения — позволило значительно расширить класс структурно устойчивых световых полей. Световые поля, сохраняющие при распространении структуру своей интенсивности неизменной с точностью до масштаба и вращения, получили название спиральных пучков. Угол поворота пучка при распространении от плоскости перетяжки до плоскости Фурье всегда является конечной величиной. В том случае, когда этот угол равен $\pm\pi/2$, теория спиральных пучков хорошо разработана, что позволило создать высокоэффективные фазовые элементы для фокусировки лазерного излучения в априорно заданные кривые. Гораздо менее изученным является случай, когда интенсивность пучка поворачивается на больший угол. В последнее время такие пучки стали рассматриваться в

области оптических микроманипуляций для трёхмерного перемещения частиц, а также в спектроскопии одиночных молекул для определения пространственного положения излучателей.

Для решения этих задач можно попробовать использовать и пучки, построенные на основе функции Эйри. Интенсивность пучков Эйри слабо меняется при распространении, сохраняя форму пятна максимальной интенсивности, которое смещается по параболе.

Пучки Эйри свободны от недостатков, присущих гауссовым пучкам: они обладают низкой дифракционной расходимостью и высокой стабильностью при распространении в неоднородной среде (свойство самовосстановления), что открывает широкие возможности их применения в таких прикладных областях как оптические средства связи и исследование атмосферы. Поэтому изучение пучков, построенных на основе функции Эйри, является актуальной задачей.

Цель диссертационной работы состоит в развитии теории параксиальных световых полей. В соответствии с целью решались следующие **задачи**:

1. Разработать матричный способ описания преобразования высших гауссовых мод при прохождении через линейные оптические системы.
2. Исследовать возможности построения спиральных пучков, распределение интенсивности которых вращается с большой скоростью.
3. Рассмотреть методы построения двумерных параксиальных световых пучков на основе функции Эйри.

Методы исследования. При исследовании поставленных задач применялись теоретические методы и компьютерное моделирование. В работе использованы известные результаты теории ортогональных полиномов и специальных функций математической физики. Для описания преобразования гауссовых пучков в линейных оптических системах использованы методы теории матриц, квантовой теории углового момента и функционального анализа. При разработке теории быстро вращающихся спиральных пучков используется комплексный анализ. При исследовании негауссовых пучков используются методы интегральных преобразований типа Фурье.

Научная новизна. Разработан матричный способ описания преобразования HLG-пучков при прохождении через линейные оптические системы.

Найдено общее аналитическое интегральное представление спиральных пуч-

ков, интенсивность которых в зоне Френеля поворачивается на угол $\pm n\pi/2$, где n — целое число, $n > 1$. Показано, что существует вещественнозначное двумерное световое поле, зависящее от двух непрерывных параметров и названное три-Эйри пучком, Фурье-образ которого обладает кубической фазой и радиальной интенсивностью с убыванием на бесконечности как $\exp(-r^3)$.

Теоретическая и практическая значимость. Матричный подход при описании преобразования HLG-пучков в линейных оптических системах позволяет обобщить известный закон $ABCD$ для высших гауссовых мод. Поскольку семейство HLG-пучков с фиксированным параметром обладает свойством полноты и ортогональности в пространстве $L_2(\mathbb{R}^2)$, этот результат может быть использован для нахождения преобразования произвольного светового поля с конечной энергией при прохождении через линейные оптические системы. Данное обстоятельство имеет практическое значение: вычисление интегральных преобразований высших гауссовых мод требует существенно больше компьютерных ресурсов, чем алгебраические операции с матрицами.

Полученные во второй главе формулы позволяют строить спиральные пучки с произвольными целочисленными значениями параметра вращения. Предложенное интегральное преобразование более предпочтительно при построении спиральных пучков с заданным распределением интенсивности, чем известное ранее представление в виде бесконечного ряда LG-мод. В настоящее время активно изучается возможность использования таких пучков для определения трёхмерного положения микрочастиц и пространственных манипуляций ими.

Три-Эйри пучки, полученные и исследованные в третьей главе, уже сейчас находят применение при проектировании и создании трёхмерных оптических ловушек и в задачах зондирования.

Достоверность теоретических результатов полученных в диссертационной работе, подтверждается тем, что, с одной стороны, теоретические построения основаны на современных представлениях по дифракции и распространению волновых полей и, с другой стороны, хорошим согласием результатов расчетов с экспериментами.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на международной конференции по оптоэлектронике и лазерам CAOL'2005 (Ялта, 2005); на 8-й конференции по лазерам и оптоволоконным сетям LFNМ'2006 (Харьков, 2006); на

научной сессии МИФИ «Фотоника и информационная оптика» (Москва, 2010); на конференции APCOM-2011 Workshop (Москва–Самара, 2011); на международных конференциях «Days on Diffraction» (Санкт-Петербург) в 2011, 2012 и 2014 гг.

Личный вклад и публикации. По теме диссертации опубликовано 8 работ и получено 3 свидетельства о регистрации программ. В диссертации представлены только те результаты, в получение которых автор внёс определяющий вклад.

На защиту выносятся следующие **основные положения**:

1. Преобразование пучков Эрмита–Лагерра–Гаусса в линейных оптических системах может быть сформулировано в терминах операторов поворота в трёхмерном пространстве и позволяет провести обобщение закона *ABCD*.
2. Понятие «плоскость перетяжки» можно определить для астигматического гауссова пучка. В плоскости перетяжки астигматического гауссова пучка площадь светового пятна принимает минимальное значение, а дефокусировка пучка равна нулю.
3. Спиральные пучки, распределение интенсивности которых при распространении поворачивается на угол $\pm n\pi/2$ (n — целое число, $n > 1$), могут быть представлены в виде двумерного преобразования Фурье от произведения гауссовой функции на целую аналитическую функцию со специально подобранным аргументом.
4. Существует двумерное световое поле в виде произведения трёх пучков Эйри, Фурье-образ которого обладает кубической фазой и радиально симметричной интенсивностью с супергауссовым убыванием.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка литературы. Общий объём 101 страница, в том числе 20 рисунков. Библиография содержит 84 наименования.

Список работ, опубликованных автором по теме диссертации.

1. Е.Г. Абрамочкин, Е.В. Разуева и В.Г. Волостников. *Обобщённые гауссовы пучки и их преобразование в оптических системах с астигматизмом* // Вестник Самарского гос. университета, 2006, т. 2, с. 103–121.
2. E.G. Abramochkin, E.V. Razueva, and V.G. Volostnikov. *Hermite-Laguerre-Gaussian beams in astigmatic optical systems* // Proc. SPIE/Ukraine, 2006, v. 6, N 1–6, pp. 174–185.
3. E.G. Abramochkin, E.V. Razueva, and V.G. Volostnikov. *Application of spiral*

- laser beams for beam shaping problem* // Proc. LFNМ'2006 (Kharkov, 29.06-1.07.2006). pp. 275–278.
4. E. Abramochkin, E. Razueva, and V. Volostnikov. *General astigmatic transform of Hermite-Laguerre-Gaussian beams* // J. Opt. Soc. Am. A, 2010, v. 27, N 11, pp. 2506–2513.
 5. T. Alieva, E. Abramochkin, A. Asenjo-Garcia, and E. Razueva. *Rotating beams in isotropic optical system* // Opt. Express, 2010, v. 18, N 4, pp. 3568–3573.
 6. E. Abramochkin and E. Razueva. *Product of three Airy beams* // Opt. Lett., 2011, v. 36, N 19, pp. 3732–3734.
 7. E. Abramochkin, E. Razueva. *The Wigner distribution function of three-Airy beams* // Proc. of Int. Conf. “Days on Diffraction” (Saint-Petersburg, 26–30.05.2014), pp. 74–75.
 8. E. Razueva, A. Krutov, and E. Abramochkin. *Definition of the waist plane for general astigmatic Gaussian beams* // Opt. Lett., 2015, v. 40, N 9, pp. 1936–1939.

В работах [1,2] автору принадлежит матричная интерпретация общего астигматического преобразования мод Эрмита–Лагерра–Гаусса, в работе [3] — разработка алгоритма расчета дифракционных фазовых элементов, в [4] — формулы преобразования астигматического пучка Лагерра–Гаусса при распространении в свободном пространстве, в [5] — выбор примеров спиральных пучков для компьютерной и экспериментальной реализации, в [6–8] — постановка задачи и получение основных результатов. Некоторые результаты диссертационной работы — построение функционального представления спиральных пучков, распределение интенсивности которых в зоне Френеля поворачивается на большой угол, и вычисление функции Вигнера три-Эйри пучка — опубликованы в тезисах международной конференции “Days on Diffraction” в 2011, 2012 и 2014 гг. Автором выполнены все компьютерные эксперименты.

Свидетельства о гос. регистрации программ, разработанных автором:

1. «Вычисление преобразования светового поля в оптических системах первого порядка» №2011611861, 28.02.2011.
2. «Программа расчета двумерного преобразования Френеля когерентных световых полей» №2012616616, 24.07.2012.
3. «Программа визуализации и преобразования двумерных световых полей с фазовыми сингулярностями» №2012616490, 18.07.2012.

Глава 1

Моды Эрмита–Лагерра–Гаусса в линейных оптических системах

В данной главе предложен матричный способ описания HLG-мод. В §§ 1,2 приведён краткий обзор известных результатов по матричному описанию преобразования гауссовых пучков в линейных оптических системах и свойств HLG-пучков из [1]. В §§ 3,4 решается задача матричного описания преобразования HLG-мод и предложено обобщение закона $ABCD$ [1, 2]. В § 5 предложена интерпретация преобразования HLG-пучков с помощью сферы Пуанкаре. Ряд частных случаев преобразования HLG-пучков в линейных оптических системах рассмотрен в § 6 и опубликован в [1–3]. В § 7 предложено определение понятия «плоскость 2D-перетяжки» для астигматических гауссовых пучков общего вида [4].

1.1 Гауссовы пучки и линейные оптические системы (обзор)

Известно [5–7], что эволюция когерентного светового поля $F(x, y, \ell)$ при распространении в свободном пространстве вдоль оси ℓ в параксиальном приближении описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial F}{\partial \ell} = 0.$$

Здесь k — волновое число, ℓ — переменная распространения и x, y — поперечные координаты.

Если в плоскости $\ell = 0$ задано распределение комплексной амплитуды $F_0(x, y)$, обладающее конечной энергией,

$$F(x, y, \ell) \Big|_{\ell=0} = F_0(x, y),$$

то дальнейшая эволюция поля F выражается через начальное распределение F_0 с помощью преобразования Френеля:

$$\begin{aligned} F(x, y, \ell) &= \mathbf{FR}_\ell[F_0(\xi, \eta)](x, y, \ell) = \\ &= \frac{k}{2\pi i \ell} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(\frac{ik}{2\ell}[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]\right) F_0(\xi, \eta) d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Например, для двумерной функции Гаусса

$$F_0(x, y) = \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2w_0^2}\right)$$

вычисление интеграла (1.1) приводит к самому известному решению параболического уравнения — гауссову пучку:

$$\begin{aligned} F(x, y, \ell) &= \frac{1}{1 + \frac{i\ell}{kw_0^2}} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2w_0^2\left(1 + \frac{i\ell}{kw_0^2}\right)}\right) = \\ &= \frac{1}{1 + \frac{i\ell}{kw_0^2}} \exp\left(-\frac{i\ell(x^2 + y^2)}{2kw_0^4\left(1 + \frac{\ell^2}{k^2w_0^4}\right)}\right) \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2w_0^2\left(1 + \frac{\ell^2}{k^2w_0^4}\right)}\right). \end{aligned}$$

Для комплексного начального распределения

$$F_0(x, y) = \exp\left(-\left[\frac{1}{2w_0^2} - \frac{ik}{R_0}\right](x^2 + y^2)\right) \quad (1.2)$$

получается следующее решение:

$$F(x, y, \ell) = \frac{1}{1 + \frac{2\ell}{R_0} + \frac{i\ell}{kw_0^2}} \exp\left(-\left[\frac{1}{2w_0^2} - \frac{ik}{R_0}\right] \frac{x^2 + y^2}{1 + \frac{2\ell}{R_0} + \frac{i\ell}{kw_0^2}}\right). \quad (1.3)$$

Если определить комплексный параметр q_0 , объединяющий два вещественных параметра — радиус кривизны волнового фронта R_0 и ширину пучка w_0 :

$$\frac{1}{q_0} = \frac{2}{R_0} + \frac{i}{kw_0^2}, \quad (1.4)$$

то формулы (1.2), (1.3) примут вид:

$$F_0(x, y) = \exp\left(\frac{ik(x^2 + y^2)}{2q_0}\right), \quad F(x, y, \ell) = \frac{1}{1 + \ell/q_0} \exp\left(\frac{ik(x^2 + y^2)}{2(q_0 + \ell)}\right).$$

Таким образом, гауссов пучок (1.2) при распространении сохраняет свою структуру, и, с точностью до множителя $\frac{1}{1 + \ell/q_0}$, его эволюция сводится лишь к изменению комплексного параметра:

$$q_0 \rightarrow q = q_0 + \ell. \quad (1.5)$$

При этом достаточно сложное определение комплексного параметра (1.4) позволяет получить простой закон его изменения. В терминах вещественных параметров пучка — его ширины и радиуса кривизны волнового фронта — соответствующее преобразование имеет более громоздкий вид:

$$w_0 \rightarrow w_0 \sqrt{\left(1 - \frac{2\ell}{R_0}\right)^2 + \frac{\ell^2}{k^2 w_0^4}}, \quad R_0 \rightarrow R_0 \frac{\left(1 - \frac{2\ell}{R_0}\right)^2 + \frac{\ell^2}{k^2 w_0^4}}{1 - \frac{2\ell}{R_0} - \frac{\ell R_0}{2k^2 w_0^4}}.$$

Преобразование Френеля является частным случаем преобразования светового поля оптическими системами, состоящими из линейных элементов. Известно [6, 7], что в общем случае при прохождении такого элемента комплексные амплитуды светового поля во входной и выходной плоскостях связаны следующим образом (интеграл Коллинза):

$$F(x, y) = \frac{k}{2\pi i B} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(\frac{ik}{2B} [A(\xi^2 + \eta^2) + D(x^2 + y^2) - 2(x\xi + y\eta)]\right) F_0(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (1.6)$$

Для более компактной формы записи будем далее использовать векторную систему обозначений: $\mathbf{r} = (x, y)$, $\mathbf{\rho} = (\xi, \eta)$. Тогда равенство (1.6) примет вид

$$F(\mathbf{r}) = \frac{k}{2\pi i B} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(\frac{ik}{2B} [A|\mathbf{\rho}|^2 + D|\mathbf{r}|^2 - 2(\mathbf{r}, \mathbf{\rho})]\right) F_0(\mathbf{\rho}) d^2\mathbf{\rho}, \quad (1.7)$$

а преобразование Френеля (1.1) — вид

$$F(\mathbf{r}, \ell) = \mathbf{F} \mathbf{R}_\ell [F_0(\mathbf{\rho})](\mathbf{r}) = \frac{k}{2\pi i \ell} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(\frac{ik}{2\ell} |\mathbf{r} - \mathbf{\rho}|^2\right) F_0(\mathbf{\rho}) d^2\mathbf{\rho}. \quad (1.8)$$

Если преобразованию (1.7) поставить в соответствие матрицу

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

где C определяется из условия $\det \mathbf{M} = AD - BC = 1$, то последовательное прохождение светового поля через оптические элементы с матрицами $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$ соответствует перемножению матриц $\mathbf{M}_2$ и $\mathbf{M}_1$:

$$F_0 \xrightarrow{\mathbf{M}_1} F_1 \xrightarrow{\mathbf{M}_2} F_2 \quad (1.9)$$

$\mathbf{M}_2 \mathbf{M}_1$

Таким образом, прохождение светового поля через линейную оптическую систему можно трактовать в терминах перемножения матриц оптических элементов.

При прохождении линейных систем преобразование гауссова пучка (1.2) сводится к изменению комплексного параметра (1.4) по закону [8]:

$$q_0 \rightarrow q = \frac{Aq_0 + B}{Cq_0 + D}, \quad (1.10)$$

который называется правилом $ABCD$.

Явный вид матриц, соответствующих линейным оптическим элементам, хорошо известен [6]. Например, $\begin{pmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ — матрица преобразования светового поля при распространении в свободном пространстве на расстояние ℓ (преобразование Френеля), $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix}$ — матрица преобразования поля при прохождении тонкой линзы с фокусным расстоянием f . В последнем случае параметр B равен нулю, поэтому формула (1.7) непосредственно не применима. Однако, делая в (1.7) подстановку $D = \frac{1+BC}{A}$ и переходя к пределу при $B \rightarrow 0$, нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} F(\mathbf{r}) &= \lim_{B \rightarrow 0} \frac{k}{2\pi i B} \exp\left(\frac{ikC}{2A} |\mathbf{r}|^2\right) \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(\frac{ikA}{2B} \left|\boldsymbol{\rho} - \frac{\mathbf{r}}{A}\right|^2\right) F_0(\boldsymbol{\rho}) d^2\boldsymbol{\rho} = \\ &= \frac{1}{A} \exp\left(\frac{ikC}{2A} |\mathbf{r}|^2\right) \iint_{\mathbb{R}^2} \delta\left(\boldsymbol{\rho} - \frac{\mathbf{r}}{A}\right) F_0(\boldsymbol{\rho}) d^2\boldsymbol{\rho} = \frac{1}{A} \exp\left(\frac{ikC}{2A} |\mathbf{r}|^2\right) F_0\left(\frac{\mathbf{r}}{A}\right). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Здесь $\delta(\mathbf{r})$ — двумерная дельта-функция Дирака. Формула (1.11) справедлива для любых световых полей и любых линейных оптических элементов.

Линейные системы, обладающие радиальной симметрией, являются простейшим примером оптических систем. Другой важный класс оптических систем — это системы, обладающие прямоугольной симметрией. Они называются системами с простым астигматизмом. Преобразование светового поля в них происходит по направлениям x, y независимо друг от друга:

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \frac{k}{2\pi i \sqrt{B_x B_y}} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(\frac{ik}{2B_x} [A_x \xi^2 + D_x x^2 - 2x\xi]\right) \times \\ &\quad \times \exp\left(\frac{ik}{2B_y} [A_y \eta^2 + D_y y^2 - 2y\eta]\right) F_0(\xi, \eta) d\xi d\eta \end{aligned} \quad (1.12)$$

и соответствует двум матрицам

$$\mathbf{M}_x = \begin{pmatrix} A_x & B_x \\ C_x & D_x \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_y = \begin{pmatrix} A_y & B_y \\ C_y & D_y \end{pmatrix}, \quad \det \mathbf{M}_x = \det \mathbf{M}_y = 1.$$

Если матрицы $\mathbf{M}_x$, $\mathbf{M}_y$ трансформировать в одну 4×4 -матрицу $\mathbf{M}$, состоящую из четырех диагональных 2×2 -блоков:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x & 0 & B_x & 0 \\ 0 & A_y & 0 & B_y \\ C_x & 0 & D_x & 0 \\ 0 & C_y & 0 & D_y \end{pmatrix},$$

то формулу (1.12) можно представить в виде¹:

$$F(\mathbf{r}) = \frac{k}{2\pi i \sqrt{\det \mathbf{B}}} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(\frac{ik}{2} [\langle \boldsymbol{\rho}, \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} \boldsymbol{\rho} \rangle + \langle \mathbf{r}, \mathbf{D} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{r} \rangle - 2\langle \mathbf{r}, \mathbf{B}^{-1} \boldsymbol{\rho} \rangle]\right) F_0(\boldsymbol{\rho}) d^2 \boldsymbol{\rho}. \quad (1.13)$$

Блоки (4×4) -матрицы $\mathbf{M}$ оптической системы — (2×2) -матрицы $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \mathbf{B}^T &= \mathbf{B} \mathbf{A}^T, & \mathbf{C} \mathbf{D}^T &= \mathbf{D} \mathbf{C}^T, & \mathbf{A} \mathbf{D}^T - \mathbf{B} \mathbf{C}^T &= \mathbf{I}, \\ \mathbf{A}^T \mathbf{C} &= \mathbf{C}^T \mathbf{A}, & \mathbf{B}^T \mathbf{D} &= \mathbf{D}^T \mathbf{B}, & \mathbf{A}^T \mathbf{D} - \mathbf{C}^T \mathbf{B} &= \mathbf{I}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Здесь индекс T означает транспонирование матрицы, $\mathbf{I}$ — единичная матрица. Последовательное прохождение светового поля через астигматические оптические элементы с 4×4 -матрицами $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$ сводится к прохождению через один астигматический элемент и произведению матриц, как показано на схеме (1.9).

Правило $ABCD$, первоначально сформулированное для гауссовых пучков (1.2) и оптических систем (1.7), допускает естественное обобщение на гауссовы пучки вида

$$F_0(x, y) = \exp\left(\frac{ik}{2} \left[\frac{x^2}{q_{0x}} + \frac{y^2}{q_{0y}} \right]\right) \quad (1.15)$$

и оптические системы (1.13). В данном случае преобразование (1.13) сводится к произведению одномерных интегралов, поэтому изменение комплексных параметров пучка q_{0x} и q_{0y} при прохождении оптической системы с простым астигматизмом происходит независимо друг от друга:

$$q_{0x} \rightarrow q_x = \frac{A_x q_{0x} + B_x}{C_x q_{0x} + D_x}, \quad q_{0y} \rightarrow q_y = \frac{A_y q_{0y} + B_y}{C_y q_{0y} + D_y}. \quad (1.16)$$

Если из параметров q_{0x} , q_{0y} составить матрицу $\mathbf{Q}_0 = \begin{pmatrix} q_{0x} & 0 \\ 0 & q_{0y} \end{pmatrix}$, то гауссов

¹ Рассмотрение случая $\det \mathbf{B} = 0$ аналогично выводу формулы (1.11).

пучок (1.15) и его преобразование системой (1.13) можно представить в виде

$$F_0(\mathbf{r}) = \exp\left(\frac{ik}{2}\langle\mathbf{r}, \mathbf{Q}_0^{-1}\mathbf{r}\rangle\right), \quad F(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{Q}_0^{-1})}} \exp\left(\frac{ik}{2}\langle\mathbf{r}, \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{r}\rangle\right),$$

и матрица комплексного параметра $\mathbf{Q}_0$ преобразуется согласно тензорному закону $ABCD$:

$$\mathbf{Q}_0 \rightarrow \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} q_x & 0 \\ 0 & q_y \end{pmatrix} = (\mathbf{A}\mathbf{Q}_0 + \mathbf{B})(\mathbf{C}\mathbf{Q}_0 + \mathbf{D})^{-1}. \quad (1.17)$$

Дальнейшее обобщение правила $ABCD$ связано со все более усложняющимся видом гауссовых функций и оптических систем. При этом увеличивается количество используемых компонент в матрицах систем, однако размерность матриц остается прежней: для рассмотрения общей ситуации преобразования гауссовых пучков достаточно матриц четвертого порядка.

Число линейно независимых компонент матрицы оптической системы зависит от типа симметрии системы. Если оптическая система обладает радиальной симметрией, то ее матрица содержит всего три независимых компонента — A , B , D , — и преобразование пучка описывается формулой (1.6). Оптические системы с простым астигматизмом обладают двумя осями симметрии, а соответствующее преобразование (1.12) требует шести линейно независимых компонент. Если в такую систему входит гауссов пучок (1.15), т.е. пучок, оси симметрии которого совпадают с осями симметрии оптической системы, то пучок на выходе характеризуется диагональной матрицей (1.17).

Если же оси симметрии гауссова пучка составляют угол φ с осями симметрии оптической системы, то матрицу оптического элемента $\mathbf{M}$ необходимо «довернуть» на этот угол:

$$\mathbf{M}(\varphi) = \begin{pmatrix} \mathbf{R}(-\varphi) & 0 \\ 0 & \mathbf{R}(-\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{R}(\varphi) & 0 \\ 0 & \mathbf{R}(\varphi) \end{pmatrix},$$

где

$$\mathbf{R}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

— матрица поворота вокруг оптической оси на угол φ .

В этом случае для описания астигматической системы необходимо семь независимых параметров, один из которых — угол поворота ее осей симметрии.

Оптические системы, не имеющие радиальной или прямоугольной симметрии, называются общими астигматическими. Преобразование светового поля в таких системах сохраняет вид (1.13), но матрицы $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$ в общем случае не диагональны [6].

Для наших дальнейших целей удобнее перейти к безразмерным величинам и привести преобразование (1.13) к преобразованию Фурье. Сделаем замену переменных, функций и матрицы $\mathbf{B}$ (матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{D}$ безразмерны по определению):

$$\frac{\mathbf{p}}{w_0} \rightarrow \mathbf{p}, \quad \frac{\mathbf{r}}{w_0} \rightarrow \mathbf{r}, \quad \frac{2\ell}{kw_0^2} \rightarrow \ell, \quad F_0(\mathbf{p}) \rightarrow F_0(\mathbf{p}), \quad F(\mathbf{r}) \rightarrow F(\mathbf{r}), \quad \mathbf{B} \rightarrow kw_0^2 \mathbf{B}.$$

В нормированных переменных параксиальное уравнение имеет вид:

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2 + 4i\partial_\ell)F(\mathbf{r}, \ell) = 0, \quad (1.18)$$

а преобразование Френеля —

$$F(\mathbf{r}, \ell) = \mathbf{F}\mathbf{R}_\ell[F_0(\mathbf{p})](\mathbf{r}) = \frac{1}{\pi i \ell} \int_{\mathbb{R}^2} \exp\left(\frac{i}{\ell}|\mathbf{r} - \mathbf{p}|^2\right) F_0(\mathbf{p}, 0) d^2\mathbf{p}. \quad (1.19)$$

Преобразование светового поля (1.13) примет вид:

$$F(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi i \sqrt{\det \mathbf{B}}} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(\frac{i}{2}[\langle \mathbf{p}, \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{p} \rangle + \langle \mathbf{r}, \mathbf{D}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{r} \rangle - 2\langle \mathbf{r}, \mathbf{B}^{-1}\mathbf{p} \rangle]\right) F_0(\mathbf{p}) d^2\mathbf{p},$$

или

$$\begin{aligned} 2\pi i \sqrt{\det \mathbf{B}} \exp\left(-\frac{i}{2}\langle \mathbf{r}, \mathbf{B}\mathbf{D}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{r} \rangle\right) F(\mathbf{B}^T\mathbf{r}) = \\ = \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-i\langle \mathbf{r}, \mathbf{p} \rangle + \frac{i}{2}\langle \mathbf{p}, \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{p} \rangle\right) F_0(\mathbf{p}) d^2\mathbf{p}, \end{aligned} \quad (1.20)$$

где $\mathbf{B}^T$ — транспонированная матрица.

Интеграл в правой части равенства (1.20) содержит экспоненциальный множитель

$$\exp\left(\frac{i}{2}\langle \mathbf{p}, \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{p} \rangle\right).$$

Квадратичная форма $\langle \mathbf{p}, \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{p} \rangle$ зависит от трех параметров и может быть представлена в скалярном виде разными способами, например,

$$\frac{1}{2}\langle \mathbf{p}, \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{p} \rangle = a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2 = \left\langle \mathbf{p}, \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mathbf{p} \right\rangle.$$

Однако в данном случае предпочтительнее использовать представление

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\rho}, \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} \boldsymbol{\rho} \rangle &= a(\xi^2 + \eta^2) + b[(\xi^2 - \eta^2) \cos 2\beta + 2\xi\eta \sin 2\beta] = \\ &= \left\langle \boldsymbol{\rho}, \begin{pmatrix} a + b \cos 2\beta & b \sin 2\beta \\ b \sin 2\beta & a - b \cos 2\beta \end{pmatrix} \boldsymbol{\rho} \right\rangle. \end{aligned}$$

Функция

$$\psi(\boldsymbol{\rho}, \beta) = (\xi^2 - \eta^2) \cos 2\beta + 2\xi\eta \sin 2\beta$$

называется функцией астигматического воздействия и преобразование поля $F_0(\boldsymbol{\rho})$ оптической системой (1.20) сводится к вычислению интеграла Фурье

$$\mathcal{F}[\exp(i a \rho^2 + i b \psi(\boldsymbol{\rho}, \beta)) f(\boldsymbol{\rho})](\mathbf{r}),$$

где

$$\mathcal{F}[f(\boldsymbol{\rho})](\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-i \langle \boldsymbol{\rho}, \mathbf{r} \rangle) f(\boldsymbol{\rho}) d^2 \boldsymbol{\rho}.$$

Процедура возвращения от данного представления к матрицам $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ детально описана в [9].

1.2 HLG-пучки и их свойства (обзор)

В работах [7] описаны многие решения параболического уравнения, среди которых особое значение имеют два класса решений, выражающихся через HG-функции

$$\mathcal{H}_{n,m}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{\pi 2^{n+m} n! m!}} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} H_n(x) H_m(y) \quad (n, m = 0, 1, \dots)$$

и LG-функции

$$\mathcal{L}_{n,\pm m}(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{n!}{\pi(n+m)!}} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} (x \pm iy)^m L_n^m(x^2 + y^2) \quad (n, m = 0, 1, \dots),$$

где

$$H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n} e^{-t^2}, \quad L_n^m(t) = \frac{1}{n!} t^{-m} e^t \frac{d^n}{dt^n} (t^{n+m} e^{-t})$$

— полиномы Эрмита и Лагерра соответственно.

Аналитические выражения для этих классов функций с использованием преобразования Френеля имеют вид

$$\mathbf{FR}_\ell[\mathcal{H}_{n,m}(\boldsymbol{\rho})](\mathbf{r}) = \frac{1}{|\sigma|} \exp\left(\frac{i\ell|\mathbf{r}|^2}{4|\sigma|^2} - i(n+m+1) \arg \sigma\right) \mathcal{H}_{n,m}\left(\frac{\mathbf{r}}{|\sigma|}\right), \quad (1.21)$$

$$\mathbf{FR}_\ell[\mathcal{L}_{n,\pm m}(\boldsymbol{\rho})](\mathbf{r}) = \frac{1}{|\sigma|} \exp\left(\frac{i\ell|\mathbf{r}|^2}{4|\sigma|^2} - i(2n+m+1)\arg\sigma\right) \mathcal{L}_{n,\pm m}\left(\frac{\mathbf{r}}{|\sigma|}\right), \quad (1.22)$$

где $\sigma = 1 + \frac{i\ell}{2}$ — вспомогательный комплексный параметр, используемый для более компактной записи.

Особое значение решений (1.21), (1.22) параболического уравнения связано с такими свойствами классов функций $\{\mathcal{H}_{n,m}(\mathbf{r}); n, m=0, 1, \dots\}$ и $\{\mathcal{L}_{n,\pm m}(\mathbf{r}); n, m=0, 1, \dots\}$ как ортонормальность и полнота в пространстве $L_2(\mathbb{R}^2)$. Кроме того, интенсивность решений (1.21) и (1.22) при изменении l меняется только в масштабе. Это свойство позволяет назвать их структурно устойчивыми пучками.

HG- и LG-пучки сохраняют свою структуру интенсивности при прохождении через оптические системы с радиальной симметрией:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left[\exp\left(\frac{ia|\boldsymbol{\rho}|^2}{2}\right)\mathcal{H}_{n,m}(\boldsymbol{\rho})\right](\mathbf{r}) &= \frac{(-i)^{n+m}}{\sqrt{1+a^2}} \times \\ &\times \exp\left(-\frac{ia|\mathbf{r}|^2}{2(1+a^2)} + i(n+m+1)\arctan a\right) \mathcal{H}_{n,m}\left(\frac{\mathbf{r}}{\sqrt{1+a^2}}\right), \end{aligned} \quad (1.23)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left[\exp\left(\frac{ia|\boldsymbol{\rho}|^2}{2}\right)\mathcal{L}_{n,\pm m}(\boldsymbol{\rho})\right](\mathbf{r}) &= \frac{(-i)^{2n+m}}{\sqrt{1+a^2}} \times \\ &\times \exp\left(-\frac{ia|\mathbf{r}|^2}{2(1+a^2)} + i(2n+m+1)\arctan a\right) \mathcal{L}_{n,\pm m}\left(\frac{\mathbf{r}}{\sqrt{1+a^2}}\right). \end{aligned} \quad (1.24)$$

Кроме того, HLG-пучки сохраняют свою форму при прохождении через астигматические системы, если ее оси симметрии совпадают с осями симметрии пучка [10]:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left[\exp\left(\frac{ib\psi(\boldsymbol{\rho}, 0)}{2}\right)\mathcal{H}_{n,m}(\boldsymbol{\rho})\right](\mathbf{r}) &= \frac{(-i)^{n+m}}{\sqrt{1+b^2}} \times \\ &\times \exp\left(-\frac{ib\psi(\mathbf{r}, 0)}{2(1+b^2)} + i(n-m)\arctan b\right) \mathcal{H}_{n,m}\left(\frac{\mathbf{r}}{\sqrt{1+b^2}}\right). \end{aligned} \quad (1.25)$$

Как и в случае обычных гауссовых пучков, преобразование HLG-пучков сводится к преобразованию матрицы комплексного параметра.

Если оси симметрии системы составляют с осями симметрии пучка угол α , то структура HG-пучков при прохождении такой системы радикально меняется. В этом случае HG-пучки преобразуются в конечную сумму различных HG-

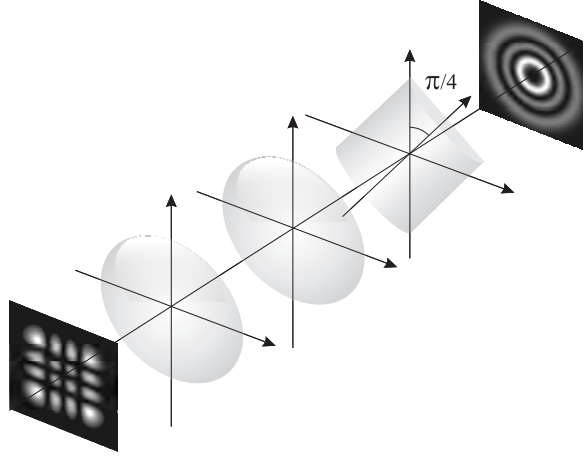


Рис. 1.1. Модовый конвертер, состоящий из двух сферических и одной цилиндрической и преобразующий HG-моды в LG-моды.

пучков [11]:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left[\exp\left(\frac{ib\psi(\mathbf{p}, \beta)}{2}\right)\mathcal{H}_{n,m}(\mathbf{p})\right](\mathbf{r}) &= \frac{(-i)^{n+m}}{\sqrt{1+b^2}} \exp\left(-\frac{ib\psi(\mathbf{r}, \beta)}{2(1+b^2)}\right) \times \\ &\times \sum_{k=0}^{n+m} (-1)^k e^{i(n+m-2k) \arctan b} c_k^{(n,m)}(\beta) \mathcal{H}_{n+m-k,k}\left(\frac{\mathcal{R}(-\beta)\mathbf{r}}{\sqrt{1+b^2}}\right), \end{aligned} \quad (1.26)$$

где

$$c_k^{(n,m)}(\beta) = \sqrt{\frac{(n+m-k)!k!}{n!m!}} \cos^{n-k} \beta \sin^{m-k} \beta P_k^{(n-k,m-k)}(-\cos 2\beta), \quad (1.27)$$

и $P_k^{(\mu,\nu)}(t) = \frac{(-1)^k}{2^k k!} \frac{1}{(1-t)^\mu(1+t)^\nu} \frac{d^k}{dt^k} \left[(1-t)^{k+\mu} (1+t)^{k+\nu} \right]$ — полиномы Якоби

В частности, когда $b = 1$ и оси симметрии астигматической системы составляют с осями симметрии HG-пучка угол $\beta = \pi/4$, реализуется преобразование HG-пучков в LG-пучки:

$$\mathcal{F}\left[\exp(i\xi\eta)\mathcal{H}_{n,m}(\mathbf{p})\right](\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{ixy}{2}\right) \begin{cases} i^{2m-n} \mathcal{L}_{m,n-m}\left(\frac{\mathbf{r}}{\sqrt{2}}\right) & (n \geq m), \\ i^n \mathcal{L}_{n,n-m}\left(\frac{\mathbf{r}}{\sqrt{2}}\right) & (n \leq m). \end{cases} \quad (1.28)$$

В [12] HG- и LG-пучки были объединены в единый класс параметрических пучков. Если определить функции $\{\mathcal{G}_{n,m}(\mathbf{r} | \alpha); n, m = 0, 1, \dots\}$ равенством

$$\mathcal{G}_{n,m}(\mathbf{r} | \alpha) = \sum_{k=0}^{n+m} i^k c_k^{(n,m)}(\alpha) \mathcal{H}_{n+m-k,k}(\mathbf{r}),$$

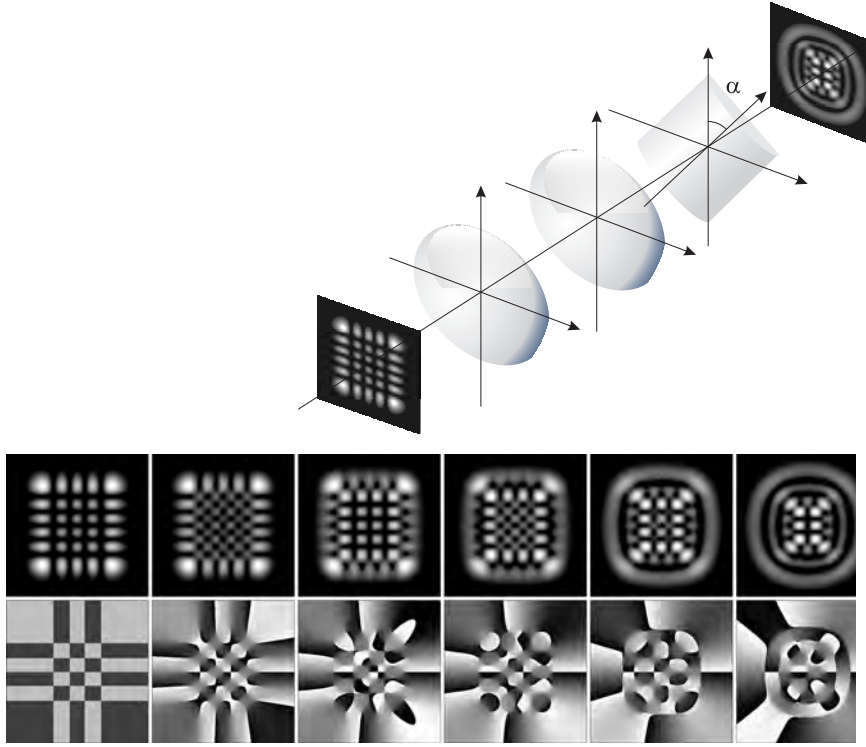


Рис. 1.2. Обобщённый модовый конвертер, осуществляющий преобразование HG-мод в HLG-моды. Угол поворота цилиндрической линзы α соответствует параметру моды. В нижнем ряду приведены экспериментальные результаты, позаимствованные из статьи [12] и демонстрирующие трансформацию выходного пучка при изменении α от 0 до π .

тогда уравнение (1.26) при $b = 1$ можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left[\exp \left(\frac{i\psi(\mathbf{p}, \beta)}{2} \right) \mathcal{H}_{n,m}(\mathbf{p}) \right] (\mathbf{r}) = \\ = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp \left(-\frac{i\psi(\mathbf{r}, \beta)}{4} - \frac{\pi i}{4} (n + m) \right) \mathcal{G}_{n,m} \left(\frac{\mathcal{R}(-\beta)\mathbf{r}}{\sqrt{2}} \middle| \beta \right). \end{aligned} \quad (1.29)$$

Сравнение астигматического преобразования (1.29) при $\beta = 0$ и $\beta = \pi/4$ с формулами (1.25) и (1.28) показывает, что

$$\mathcal{G}_{n,m}(\mathbf{r} | 0) = (-i)^m \mathcal{H}_{n,m}(\mathbf{r}) \quad \text{и} \quad \mathcal{G}_{n,m}(\mathbf{r} | \pi/4) = \begin{cases} (-1)^m \mathcal{L}_{m,n-m}(\mathbf{r}) & (n \geq m), \\ (-1)^n \mathcal{L}_{n,n-m}(\mathbf{r}) & (n \leq m). \end{cases}$$

Поэтому пучки $\mathcal{G}_{n,m}(\mathbf{r} | \alpha)$ были названы HLG-пучками.

Эти обобщенные гауссовы пучки сохраняют ряд свойств HG- и LG-пучков. Например, структурную устойчивость к преобразованию Френеля:

$$\mathbf{FR}_\ell[\mathcal{G}_{n,m}(\mathbf{p} | \alpha)](\mathbf{r}) = \frac{1}{|\sigma|} \exp \left(\frac{i\ell|\mathbf{r}|^2}{4|\sigma|^2} - i(n + m + 1) \arg \sigma \right) \mathcal{G}_{n,m} \left(\frac{\mathbf{r}}{|\sigma|} \middle| \alpha \right).$$

При любом фиксированном α семейство функций $\{\mathcal{G}_{n,m}(\mathbf{r} | \alpha), n, m = 0, 1, \dots\}$ образует ортонормальный базис в пространстве $L_2(\mathbb{R}^2)$:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \mathcal{G}_{n,m}(\mathbf{r} | \alpha) \overline{\mathcal{G}_{N,M}(\mathbf{r} | \alpha)} d^2\mathbf{r} = \delta_{nN} \delta_{mM}.$$

Некоторые свойства HLG-пучков, включая производящую функцию, рекуррентные соотношения, интегральные моменты вида

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} x |\mathcal{G}_{n,m}(\mathbf{r} | \alpha)|^2 d^2\mathbf{r} &= \iint_{\mathbb{R}^2} y |\mathcal{G}_{n,m}(\mathbf{r} | \alpha)|^2 d^2\mathbf{r} = \iint_{\mathbb{R}^2} xy |\mathcal{G}_{n,m}(\mathbf{r} | \alpha)|^2 d^2\mathbf{r} = 0, \\ \iint_{\mathbb{R}^2} (x^2 + y^2) |\mathcal{G}_{n,m}(\mathbf{r} | \alpha)|^2 d^2\mathbf{r} &= 2(n + m + 1), \\ \iint_{\mathbb{R}^2} (x^2 - y^2) |\mathcal{G}_{n,m}(\mathbf{r} | \alpha)|^2 d^2\mathbf{r} &= 2(n - m) \cos \alpha, \end{aligned}$$

а также значения полного углового момента этих пучков были найдены в [12, 13].

Общее астигматическое преобразование HLG-пучков было найдено в [13]:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left[\exp \left(\frac{ia|\boldsymbol{\rho}|^2}{2} + \frac{ib\psi(\boldsymbol{\rho}, \beta)}{2} \right) \mathcal{G}_{n,m}(\boldsymbol{\rho} | \alpha) \right] (\boldsymbol{\rho}) &= \frac{(-i)^{n+m}}{\sqrt[4]{\Delta_+ \Delta_-}} \times \\ &\times \exp \left(-\frac{ia(1+a^2-b^2)|\mathbf{r}|^2}{2\Delta_+ \Delta_-} - \frac{ib(1+b^2-a^2)\psi(\mathbf{r}, \beta)}{2\Delta_+ \Delta_-} + i(n-m)\gamma + \right. \\ &\left. + \frac{i(n+m+1)}{2} \arg(1+b^2-a^2+2ia) \right) \mathcal{G}_{n,m}(\mathcal{R}(-\varphi)\mathcal{S}(a,b)\mathcal{R}(-\beta)\mathbf{r} | \alpha'), \end{aligned} \quad (1.30)$$

где $\Delta_{\pm} = 1+(a \pm b)^2$, $\mathcal{S}(a,b) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\Delta_+} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\Delta_-} \end{pmatrix}$, и параметры пучка на выходе φ , α' , γ связаны с параметром пучка на входе α и параметрами оптической системы a , b , β соотношениями:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 2\varphi = \operatorname{tg} 2\alpha \frac{\sin 2\omega}{\cos 2\beta} - \operatorname{tg} 2\beta \cos 2\omega, \\ \sin 2\alpha' = \sin 2\alpha \cos 2\omega + \cos 2\alpha \sin 2\beta \sin 2\omega, \\ \operatorname{ctg} 2\gamma = \operatorname{ctg} 2\omega \frac{\cos 2\alpha}{\cos 2\beta} - \operatorname{tg} 2\beta \sin 2\alpha. \end{cases} \quad (1.31)$$

Здесь $\omega = \frac{1}{2} \arg(1 + a^2 - b^2 + 2ib)$ — вспомогательный параметр.

Как видно из (1.31), HLG-пучки образуют инвариантный относительно общего астигматического преобразования набор.

1.3 Астигматическое преобразование HLG-пучков и вращения в трёхмерном пространстве

Объединение HG- и LG-пучков, полученное из астигматического преобразования (1.30), позволяет рассматривать известные и находить новые свойства данных пучков с единых позиций. При этом удастся их качественное различие свести к количественным параметрам. В связи с этим возникает вопрос: возможно ли представление астигматических преобразований нового единого семейства пучков средствами матричной оптики подобно тому, как преобразуются гауссовы пучки симметричными оптическими системами?

Следует отметить, что матричное описание астигматических систем общего вида было исследовано ранее (см., например, [6, 14]). Однако ко времени публикации этих работ преобразование (1.30) еще не было известно. Как следствие, отсутствие понятия семейства обобщенных гауссовых пучков ранее давало только возможность преобразования некоторых интегральных характеристик световых полей (например, первых и вторых моментов [15], радиуса кривизны волнового фронта [16]), либо описания только оптических систем, но не преобразования целых классов световых полей, например, HG-пучков. Задачей данного параграфа является преобразование гауссовых пучков астигматическими оптическими системами общего в терминах матричного формализма.

Система уравнений (1.31), связывающая параметры ЭЛГ-пучка на выходе α' , γ , φ , параметр α ЭЛГ-пучка на входе и параметры оптической системы a , b , β , может быть переписана в виде:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 2\varphi = \operatorname{tg} 2\alpha \frac{\sin 2\omega}{\cos 2\beta} - \operatorname{tg} 2\beta \cos 2\omega, \\ \sin 2\alpha' = \sin 2\alpha \cos 2\omega + \cos 2\alpha \sin 2\beta \sin 2\omega, \\ \operatorname{ctg} 2\gamma = \operatorname{ctg} 2\omega \frac{\cos 2\alpha}{\cos 2\beta} - \operatorname{tg} 2\beta \sin 2\alpha. \end{cases} \quad (1.32)$$

Известно [17], что произвольное вращение вектора в трёхмерном пространстве полностью определяется заданием трех вещественных параметров. Например, используя углы Эйлера, его можно представить в виде трех последовательных вращений:

- 1) вращение вокруг оси z на угол $\gamma \in [0, 2\pi)$;

- 2) вращение вокруг оси y на угол $\beta \in [0, \pi]$;
 3) вращение вокруг оси z на угол $\alpha \in [0, 2\pi)$.

При повороте вектора

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \phi \\ r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \geq 0, \quad \phi \in [0, 2\pi), \quad \theta \in [0, \pi],$$

его длина r сохраняется, а угловые координаты изменяются: $(\theta, \phi) \rightarrow (\theta', \phi')$.

Связь между углами в исходной и повернутой системе координат можно записать в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} \cos \theta' & e^{-i\phi'} \sin \theta' \\ e^{i\phi'} \sin \theta' & -\cos \theta' \end{pmatrix} = U(\alpha, \beta, \gamma) \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} U^{-1}(\alpha, \beta, \gamma), \quad (1.33)$$

где

$$U(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} e^{-i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\beta/2) & -\sin(\beta/2) \\ \sin(\beta/2) & \cos(\beta/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\gamma/2} & 0 \\ 0 & e^{i\gamma/2} \end{pmatrix}$$

— матрица поворота в трёхмерном пространстве.

В общем случае, два последовательных поворота можно свести к одному следующим образом:

$$U(\alpha, \beta, \gamma) = U(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) U(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1),$$

где углы (α, β, γ) углы результирующего поворота связаны с углами $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ формулами:

$$\begin{cases} \operatorname{ctg}(\alpha - \alpha_2) = \operatorname{ctg} \beta_1 \frac{\sin \beta_2}{\sin(\alpha_1 + \gamma_2)} + \cos \beta_2 \operatorname{ctg}(\alpha_1 + \gamma_2), \\ \cos \beta = \cos \beta_1 \cos \beta_2 - \sin \beta_1 \sin \beta_2 \cos(\alpha_1 + \gamma_2), \\ \operatorname{ctg}(\gamma - \gamma_1) = \operatorname{ctg} \beta_2 \frac{\sin \beta_1}{\sin(\alpha_1 + \gamma_2)} + \cos \beta_1 \operatorname{ctg}(\alpha_1 + \gamma_2). \end{cases} \quad (1.34)$$

Из сравнения этих формул с соотношениями (1.32) видно, что изменение параметров при интегральном преобразовании (1.30) может быть записано с помощью трехмерных матриц поворота:

$$U\left(\frac{\pi}{2} - 2\gamma, \frac{\pi}{2} - 2\alpha', 2\varphi\right) = U\left(0, 2\omega, \frac{\pi}{2} + 2\beta\right) U\left(0, \frac{\pi}{2} - 2\alpha, 0\right), \quad (1.35)$$

Существует другая последовательность вращений, которая описывается уравнениями (1.32):

$$U\left(2\gamma, \frac{\pi}{2} + 2\alpha', 2\varphi\right) = U\left(-\frac{\pi}{2}, 2\omega, \frac{\pi}{2} - 2\beta\right) U\left(0, \frac{\pi}{2} + 2\alpha, 0\right). \quad (1.36)$$

Каждая матрица поворота определяется параметрами только одной группы:

- 1) параметром исходного HLG-пучка α ;
- 2) параметрами конечного HLG-пучка γ, α', ϕ ;
- 3) параметрами оптической системы β и ω .

Вращения векторов в трёхмерном пространстве соответствует преобразование функций. Если функция $f(\theta, \phi)$ определена на единичной сфере, тогда преобразование $f(\theta, \phi) \rightarrow f(\theta', \phi')$ при повороте на углы Эйлера α, β, γ описывается в терминах оператора поворота

$$f(\theta', \phi') = \mathcal{D}(\alpha, \beta, \gamma) f(\theta, \phi),$$

где явный вид оператора определяется по его действию на сферические функции [17]:

$$Y_{l,m}(\theta', \phi') = \mathcal{D}(\alpha, \beta, \gamma) Y_{l,m}(\theta, \phi) = \sum_{n=-l}^l e^{-in\alpha} d_{n,m}^l(\beta) e^{-im\gamma} Y_{l,n}(\theta, \phi), \quad (1.37)$$

и $d_{n,m}^l(\beta)$ — d -функции Вигнера¹. Здесь $l = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$ и $n, m \in \{-l, -l+1, \dots, l\}$. Например,

$$d_{0,0}^0(\beta) = 1; \quad \|d_{n,m}^{1/2}(\beta)\| = \mathbf{R}\left(\frac{\beta}{2}\right) \quad \left(n, m = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right);$$

$$\|d_{n,m}^1(\beta)\| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \cos \beta & -\sqrt{2} \sin \beta & 1 - \cos \beta \\ \sqrt{2} \sin \beta & 2 \cos \beta & -\sqrt{2} \sin \beta \\ 1 - \cos \beta & \sqrt{2} \sin \beta & 1 + \cos \beta \end{pmatrix} \quad (n, m = -1, 0, 1).$$

Последовательные действия оператора $\mathcal{D}$ удовлетворяет соотношению, похожему на соотношение для матрицы U :

$$\mathcal{D}(\alpha, \beta, \gamma) = \mathcal{D}(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) \mathcal{D}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1).$$

где углы $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ связаны с (α, β, γ) уравнениями (1.34). Значит, аналогично (1.35), (1.36), имеем

$$\mathcal{D}\left(\frac{\pi}{2} - 2\gamma, \frac{\pi}{2} - 2\alpha', 2\varphi\right) = \mathcal{D}\left(0, 2\omega, \frac{\pi}{2} + 2\beta\right) \mathcal{D}\left(0, \frac{\pi}{2} - 2\alpha, 0\right), \quad (1.38)$$

$$\mathcal{D}\left(2\gamma, \frac{\pi}{2} + 2\alpha, 2\varphi\right) = \mathcal{D}\left(-\frac{\pi}{2}, 2\omega, \frac{\pi}{2} - 2\beta\right) \mathcal{D}\left(0, \frac{\pi}{2} + 2\alpha, 0\right). \quad (1.39)$$

¹ По определению

$$d_{n,m}^l(\beta) = \sqrt{\frac{k! (k + \mu + \nu)!}{(k + \mu)! (k + \nu)!}} \sin^\mu\left(\frac{\beta}{2}\right) \cos^\nu\left(\frac{\beta}{2}\right) P_k^{(\mu, \nu)}(\cos \beta) \cdot \left\{ \begin{matrix} 1 & (m \geq n) \\ (-1)^{n-m} & (n > m) \end{matrix} \right\},$$

где $\mu = |n - m|$, $\nu = |n + m|$, $k = l - \frac{\mu + \nu}{2}$.

Используя определение коэффициентов $c_k^{(n,m)}(\alpha)$ из уравнения (1.27), явный вид матричных элементов оператора поворота $\mathcal{D}$ и d -функций Вигнера, можно доказать, что HLG-функции с различными параметрами могут быть построены при действии оператора $\mathcal{D}$ на HG-функции:

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_{l+m,l-m}(\mathbf{r} | \alpha) &= \sum_{n=-l}^l d_{m,n}^l(2\alpha) \mathcal{G}_{l+n,l-n}(\mathbf{r} | 0) = \\ &= \sum_{n=-l}^l d_{n,m}^l(-2\alpha) \mathcal{G}_{l+n,l-n}(\mathbf{r} | 0) = \mathcal{D}(0, -2\alpha, 0) \mathcal{G}_{l+m,l-m}(\mathbf{r} | 0).\end{aligned}\quad (1.40)$$

Действуя правой и левой частями соотношения (1.38) на HLG-функции, получаем следующий результат. Интегральное преобразование (1.30) можно интерпретировать как действие оператора $\mathcal{D}$:

$$\mathcal{D}\left(\frac{\pi}{2} - 2\gamma, \frac{\pi}{2}, 0\right) \mathcal{G}_{n,m}(\mathbf{r} | \alpha') e^{-i(n-m)\varphi} = \mathcal{D}(0, 2\omega, 2\beta) \mathcal{D}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0\right) \mathcal{G}_{n,m}(\mathbf{r} | \alpha). \quad (1.41)$$

1.4 Обобщенный закон $ABCD$ HLG-для мод

Таким образом, при действии оператором поворота на HLG-пучки, параметры α и φ преобразуются так же, как сферические координаты вектора $(\theta, \phi) \rightarrow (\theta', \phi')$ преобразуются в (1.33):

$$\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha, 0\right) \xrightarrow{U(0, 2\omega, \frac{\pi}{2} - 2\beta)} \left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha', \frac{\pi}{2} + 2\varphi\right).$$

Полное преобразование координат при астигматических воздействиях включает масштабирование и имеет вид:

$$\mathbf{r} = \mathcal{R}(-\varphi) \mathcal{S}(a, b) \mathcal{R}(-\beta) \mathbf{r}_0.$$

Как и в случае обычных гауссовых пучков, преобразование координат может быть записано на языке преобразования комплексного параметра:

$$F(\mathbf{r}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{Q}_0^{-1})} \exp(-i\langle \mathbf{r}, \mathbf{R}^{-1}\mathbf{r} \rangle - i(n-m)\varphi) \mathcal{G}_{n,m}(\mathcal{R}(-\gamma)\mathbf{w}^{-1}\mathbf{r} | \alpha').$$

Матрица комплексного параметра преобразуется по закону $ABCD$

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{A}\mathbf{Q}_0 + \mathbf{B})(\mathbf{C}\mathbf{Q}_0 + \mathbf{D})^{-1},$$

и включает в себя матрицы кривизны волнового фронта $\mathbf{R}$ и ширины пучка $\mathbf{w}_0$, а преобразование остальных параметров HLG-пучка определяется еще одним матричным соотношением между тремя матрицами вращения:

$$\mathbf{U}\left(\frac{\pi}{2} - 2\varphi, \frac{\pi}{2} - 2\alpha', 2\gamma\right) = \mathbf{U}\left(0, 2\omega, \frac{\pi}{2} + 2\beta\right)\mathbf{U}\left(0, \frac{\pi}{2} - 2\alpha, 0\right).$$

В этом соотношении одна матрица зависит только от параметров оптической системы, две других — от параметров входного и выходного пучка соответственно. Параметр γ определяет фазовый набег пучка, параметр α отвечает за структуру интенсивности пучка, параметр φ определяет поворот пучка в плоскости наблюдения.

Матричный подход при описании преобразования HLG-пучков в линейных оптических системах позволяет обобщить известный закон ABCD. Поскольку семейство HLG-пучков с фиксированным параметром обладает свойством полноты и ортогональности в пространстве квадратично интегрируемых функций, этот результат может быть использован для нахождения преобразования произвольного светового поля с конечной энергией при прохождении через линейные оптические системы. Данное обстоятельство имеет не только теоретическое, но и практическое значение: вычисление интегральных преобразований световых пучков требует существенно больше компьютерных ресурсов, чем алгебраические операции с матрицами.

1.5 Сфера Пуанкаре как модель астигматических преобразований

Способность лазерных пучков переносить угловой момент вдоль направления распространения обсуждается, начиная с работы [18]. В этой работе было показано, что орбитальный угловой момент является естественным свойством всех пучков со спиральной фазой и, следовательно, может быть легко получен с помощью обычного оптического инструментария. Спиральный фазовый фронт образуется при наличии фазовой сингулярности.

Простейшим примером светового пучка, переносящего орбитальный угловой момент, является пучок, фаза которого в поперечной плоскости имеет вид $\Phi(\phi) = \exp(in\phi)$, где ϕ — угловая координата и n — произвольное целое число. Такие

пучки имеют спиральные фазовые фронты, у которых число витков спирали и направление закрутки зависят от величины и знака n соответственно. Поперечная к этим фазовым фронтам составляющая электромагнитного поля имеет продольную компоненту. Другими словами, вектор Пойнтинга, который всегда параллелен вектору нормали к поверхности этих фазовых фронтов, имеет азимутальную компоненту вокруг пучка и, следовательно, угловой момент вдоль оси распространения пучка.

Линии фазовых сингулярностей внутри световых полей были обнаружены Дираком в 1930 году в работе, посвященной обсуждению условий существования магнитного монополя [19]. Первооткрывателями сингулярностей электромагнитного поля были Най и Берри, рассмотревшие в 1970-е годы вопрос о форме радиосигналов, получаемых после отражения от глубинного ледяного щита в Антарктиде [20]. Они обнаружили, что распределение амплитуды отраженного сигнала содержит нули интенсивности, вокруг которых фаза меняется на 2π . Первое сообщение о генерации пучка, содержащего единственную линию фазовой сингулярности появилось в 1979 году в работе Вогана и Уиллетса, которые пришли к заключению, что HG-моды $\mathcal{H}_{0,1}$ и $\mathcal{H}_{1,0}$ могут в комбинации давать пучок со спиральной фазой.

Одним из самых интересных моментов, которые возникают при рассмотрении углового момента гауссовых пучков является их связь с квантовой теорией углового момента частиц со спином $\frac{1}{2}$ [21].

Состав высших гауссовых мод с фазовыми сингулярностями можно представить с помощью движения по обычной сфере в абстрактном пространстве, называемой сферой Пуанкаре орбитального углового момента [19]. Произвольной HLG-

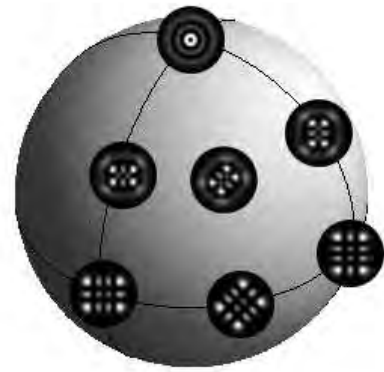


Рис. 1.3. Сфера Пуанкаре для пучка $\mathcal{G}_{3,2}(\mathcal{R}(2\varphi)\mathbf{r} | \alpha)$. Полюсы соответствуют LG-пучкам, точки на экваторе — HG-пучку для разных углов поворота. Остальные точки на сфере соответствуют HLG-пучкам, удвоенный параметр которых равен долготе, а удвоенный угол поворота — широте точки.

моде можно поставить в соответствие трехмерный вектор

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r \cos 2\varphi \cos 2\alpha \\ r \sin 2\varphi \cos 2\alpha \\ r \sin 2\alpha \end{pmatrix}, \quad \varphi \in [0, \pi), \quad \alpha \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right].$$

Здесь α — параметр моды, изменение которого от $-\frac{\pi}{4}$ (LG-моды, южный полюс) через 0 (HG-моды) до $\frac{\pi}{4}$ (LG-моды, комплексно сопряженные модам на южном полюсе) соответствует движению по меридиану от одного полюса к другому. Изменение параметра φ описывает вращение распределения пучка в поперечной плоскости при движении по параллелям.

Известно [21], что HG-функции могут быть получены из обычной гауссовой функции с помощью дифференциальных операторов:

$$\mathcal{H}_{n,m}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{n!m!}}(x - \partial_x)^n(y - \partial_y)^m \mathcal{H}_{0,0}(\mathbf{r}).$$

Как следствие, HLG-пучки можно представить в виде

$$\mathcal{G}_{n,m}(\mathbf{r} | \alpha) = \mathcal{D}(0, -2\alpha, 0) \mathcal{G}_{n,m}(\mathbf{r} | 0) = \mathcal{D}(0, -2\alpha, 0) \frac{a_1^n a_2^m}{\sqrt{n!m!}} \mathcal{H}_{0,0}(\mathbf{r}),$$

где $a_1 = x - \partial_x$, $a_2 = -i(y - \partial_y)$.

Полиномиальный оператор

$$P_{\frac{n+m}{2}, \frac{n-m}{2}}(a_1, a_2) = \frac{a_1^n a_2^m}{\sqrt{n!m!}}$$

содержит всю информацию об угловом распределении комплексной амплитуды пучка $\mathcal{G}_{n,m}(\mathbf{r} | \alpha)$ и, следовательно, его симметрии. Изменение симметрии пучка определяется изменением параметра θ и осуществляется с помощью оператора поворота трёхмерной системы координат. Так как оператор поворота изменяет угловое распределение комплексной амплитуды пучка, то под его действием изменяется только полиномиальный оператор. В квантовой теории углового момента доказано, что такое преобразование соответствует преобразованию операторов рождения при повороте системы координат:

$$\mathcal{D}(U) P_{\frac{n+m}{2}, \frac{n-m}{2}}(a_1, a_2) = P_{\frac{n+m}{2}, \frac{n-m}{2}}(a'_1, a'_2),$$

где $a'_k = U_{1k}a_1 + U_{2k}a_2$, U_{ij} — элементы матрицы вращения.

Рассматривая произвольное линейное преобразование операторов рождения

$$a'_k = z_{1k}a_1 + z_{2k}a_2,$$

где z_{ij} — комплексные элементы матрицы преобразования, и используя явный вид полиномиального оператора и перестановочные соотношения:

$$\begin{aligned} P_{\frac{n+m}{2}, \frac{n-m}{2}}(\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2) &= \mathcal{D}(Z) P_{\frac{n+m}{2}, \frac{n-m}{2}}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \frac{(z_{11}\mathbf{a}_1 + z_{21}\mathbf{a}_2)^n (z_{12}\mathbf{a}_1 + z_{22}\mathbf{a}_2)^m}{\sqrt{n! m!}} = \\ &= \sqrt{n! m!} \sum_{s,t} \frac{z_{11}^{n-s} z_{21}^s z_{12}^{m-t} z_{22}^t}{(n-s)! s! (m-t)! t!} \mathbf{a}_1^{n+m-s-t} \mathbf{a}_2^{s+t}, \end{aligned}$$

можно ввести функции $D(Z)$

$$\begin{aligned} D_{\frac{n-m'}{2}, \frac{n-m}{2}}(Z) &= \sqrt{n! m!} \left(n + \frac{m-m'}{2} \right)! \left(\frac{m+m'}{2} \right)! \times \\ &\times \sum_s \frac{z_{11}^{n-s} z_{21}^s z_{12}^{m-t} z_{22}^t}{(n-s)! s! \left(\frac{m-m'}{2} + s \right)! \left(\frac{m+m'}{2} - s \right)!} \end{aligned}$$

Здесь суммирование ведется по всем допустимым s .

Это позволяет перейти к комплексифицированным HLG-пучкам

$$\mathcal{G}_{n,m}(\mathbf{r} | Z) = \mathcal{D}(Z) \frac{a_1^n a_2^m}{\sqrt{n! m!}} \mathcal{H}_{0,0}(\mathbf{r}).$$

Такой подход к описанию HLG-функций позволяет использовать методы квантовой теории для определения средних значений физических величин. В частности, эти методы позволяют записать зависимость углового момента пучка от его симметрии в поперечной плоскости. Несмотря на то, что угловой момент HLG-мод уже был найден ранее [13], приведем более простой способ получения данного результата.

Известно [12], что значение проекции углового момента на направление распространения для функций Лагерра–Гаусса имеет вид:

$$L_z [\mathcal{G}_{n,m}(\mathbf{r} | \pi/4)] = (n-m) \mathcal{G}_{n,m}(\mathbf{r} | \pi/4).$$

Явный вид оператора проекции углового момента определяется по соответствующим этим функциям дифференциальным операторам [12]:

$$L_z = \frac{1}{2}(A_1 A_1^* - A_2 A_2^*),$$

где $A_1 = a_1 - a_2$, $A_2 = a_1 + a_2$ — дифференциальные операторы LG-функций.

Для всех остальных мод может быть найдено среднее значение проекции углового момента по определению:

$$L_z [\mathcal{G}_{n,m}(\mathbf{r} | \alpha)] = \iint_{\mathbb{R}^2} \bar{\mathcal{G}}_{n,m}(\mathbf{r} | \alpha) L_z [\mathcal{G}_{n,m}(\mathbf{r} | \alpha)] d^2 \mathbf{r},$$

или, используя переход, аналогичный переходу в представление взаимодействия в квантовой теории,

$$\begin{aligned} L_z[\mathcal{G}_{n,m}(\mathbf{r} | \alpha)] &= \iint_{\mathbb{R}^2} \bar{\mathcal{G}}_{n,m}(\mathbf{r} | 0) \mathcal{D}(0, 2\alpha, 0) L_z[\mathcal{D}(0, -2\alpha, 0) \mathcal{G}_{n,m}(\mathbf{r} | 0)] d^2\mathbf{r} = \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} \mathcal{H}_{n,m}(\mathbf{r}) L'_z[\mathcal{H}_{n,m}(\mathbf{r})] d^2\mathbf{r}. \end{aligned}$$

Здесь

$$L'_z = \mathcal{D}(0, 2\alpha, 0) L_z \mathcal{D}(0, -2\alpha, 0) = -(\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2^* + \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1^*) \cos 2\alpha + (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^* - \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2^*) \sin 2\alpha.$$

С помощью рекуррентных соотношений для HG-мод

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^* \mathcal{H}_{n,m}(\mathbf{r}) &= n \mathcal{H}_{n,m}(\mathbf{r}), & \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1^* \mathcal{H}_{n,m}(\mathbf{r}) &= \sqrt{(m+1)n} \mathcal{H}_{n-1,m+1}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2^* \mathcal{H}_{n,m}(\mathbf{r}) &= m \mathcal{H}_{n,m}(\mathbf{r}), & \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2^* \mathcal{H}_{n,m}(\mathbf{r}) &= \sqrt{(n+1)m} \mathcal{H}_{n+1,m-1}(\mathbf{r}), \end{aligned}$$

и их ортогональности можно показать, что угловой момент HLG-мод имеет вид

$$\begin{aligned} L_z[\mathcal{G}_{n,m}(\mathbf{r} | \alpha)] &= \iint_{\mathbb{R}^2} \mathcal{H}_{n,m}(\mathbf{r}) (-(\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2^* + \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1^*) \cos 2\alpha + (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^* - \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2^*) \sin 2\alpha) \mathcal{H}_{n,m}(\mathbf{r}) d^2\mathbf{r} \\ &= \sqrt{(m+1)n} \cos 2\alpha \iint_{\mathbb{R}^2} \mathcal{H}_{n,m}(\mathbf{r}) \mathcal{H}_{n-1,m+1}(\mathbf{r}) d^2\mathbf{r} \\ &\quad + \sqrt{m(n+1)} \cos 2\alpha \iint_{\mathbb{R}^2} \mathcal{H}_{n,m}(\mathbf{r}) \mathcal{H}_{n+1,m-1}(\mathbf{r}) d^2\mathbf{r} \\ &\quad + (n+m) \sin 2\alpha \iint_{\mathbb{R}^2} \mathcal{H}_{n,m}(\mathbf{r}) \mathcal{H}_{n,m}(\mathbf{r}) d^2\mathbf{r}, \end{aligned}$$

т.е.

$$L_z[\mathcal{G}_{n,m}(\mathbf{r} | \alpha)] = (m+n) \sin 2\alpha.$$

Существование орбитального углового момента связано со «скрытой» симметрией гауссовых мод [19]. Движение по параллелям сферы Пуанкаре фактически сводится к преобразованию координат, в то время как движение по меридианам сферы Пуанкаре к ним свести нельзя. Если на полюсе и на экваторе сферы находятся HG- и LG-пучки, которые разделяются на одномерные пучки в декартовом и полярном пространстве соответственно, то между ними находятся общие HLG-моды, которые разделить нельзя.

1.6 Частные случаи астигматического преобразования HLG-пучков

Преобразование Френеля астигматических LG-пучков

Задача вычисления преобразования Френеля астигматических LG-пучков была исследована в [22], однако равенство (1.30) помогает выявить еще некоторые детали этого преобразования. Рассмотрим астигматический пучок Лагерра–Гаусса

$$\text{LGA}_{n,m}(\mathbf{r}) = \exp(ic_x x^2 + ic_y y^2) \mathcal{G}_{n,m}(\mathbf{r} \mid \pi/4).$$

и представим преобразование Френеля в виде

$$\mathbf{FR}_\ell[\text{LGA}_{n,m}(\boldsymbol{\rho})](\mathbf{r}) = \frac{2}{i\ell} \exp\left(\frac{ir^2}{2\ell}\right) \mathcal{F}\left[\exp\left(\frac{i\rho^2}{\ell} + ic_x \xi^2 + ic_y \eta^2\right) \mathcal{G}_{n,m}\left(\boldsymbol{\rho} \mid \frac{\pi}{4}\right)\right]\left(\frac{2\mathbf{r}}{\ell}\right).$$

Таким образом, мы получили интеграл вида (1.30), где

$$a = \frac{1}{\ell} + \frac{c_x + c_y}{2}, \quad b = \frac{c_x - c_y}{2}, \quad \beta = 0, \quad \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

Введем для компактности вспомогательные параметры

$$\sigma_x = 1 + c_x \ell + i\ell, \quad \sigma_y = 1 + c_y \ell + i\ell.$$

Тогда $\sigma_+ = i\sigma_x^*/\ell$, $\sigma_- = i\sigma_y^*/\ell$, $\omega_+ = (\pi - \arg \sigma_x - \arg \sigma_y)/2$, $\omega_- = (\arg \sigma_y - \arg \sigma_x)/2$. Решение системы (1.32) есть $\theta = \pi/4 - \omega_-$, $\gamma = \phi = \pi/4$. После простых, но громоздких вычислений окончательно получаем

$$\mathbf{FR}_\ell[\text{LGA}_{n,m}(\boldsymbol{\rho})](\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{|\sigma_x \sigma_y|}} \exp(i\Psi(\mathbf{r}) + i\Psi_0) \mathcal{G}_{n,m}\left[\mathbf{R}\left(-\frac{\pi}{4}\right) \mathbf{r}_1 \mid \frac{\pi}{4} - \omega_-\right], \quad (1.42)$$

где

$$\Psi(\mathbf{r}) = \frac{c_x + (1 + c_x^2)\ell}{w_0^2 |\sigma_x|^2} x^2 + \frac{c_y + (1 + c_y^2)\ell}{|\sigma_y|^2} y^2, \\ \Psi_0 = (n - m) \frac{\pi}{4} - (n + m + 1) \frac{\arg \sigma_x + \arg \sigma_y}{2}, \quad \mathbf{r}_1 = \left(\frac{x}{|\sigma_x|}, \frac{y}{|\sigma_y|} \right).$$

Если $c_x = c_y = 0$, то, используя равенство (1.33) получаем хорошо известный результат о структурной устойчивости ЛГ-пучков при распространении в зоне Френеля.

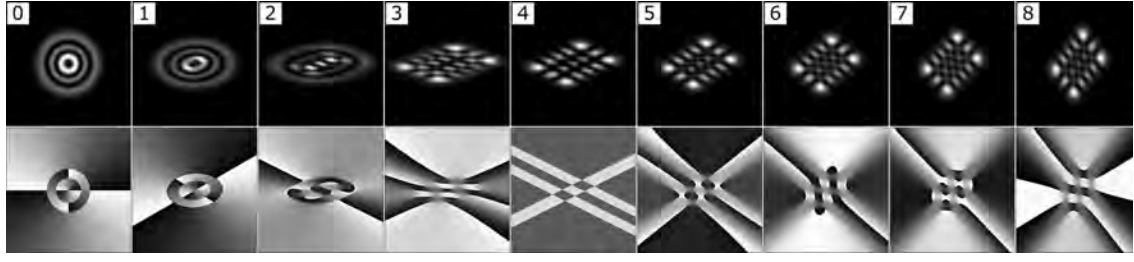


Рис. 1.4. Распределения интенсивности и фазы пучка $\exp(i\Psi_0)\mathcal{G}_{4,2}(\mathbf{R}(-\pi/4)\mathbf{r}_2 \mid \pi/4 - (\arg \sigma_y - \arg \sigma_x)/2)$ при $c_x = 1$, $c_y = -\frac{3}{2}$ и различных l . Вектор $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 \sqrt{|\sigma_x \sigma_y|}$ выбран вместо используемого в тексте $\mathbf{r}_1$, чтобы скомпенсировать масштабное увеличение пучка при $l \rightarrow +\infty$. Номер кадра N связан с плоскостью регистрации ℓ соотношением $\ell = \text{tg}(\pi N/16)$, т.е. $N = 0, 4, 8$ соответствует исходному пучку и его преобразованиям в плоскости Рэлея и Фурье соответственно.

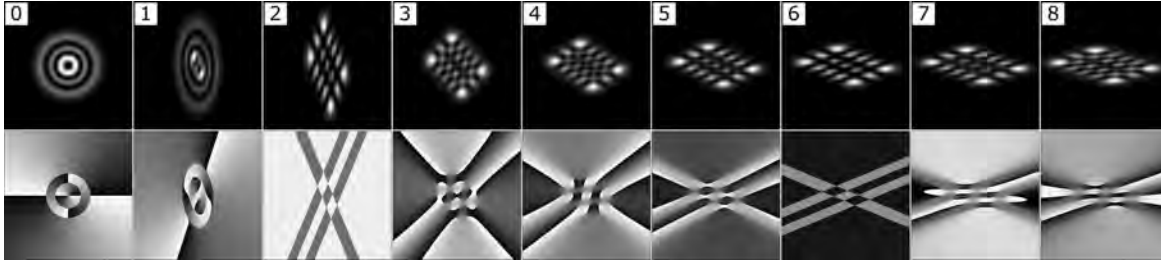


Рис. 1.5. То же что и 1.4, но для $c_x = -2\sqrt{2}$, $c_y = 0$. HG-пучок получается при $N = 2$ и $N = 6$.

Преобразование Френеля эллиптических HLG-пучков

Вычислим преобразование Френеля эллиптического HLG-пучка, используя общую формулу интегрального преобразования типа Фурье HLG-пучков с дополнительной квадратичной экспонентой:

$$\begin{aligned} \mathbf{FR}_\ell \left[\mathcal{G}_{n,m} \left(\xi, \frac{\eta}{c} \mid \alpha \right) \right] &= \left| \begin{array}{l} \text{считаем,} \\ \text{что } c > 0 \end{array} \right| = \\ &= \frac{c}{\pi i \ell} \exp \left(\frac{i}{\ell} r^2 \right) \iint_{\mathbb{R}^2} \exp \left(-i \left[\frac{2x}{\ell} \cdot \xi + \frac{2cy}{\ell} \cdot \eta \right] + \frac{i}{\ell} \xi^2 + \frac{ic^2}{\ell} \eta^2 \right) \mathcal{G}_{n,m}(\rho, \mid \alpha) d\rho. \end{aligned}$$

Теперь применим общую теорию (1.30) и определим параметры выходного пучка согласно (1.32). Показатель квадратичной экспоненты на входе не содержит

смешанного члена, поэтому $\beta = 0$. Далее,

$$\begin{aligned} \frac{i}{\ell} \xi^2 + \frac{ic^2}{c} \eta^2 &= ia(\xi^2 + \eta^2) + ib(\xi^2 - \eta^2) \Rightarrow \\ a + b &= \frac{1}{\ell}, \quad a - b = \frac{c^2}{\ell} \Rightarrow a = \frac{(1 + c^2)}{2\ell}, \quad b = \frac{(1 - c^2)}{2\ell} \Rightarrow \\ \Delta_+ &= 1 + \frac{1}{\ell^2}, \quad \Delta_- = 1 + \frac{c^4}{\ell^2}. \end{aligned}$$

Находим вспомогательный угол ω :

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{2} \arg\left(1 + (a + b)(a - b) + 2ib\right) = \frac{1}{2} \arg\left(1 + \frac{c^2}{\ell^2} + \frac{i(1 - c^2)}{\ell}\right) = \\ &= \frac{1}{2} \arg\left(\frac{c^2}{\ell^2}[1 - i\ell]\left[1 + \frac{i\ell}{c^2}\right]\right) = \frac{1}{2} \left(\arctg \frac{\ell}{c^2} - \arctg \ell\right). \end{aligned}$$

Для упрощения записи получающихся формул определим параметры

$$\sigma_x = 1 + i\ell, \quad \sigma_y = 1 + \frac{i\ell}{c^2}.$$

Тогда

$$\omega = \frac{\arg \sigma_y - \arg \sigma_x}{2}, \quad \Delta_+ = \frac{1}{\ell^2} |\sigma_x|^2, \quad \Delta_- = \frac{c^4}{\ell^2} |\sigma_y|^2.$$

Перепишем формулы (1.32), подставив в них известные значение β :

$$\begin{cases} \sin 2\theta = \sin 2\alpha \cos 2\omega, \\ e^{2i\gamma} \cos 2\theta = \cos 2\alpha + i \sin 2\alpha \sin 2\omega, \\ e^{2i\phi} = \cos 2\gamma (\cos 2\omega + i \cos 2\alpha \sin 2\omega) + i \sin 2\gamma \sin 2\alpha. \end{cases}$$

Займемся преобразованием слагаемых в показателе экспоненты в правой части формулы (1.30). Сначала постоянное слагаемое:

$$\begin{aligned} \arg(1 + b^2 - a^2 + 2ia) &= \arg\left(1 - \frac{c^2}{\ell^2} + \frac{i(1 + c^2)}{\ell}\right) = \\ &= \arg\left(-\frac{c^2}{\ell^2}[1 - i\ell]\left[1 - \frac{i\ell}{c^2}\right]\right) = \pi - \arctg \ell - \arctg \frac{\ell}{c^2} = \pi - \arg \sigma_x - \arg \sigma_y. \end{aligned}$$

Теперь квадратичные члены:

$$\begin{aligned} &-\frac{ia(1 + a^2 - b^2)}{4\Delta_+\Delta_-} (x^2 + y^2) - \frac{ib(1 + b^2 - a^2)}{4\Delta_+\Delta_-} (x^2 - y^2) = \\ &= -\frac{i}{4\Delta_+\Delta_-} \left(x^2(a + a^3 - ab^2 + b + b^3 - ba^2) + y^2(a + a^3 - ab^2 - b - b^3 + ba^2)\right) = \\ &= -\frac{i}{4\Delta_+\Delta_-} \left(x^2(a + b)[1 + (a - b)^2] + y^2(a - b)[1 + (a + b)^2]\right) = \\ &= -\frac{i}{4} \left(\frac{a + b}{\Delta_+} x^2 + \frac{a - b}{\Delta_-} y^2\right) \ominus \end{aligned}$$

Возвращаемся от переменных x, y к исходным переменным $\frac{2x}{\ell}, \frac{2cy}{\ell}$:

$$\ominus - \frac{i}{4} \left(\frac{\frac{1}{\ell}}{\frac{1}{\ell^2} |\sigma_x|^2} \frac{x^2}{\ell^2} + \frac{\frac{c^2}{\ell}}{\frac{c^4}{\ell^2} |\sigma_y|^2} \frac{4c^2 y^2}{\ell^2} \right) = -\frac{i}{\ell} \left(\frac{x^2}{|\sigma_x|^2} + \frac{y^2}{|\sigma_y|^2} \right).$$

Собираем все части в единый ответ:

$$\begin{aligned} \mathbf{FR}_l \left[\mathcal{G}_{n,m} \left(\xi, \frac{\eta}{c} \middle| \alpha \right) \right] (\mathbf{r}) &= \frac{1}{\sqrt{|\sigma_x \sigma_y|}} \exp \left(i\ell |\mathbf{r}_1|^2 + i(n-m)\phi \right) \times \\ &\times \exp \left(-i(n+m+1) \frac{\arg \sigma_x + \arg \sigma_y}{2} \right) \mathcal{G}_{n,m} \left(\mathbf{R}(-\gamma) \mathbf{r}_1 \middle| \theta \right), \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{r}_1 = \left(\frac{x}{|\sigma_x|}, \frac{y}{c|\sigma_y|} \right).$$

В частности, при $c = 1$ получаем известный результат о структурной устойчивости HLG-пучков, при распространении в зоне Френеля:

$$\mathbf{FR}_\ell \left[\mathcal{G}_{n,m} \left(\xi, \eta \middle| \alpha \right) \right] = \frac{1}{|\sigma|} \exp \left(i\ell \frac{x^2 + y^2}{|\sigma|^2} - i(n+m+1) \arg \sigma \right) \mathcal{G}_{n,m} \left(\frac{x}{|\sigma|}, \frac{y}{|\sigma|} \middle| \alpha \right),$$

где $\sigma = 1 + i\ell$.

Рассмотрим еще три вопроса: 1) в какой плоскости получающийся HLG-пучок будет иметь не «искривленные» (аффинные) аргументы, а лишь повернутые; 2) существуют ли такие плоскости в зоне Фурье, в которых HLG-пучок, переходит в HG- и LG-пучок, 3) какой вид будет у эллиптического LG-пучка, в зоне Фурье (т.е. при $l \rightarrow \infty$).

Для ответа на первый вопрос заметим, что «искривления» аргументов HLG-пучка на выходе не будет, если потребовать выполнения равенства $|\sigma_x| = c|\sigma_y|$. Тогда

$$|\sigma_x|^2 = c^2 |\sigma_y|^2 \Leftrightarrow 1 + \ell^2 = c^2 \left(1 + \frac{\ell^2}{c^4} \right) \Leftrightarrow (1 - c^2) \left(1 - \frac{\ell^2}{c^2} \right) = 0.$$

Если $c = 1$, то получается обычный «круговой» HLG-пучок, который остается неискривленным при всех ℓ . Если $c \neq 1$, то эллиптический пучок переходит в неискривленный только при $\ell = c$. При этом

$$\sigma_x = 1 + ic, \quad \sigma_y = 1 + \frac{i}{c} = \frac{i}{c} (1 - ic) = \frac{i\bar{\sigma}_x}{c}$$

и

$$\mathbf{FR}_{\ell=c} \left[\mathcal{G}_{n,m} \left(\xi, \frac{\eta}{c} \middle| \alpha \right) \right] (\mathbf{r}) = \frac{\sqrt{c}}{1+c^2} \exp \left(\frac{i(cx^2 + y^2/c^2)}{1+c^2} + i(n-m)\phi \right) \times \\ \times \exp \left(-i(n+m+1) \frac{\pi}{4} \right) \mathcal{G}_{n,m} \left(\frac{\mathbf{R}(-\gamma)\mathbf{r}}{\sqrt{1+c^2}} \middle| \theta \right),$$

при этом $\omega = \arctg c$.

Рассмотрим второй вопрос. Из уравнения

$$\sin 2\theta = \sin 2\alpha \cos 2\omega$$

видно, что пучок Лагерра-Гаусса можно наблюдать при условии

$$\cos 2\omega = \frac{1}{\sin 2\alpha}.$$

При $\ell \rightarrow \infty$

$$\arg \sigma_x \sim \frac{\pi}{2}, \quad \arg \sigma_y \sim \frac{\pi}{2}, \quad |\sigma_x| \sim \ell, \quad |\sigma_y| \sim \frac{\ell}{c^2}, \quad \frac{|\sigma_x|}{|\sigma_y|} \sim c^2.$$

Поэтому

$$\mathbf{FR}_{\ell} \left[\mathcal{G}_{n,m} \left(\xi, \frac{\eta}{c} \middle| \frac{\pi}{4} \right) \right] \sim \\ \sim \frac{c}{\ell} \exp \left(\frac{i}{\ell} [x^2 + y^2] + (n-m) \frac{\pi i}{4} - (n+m+1) \frac{\pi i}{2} \right) \mathcal{G}_{n,m} \left(\frac{X+Y}{\sqrt{2}}, \frac{Y-X}{\sqrt{2}} \middle| \frac{\pi}{4} \right) = \\ = \frac{c(-i)^{n+m+1}}{\ell} \exp \left(\frac{i}{\ell} [x^2 + y^2] \right) \mathcal{G}_{n,m} \left(X, Y \middle| \frac{\pi}{4} \right) = \\ = \frac{c(-i)^{n+m+1}}{\ell} \exp \left(\frac{i}{\ell} [x^2 + y^2] \right) \mathcal{G}_{n,m} \left(\frac{x}{\ell}, \frac{cy}{\ell} \middle| \frac{\pi}{4} \right).$$

Отбрасывая несущественные множители и переходя к одинаково отмасштабированным переменным $\frac{cx}{\ell} \rightarrow x$, $\frac{cy}{\ell} \rightarrow y$, получаем пучок вида $\mathcal{G}_{n,m} \left(\frac{x}{c}, y \middle| \frac{\pi}{4} \right)$, т.е. пучок, полученный из исходного пучка зеркальным отражением относительно биссектрисы первого координатного угла.

Дробное преобразование Фурье

HLG-функции определяются с помощью интегрального преобразования (1.29). При изменении угла β функции астигматического воздействия аргументы функции $\mathcal{G}_{n,m}$ поворачиваются:

$$\mathcal{G}_{n,m}(\mathbf{p} | 0) \xrightarrow{\Psi(\mathbf{p}, \beta)/2} \mathcal{G}_{n,m} \left(\frac{\mathcal{R}(-\beta)\mathbf{r}}{\sqrt{2}} \middle| \beta \right).$$

Найдем аналогичное интегральное преобразование, но без добавочного вращения координат:

$$\mathcal{G}_{n,m}(\mathbf{p} | 0) \xrightarrow{?} \mathcal{G}_{n,m}(\mathbf{r} | \theta).$$

Подставляя $\theta = 0$ в общее астигматическое преобразование (1.30), можно получить следующее равенство:

$$\mathcal{D}\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha, \frac{\pi}{2}, 0\right) \mathcal{G}_{n,m}(x, y | \theta') e^{-i(n-m)\gamma} = \mathcal{D}(0, 2\omega, 2\beta) \mathcal{D}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0\right) \mathcal{G}_{n,m}(x, y | 0). \quad (1.43)$$

Если $2\beta + \frac{\pi}{2} = 0$ (т.е. $\beta = -\frac{\pi}{4}$), правая часть уравнения (1.43) приобретает простой вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\left(0, 2\omega, -\frac{\pi}{2}\right) \mathcal{D}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0\right) \mathcal{G}_{n,m}(x, y | 0) &= \mathcal{D}\left(0, 2\omega + \frac{\pi}{2}, 0\right) \mathcal{G}_{n,m}(x, y | 0) = \\ &= \mathcal{D}\left(0, \frac{\pi}{2}, 0\right) \mathcal{D}(0, 2\omega, 0) \mathcal{G}_{n,m}(x, y | 0) \stackrel{(32)}{=} \mathcal{D}\left(0, \frac{\pi}{2}, 0\right) \mathcal{G}_{n,m}(x, y | -\omega). \end{aligned}$$

Тогда уравнение (1.43) имеет вид:

$$\mathcal{D}\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha, \frac{\pi}{2}, 0\right) \mathcal{G}_{n,m}(x, y | \theta) e^{-i(n-m)\gamma} = \mathcal{D}\left(0, \frac{\pi}{2}, 0\right) \mathcal{G}_{n,m}(x, y | -\omega).$$

Если выбрать $\omega = -\theta$, тогда $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\gamma = 0$. Кроме того, выбор $\omega = -\theta$ приводит к следующим соотношениям

$$\operatorname{tg} 2\omega = \frac{2b}{1 + a^2 - b^2} = -\operatorname{tg} 2\theta = \frac{-2 \operatorname{tg} \theta}{1 - \operatorname{tg}^2 \theta},$$

и для $a = 0$, $b = -\operatorname{tg} \theta$ интегральное преобразование принимает вид

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-i(\mathbf{r}, \mathbf{p}) + i\xi\eta \operatorname{tg} \theta\right) \mathcal{G}_{n,m}(\mathbf{p} | 0) d^2\mathbf{p} &= \\ &= \frac{2\pi(-i)^{n+m}}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}} \exp\left(-\frac{ixy \operatorname{tg} \theta}{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}\right) \mathcal{G}_{n,m}\left(\mathbf{R}\left(-\frac{\pi}{4}\right) \frac{\mathbf{I}}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}} \mathbf{R}\left(\frac{\pi}{4}\right) \mathbf{r} \mid \theta\right), \end{aligned}$$

или

$$\mathcal{G}_{n,m}(x, y | \theta) = \frac{i^{n+m}}{2\pi |\cos \theta|} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-\frac{i(x\xi + y\eta)}{\cos \theta} + i(xy + \xi\eta) \operatorname{tg} \theta\right) \mathcal{G}_{n,m}(\xi, \eta | 0) d\xi d\eta. \quad (1.44)$$

Из сравнения равенств (1.44) и (1.20), можно найти матрицы оптической системы:

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & \sin \theta \\ \sin \theta & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = -\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 \\ 0 & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

После замены параметра $\theta \rightarrow \theta + \frac{\pi}{2}$ с использованием соотношения [13]

$$\mathcal{G}_{n,m}(x, y \mid \theta + \frac{\pi}{2}) = i^{n+m} \mathcal{G}_{n,m}(y, x \mid \theta),$$

и замены координат $x \leftrightarrow y$, интегральное преобразование (35) принимает вид

$$\mathcal{G}_{n,m}(x, y \mid \theta) = \frac{1}{2\pi |\sin \theta|} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(\frac{i(x\eta + y\xi)}{\sin \theta} - i(xy + \xi\eta) \operatorname{ctg} \theta\right) \mathcal{G}_{n,m}(\xi, \eta \mid 0) d\xi d\eta. \quad (1.45)$$

Таким образом, уравнения (1.44) и (1.45) показывают два возможных преобразования НГ-пучков в HLG-пучки с обычными (неповернутыми) аргументами.

Матрица астигматического преобразования (1.44) уже была найдена. Матрица преобразования (1.45) имеет следующий вид:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Блоки $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ могут быть диагонализированы поворотом на угол $\pi/4$:

$$\mathbf{M} \rightarrow \mathbf{R}\left(\frac{\pi}{4}\right) \mathbf{M} \mathbf{R}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

Таким образом, преобразования по x, y разделяются, и матрица соответствующего преобразования имеет вид

$$\mathbf{M}_x = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \mathbf{R}(-\theta), \quad \mathbf{M}_y = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \mathbf{R}(\theta).$$

Теперь легко показать, что замена переменных $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{R}\left(\frac{\pi}{4}\right)\mathbf{p}$, $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{R}\left(\frac{\pi}{4}\right)\mathbf{r}$ в уравнении (1.45) приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{n,m}\left(\mathbf{R}\left(\frac{\pi}{4}\right)\mathbf{r} \mid \theta\right) &= \frac{1}{2\pi |\sin \theta|} \times \\ &\times \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(\frac{i(x\xi - y\eta)}{\sin \theta} - \frac{i \operatorname{ctg} \theta}{2} (x^2 - y^2 + \xi^2 - \eta^2)\right) \mathcal{G}_{n,m}\left(\mathbf{R}\left(\frac{\pi}{4}\right)\mathbf{p} \mid 0\right) d^2\mathbf{p} = \\ &= \frac{1}{2\pi |\sin \theta|} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(\frac{ix\xi}{\sin \theta} - \frac{i \operatorname{ctg} \theta}{2} (x^2 + \xi^2)\right) d\xi \times \\ &\times \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{iy\eta}{\sin \theta} + \frac{i \operatorname{ctg} \theta}{2} (y^2 + \eta^2)\right) \mathcal{G}_{n,m}\left(\mathbf{R}\left(\frac{\pi}{4}\right)\mathbf{p} \mid 0\right) d\eta. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Интегральное преобразование вида

$$\mathcal{F}_\theta[f(\xi)](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{1 - i \operatorname{ctg} \theta} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{ix\xi}{\sin \theta} + \frac{i \operatorname{ctg} \theta}{2} (x^2 + \xi^2)\right) f(\xi) d\xi$$

впервые рассматривалось при решении задачи о нахождении интегрального преобразования, собственными функциями которого являются одномерные HG-моды

$$\mathcal{F}_\alpha[e^{-\xi^2/2} H_n(\xi)] = e^{-in\alpha} e^{-x^2/2} H_n(x)$$

и было названо дробным преобразованием Фурье [23].

Обычное преобразование Фурье входит в этот класс преобразований:

$$\mathcal{F}[f(\xi)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(\xi) d\xi, \quad \mathcal{F}[e^{-\xi^2/2} H_n(\xi)] = (-i)^n e^{-x^2/2} H_n(x).$$

Приведем основные свойства дробного преобразования Фурье:

1. тождественное преобразование: $\mathcal{F}_0[f(\xi)] = f(x)$;
2. обратное преобразование: $\mathcal{F}_\alpha^{-1}[f(\xi)] = \mathcal{F}_\alpha^*[f(\xi)] = \mathcal{F}_{-\alpha}[f(\xi)]$;
3. закон умножения: $\mathcal{F}_\alpha[\mathcal{F}_\beta[f]] = \mathcal{F}_{\alpha+\beta}[f]$.
4. связь с преобразованием Фурье: $\mathcal{F}_{\pi/2}[f(\xi)] = \mathcal{F}[f(\xi)]$;

Определение дробного преобразования Фурье можно обобщить на двумерный случай [24]:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\alpha,\beta}[f(\xi, \eta)](x, y) &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{1 - i \operatorname{ctg} \alpha} \sqrt{1 - i \operatorname{ctg} \beta} \times \\ &\times \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-\frac{ix\xi}{\sin \alpha} - \frac{iy\eta}{\sin \beta} + \frac{i \operatorname{ctg} \alpha}{2} (x^2 + \xi^2) + \frac{i \operatorname{ctg} \beta}{2} (y^2 + \eta^2)\right) f(\xi, \eta) d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Тогда

$$\mathcal{F}_{\alpha,\beta}[\mathcal{H}_{n,m}(\xi, \eta)] = e^{-i(n\alpha + m\beta)} \mathcal{H}_{n,m}(x, y).$$

Связь с одномерным преобразованием:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\alpha,\beta}[f(\xi, \eta)](x, y) &= \mathcal{F}_\alpha[\mathcal{F}_\beta[f(\xi, \eta)](\xi, y)](x, y) = \mathcal{F}_\beta[\mathcal{F}_\alpha[f(\xi, \eta)](x, \eta)](x, y); \\ \mathcal{F}_{\alpha,0}[f(\xi, \eta)] &= \mathcal{F}_\alpha[f(\xi, y)](x, y); \quad \mathcal{F}_{0,\beta}[f(\xi, \eta)] = \mathcal{F}_\beta[f(x, \eta)](x, y). \end{aligned}$$

Формулу (1.46) можно записать, используя определение дробного преобразования Фурье в виде:

$$\mathcal{G}_{n,m}\left(\mathbf{R}\left(\frac{\pi}{4}\right)\mathbf{r} \mid \theta\right) = \mathcal{F}_{-\theta,0}\left[\mathcal{G}_{n,m}\left(\mathbf{R}\left(\frac{\pi}{4}\right)\boldsymbol{\rho} \mid 0\right)\right] = \mathcal{F}_{-\theta,0}\left[\mathcal{F}_{0,\theta}\left[\mathcal{G}_{n,m}\left(\mathbf{R}\left(\frac{\pi}{4}\right)\boldsymbol{\rho} \mid 0\right)\right]\right],$$

что позволяет трактовать интегральные преобразования HLG-мод в терминах дробного преобразования Фурье.

Можно показать, что

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{-\alpha,0}\left[\mathcal{G}_{n,m}\left(\mathbf{R}\left(\frac{\pi}{4}\right)\boldsymbol{\rho}\mid 0\right)\right] &= e^{i(n+m)\alpha/2}\mathcal{G}_{n,m}\left(\mathbf{R}\left(\frac{\pi}{4}\right)\mathbf{r}\mid \frac{\alpha}{2}\right); \\ \mathcal{F}_{0,\alpha}\left[\mathcal{G}_{n,m}\left(\mathbf{R}\left(\frac{\pi}{4}\right)\boldsymbol{\rho}\mid 0\right)\right] &= e^{-i(n+m)\alpha/2}\mathcal{G}_{n,m}\left(\mathbf{R}\left(\frac{\pi}{4}\right)\mathbf{r}\mid \frac{\alpha}{2}\right).\end{aligned}$$

Для неповернутых аргументов:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{-\alpha,0}[\mathcal{G}_{n,m}(\boldsymbol{\rho}\mid \theta)] &= e^{-i(n+m)\alpha/2-i(n-m)\gamma}\mathcal{G}_{n,m}(\mathbf{R}(-\varphi)\mathbf{r}\mid \theta'); \\ \mathcal{F}_{0,\alpha}[\mathcal{G}_{n,m}(\boldsymbol{\rho}\mid \theta)] &= e^{-i(n+m)\alpha/2+i(n-m)\gamma}\mathcal{G}_{n,m}(\mathbf{R}(-\varphi)\mathbf{r}\mid \theta'); \\ \mathcal{F}_{-\alpha/2,\alpha/2}[\mathcal{G}_{n,m}(\boldsymbol{\rho}\mid \theta)] &= e^{i(n-m)\alpha/2}\mathcal{G}_{n,m}(\mathbf{R}(-\varphi)\mathbf{r}\mid \theta'),\end{aligned}$$

где

$$\sin 2\theta' = -\sin 2\theta \cos \alpha, \quad \operatorname{tg} 2\varphi = -\operatorname{tg} 2\theta \sin \alpha, \quad \operatorname{ctg} 2\gamma = \cos 2\theta \operatorname{ctg} \alpha.$$

В общем случае двумерное дробное преобразование Фурье HLG-пучков имеет вид:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\alpha,\beta}(\mathbf{r})[\mathcal{G}_{n,m}(\boldsymbol{\rho}\mid \theta)] &= \\ &= \exp\left(i\frac{n+m}{2}\left(\alpha + \beta - \frac{\pi}{2}(\operatorname{sgn} \alpha + \operatorname{sgn} \beta)\right) + i(n-m)\gamma\right)\mathcal{G}_{n,m}(\mathbf{R}(-\varphi)\mathbf{r}\mid \theta'),\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\sin 2\theta' &= \sin 2\theta \cos(\beta - \alpha) \operatorname{sgn} \alpha \operatorname{sgn} \beta, \\ \operatorname{tg} 2\varphi &= \operatorname{tg} 2\theta \sin(\beta - \alpha) \operatorname{sgn} \alpha \operatorname{sgn} \beta, \quad \operatorname{ctg} 2\gamma = \cos 2\theta \operatorname{ctg}(\beta - \alpha).\end{aligned}$$

Таким образом, преобразование параксиальных пучков в линейных оптических системах, в том числе и в свободном пространстве, можно трактовать в терминах дробного преобразования Фурье. В частности, с дробным преобразованием Фурье тесно связано преобразование Френеля.

Распространение световых полей в зоне Френеля и его визуализация

Параксиальное световое поле с конечной энергией $F_0(\mathbf{r})$ можно представить в виде разложения по HLG-модам

$$F_0(\mathbf{r}) = \sum_{m,n=0}^{\infty} c_{m,n} \mathcal{H}_{m,n}(\mathbf{r}, 0), \quad c_{m,n} = \frac{2}{\pi w_0^2} \frac{1}{m! n!} \iint_{\mathbb{R}^2} F_0(\mathbf{r}) \mathcal{H}_{m,n}(\mathbf{r}, 0) d\mathbf{r}.$$

Тогда его распространение в зоне Френеля задается равенством

$$\mathbf{FR}_\ell[F_0(\boldsymbol{\rho})](\mathbf{r}) = \frac{1}{|\sigma|} \exp\left(\frac{i\ell r^2}{|\sigma|^2}\right) \sum_{m,n=0}^{\infty} c_{m,n} e^{-i(n+m+1)\arg\sigma} \mathcal{H}_{m,n}\left(\frac{\mathbf{r}}{|\sigma|}, 0\right). \quad (1.47)$$

Легко видеть, что с ростом ℓ поле изменяется в масштабе и получает дополнительный дефокусировочный фазовый множитель. При визуализации поля эти аспекты не добавляют никакой существенной информации о распространении поля в зоне Френеля. Более того, они мешают рассмотреть изменение распределения поля даже при распространении структурно устойчивых пучков. Поэтому введем т.н. *функциональное преобразование Френеля*:

$$\mathbf{funcFR}_\ell[F_0(\boldsymbol{\rho})](\mathbf{r}) = \sum_{m,n=0}^{\infty} c_{m,n} e^{-i(n+m+1)\arg\sigma} \mathcal{H}_{m,n}(\mathbf{r}, 0), \quad (1.48)$$

которое отличается от (1.47) отсутствием множителя $\frac{1}{|\sigma|} \exp\left(\frac{i\ell r^2}{|\sigma|^2}\right)$ и масштабного увеличения в HG-пучках: $\frac{\mathbf{r}}{|\sigma|} \rightarrow \mathbf{r}$. Это позволяет продемонстрировать преобразование произвольного поля $F_0(\mathbf{r})$ во всем диапазоне — от начальной плоскости $\ell = 0$ до зоны Фурье $\ell = \infty$. Например,

$$\mathbf{funcFR}_\ell[\mathcal{H}_{m,n}(\boldsymbol{\rho})](\mathbf{r}) = e^{-i(m+n+1)\arg\sigma} \mathcal{H}_{m,n}(\mathbf{r}),$$

т.е. интенсивность HG-пучка при $\ell \in [0, \infty)$ остается неизменной, а фаза приобретает дополнительный набег — фаза Гои.

Для произвольного поля

$$\begin{aligned} \mathbf{funcFR}_\ell[F_0(\boldsymbol{\rho})](\mathbf{r}) &= \frac{1}{\pi} \sum_{m,n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{m!n!} \iint_{\mathbb{R}^2} F_0(\boldsymbol{\rho}) \mathcal{H}_{m,n}(\boldsymbol{\rho}, 0) d\boldsymbol{\rho} \right] e^{-i(n+m+1)\arg\sigma} \mathcal{H}_{m,n}(\mathbf{r}, 0) \\ &= \frac{1}{\pi i} \frac{1}{\sin(\arg\sigma)} \iint_{\mathbb{R}^2} F_0(\boldsymbol{\rho}) \exp\left(-\frac{2i}{\sin(\arg\sigma)} \frac{\langle \mathbf{r}, \boldsymbol{\rho} \rangle}{w_0^2} + i \frac{|\boldsymbol{\rho}|^2 + |\mathbf{r}|^2}{w_0^2} \operatorname{ctg}(\arg\sigma)\right) d\boldsymbol{\rho}, \end{aligned}$$

Таким образом, функциональное преобразование Френеля тесно связано с дробным преобразованием Фурье:

$$\mathbf{funcFR}_\ell[F_0(\boldsymbol{\rho})](\mathbf{r}) = \mathcal{F}_{\arg\sigma}[F_0(\boldsymbol{\rho})](\mathbf{r}).$$

Связь между преобразованием Френеля и дробным преобразованием имеет вид:

$$\mathcal{F}_{\arg\sigma}[F_0(\boldsymbol{\rho})](\mathbf{r}) = \sigma \exp\left(-\frac{i\ell r^2}{2}\right) \mathbf{FR}_\ell[F_0(\boldsymbol{\rho})](\mathbf{r}|\sigma|)$$

где $\sigma = 1 + i\ell$.

Таким образом, разложение поля с конечной энергией по HLG-модам и использование дробного преобразования Фурье позволяют найти его преобразование при распространении в зоне Френеля без потери информации. Данное свойство, позволяющее рассматривать преобразование Френеля и дробное преобразование как функционально тождественные операторы, впервые было отмечено в [25, 26]. На его основе разработана программа, вычисляющая преобразование амплитуды светового поля с конечной энергией в зоне Френеля.

1.7 Плоскость перетяжки астигматических гауссовых пучков

Понятие «плоскость перетяжки» (the waist plane) первоначально было сформулировано для одномерных гауссовых пучков, затем перенесено на двумерные круговые гауссовы пучки и более общие двумерные световые пучки, у которых наличествует гауссова составляющая.

Простейшим физически реализуемым решением уравнения (1.18) является круговой гауссов пучок:

$$F(\mathbf{r}, z) = \frac{1}{1 + iz} \exp\left(-\frac{r^2}{1 + iz}\right) = \frac{1}{w(z)} \exp\left(-\frac{r^2}{w^2(z)} + \frac{ir^2}{R(z)} - i\gamma(z)\right). \quad (1.49)$$

Здесь $r^2 = |\mathbf{r}|^2 = x^2 + y^2$, $w(z) = |1 + iz| = \sqrt{1 + z^2}$ — ширина пучка, $R(z) = (1 + z^2)/z$ — радиус кривизны и $\gamma(z) = \arctan z$ — фаза Гои (Gouy phase).

Другое название $w(z)$ — *размер пятна* пучка (the spot size of the beam), т.е. расстояние в плоскости, поперечной к направлению распространения пучка, на котором интенсивность пучка составляет $1/e^2$ часть максимальной интенсивности:

$$\frac{|F(\mathbf{r}, z)|^2}{|F(\mathbf{0}, z)|^2} = \exp\left(-\frac{2r^2}{w^2(z)}\right) = \frac{1}{e^2} \Rightarrow r = w(z).$$

Для гауссова пучка (1.49) пятно сохраняет свою круговую форму при распространении, и плоскость, в которой размер пятна (ширина пучка) достигает своего минимального значения, называется *плоскостью перетяжки*, z_w . Для пучка (1.49) плоскость перетяжки совпадает с начальной плоскостью: $z_w = 0$.

Существуют различные способы определения понятия «ширина пучка» для круговых гауссовых пучков, однако попытка определить такое понятие для эл-

липтических гауссовых пучков наталкивается на проблему [27], суть которой заключается в следующем. Если взять эллиптический гауссов пучок, то при его распространении в зоне Френеля вещественная и мнимая части показателя гауссовой функции эволюционируют, вообще говоря, независимо друг от друга. Полуоси эллипса интенсивности достигают минимальных значений в разных плоскостях. Таким образом, понятия *x-плоскость перетяжки* и *y-плоскость перетяжки* переносятся в двумерный случай из одномерного, однако определить в общем случае такое понятие как «плоскость перетяжки» для эллиптических гауссовых пучков нельзя.

Далее будет предложено определение понятия «плоскость 2D-перетяжки» как плоскости, в которой двумерный гауссов пучок общего вида имеет минимальную площадь пятна интенсивности.

Начнём с примера. Амплитуда пучка (1.49), отнормированная до единичного значения максимума, имеет профиль гауссовой функции:

$$\frac{|F(\mathbf{r}, z)|}{|F(\mathbf{0}, z)|} = \exp\left(-\frac{r^2}{w^2(z)}\right).$$

Преобразуя показатель экспоненты в уравнение окружности:

$$\frac{r^2}{w^2(z)} = 1,$$

можно убедиться в том, что ограниченная этой окружностью площадь,

$$S(z) = \pi w^2(z),$$

достигает своего минимального значения при том же самом значении z , при котором достигает минимума и ширина пучка $w(z)$, т.е.

$$S(z_w) = \min_{z \in \mathbb{R}} S(z).$$

Если рассмотреть вещественный гауссов пучок

$$\exp(-[ax^2 + 2bxy + cy^2]),$$

где $a > 0$, $c > 0$ и $ac > b^2$, то соответствующий эллипс и ограниченная им площадь имеют вид

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1, \quad S = \frac{\pi}{\sqrt{ac - b^2}}.$$

Таким образом, для произвольного двумерного гауссова пучка мы определяем «плоскость 2D-перетяжки» как плоскость, в которой площадь эллипса интенсивности пучка принимает минимальное значение, несмотря на то, что эксцентриситет этого эллипса может быть существенно ненулевым. Мы будем также использовать обозначение z_w для этой плоскости, т.к. плоскость 2D-перетяжки совпадает с обычной плоскостью перетяжки, если последняя всё-таки существует (например, для круговых гауссовых пучков).

Обычно для описания преобразования гауссового пучка с общим астигматизмом в линейных оптических системах используется матричный формализм, (см., например, [28]). Однако мы будем использовать следующее выражение для светового поля в начальной плоскости:

$$F(\mathbf{r}, 0) = \exp(-r^2 + iar^2 + ib\psi(\mathbf{r}, \beta)), \quad (1.50)$$

где $\psi(\mathbf{r}, \beta) = (x^2 - y^2) \cos 2\beta + 2xy \sin 2\beta$ — функция астигматического влияния, a — параметр дефокусировки, b — параметр астигматизма, β — астигматический угол поворота, $a, b, \beta \in \mathbb{R}$. Как было показано в [3], выражение (1.50) более предпочтительно для вычисления преобразования Френеля, чем матричное, поскольку допускает более простую форму записи итогового пучка. Кроме того, процедура перехода от представления (1.50) к матричной форме и обратно подробно изложена в [9].

Сводя преобразование Френеля (1.50) к преобразованию Фурье и используя равенство [3, Eq. (A1)], мы получаем

$$F(\mathbf{r}, z) = \mathbf{F}\mathbf{R}_z[F(\mathbf{p}, 0)](\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{|\mu_+\mu_-|}} \exp\left(-\frac{Ar^2 + B\psi(\mathbf{r}, \beta)}{|\mu_+\mu_-|^2}\right), \quad (1.51)$$

где

$$\mu_{\pm} = 1 + (a \pm b + i)z, \quad B = -ib\bar{\mu}_+\bar{\mu}_-, \quad A = (1 - ia - i[a + b + i][a - b + i]z)\bar{\mu}_+\bar{\mu}_-,$$

где черта сверху обозначает комплексное сопряжение.

Амплитуда пучка (1.51) имеет профиль гауссовой функции:

$$\frac{|F(\mathbf{r}, z)|}{|F(\mathbf{0}, z)|} = \exp\left(-\frac{\operatorname{Re}(A)r^2 + \operatorname{Re}(B)\psi(\mathbf{r}, \beta)}{|\mu_+\mu_-|^2}\right),$$

соответствующий эллипс —

$$\frac{\operatorname{Re}(A)r^2 + \operatorname{Re}(B)\psi(\mathbf{r}, \beta)}{|\mu_+\mu_-|^2} = 1,$$

его каноническая форма (после компенсации вращения) —

$$\frac{\operatorname{Re}(A)r^2 + \operatorname{Re}(B)\psi(\mathbf{r}, 0)}{|\mu_+\mu_-|^2} = \frac{\operatorname{Re}(A+B)x^2 + \operatorname{Re}(A-B)y^2}{|\mu_+\mu_-|^2} = \frac{x^2}{|\mu_-|^2} + \frac{y^2}{|\mu_+|^2} = 1, \quad (1.52)$$

эксцентриситет эллипса —

$$\varepsilon(z) = \frac{\sqrt{||\mu_+|^2 - |\mu_-|^2|}}{\max(|\mu_+|, |\mu_-|)} = 2\sqrt{\frac{|1+az| \cdot |bz|}{z^2 + (|1+az| + |bz|)^2}}, \quad (1.53)$$

и площадь области, ограниченной эллипсом, есть квадратный корень от полинома четвёртой степени по z :

$$S(z) = \pi|\mu_+\mu_-| = \pi\sqrt{P_4(z)}, \quad (1.54)$$

где

$$P_4(z) = |\mu_+|^2|\mu_-|^2 = \{z^2 + (1 + [a+b]z)^2\}\{z^2 + (1 + [a-b]z)^2\}.$$

Точки экстремума площади $S(z)$ являются корнями кубического уравнения

$$\frac{P'_4(z)}{4} = (4a^2 + [1 - a^2 + b^2]^2)z^3 + 3a(1 + a^2 - b^2)z^2 + (1 + 3a^2 - b^2)z + a = 0, \quad (1.55)$$

и один из них — это значение плоскости 2D-перетяжки, z_w .

Интересно отметить, что дефокусировочный параметр пучка (1.51), (т.е. коэффициент при r^2 фазового распределения пучка) имеет вид

$$-\frac{\operatorname{Im}(A)}{|\mu_+\mu_-|^2} = -\frac{P'_4(z)}{4|\mu_+\mu_-|^2}. \quad (1.56)$$

Таким образом, *плоскость 2D-перетяжки кругового гауссова пучка с произвольным астигматизмом совпадает с плоскостью, в которой зануляется дефокусировочный параметр пучка.*¹

Кубический полином $P'_4(z)$ в зависимости от знака дискриминанта имеет либо один, либо три вещественных корня. Известно [29], что для любого кубического полинома

$$P_3(z) = a_0(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$$

¹ «Так как здание всего мира совершенно и возведено премудрым Творцом, то в мире не происходит ничего, в чём не был бы виден смысл какого-нибудь максимума или минимума» (Л. Эйлер). См.: Д. Поля. *Математика и правдоподобные рассуждения* (М.: Наука, 1975).

‘Since the fabric of the world is the most perfect and was established by the wisest Creator, nothing happens in this world in which some reason of maximum or minimum would not come to light.’ (L. Euler). In: G. Polya, *Mathematics and plausible reasoning* (Princeton University, 1954).

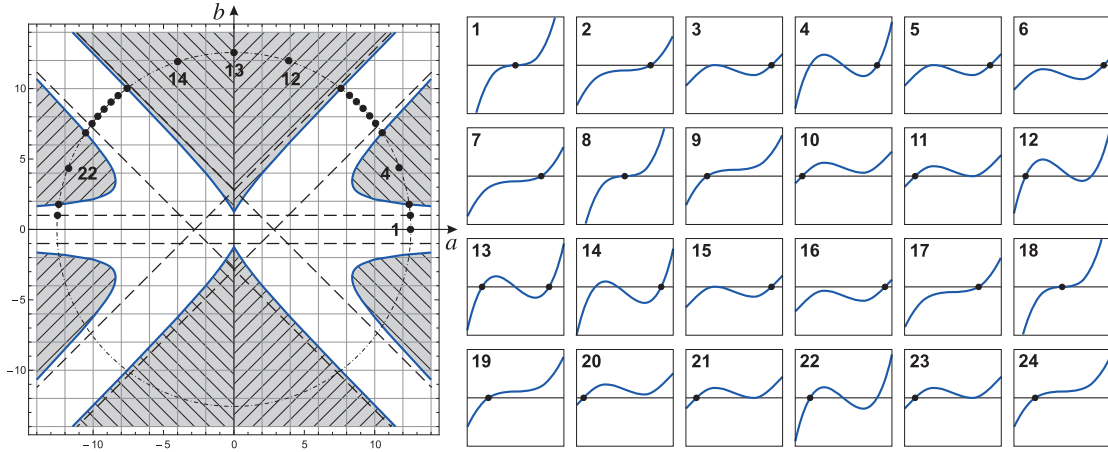


Рис. 1.6. (Слева) Нулевые линии дискриминанта $\mathcal{D}$, задаваемого уравнением (1.57), делят ab -плоскость на области, в которых кубическое уравнение (1.55) имеет либо один корень (белый цвет), либо три корня (серый цвет). Точки $(0, \pm 1)$ являются точками излома (cusp points). Пунктирные прямые $b = \pm 1$ и $a = \pm b \pm 2\sqrt{2}$ являются асимптотическими линиями дискриминантной кривой $\mathcal{D} = 0$. (Справа) Последовательность кадров, показывающая изменение формы кубического полинома $P'_4(z)$ и местоположения плоскости 2D-перетяжки z_w при движении точки (a, b) по штрих-пунктирной окружности слева. Жирные точки на окружности, пронумерованные по часовой стрелке, соответствуют кадрам с теми же номерами. Кадры для нижней половины окружности опущены для краткости, так как полиномы $P'_4(z)$ для (a, b) и $(a, -b)$ совпадают.

его дискриминант $\mathcal{D} = a_0^4(z_1 - z_2)^2(z_2 - z_3)^2(z_3 - z_1)^2$ может быть выражен через коэффициенты полинома. В частности, для уравнения (1.55)

$$\mathcal{D} = -4\{(1 - b^2)^3(1 - a^2 + b^2)^2 + 4(1 + 2b^2)^3a^2\}. \quad (1.57)$$

Нулевые линии $\mathcal{D}$ показаны на рисунке 1.6 слева. Они делят плоскость параметров ab на области отрицательных (белый цвет) и положительных (серый цвет) значений $\mathcal{D}$. Если точка (a, b) находится в области $\mathcal{D} < 0$, то уравнение (1.55) имеет один вещественный корень и два комплексно сопряжённых. Вещественный корень z_w соответствует абсолютному минимуму $S(z)$. Если же точка (a, b) лежит в области $\mathcal{D} > 0$, то уравнение (1.55) имеет три вещественных корня, а именно, два локальных минимума функции $S(z)$, z_- и z_+ , и локальный максимум между ними: $z_- < z_{\max} < z_+$. Одна из точек $z_{\pm}$ доставляет площади $S(z)$ относительный минимум, а другая — абсолютный минимум, z_w . Штриховки ▨ и ▩ отмечают части серой области, в которых $S(z_-) < S(z_+)$ и $S(z_-) > S(z_+)$, соот-

ветственно. Тогда $z_w = z_-$ в $\boxminus$ -подобласти и $z_w = z_+$ в $\boxplus$ -подобласти. Равенство $S(z_-) = S(z_+)$ достигается при $a = 0$ и $|b| > 1$.

Кубический полином $P'_4(z) \equiv P'_4(z, a, b)$ как функция переменных z, a, b удовлетворяет следующим соотношениям симметрии:

$$P'_4(z, a, b) = -P'_4(-z, -a, b), \quad P'_4(z, a, b) = P'_4(z, a, -b). \quad (1.58)$$

Как следствие, его корни как функции a, b обладают следующими свойствами. Если $\mathcal{D} < 0$, то плоскость перетяжки площади z_w является чётной функцией по b и нечётной по a :

$$z_w(-a, b) = -z_w(a, b), \quad z_w(a, -b) = z_w(a, b).$$

Если $\mathcal{D} > 0$, то корни z_- , $z_{\max}$, и z_+ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} z_{\max}(-a, b) &= -z_{\max}(a, b), & z_{\max}(a, -b) &= z_{\max}(a, b), \\ z_{\pm}(-a, b) &= -z_{\mp}(a, b), & z_{\pm}(a, -b) &= z_{\pm}(a, b). \end{aligned}$$

В любом случае, достаточно исследовать уравнение (1.55) для случая первого квадранта: $\{a \geq 0, b \geq 0\}$.

Координаты точки (a, b) являются параметрами кубического полинома $P'_4(z)$ и определяют форму полинома и значение z_w . Если точка (a, b) движется вдоль какой-то кривой, то это движение определяет преобразование формы полинома $P'_4(z)$. Один пример такого рода представлен на рисунке 1.6. Жирные точки на штрих-пунктирной окружности слева соответствуют кадрам справа. Кадры 3, 5, 11, 15, 21 и 23 соответствуют случаю, когда точка (a, b) лежит на дискриминантной кривой $\mathcal{D} = 0$, т.е. случаю, когда кубический полином $P'_4(z)$ имеет вырожденный корень второго порядка. (Очевидно, что в этом случае z_w — это другой, простой, корень.) Кадры 12, 13 и 14 показывают перескок z_w от z_- к z_+ . Как уже отмечалось выше, непрерывность $z_w(a, b)$ нарушается только для некоторых значений (a, b) , расположенных на оси координат $a = 0$. Также необходимо отметить последовательность кадров 4–12, где z_w переходит от z_+ к z_- непрерывным образом.

Рассмотрим несколько примеров вычисления плоскости 2D-перетяжки, принимая во внимание структуру дискриминанта $\mathcal{D}$.

Пример 1. Если в (1.50) параметр b равен нулю, т.е. в начальной плоскости фаза пучка имеет только дефокусировочную компоненту, то $\mathcal{D} < 0$ и уравнение (1.55) имеет единственный вещественный корень:

$$z_w = -\frac{a}{1+a^2}, \quad \varepsilon(z_w) = 0, \quad S(z_w) = \frac{\pi}{1+a^2},$$

$$F(\mathbf{r}, z_w) = (1+ia) \exp(-[1+a^2]r^2).$$

Отсутствие астигматической компоненты в фазе пучка приводит к сохранению круговой формы комплексной амплитуды при распространении пучка. Тогда z_w совпадает с обычной плоскостью перетяжки, в которой волновой фронт пучка становится плоским.

В общем случае, пучок (1.51) имеет круговую форму тогда и только тогда, когда $\varepsilon(z) = 0$. Из уравнения (1.53) получаем $(1+az)bz = 0$. Случай $z = 0$ соответствует исходному гауссову пучку (1.50), случай $b = 0$ рассмотрен выше, и случай $1+az = 0$ невозможен для плоскости 2D-перетяжки, потому что подстановка $z_w = -1/a$ в уравнение (1.55) приводит к противоречию:

$$P'_4(z_w) = -4(1+b^2)^2/a^3 \neq 0.$$

Пример 2. Если в (1.50) параметр a равен нулю, т.е. в начальной плоскости фаза пучка имеет только астигматическую компоненту, то $\mathcal{D} \sim -(1-b^2)^3$ и существует две возможности. Когда $|b| \leq 1$, уравнение (1.55) имеет только один вещественный корень:

$$z_w = 0, \quad \varepsilon(z_w) = 0, \quad S(z_w) = \pi,$$

$$F(\mathbf{r}, z_w) = \exp(-r^2 + ib\psi(\mathbf{r}, \beta)).$$

Если же $|b| > 1$, тогда уравнение (1.55) имеет три вещественных корня:

$$z_- = -\frac{\sqrt{b^2-1}}{1+b^2}, \quad z_{\max} = 0, \quad z_+ = \frac{\sqrt{b^2-1}}{1+b^2},$$

$$S(z_{\pm}) = \pi \frac{2|b|}{1+b^2} < \pi = S(z_{\max}),$$

$$F(\mathbf{r}, z_{\pm}) = \sqrt{\frac{1+b^2}{2b^2}} (1 \mp i\sqrt{b^2-1}) \exp\left(\frac{1+b^2}{2} \left[-r^2 \pm \frac{\sqrt{b^2-1} \pm i}{b} \psi(\mathbf{r}, \beta)\right]\right).$$

В данном случае оба значения $z_{\pm}$ соответствуют плоскости 2D-перетяжки, поскольку $S(z_-) = S(z_+)$ и, как было отмечено выше, это единственный случай, когда это равенство имеет место.

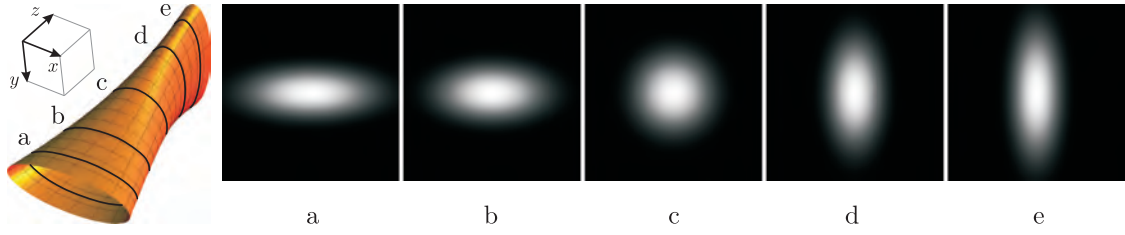


Рис. 1.7. (Слева) Трёхмерный профиль интенсивности астигматического гауссова пучка (1.51) при $a = 0$, $b = 1.25$, $\beta = 0$ и $z \in [-0.6, 0.6]$. (Справа) Распределение интенсивности пучка на различных расстояниях z от исходной плоскости: плоскость перетяжки по y $z = -0.49$ (a), $z_- = -0.29$ (b), $z_{\max} = 0$ (c), $z_+ = 0.29$ (d), и плоскость перетяжки по x $z = 0.49$ (e). Размеры каждого кадра — $\mathbf{r} \in [-2, 2] \times [-2, 2]$.

При больших значениях $|b|$,

$$z_{\pm} \sim \pm \frac{1}{|b|} \quad \text{и} \quad \epsilon(z_{\pm}) \sim \frac{2|b|}{\sqrt{1 + 4b^2}}.$$

Тогда $z_{\pm} \rightarrow 0 = z_{\max}$, но $\epsilon(z_{\pm}) \rightarrow 1 \neq \epsilon(z_{\max}) = 0$ при $|b| \rightarrow \infty$.

Пример 3. Если $b = \pm 1$, тогда $\mathcal{D} < 0$ и

$$\begin{aligned} z_w &= -\frac{\tilde{a}}{1 + 4\tilde{a}^4}, \quad S(z_w) = \frac{\pi}{(1 + 4\tilde{a}^4)^{3/2}}, \\ F(\mathbf{r}, z_w) &= \sqrt{(1 + 2i\tilde{a} - 2\tilde{a}^2)(1 + 4\tilde{a}^4)} \\ &\times \exp((1 + 4\tilde{a}^4)[-(1 + 2\tilde{a}^2)r^2 \pm i(1 + 2i\tilde{a} - 2\tilde{a}^2)\psi(\mathbf{r}, \beta)]), \end{aligned}$$

здесь $\tilde{a} = \sqrt[3]{a/4}$ — вспомогательный параметр, используемый для краткости. Эксцентриситет эллипса

$$\epsilon(z_w) = \sqrt{\frac{4|\tilde{a}|}{1 + 2|\tilde{a}| + 2\tilde{a}^2}}$$

стремится к нулю при $|\tilde{a}| \rightarrow 0$ и $|\tilde{a}| \rightarrow \infty$. Он достигает минимального значения $\sqrt{2\sqrt{2} - 2} \approx 0.91$ для $|\tilde{a}| = 1/\sqrt{2}$.

Пример 4. Если $a = \pm\sqrt{1 + b^2}$, то $\mathcal{D} < 0$ и

$$\begin{aligned} z_w &= \mp \frac{1}{2\sqrt{1 + b^2}}, \quad S(z_w) = \frac{\pi}{2\sqrt{1 + b^2}}, \\ F(\mathbf{r}, z_w) &= (1 \pm i)\sqrt[4]{1 + b^2} \exp(-2(1 + b^2)r^2 \mp 2b\sqrt{1 + b^2}\psi(\mathbf{r}, \beta)). \end{aligned}$$

Эксцентриситет эллипса

$$\epsilon(z_w) = \sqrt{\frac{2|b|}{|b| + \sqrt{1 + b^2}}}$$

возрастает от 0 до 1 при изменении $|b|$ от 0 до ∞ .

В этом случае в плоскости 2D-перетяжки волновой фронт пучка становится плоским, в то время как форма интенсивности может сильно отличаться от круговой. (Подробное обсуждение см., например, в главе «The waist plane» в четвёртой главе [30].)

Приведенные примеры показывают, что $|z_w| \leq \frac{1}{2}$. Данное неравенство остаётся справедливым и в случае произвольных a, b . Это можно доказать с помощью теоремы Гаусса–Лукаса [29]: *Корни P' принадлежат выпуклой оболочке корней самого полинома P* . А именно, поскольку корни полинома четвёртой степени $P_4(z)$ имеют вид

$$z_{1,2} = -\frac{a+b \pm i}{1+(a+b)^2}, \quad z_{3,4} = -\frac{a-b \pm i}{1+(a-b)^2},$$

то плоскость перетяжки площади z_w находится где-то между точками $\operatorname{Re} z_{1,2}$ и $\operatorname{Re} z_{3,4}$, очевидно расположенными на отрезке $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$. Отметим также, что $\operatorname{Re} z_{1,2}$ и $\operatorname{Re} z_{3,4}$ являются соответственно плоскостями перетяжки по x и по y (см. рис. 1.7).

Дополнительное исследование показывает, что $P_4(z_w) \leq 1$ и, таким образом, $S(z_w) \leq \pi$.

Для светового пучка (1.51) параметры a, b и z_w можно найти простыми алгебраическими методами, если известны распределения интенсивности $|F(\mathbf{r}, z_1)|^2$ и $|F(\mathbf{r}, z_2)|^2$ при $0 < z_1 < z_2$.

И наконец, основной результат этого параграфа остаётся справедливым и для эллиптического гауссова пучка. Не изменяя общности, достаточно рассмотреть исходное световое поле

$$F(\mathbf{r}, 0) = \exp(-[1-c]x^2 - [1+c]y^2 + iar^2 + ib\psi(\mathbf{r}, \beta)),$$

где $c \in (-1, 1)$. Тогда область, ограниченная соответствующим эллипсом

$$S(z) = \frac{\pi}{\sqrt{1-c^2}} \sqrt{P_4(z)},$$

где

$$\begin{aligned} P_4(z) = & (4[a + bc \cos 2\beta]^2 + [1 - a^2 + b^2 - c^2]^2)z^4 \\ & + 4(a[1 + a^2 - b^2 + c^2] + 2bc \cos 2\beta)z^3 \\ & + 2(1 + 3a^2 - b^2 + c^2)z^2 + 4az + 1, \end{aligned} \quad (1.59)$$

а дефокусировочный параметр пучка $F(\mathbf{r}, z)$ пропорционален $P_4'(z)$.

Заключение к главе 1

В данной главе получена интерпретация преобразования HG-пучков в оптических системах с астигматизмом общего вида в терминах операторов поворота в трёхмерном пространстве и сформулирован матричный закон преобразования для высших гауссовых мод. Предложено обобщение понятие плоскости перетяжки для астигматического гауссова пучка как плоскости, в которой площадь светового пятна принимает минимальное значение. Дефокусировка пучка в этой плоскости равна нулю.

По результатам первой главы опубликовано 4 статьи. Разработаны две программы, позволяющие проводить разложение произвольного пучка с конечной энергией по HLG-модам и рассчитывать преобразование амплитуды светового поля в зоне Френеля и в астигматических оптических системах.

Результаты первой главы могут быть использованы для анализа преобразования произвольных пучков, так как HLG-функции при постоянном α образуют ортогональный базис в пространстве $L_2(\mathbb{R}^2)$. Поэтому любая квадратично интегрируемая функция, может быть представлена в виде разложения по этому базису. Другими словами, произвольный когерентный пучок с конечной энергией можно представить в виде разложения по HLG-модам.

Глава 2

Спиральные пучки с быстрым вращением

Во данной главе исследуются световые поля, сохраняющие при распространении в свободном пространстве поперечную структуру своей интенсивности с точностью до масштаба и вращения (спиральные пучки). Обзор известных результатов по спиральным пучкам сделан в § 1. В § 2 предложены методы построения спиральных пучков, которые при распространении от исходной плоскости до плоскости Фурье поворачиваются на угол, превышающий $\pi/2$. В § 3 рассмотрены смещённые LG-моды и их линейные комбинации. Результаты опубликованы в [31].

2.1 Спиральные пучки света (обзор)

Известно [7], что эволюция когерентного светового поля $F(\mathbf{r}, l)$ при распространении в свободном пространстве вдоль оси l описывается, в параксиальном приближении, уравнением

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial F}{\partial l} = 0. \quad (2.1)$$

Здесь l — переменная распространения.

Если в плоскости $l = 0$ задано распределение комплексной амплитуды $F_0(\mathbf{r})$, обладающее конечной энергией,

$$F(\mathbf{r}, l) \Big|_{l=0} = F_0(\mathbf{r}),$$

то дальнейшая эволюция поля F выражается через начальное распределение F_0 с помощью преобразования Френеля:

$$F(\mathbf{r}, l) = \mathbf{FR}_l[F_0(\boldsymbol{\rho})](\mathbf{r}) = \frac{k}{2\pi i l} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(\frac{ik}{2l}|\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}|^2\right) F_0(\boldsymbol{\rho}) d\boldsymbol{\rho}.$$

Также известно [7], что функции Эрмита–Гаусса и Лагерра–Гаусса

$$\mathcal{H}_{n,m}(\mathbf{r}) = \exp(-r^2) H_n(\sqrt{2}x) H_m(\sqrt{2}y), \quad (2.2)$$

$$\mathcal{L}_{n,\pm m}(\mathbf{r}) = \exp(-r^2) r^m e^{\pm im\varphi} L_n^m(2r^2), \quad (2.3)$$

порождают структурно устойчивые решения параксиального уравнения. Структурная устойчивость означает автомодельность интенсивности пучка при распространении в зоне Френеля:

$$\mathbf{FR}_l\left[F_0\left(\frac{\mathbf{r}}{w_0}\right)\right](\mathbf{r}) = \frac{1}{|\sigma|} \exp\left(\frac{2ilr^2}{kw_0^4|\sigma|^2} - i\gamma_0 \arg \sigma\right) F_0\left(\frac{\mathbf{r}}{w_0|\sigma|}\right). \quad (2.4)$$

Здесь w_0 — ширина гауссова пучка, $\sigma = 1 + 2il/kw_0^2$ — вспомогательный комплексный параметр, используемый для более компактной записи, и $\gamma_0 = n + m + 1$ для $F_0(\mathbf{r}) = \mathcal{H}_{n,m}(\mathbf{r})$, $\gamma_0 = 2n + m + 1$ для $F_0(\mathbf{r}) = \mathcal{L}_{n,\pm m}(\mathbf{r})$.

В данном случае пучки Эрмита–Гаусса и Лагерра–Гаусса изменяются при распространении только в масштабе, сохраняя форму своей интенсивности.

Поскольку параксиальное уравнение (2.1) инвариантно относительно преобразования вращения в плоскости переменных x, y , то в качестве возможного расширения понятия структурно устойчивых полей естественно рассмотреть задачу поиска таких световых полей, комплексная амплитуда которых при распространении в зоне Френеля будет только поворачиваться и масштабироваться.

Первые работы по вращающимся световым полям были опубликованы в 1993 году. В [32] были исследованы простейшие поля в виде произведения гауссовой функции на полином от переменной $x + iy$ (т.е. рассматривались аналитические функции нулевого порядка роста). В [33] проблема существования вращающихся полей была теоретически исследована в более общей постановке: были получены свойства вращающихся световых полей, характеризующие их распространение (масштаб, скорость поворота, фазовое смещение), и найдено разложение комплексной амплитуды таких пучков по модам Лагерра–Гаусса. В работах [34, 35] и монографии [36] разработка теории вращающихся световых полей была продолжена. Там же были опубликованы примеры экспериментально реализованных

вращающихся световых полей, имеющих вид произведения гауссовой функции и целой аналитической функции первого порядка роста. Следует также отметить работы [37, 38], в которых рассматривались различные вопросы, связанные с вращением световых полей (перетекание энергии, орбитальный угловой момент), и [31], где был использован матричный подход для конструирования вращающихся световых полей.

Рассмотрим теорию вращающихся параксиальных световых полей более подробно. Постановка задачи о структурно устойчивых решениях параксиального уравнения, вращающихся при распространении, приводится в [33]. Условие структурной устойчивости интенсивности такого поля может быть задано следующим образом:

$$|F(\mathbf{r}, l)|^2 = D(l) \left| F_0 \left(\frac{x \cos \theta(l) - y \sin \theta(l)}{d(l)}, \frac{x \sin \theta(l) + y \cos \theta(l)}{d(l)} \right) \right|^2, \quad (2.5)$$

где $\theta(l)$ — вращение интенсивности при распространении поля $F(\mathbf{r}, l)$, $d(l) > 0$ — масштабное изменение интенсивности.

Было доказано, что $D(l) = 1/d^2(l)$, а вращение и масштабное изменение интенсивности поля выражаются через параметр $\sigma = 1 + 2il/kw_0^2$ формулами:

$$\theta(l) = \theta_0 \arg \sigma, \quad d(l) = d_0 |\sigma|.$$

Тем самым, название «спиральные пучки света», предложенное в [33], подчёркивает спиралевидный характер $F(\mathbf{r}, l)$ при распространении в зоне Френеля. Параметр θ_0 задает скорость вращения пучка при распространении и может быть любым вещественным числом.

Как видно из (2.5) и выражений для $d(l)$ и $\theta(l)$, интенсивность $|F(\mathbf{r}, l)|^2$ в сравнении с интенсивностью на начальной плоскости увеличивается в масштабе и поворачивается. Скорость вращения пучка при распространении монотонно убывает:

$$\frac{d\theta(l)}{dl} = \frac{2\theta_0}{kw_0^2} \frac{1}{1 + \frac{4l^2}{k^2 w_0^4}},$$

а сам пучок при эволюции от области перетяжки до зоны Фурье поворачивается на угол

$$\theta(+\infty) - \theta(0) = \frac{\pi\theta_0}{2}.$$

Из теории спиральных пучков следует, что световое поле

$$F(\mathbf{r}, l) = \mathbf{F}\mathbf{R}_l[F_0(\boldsymbol{\rho})](\mathbf{r})$$

является спиральным пучком с параметром вращения θ_0 , если комплексная амплитуда поля в начальной плоскости может быть разложена по модам Лагерра–Гаусса в ряд следующего вида:

$$F_0(\mathbf{r}) = \sum_{n,m} c_{n,m} \mathcal{L}_{n,m} \left(\frac{\mathbf{r}}{w_0} \right). \quad (2.6)$$

Здесь $c_{n,m}$ — произвольные комплексные коэффициенты, n, m — пара целочисленных индексов, удовлетворяющая условиям:

$$n \geq 0, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad 2n + |m| + \theta_0 m = 2n_0 + |m_0| + \theta_0 m_0 \quad (2.7)$$

при произвольном выборе начальной пары (n_0, m_0) . Тогда

$$F(\mathbf{r}, l) = \frac{1}{|\sigma|} \exp \left(\frac{2ilr^2}{kw_0^4|\sigma|^2} - i\gamma_0 \arg \sigma \right) F_0(X, Y), \quad (2.8)$$

$$X + iY = \frac{x + iy}{w_0|\sigma|} \exp(i\theta_0 \arg \sigma), \quad \gamma_0 = 2n_0 + |m_0| + \theta_0 m_0 + 1,$$

функция $F_0(X, Y)$ допускает по обоим переменным аналитическое продолжение до целой функции второго порядка роста¹ и является решением дифференциального уравнения

$$\nabla^2 F_0 + 4i\theta_0 \left(X \frac{\partial F_0}{\partial Y} - Y \frac{\partial F_0}{\partial X} \right) - 4(X^2 + Y^2 - \gamma_0) F_0 = 0, \quad (2.9)$$

где θ_0 — параметр вращения и параметр γ_0 определяет величину фазового набегу при распространении пучка.

Также в [36] приводится полная классификация спиральных пучков в зависимости от параметра вращения θ_0 , которая состоит из пяти случаев.

¹Если $f(z)$ — целая функция одной комплексной переменной, то

$$\rho_f = \overline{\lim}_{R \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln \max_{|z|=R} |f(z)|}{\ln R}.$$

называется порядком роста функции $f(z)$. Это одна из основных характеристик поведения целой функции на бесконечности. Из данного определения следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие положительные константы $C > 0$, $A > 0$, что $|f(z)| \leq C \exp(A|z|^{\rho_f + \varepsilon})$ для всех $z \in \mathbb{C}$.

Аналогично определяется порядок роста целой функции двух переменных $f(z, w)$:

$$\rho_f = \overline{\lim}_{R \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln \max_{|z|=|w|=R} |f(z, w)|}{\ln R}.$$

Соответственно, $|f(z, w)| \leq C \exp(A(|z|^{\rho_f + \varepsilon} + |w|^{\rho_f + \varepsilon}))$ для всех $(z, w) \in \mathbb{C}^2$.

1. Если θ_0 — иррациональное число, то решение $F(\mathbf{r}, l)$ не имеет зависимости от θ_0 и представимо в виде

$$F(\mathbf{r}, l) = \frac{1}{|\sigma|} \exp\left(\frac{2ilr^2}{kw_0^4|\sigma|^2} - i(2n_0 + |m_0| + 1) \arg \sigma\right) \mathcal{L}_{n_0, m_0}\left(\frac{\mathbf{r}}{w_0|\sigma|}\right).$$

2. Если $\theta_0 = 0$, то $\theta(l) \equiv 0$ и соответствующее решение $F(\mathbf{r}, l)$ параксиального уравнения распространяется вдоль l без вращения. При этом

$$F(\mathbf{r}, l) = \frac{1}{|\sigma|} \exp\left(\frac{2ilr^2}{kw_0^4|\sigma|^2} - i(N+1) \arg \sigma\right) \sum_{n=0}^N c_n \mathcal{L}_{\min(n, N-n), N-2n}\left(\frac{\mathbf{r}}{w_0|\sigma|}\right),$$

где c_n — произвольные константы и N — некоторое целое неотрицательное число. Полученное выражение показывает, что без вращения могут распространяться, сохраняя свою структуру, только такие функции, которые при $l=0$ представимы в виде произведения гауссовой функции на некоторый полином специального вида. Более того,

$$|F(\mathbf{r}, l)| = |F(-\mathbf{r}, l)|,$$

т. е. интенсивность любого невращающегося структурно устойчивого решения обладает центральной симметрией. Известные моды Эрмита–Гаусса и Лагерра–Гаусса являются частными случаями спиральных пучков с параметром вращения $\theta_0 = 0$.

3. Если $\theta_0 = -1$, то

$$\begin{aligned} F(\mathbf{r}, l) &= \frac{1}{|\sigma|} \exp\left(\frac{2ilr^2}{kw_0^4|\sigma|^2} - i(2N+1) \arg \sigma\right) e^{Z\bar{Z}} \frac{\partial^N}{\partial \bar{Z}^N} \left(e^{-2Z\bar{Z}} f(Z)\right) = \\ &= \frac{1}{\sigma} \exp\left(-\frac{r^2}{w_0^2\sigma} - 2iN \arg \sigma\right) \left(\frac{\partial}{\partial \bar{Z}} - 2\bar{Z}\right)^N f(Z), \end{aligned} \quad (2.10)$$

где $Z = \frac{x+iy}{w_0\sigma}$, $\bar{Z} = \frac{x-iy}{w_0\bar{\sigma}}$ и $f(z)$ — произвольная целая аналитическая функция, не нарушающая квадратичной интегрируемости функции $F_0(\mathbf{r})$. Это условие выполняется, например, для любой целой функции $f(z)$ порядка роста $\rho_f < 2$. В частности, в качестве $f(z)$ можно выбрать произвольный полином.

4. Случай $\theta_0 = 1$ полностью аналогичен предыдущему:

$$F(\mathbf{r}, l) = \frac{1}{|\sigma|} \exp\left(-\frac{r^2}{w_0^2\sigma} - i(2N+1) \arg \sigma\right) \left(\frac{\partial}{\partial \bar{Z}} - 2Z\right)^N f(\bar{Z}),$$

где $Z = \frac{x+iy}{w_0\sigma}$, $\bar{Z} = \frac{x-iy}{w_0\bar{\sigma}}$.

5. И наконец, если θ_0 является рациональным числом, отличным от 0 и ± 1 , то структурно устойчивое решение имеет вид

$$F(\mathbf{r}, l) = \frac{1}{|\sigma|} \exp\left(\frac{2ilr^2}{kw_0^4|\sigma|^2} - i(2n_0 + |m_0| + \theta_0 m_0 + 1) \arg \sigma\right) \sum_{\mathcal{N}(\theta_0)} c_{nm} \mathcal{L}_{n,m}(X, Y),$$

где $X + iY = \frac{x + iy}{w_0|\sigma|} e^{i\theta_0 \arg \sigma}$, и множество $\mathcal{N}(\theta_0)$ всех пар (n, m) , по которым идет суммирование, определяется следующим образом. Будем считать, что $\operatorname{sgn} m_0 = 1$ для $m_0 \geq 0$ и $\operatorname{sgn} m_0 = -1$ для $m_0 < 0$. Представим θ_0 в виде дроби P/Q , где P и Q — взаимно простые числа и $Q > 0$. Возможны варианты: 1) одно из чисел P, Q чётно; 2) оба числа P и Q нечётны. В первом случае

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\theta_0) = & \{(n_0 + (P + Q \operatorname{sgn} m_0)k, m_0 - 2Qk); k \in \mathbb{Z}, n \geq 0, m \operatorname{sgn} m_0 \geq 0\} \cup \\ & \cup \{(n_0 + |m_0| + (P - Q \operatorname{sgn} m_0)k, m_0 - 2Qk); k \in \mathbb{Z}, n \geq 0, m \operatorname{sgn} m_0 < 0\}; \end{aligned} \quad (2.11)$$

во втором случае

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\theta_0) = & \{(n_0 + \frac{1}{2}(P + Q \operatorname{sgn} m_0)k, m_0 - Qk); k \in \mathbb{Z}, n \geq 0, m \operatorname{sgn} m_0 \geq 0\} \cup \\ & \cup \{(n_0 + |m_0| + \frac{1}{2}(P - Q \operatorname{sgn} m_0)k, m_0 - Qk); k \in \mathbb{Z}, n \geq 0, m \operatorname{sgn} m_0 < 0\}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Начальная пара целых чисел (n_0, m_0) выбирается произвольно.

Одним из наиболее интересных вариантов, среди выписанных выше, является случай $N = 0$ формулы (2.10):

$$F(\mathbf{r}, l) = \frac{1}{\sigma} \exp\left(-\frac{r^2}{w_0^2 \sigma}\right) f\left(\frac{x + iy}{w_0 \sigma}\right), \quad (2.13)$$

поскольку он сочетает в себе простоту аналитического выражения и разнообразие возможностей построения спиральных пучков из-за произвольности функции $f(z)$. В [34], в частности, было показано, что можно выбрать такую функцию $f(z)$, что интенсивность спирального пучка (2.13) будет иметь вид некоторой априорно заданной плоской кривой. Если кривая задана в комплексном параметрическом виде $\zeta(t)$, $t \in [0, T]$, то спиральный пучок определяется выражением

$$\begin{aligned} F_0(\mathbf{r}) &= \exp\left(-\frac{r^2}{w_0^2}\right) f\left(\frac{x + iy}{w_0}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \\ &= \mathcal{S}(z, \bar{z} | \zeta) = \exp\left(-\frac{z\bar{z}}{w_0^2}\right) \int_0^T \exp\left(-\frac{\zeta(t)\bar{\zeta}(t)}{w_0^2} + \frac{2z\bar{\zeta}(t)}{w_0^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{w_0^2} \int_0^t (\bar{\zeta}(\tau)\zeta'(\tau) - \zeta(\tau)\bar{\zeta}'(\tau)) d\tau\right) |\zeta'(t)| dt. \end{aligned} \quad (2.14)$$

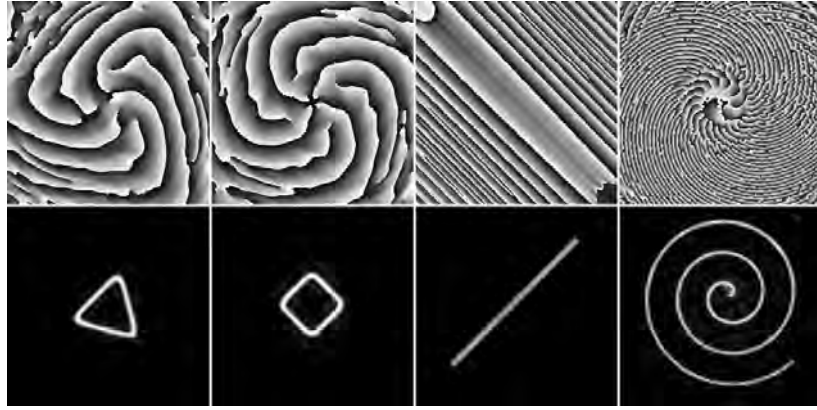


Рис. 2.1. Фазовые элементы (верхний ряд) и полученные с их помощью распределения интенсивности световых полей в плоскости Фурье.

Здесь использованы комплексные переменные $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ и выбрана плоскость перетяжки $l = 0$ (т.е. $\sigma = 1$) для компактной формы записи. Кривая $\zeta(t)$ была названа *порождающей кривой* для спирального пучка (2.14).

Позднее [39, 40], пучки (2.14) были использованы для создания высокоэффективных дифракционных фазовых элементов, позволяющих получить в плоскости фокусировки распределение интенсивности в виде заданной плоской кривой. Полученные световые поля обладают угловым моментом, что позволяет их использовать для решения задач, связанных с различными манипуляциями микрочастицами.

При исследовании свойств спиральных пучков для замкнутых порождающих кривых было установлено, что интенсивность таких пучков претерпевает радикальное изменение при преобразовании подобия кривой $\zeta(t) \rightarrow \nu \zeta(t)$, где ν — параметр подобия, $\nu > 0$. Если порождающая кривая замкнута и не имеет точек самопересечения, то форма поперечной интенсивности спирального пучка подобна форме кривой лишь тогда, когда площадь области S , ограниченной данной замкнутой кривой, удовлетворяет *условию квантования*:

$$S = \frac{1}{2} \pi w_0^2 n \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (2.15)$$

Кривые, удовлетворяющие условию (2.15), называются *n-квантованными порождающими кривыми*, а пучки, построенные по ним с помощью формулы (2.14), — *n-квантованными спиральными пучками*. В частности, для порождающей кривой

в форме окружности, получают пучки Лагерра–Гаусса:

$$\mathcal{S}(z, \bar{z} | \bigcirc_n) = \mathcal{L}_{0,n}\left(\frac{\mathbf{r}}{w_0}\right), \quad \bigcirc_n = w_0 \sqrt{\frac{n}{2}} e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi]. \quad (2.16)$$

Также в [34] было показано, что для замкнутой порождающей кривой без точек самопересечения число изолированных нулей n_0 соответствующего n -квантованного спирального пучка внутри области, ограниченной этой кривой, равно номеру квантования:

$$n_0 = n.$$

Таким образом, в силу (2.15), число изолированных нулей интенсивности у квантованных пучков внутри области, ограниченной порождающей кривой, определяется только площадью этой области, но не её формой. При изменении площади области от $S = \frac{1}{2}\pi w_0^2 n$ до $S = \frac{1}{2}\pi w_0^2 (n+1)$ происходит увеличение числа нулей внутри области за счёт прихода одного нуля извне.

Переход от ограниченного множества функций Лагерра–Гаусса (2.16) к полному семейству функций может быть сделан с помощью оператора рождения. При $l = 0$ равенство (2.10) принимает вид (сделана замена N на m):

$$F_0(\mathbf{r}) = \mathcal{S}_m(z, \bar{z}),$$

где

$$\mathcal{S}_m(z, \bar{z}) = \exp\left(-\frac{z\bar{z}}{w_0^2}\right) \left(w_0 \frac{\partial}{\partial z} - 2\frac{\bar{z}}{w_0}\right)^m f\left(\frac{z}{w_0}\right) = \left(w_0 \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\bar{z}}{w_0}\right)^m \mathcal{S}(z, \bar{z}), \quad (2.17)$$

В частности, для порождающей кривой в форме окружности получается полное семейство мод Лагерра–Гаусса:

$$\mathcal{S}_m(z, \bar{z} | \bigcirc_n) = \mathcal{L}_{\min(m,n), n-m}\left(\frac{\mathbf{r}}{w_0}\right).$$

В общем случае, для любой замкнутой кривой без самопересечений (не ограничивая общности, можно выбрать её 1-квантованный вариант ζ_1) существует множество спиральных пучков $\{\mathcal{S}_m(z, \bar{z} | \sqrt{n}\zeta_1)\}$, зависящее от двух целочисленных параметров: n и m . Параметр квантования n связан с площадью, ограниченной порождающей кривой, а параметр m является степенью оператора рождения и характеризует величину фазового набегу при распространении спирального пучка в зоне Френеля. При этом свойство ортогональности в пространстве $L_2(\mathbb{R}^2)$, характерное для функций Лагерра–Гаусса, вообще говоря, не сохраняется.

2.2 Спиральные пучки для целочисленных параметров вращения

Спиральные пучки, полученные в [33–35] и кратко рассмотренные в предыдущем параграфе, соответствуют параметру вращения $\theta_0 = -1$ и при распространении в свободном пространстве поворачиваются на угол $-\pi/2$ (увеличением интенсивности в масштабе и спиралевидным закручиванием фазы из-за возникающей дефокусировочной компоненты при распространении пучка мы пренебрегаем).

Подробное исследование спиральных пучков именно для случая $\theta_0 = -1$ оказалось возможным потому, что представление в виде двойного бесконечного функционального ряда (2.6) при $\theta_0 = -1$ эквивалентно простому представлению (2.10), т.е. всю общность формулы (2.6) с произвольными комплексными коэффициентами $c_{n,m}$ (бесконечное число степеней свободы) удалось «свернуть» в формулу (2.10), где присутствует произвольная целая аналитическая функция $f(z)$. При этом произошло упрощение условия существования решения в виде спирального пучка: если для формулы (2.6) абсолютную произвольность коэффициентов $c_{n,m}$ ограничивало необходимое требование сходимости функционального ряда при всех $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, то для формулы (2.10) его эквивалентом является ограничение на порядок роста функции $f(z)$. Отметим, что простота перехода $\{c_{n,m}\} \rightarrow f(z)$, в свою очередь, является следствием того, что именно для случая $\theta_0 = -1$ решение уравнения (2.7) в целых числах имеет простую форму записи.

Естественно поставить вопрос: возможен ли переход от бесконечной последовательности коэффициентов к одной функции, $\{c_{n,m}\} \rightarrow f(z)$, для $\theta_0 \neq -1$ и насколько получившееся представление будет проще, нежели исходный двойной ряд?

Далее мы рассмотрим задачу поиска спиральных пучков для случая, когда параметр вращения является ненулевым целым числом: $\theta_0 = \pm N$, где $N \in \mathbb{N}$. (Случай $\theta_0 = 0$ соответствует отсутствию вращения поля и был рассмотрен в предыдущем параграфе. Случаи $\theta_0 = \pm 1$, также рассмотренные в предыдущем параграфе, будут получены как следствия общей теории.) Поскольку при решении уравнения (2.7) для рациональных $\theta_0 = P/Q$ существенную роль играет чётность или нечётность чисел P и Q , то рассмотрим случаи чётных и нечётных θ_0 по отдельности. При этом, очевидно, $Q = 1$ и поэтому $P = \theta_0$.

1. При $\theta_0 = -2N$ применяем формулу (2.11). Если $m_0 \geq 0$, то

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\theta_0) &= \left\{ n = n_0 - (2N - 1)k, \ m = m_0 - 2k; \ k \leq \min\left(\frac{n_0}{2N-1}, \frac{m_0}{2}\right) \right\} \cup \\ &\quad \cup \left\{ n = n_0 + m_0 - (2N + 1)k, \ m = m_0 - 2k; \ \frac{m_0}{2} < k \leq \frac{n_0 + m_0}{2N+1} \right\}, \\ F_0(\mathbf{r}) &= \sum_{-\infty < k \leq \min(\frac{n_0}{2N-1}, \frac{m_0}{2})} c_k \mathcal{L}_{n_0-(2N-1)k, m_0-2k}(\mathbf{r}) + \\ &\quad + \sum_{\frac{m_0}{2} < k \leq \frac{n_0+m_0}{2N+1}} c_k \mathcal{L}_{n_0+m_0-(2N+1)k, m_0-2k}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (*_+)$$

Если же $m_0 < 0$, то

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\theta_0) &= \left\{ n = n_0 - (2N + 1)k, \ m = m_0 - 2k; \ \frac{m_0}{2} \leq k \leq \frac{n_0}{2N+1} \right\} \cup \\ &\quad \cup \left\{ n = n_0 - m_0 - (2N - 1)k, \ m = m_0 - 2k; \ k \leq \min\left(\frac{n_0 - m_0}{2N-1}, \frac{m_0 - 1}{2}\right) \right\}, \\ F_0(\mathbf{r}) &= \sum_{\frac{m_0}{2} \leq k \leq \frac{n_0}{2N+1}} c_k \mathcal{L}_{n_0-(2N+1)k, m_0-2k}(\mathbf{r}) + \\ &\quad + \sum_{-\infty < k \leq \min(\frac{n_0-m_0}{2N-1}, \frac{m_0-1}{2})} c_k \mathcal{L}_{n_0-m_0-(2N-1)k, m_0-2k}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (*_-)$$

Для дальнейшего упрощения поля $F_0(\mathbf{r})$ воспользуемся интегральным представлением мод Эрмита–Лагерра–Гаусса [36]:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{n,m}(\mathbf{r} | \alpha) &= \frac{(-2i)^{n+m}}{\pi} e^{r^2} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-s^2 - t^2 + 2\sqrt{2}i(xs + yt)) \times \\ &\quad \times (s \cos \alpha + it \sin \alpha)^n (s \sin \alpha - it \cos \alpha)^m ds dt \end{aligned}$$

и формулой связи с модами Лагерра–Гаусса:

$$\mathcal{L}_{n,m}(\mathbf{r} | \pi/4) = (-1)^{\min} 2^{\max} \min! \mathcal{L}_{\min, n-m}(\mathbf{r}).$$

Здесь $\min = \min(m, n)$, $\max = \max(m, n)$.

Поскольку приведённые выше $(*)$ -ряды для $F_0(\mathbf{r})$ содержат произвольные коэффициенты c_k и каждый коэффициент используется только один раз, то можно избавиться от несущественных множителей, просто включая их в состав c_k (т.е. переобозначая коэффициенты):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\min, n-m}(\mathbf{r}) &\sim \mathcal{G}_{n,m}(\mathbf{r} | \pi/4) \sim \\ &\sim \exp(r^2) \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-s^2 - t^2 + 2\sqrt{2}i(xs + yt)) (s + it)^n (s - it)^m ds dt = \\ &= \exp(z\bar{z}) \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-w\bar{w} + i\sqrt{2}(z\bar{w} + \bar{z}w)) w^n \bar{w}^m d \operatorname{Re} w d \operatorname{Im} w = \\ &= \mathbf{L}[w^n \bar{w}^m](\mathbf{r}), \end{aligned}$$

где $w = s + it$, $\bar{w} = s - it$ и $\mathbf{L}$ — интегральный оператор с экспоненциальным ядром, введённый для более компактной формы записи последующих формул.

Легко видеть, что, если второй индекс моды Лагерра–Гаусса неотрицателен, то $n \geq m$ и, как следствие, $\min = m$; если же второй индекс моды Лагерра–Гаусса отрицателен, то $n < m$ и $\min = n$. Переобозначая индексы, запишем

$$\mathcal{L}_{N,M}(\mathbf{r}) \sim \begin{cases} \mathbf{L}[w^{N+M}\bar{w}^N](\mathbf{r}), & \text{если } M \geq 0, \\ \mathbf{L}[w^N\bar{w}^{N-M}](\mathbf{r}), & \text{если } M \leq 0. \end{cases}$$

Заметим, что в формуле $(*)_+$ первый из двух рядов содержит только моды Лагерра–Гаусса с неотрицательным вторым индексом, а второй — с отрицательным; в формуле $(*)_-$ наоборот — первый из двух рядов содержит только моды Лагерра–Гаусса с неположительным вторым индексом, а второй — с положительным. Поэтому

$$\begin{aligned} F_0(\mathbf{r}) \Big|_{(*)_+} &= \sum_{-\infty < k \leq \min(\frac{n_0}{2N-1}, \frac{m_0}{2})} c_k \mathbf{L}[w^{n_0+m_0-(2N+1)k} \bar{w}^{n_0-(2N-1)k}](\mathbf{r}) + \\ &\quad + \sum_{\frac{m_0}{2} < k \leq \frac{n_0+m_0}{2N+1}} c_k \mathbf{L}[w^{n_0+m_0-(2N+1)k} \bar{w}^{n_0-(2N-1)k}](\mathbf{r}) = \\ &= \mathbf{L}[w^{n_0+m_0} \bar{w}^{n_0} f(w^{2N+1} \bar{w}^{2N-1})](\mathbf{r}), \\ F_0(\mathbf{r}) \Big|_{(*)_-} &= \sum_{\frac{m_0}{2} \leq k \leq \frac{n_0}{2N+1}} c_k \mathbf{L}[w^{n_0-(2N+1)k} \bar{w}^{n_0-m_0-(2N-1)k}](\mathbf{r}) + \\ &\quad + \sum_{-\infty < k \leq \min(\frac{n_0-m_0}{2N-1}, \frac{m_0-1}{2})} \mathbf{L}[w^{n_0-(2N+1)k} \bar{w}^{n_0-m_0-(2N-1)k}](\mathbf{r}) = \\ &= \mathbf{L}[w^{n_0} \bar{w}^{n_0-m_0} f(w^{2N+1} \bar{w}^{2N-1})](\mathbf{r}), \end{aligned}$$

На примере варианта $m_0 \geq 0$ покажем, как были объединены два ряда и появилась функция f (вариант $m_0 < 0$ рассматривается аналогично).

Преобразование рядов зависит от значений начальной пары (n_0, m_0) . Если $\min(\frac{n_0}{2N-1}, \frac{m_0}{2}) = \frac{m_0}{2}$, т.е. $\frac{n_0}{2N-1} \geq \frac{m_0}{2}$, то

$$\sum_{-\infty < k \leq \min(\frac{n_0}{2N-1}, \frac{m_0}{2})} + \sum_{\frac{m_0}{2} < k \leq \frac{n_0+m_0}{2N+1}} = \sum_{-\infty < k \leq \frac{n_0+m_0}{2N+1}}$$

и показатели степеней множителей $w^{n_0+m_0-(2N+1)k}$ и $\bar{w}^{n_0-(2N-1)k}$ неотрицательны: для $w^{n_0+m_0-(2N+1)k}$ это очевидно в силу диапазона изменения индекса суммирования k , для $\bar{w}^{n_0-(2N-1)k}$ это следует из цепочки неравенств:

$$n_0 - (2N-1)k \geq n_0 - (2N-1)\frac{n_0+m_0}{2N+1} = \frac{2(2N-1)}{2N+1} \left(\frac{n_0}{2N-1} - \frac{m_0}{2} \right) \geq 0.$$

Если $\min\left(\frac{n_0}{2N-1}, \frac{m_0}{2}\right) = \frac{n_0}{2N-1}$, т.е. $\frac{n_0}{2N-1} \leq \frac{m_0}{2}$, то второй ряд отсутствует, поскольку нижний предел индекса k становится больше верхнего:

$$\frac{m_0}{2} - \frac{n_0 + m_0}{2N+1} = \frac{2N-1}{2N+1} \left(\frac{m_0}{2} - \frac{n_0}{2N-1} \right) \geq 0.$$

Возвращаясь к интегральному представлению оператора $\mathbf{L}$, окончательно получаем

$$F_0(\mathbf{r}) = \exp(z\bar{z}) \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-w\bar{w} + i\sqrt{2}(z\bar{w} + \bar{z}w)) \psi(w, \bar{w}) d\operatorname{Re} w d\operatorname{Im} w, \quad (2.18)$$

где $w = s + it$, $\bar{w} = s - it$ и

$$\psi(w, \bar{w}) = f(w^{2N+1}\bar{w}^{2N-1}) \cdot (w\bar{w})^{n_0} \cdot \begin{cases} w^{m_0}, & \text{если } m_0 \geq 0, \\ \bar{w}^{-m_0}, & \text{если } m_0 \leq 0. \end{cases}$$

Отметим также, что выбор функции $f(z)$ существенно зависит от выбора пары (n_0, m_0) : если для пары $(n_0, m_0) = (0, 0)$ функция $f(z)$ является произвольной целой аналитической функцией (произвольной в той мере, что интеграл (2.18) должен сходиться для всех $\mathbf{r} \in \mathbb{R}$, причём $F_0(\mathbf{r}) \in L_2(\mathbb{R}^2)$), то для пары $(n_0, m_0) = (2N-1, 2)$ функция $f(z)$ можно выбрать мероморфной, с простым полюсом в точке $z = 0$:

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z} + c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots \Rightarrow \psi(w, \bar{w}) = c_{-1} + c_0 w^{2N+1} \bar{w}^{2N-1} + \dots$$

Очевидно, что множество функций $\psi(w, \bar{w})$ при выборе $(n_0, m_0) = (0, 0)$ и $(n_0, m_0) = (2N-1, 2)$ получается одним и тем же. Поэтому для полного описания спиральных пучков на базе формулы (2.18) достаточно рассмотреть только те варианты начальных пар (n_0, m_0) , для которых $f(z)$ не может быть выбрана мероморфной в нуле, а должна быть выбрана аналитической. Более того, если спиральный пучок для пары $(n_0, m_0) = (0, 0)$ обозначить

$$F_{\text{init}}(\mathbf{r}) = \exp(z\bar{z}) \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-w\bar{w} + i\sqrt{2}(z\bar{w} + \bar{z}w)) f(w^{2N+1}\bar{w}^{2N-1}) d\operatorname{Re} w d\operatorname{Im} w, \quad (2.19)$$

то все остальные спиральные пучки выражаются через $F_{\text{init}}(\mathbf{r})$. А именно, спиральный пучок для пары (n_0, m_0) в начальной плоскости имеет вид

$$\begin{aligned} F_0(\mathbf{r}) &= \exp(z\bar{z}) \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^{n_0} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^{n_0+m_0} \left[\exp(-z\bar{z}) F_{\text{init}}(\mathbf{r}) \right], & \text{если } m_0 \geq 0, \\ F_0(\mathbf{r}) &= \exp(z\bar{z}) \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^{n_0-m_0} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^{n_0} \left[\exp(-z\bar{z}) F_{\text{init}}(\mathbf{r}) \right], & \text{если } m_0 \leq 0, \end{aligned} \quad (2.20)$$

а при распространении в свободном пространстве изменяется в соответствии с формулами (2.8).

Остальные случаи, когда параметр вращения является ненулевым целым числом, исследуются аналогично и мы не будем детально описывать все промежуточные выкладки.

2. При $\theta_0 = 2N$ применяем формулу (2.11). Если $m_0 \geq 0$, то

$$\begin{aligned}
 \mathcal{N}(\theta_0) &= \left\{ n = n_0 + (2N+1)k, \ m = m_0 - 2k; \ -\frac{n_0}{2N+1} \leq k \leq \frac{m_0}{2} \right\} \cup \\
 &\quad \cup \left\{ n = n_0 + m_0 + (2N-1)k, \ m = m_0 - 2k; \ k \geq \max\left(-\frac{n_0+m_0}{2N-1}, \frac{m_0+1}{2}\right) \right\}, \\
 F_0(\mathbf{r}) &= \sum_{-\frac{n_0}{2N+1} \leq k \leq \frac{m_0}{2}} c_k \mathcal{L}_{n_0+(2N+1)k, m_0-2k}(\mathbf{r}) + \\
 &\quad + \sum_{\max(-\frac{n_0+m_0}{2N-1}, \frac{m_0+1}{2}) \leq k < \infty} c_k \mathcal{L}_{n_0+m_0+(2N-1)k, m_0-2k}(\mathbf{r}) = \\
 &= \sum_{-\frac{n_0}{2N+1} \leq k \leq \frac{m_0}{2}} c_k \mathbf{L}[w^{n_0+m_0+(2N-1)k} \bar{w}^{n_0+(2N+1)k}](\mathbf{r}) + \\
 &\quad + \sum_{\max(-\frac{n_0+m_0}{2N-1}, \frac{m_0+1}{2}) \leq k < \infty} c_k \mathbf{L}[w^{n_0+m_0+(2N-1)k} \bar{w}^{n_0+(2N+1)k}](\mathbf{r}) = \\
 &= \mathbf{L}[w^{n_0+m_0} \bar{w}^{n_0} f(w^{2N-1} \bar{w}^{2N+1})](\mathbf{r}).
 \end{aligned}$$

Если же $m_0 < 0$, то

$$\begin{aligned}
 \mathcal{N}(\theta_0) &= \left\{ n = n_0 + (2N-1)k, \ m = m_0 - 2k; \ k \geq \max\left(-\frac{n_0}{2N-1}, \frac{m_0}{2}\right) \right\} \cup \\
 &\quad \cup \left\{ n = n_0 - m_0 + (2N+1)k, \ m = m_0 - 2k; \ -\frac{n_0-m_0}{2N+1} \leq k \leq \frac{m_0-1}{2} \right\}, \\
 F_0(\mathbf{r}) &= \sum_{\max(-\frac{n_0}{2N-1}, \frac{m_0}{2}) \leq k < \infty} c_k \mathcal{L}_{n_0+(2N-1)k, m_0-2k}(\mathbf{r}) + \\
 &\quad + \sum_{-\frac{n_0-m_0}{2N+1} \leq k \leq \frac{m_0-1}{2}} c_k \mathcal{L}_{n_0-m_0+(2N+1)k, m_0-2k}(\mathbf{r}) = \\
 &= \sum_{\max(-\frac{n_0}{2N-1}, \frac{m_0}{2}) \leq k < \infty} c_k \mathbf{L}[w^{n_0+(2N-1)k} \bar{w}^{n_0-m_0+(2N+1)k}](\mathbf{r}) + \\
 &\quad + \sum_{-\frac{n_0-m_0}{2N+1} \leq k \leq \frac{m_0-1}{2}} c_k \mathbf{L}[w^{n_0+(2N-1)k} \bar{w}^{n_0-m_0+(2N+1)k}](\mathbf{r}) = \\
 &= \mathbf{L}[w^{n_0} \bar{w}^{n_0-m_0} f(w^{2N-1} \bar{w}^{2N+1})](\mathbf{r}).
 \end{aligned}$$

Таким образом, спиральный пучок для пары $(n_0, m_0) = (0, 0)$ имеет вид

$$F_{\text{init}}(\mathbf{r}) = \exp(z\bar{z}) \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-w\bar{w} + i\sqrt{2}(z\bar{w} + \bar{z}w)) f(w^{2N-1}\bar{w}^{2N+1}) d\operatorname{Re} w d\operatorname{Im} w, \quad (2.21)$$

а спиральный пучок для пары (n_0, m_0) выражается через $F_{\text{init}}(\mathbf{r})$ по формулам (2.20).

3. При $\theta_0 = -2N - 1$ применяем формулу (2.12). Если $m_0 \geq 0$, то

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\theta_0) &= \left\{ n = n_0 - Nk, m = m_0 - k; k \leq \min\left(\frac{n_0}{N}, m_0\right) \right\} \cup \\ &\quad \cup \left\{ n = n_0 + m_0 - (N+1)k, m = m_0 - k; m_0 < k \leq \frac{n_0 + m_0}{N+1} \right\}, \\ F_0(\mathbf{r}) &= \sum_{-\infty < k \leq \min(\frac{n_0}{N}, m_0)} c_k \mathcal{L}_{n_0 - Nk, m_0 - k}(\mathbf{r}) + \\ &\quad + \sum_{m_0 < k \leq \frac{n_0 + m_0}{N+1}} c_k \mathcal{L}_{n_0 + m_0 - (N+1)k, m_0 - k}(\mathbf{r}) = \\ &= \sum_{-\infty < k \leq \min(\frac{n_0}{N}, m_0)} c_k \mathbf{L}[w^{n_0 + m_0 - (N+1)k} \bar{w}^{n_0 - Nk}](\mathbf{r}) + \\ &\quad + \sum_{m_0 < k \leq \frac{n_0 + m_0}{N+1}} c_k \mathbf{L}[w^{n_0 + m_0 - (N+1)k} \bar{w}^{n_0 - Nk}](\mathbf{r}) = \\ &= \mathbf{L}[w^{n_0 + m_0} \bar{w}^{n_0} f(w^{N+1} \bar{w}^N)](\mathbf{r}). \end{aligned}$$

Если же $m_0 < 0$, то

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\theta_0) &= \left\{ n = n_0 - (N+1)k, m = m_0 - k; m_0 \leq k \leq \frac{n_0}{N+1} \right\} \cup \\ &\quad \cup \left\{ n = n_0 - m_0 - Nk, m = m_0 - k; k \leq \min\left(\frac{n_0 - m_0}{N}, m_0\right) \right\}, \\ F_0(\mathbf{r}) &= \sum_{m_0 \leq k \leq \frac{n_0}{N+1}} c_k \mathcal{L}_{n_0 - (N+1)k, m_0 - k}(\mathbf{r}) + \\ &\quad + \sum_{-\infty < k \leq \min(\frac{n_0 - m_0}{N}, m_0)} c_k \mathcal{L}_{n_0 - m_0 - Nk, m_0 - k}(\mathbf{r}) = \\ &= \sum_{m_0 \leq k \leq \frac{n_0}{N+1}} c_k \mathbf{L}[w^{n_0 - (N+1)k} \bar{w}^{n_0 - m_0 - Nk}](\mathbf{r}) + \\ &\quad + \sum_{-\infty < k \leq \min(\frac{n_0 - m_0}{N}, m_0)} c_k \mathbf{L}[w^{n_0 - (N+1)k} \bar{w}^{n_0 - m_0 - Nk}](\mathbf{r}) = \\ &= \mathbf{L}[w^{n_0} \bar{w}^{n_0 - m_0} f(w^{N+1} \bar{w}^N)](\mathbf{r}). \end{aligned}$$

Таким образом, спиральный пучок для пары $(n_0, m_0) = (0, 0)$ имеет вид

$$F_{\text{init}}(\mathbf{r}) = \exp(z\bar{z}) \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-w\bar{w} + i\sqrt{2}(z\bar{w} + \bar{z}w)) f(w^{N+1}\bar{w}^N) d\operatorname{Re} w d\operatorname{Im} w, \quad (2.22)$$

а спиральный пучок для пары (n_0, m_0) выражается через $F_{\text{init}}(\mathbf{r})$ по формулам (2.20).

4. При $\theta_0 = 2N + 1$ применяем формулу (2.12). Если $m_0 \geq 0$, то

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\theta_0) &= \left\{ n = n_0 + (N+1)k, \ m = m_0 - k; \ -\frac{n_0}{N+1} \leq k \leq m_0 \right\} \cup \\ &\quad \cup \left\{ n = n_0 + m_0 + Nk, \ m = m_0 - k; \ k \geq \max\left(-\frac{n_0+m_0}{N}, m_0+1\right) \right\}, \\ F_0(\mathbf{r}) &= \sum_{-\frac{n_0}{N+1} \leq k \leq m_0} c_k \mathcal{L}_{n_0+(N+1)k, m_0-k}(\mathbf{r}) + \\ &\quad + \sum_{\max(-\frac{n_0+m_0}{N}, m_0+1) \leq k < \infty} c_k \mathcal{L}_{n_0+m_0+Nk, m_0-k}(\mathbf{r}) = \\ &= \sum_{-\frac{n_0}{N+1} \leq k \leq m_0} c_k \mathbf{L}[w^{n_0+m_0+Nk} \bar{w}^{n_0+(N+1)k}](\mathbf{r}) + \\ &\quad + \sum_{\max(-\frac{n_0+m_0}{N}, m_0+1) \leq k < \infty} c_k \mathbf{L}[w^{n_0+m_0+Nk} \bar{w}^{n_0+(N+1)k}](\mathbf{r}) = \\ &= \mathbf{L}[w^{n_0+m_0} \bar{w}^{n_0} f(w^N \bar{w}^{N+1})](\mathbf{r}). \end{aligned}$$

Если же $m_0 < 0$, то

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\theta_0) &= \left\{ n = n_0 + Nk, \ m = m_0 - k; \ k \geq \max\left(-\frac{n_0}{N}, m_0\right) \right\} \cup \\ &\quad \cup \left\{ n = n_0 - m_0 + (N+1)k, \ m = m_0 - k; \ -\frac{n_0-m_0}{N+1} \leq k < m_0 \right\}, \\ F_0(\mathbf{r}) &= \sum_{\max(-\frac{n_0}{N}, m_0) \leq k < \infty} c_k \mathcal{L}_{n_0+Nk, m_0-k}(\mathbf{r}) + \\ &\quad + \sum_{-\frac{n_0-m_0}{N+1} \leq k < m_0} c_k \mathcal{L}_{n_0-m_0+(N+1)k, m_0-k}(\mathbf{r}) = \\ &= \sum_{\max(-\frac{n_0}{N}, m_0) \leq k < \infty} c_k \mathbf{L}[w^{n_0-(2N+1)k} \bar{w}^{n_0-m_0-(2N-1)k}](\mathbf{r}) + \\ &\quad + \sum_{-\frac{n_0-m_0}{N+1} \leq k < m_0} c_k \mathbf{L}[w^{n_0+Nk} \bar{w}^{n_0-m_0+(N+1)k}](\mathbf{r}) = \\ &= \mathbf{L}[w^{n_0} \bar{w}^{n_0-m_0} f(w^N \bar{w}^{N+1})](\mathbf{r}). \end{aligned}$$

Таким образом, спиральный пучок для пары $(n_0, m_0) = (0, 0)$ имеет вид

$$F_{\text{init}}(\mathbf{r}) = \exp(z\bar{z}) \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-w\bar{w} + i\sqrt{2}(z\bar{w} + \bar{z}w)) f(w^N \bar{w}^{N+1}) d\operatorname{Re} w d\operatorname{Im} w, \quad (2.23)$$

а спиральный пучок для пары (n_0, m_0) выражается через $F_{\text{init}}(\mathbf{r})$ по формулам (2.20).

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Если $\theta_0 = -1$, то $N = 0$ и

$$\begin{aligned} F_{\text{init}}(\mathbf{r}) &= \exp(z\bar{z}) \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-w\bar{w} + i\sqrt{2}(z\bar{w} + \bar{z}w)) f(w) d\operatorname{Re} w d\operatorname{Im} w = \\ &= \exp(z\bar{z}) f\left(\frac{1}{i\sqrt{2}} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-w\bar{w} + i\sqrt{2}(z\bar{w} + \bar{z}w)) d\operatorname{Re} w d\operatorname{Im} w = \\ &\sim \exp(z\bar{z}) f\left(\frac{1}{i\sqrt{2}} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) \exp(-2z\bar{z}) \sim \exp(z\bar{z}) f(z). \end{aligned}$$

Таким образом, получился уже известный результат (2.13).

Пример 2. Пусть $\theta_0 = -2$ и пусть $m_0 > 0$. Тогда $N = 1$ и $\gamma_0 = 2n_0 - m_0 + 1$ — произвольное целое число. При $\gamma_0 = 1$ получается пучок

$$F_{\text{init}}(\mathbf{r}) = \exp(z\bar{z}) \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-w\bar{w} + i\sqrt{2}(z\bar{w} + \bar{z}w)) f(w^3 \bar{w}) d\operatorname{Re} w d\operatorname{Im} w.$$

При остальных значениях параметра γ_0 спиральные пучки выражаются через $F_{\text{init}}(\mathbf{r})$ следующим образом:

- если $\gamma_0 = 1 - k$, $k = 1, 2, \dots$, то

$$F_0(\mathbf{r}) = e^{z\bar{z}} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^k \left(e^{-z\bar{z}} F_{\text{init}}(\mathbf{r})\right).$$

- если $\gamma_0 = 1 + k$, $k = 1, 2, \dots$, то

$$F_0(\mathbf{r}) = e^{z\bar{z}} \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{\mathfrak{u}} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^{\mathfrak{v}} \left(e^{-z\bar{z}} F_{\text{init}}(\mathbf{r})\right),$$

где

$$\mathfrak{u} = \left[\frac{k+2}{3}\right], \quad \mathfrak{v} = \begin{cases} 0, & k \equiv 0(\bmod 3), \\ 2, & k \equiv 1(\bmod 3), \\ 1, & k \equiv 2(\bmod 3). \end{cases}$$

Пример 3. Пусть $\theta_0 = -3$. Тогда γ_0 — произвольное нечётное число и в простейшем случае $\gamma_0 = 1$ получается пучок

$$F_{\text{init}}(\mathbf{r}) = \exp(z\bar{z}) \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-w\bar{w} + i\sqrt{2}(z\bar{w} + \bar{z}w)) f(w^2 \bar{w}) d\operatorname{Re} w d\operatorname{Im} w.$$

При остальных значениях параметра γ_0 спиральные пучки выражаются через $F_{\text{init}}(\mathbf{r})$ следующим образом:

- если $\gamma_0 = 1 - 2k$, $k = 1, 2, \dots$, то

$$F_0(\mathbf{r}) = e^{z\bar{z}} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^k \left(e^{-z\bar{z}} F_{\text{init}}(\mathbf{r}) \right).$$

- если $\gamma_0 = 4k + 1$, $k = 1, 2, \dots$, то

$$F_0(\mathbf{r}) = e^{z\bar{z}} \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^k \left(e^{-z\bar{z}} F_{\text{init}}(\mathbf{r}) \right).$$

- если $\gamma_0 = 4k + 3$, $k = 1, 2, \dots$, то

$$F_0(\mathbf{r}) = e^{z\bar{z}} \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^{k+1} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(e^{-z\bar{z}} F_{\text{init}}(\mathbf{r}) \right).$$

Как видно, спиральные пучки в каждом случае имеют примерно одинаковый вид, различаясь показателем степени множителя w в аргументе функции f . Функция $f(z)$ — это целая аналитическая функция, которая может быть выбрана произвольным образом, но с условием сходимости интеграла при всех x, y . Достаточно выбрать в качестве $f(z)$ целую аналитическую функцию порядка роста $\rho_f < 1/2N$ для случая $\theta_0 = \pm 2N$ и $\rho_f < 2/(2N + 1)$ для случая $\theta_0 = \pm(2N + 1)$.

Степени множителей w и $\bar{w}$ — это главное отличие спиральных пучков при $\theta_0 = \pm 1$ от спиральных пучков при $\theta_0 \neq \pm 1$: в первом случае получались обычные целые аналитические функции, во втором — функции, которые хоть и выражаются через целые аналитические функции, но аргумент у них — смесь $x + iy$ и $x - iy$, т.е. это уже квазианалитические функции.

Рассмотрим вопрос построения аналитических функций $f(z)$, не нарушающих квадратичной интегрируемости функции $F_0(\mathbf{r})$.

Пусть A — некоторый отрезок вещественной прямой и $K(t): A \rightarrow \mathbb{C}$ — непрерывная функция. Тогда

$$f(z) = \int_A K(t) e^{zt} dt$$

— целая аналитическая функция порядка роста $\rho_f = 1$ (из-за ограниченности A). В качестве $f(z)$, например, можно взять криволинейный интеграл по какой-нибудь кривой $\zeta(t)$. В частности, можно взять спиральный пучок (2.14) и использовать его составляющую $f(z)$ (у неё первый порядок роста) для формирования спиральных пучков $F_{\text{init}}(\mathbf{r})$, полученных выше. Однако непосредственная подстановка $f(z)$ в $F_{\text{init}}(\mathbf{r})$ возможна только при $\theta_0 = \pm 1$, поскольку в общем случае

квазианалитическая функция $f(w^m \bar{w}^n)$ с некоторыми целыми m, n возрастает на бесконечности слишком быстро, что приводит к расходимости интеграла. С другой стороны, несмотря на произвольность функции f , нельзя напрямую использовать конструкцию вида $f(\sqrt[m+n]{w^m \bar{w}^n})$, поскольку это нарушает аналитичность функции f .

Можно предложить следующий способ, позволяющий избежать такого рода проблем. Пусть

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

— целая аналитическая функция порядка роста ρ_f . Используя корень N -й степени из единицы, $\xi = e^{2\pi i/N}$, преобразуем следующую конечную сумму:

$$\sum_{n=0}^{N-1} f(\xi^n z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \sum_{n=0}^{N-1} (\xi^n z)^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \sum_{n=0}^{N-1} \xi^{nk} = \left| \begin{array}{c} k \text{ делится} \\ \text{на } N \end{array} \right| = N \sum_{k=0}^{\infty} c_{Nk} z^{Nk}.$$

Поэтому

$$\sum_{n=0}^{N-1} f(\xi^n \sqrt[N]{z}) = N \sum_{k=0}^{\infty} c_{Nk} z^k$$

будет целой аналитической функцией порядка роста ρ_f/N . Выбор N осуществляется в зависимости от m, n , присутствующих в $f(w^m \bar{w}^n)$. Например, можно выбрать $N = m+n$ и получить квазианалитическую функцию $f(\sqrt[m+n]{w^m \bar{w}^n})$ первого порядка роста. В частности, если $c \in \mathbb{C}$, $f(z) = e^{cz}$ и $N = 4$, то

$$\sum_{n=0}^3 \exp\left(c i^n \sqrt[4]{z}\right)$$

будет целой аналитической функцией порядка роста $\rho_f = 1/4$. Соответственно,

$$F_{\text{init}}(\mathbf{r}) = \exp(z\bar{z}) \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-w\bar{w} + i\sqrt{2}(z\bar{w} + \bar{z}w)) \sum_{n=0}^3 \exp\left(c i^n \sqrt[4]{w^3 \bar{w}}\right) d\operatorname{Re} w d\operatorname{Im} w$$

будет спиральным пучком с параметром $\theta_0 = -2$, а

$$F_{\text{init}}(\mathbf{r}) = \exp(z\bar{z}) \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-w\bar{w} + i\sqrt{2}(z\bar{w} + \bar{z}w)) \sum_{n=0}^3 \exp\left(c i^n \sqrt[4]{w^2 \bar{w}}\right) d\operatorname{Re} w d\operatorname{Im} w$$

— спиральным пучком с параметром $\theta_0 = -3$.

На рис. 2.2 приведен пример спирального пучка с $\theta_0 = -4$

$$F(z, \bar{z}) = \exp(-z\bar{z})(z^5 \bar{z}^3 + c),$$

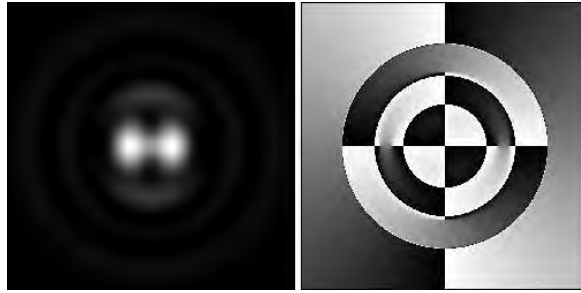


Рис. 2.2. Интенсивность и фаза спирального пучка с параметром вращения $\theta_0 = -4$.



Рис. 2.3. Интенсивности спирального пучка с параметром вращения $\theta_0 = -4$ (верхний ряд) и пучка, сформированного с помощью дифракционного фазового элемента (нижний ряд), при распространении в зоне Френеля.

где c — вещественная константа. Как показывают численные эксперименты, фазу спирального пучка можно использовать в качестве фазового элемента для формирования световых полей с нужными свойствами. На рис. 2.3 приведен пример преобразования интенсивности спирального пучка и светового поля, сформированного с помощью соответствующего фазового элемента. Существенным недостатком полученного фазового элемента является то, что приходится освещать его достаточно «широким» гауссовым пучком, при этом размер световых пятен на выходе в несколько раз меньше. Такие поля получили название "double helix beam" и используются в задачах, связанных с исследованием физико-химических свойств вещества, для определения пространственного положения одиночных флуоресцентных молекул с нанометровой точностью [41, 42]. Возможность наблюдения одиночных молекул с помощью фокусирующей оптики ограничена дифракционным пределом.

2.3 Смещённые моды Лагерра–Гаусса

Вращающиеся световые поля широко используются для создания оптических ловушек и перемещения микрочастиц в трёхмерном пространстве благодаря наличию ненулевого углового момента. Рассмотрим один из способов построения таких пучков на основе формул (5.11.4.3) из [43] и (5.9.3.3) из [44]:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} L_n^{k+\alpha}(x) = e^t L_n^{\alpha}(x-t),$$

$$\sum_{k=0}^n \frac{t^k}{(n-k)!} L_k^{\lambda-k}(x) = t^n L_n^{\lambda-n}\left(x - \frac{1}{t}\right).$$

Делая замены $x \rightarrow 2r^2$, $t \rightarrow cre^{i\varphi} = cz$, $\alpha \rightarrow m$ в первой формуле и $x \rightarrow 2r^2$, $1/t \rightarrow cre^{i\varphi} = cz$, $\lambda \rightarrow m+n$ — во второй, и переходя к модам Лагерра–Гаусса, получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty} L_n^{k+m}(2r^2) \frac{(cz)^k}{k!} = \exp(cz) L_n^m(2r^2 - cz) \quad \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}_{n,m}^-(\mathbf{r} | c) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{L}_{n,k+m}(\mathbf{r}) \frac{c^k}{k!} = \exp(-r^2 + cz) z^m L_n^m(2r^2 - cz) =$$

$$= \exp(-r^2 + cz) \left(\left[x - \frac{c}{4} \right] + i \left[y - \frac{ic}{4} \right] \right)^m L_n^m \left(2 \left[x - \frac{c}{4} \right]^2 + 2 \left[y - \frac{ic}{4} \right]^2 \right), \quad (2.24)$$

$$\sum_{k=0}^n L_k^{n+m-k}(2r^2) \frac{(cz)^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^n L_{n-k}^{m+k}(2r^2) \frac{(cz)^k}{k!} = L_n^m(2r^2 - cz) \quad \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}_{n,m}^+(\mathbf{r} | c) = \sum_{k=0}^n \mathcal{L}_{n-k,m+k}(\mathbf{r}) \frac{c^k}{k!} = e^{-r^2} z^m L_n^m(2r^2 - cz). \quad (2.25)$$

Таким образом, формулы (2.24) и (2.25) представляют начальные распределения некоторых решений параксиального уравнения, которые можно рассматривать как моды Лагерра–Гаусса, смещённые на некоторую «вещественно-комплексную» величину.

В силу формул (2.6) и (2.7) поле (2.24) является спиральным пучком с параметром $\theta_0 = -1$, а поле (2.25) — спиральным пучком с параметром $\theta_0 = +1$.

Для пучков (2.24), (2.25) использовано обозначение, сходное с обозначением для мод Лагерра–Гаусса, поскольку

$$\mathcal{L}_{n,m}^{\pm}(\mathbf{r} | 0) = \mathcal{L}_{n,m}(\mathbf{r}) \quad \text{и} \quad \mathcal{L}_{n,m}^{\pm}(\mathbf{r} | c) = \exp\left(\mp \frac{c}{2}(x + iy)\right) \mathcal{L}_{n,m}\left(x - \frac{c}{4}, y - \frac{ic}{4}\right).$$

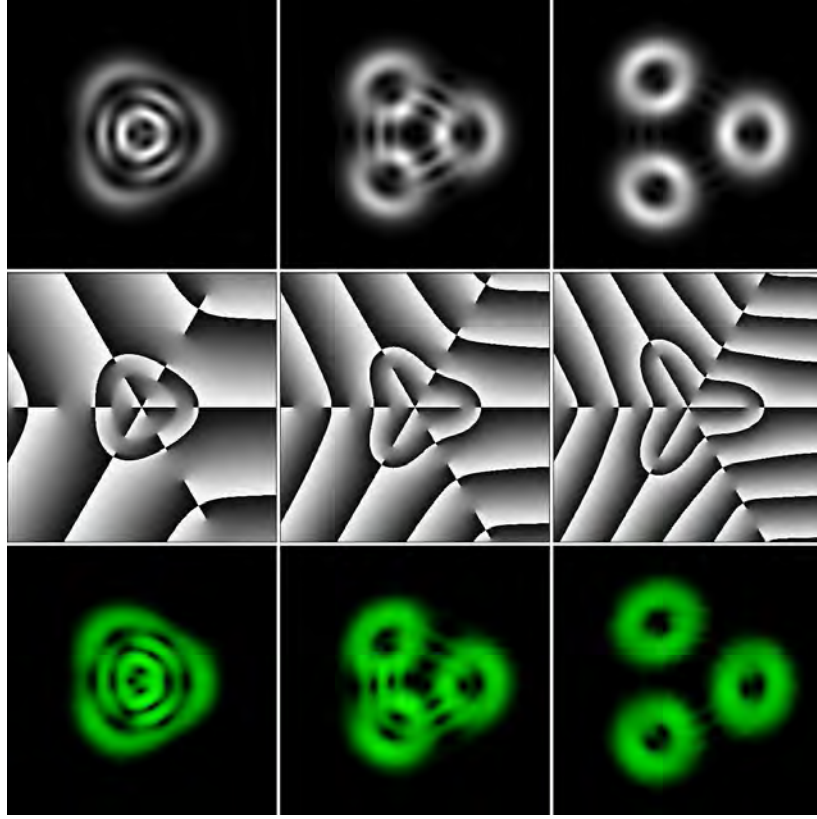


Рис. 2.4. Теоретические распределения интенсивности (верхний ряд) и фазы (средний ряд) спиральных пучков $F_{2,0}^{3,0}(\mathbf{r}, R)$ при $R = 2, 3, 4$ (слева направо), а также их экспериментальная реализация (нижний ряд).

Кроме того, параметр c отделяется от переменных $(x, y) = \mathbf{r}$ вертикальной чертой подобно тому, как это было сделано для мод Эрмита–Лагерра–Гаусса и спиральных пучков (2.14).

Рассмотрим более сложную конструкцию на основе поля (2.24). Пусть N — некоторое натуральное число, $\zeta = \exp\left(\frac{2\pi i}{N}\right)$ — корень N -й степени из единицы и

$$F_{n,m}^{N,M}(\mathbf{r} | R) = \sum_{j=0}^{N-1} \zeta^{Mj} \mathcal{L}_{n,m}^{-}(\mathbf{r}, R\zeta^j) \quad \left(\begin{array}{l} N = 1, 2, \dots, \\ M = 0, 1, \dots, N-1 \end{array} \right) \quad (2.26)$$

— линейная комбинация «расширенных» LG-мод $\mathcal{L}_{n,m}^{-}(\mathbf{r} | c)$, параметры которых соответствуют вершинам правильного N -угольника, вписанного в окружность радиуса R .

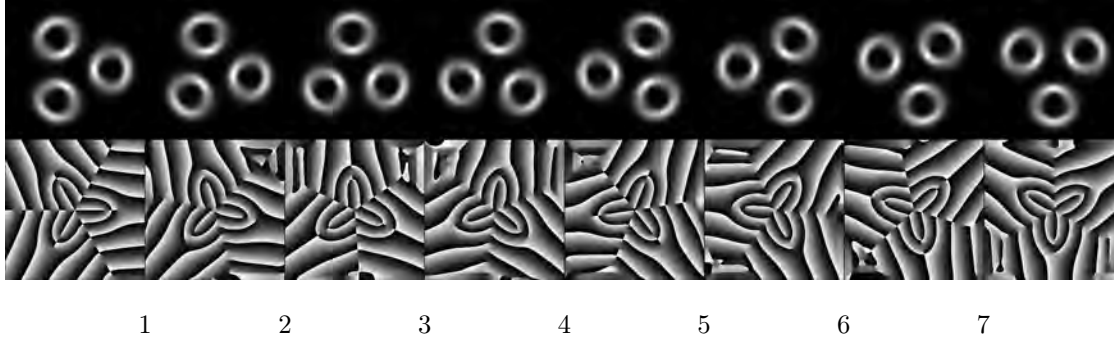


Рис. 2.5. Спиральный пучок $F_{2,0}^{3,0}(\mathbf{r} | 4)$ при распространении в зоне Френеля. Номер кадра N связан с плоскостью регистрации l соотношением $2l/k = \text{tg}(\pi N/14)$, т.е. $N = 0$ соответствует исходному пучку, а $N = 7$ — его преобразованию Фурье.

Это поле можно представить тремя разными способами:

$$\begin{aligned}
 F_{n,m}^{N,M}(\mathbf{r} | R) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{L}_{n,k+m}(\mathbf{r}) \frac{R^k}{k!} \sum_{j=0}^{N-1} \xi^{(M+k)j} = \\
 &= N \sum_{k=[M \neq 0]}^{\infty} \mathcal{L}_{n,kN-M+m}(\mathbf{r}) \frac{R^{kN-M}}{(kN-M)!} = e^{-z\bar{z}} z^m \sum_{j=0}^{N-1} \xi^{Mj} e^{zR\xi^j} L_n^m(2z\bar{z} - zR\xi^j),
 \end{aligned}$$

где $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ — комплексные переменные и $[M \neq 0] \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0, & M = 0 \\ 1, & M \neq 0 \end{cases}$ — равенство с использованием символа Айверсона.

На рис. 2.4 показаны примеры спиральных пучков (2.26) и их экспериментальная реализация с помощью пространственного модулятора света.

Заключение к главе 2

В данной главе показано, что спиральные пучки, интенсивность которых в зоне Френеля поворачивается на угол $\pm n\pi/2$ (n — целое число, $n \neq 0$), могут быть представлены в виде двумерного преобразования Фурье от произведения гауссовой функции на целую аналитическую функцию со специально подобранными аргументами.

По результатам второй главы опубликовано две статьи. Разработана программа, позволяющая создавать и преобразовывать двумерные световые поля с фазовыми сингулярностями.

Результаты второй главы могут быть использованы для трёхмерной локализации и перемещения микрочастиц.

Глава 3

Пучки негауссова типа и их распространение в зоне Френеля

В данной главе рассматриваются световые поля негауссова типа, построенные на основе функции Эйри. Обзор работ по одномерным пучкам Эйри приводится в § 1. В § 2 рассмотрено построение пучка в виде произведения трёх пучков Эйри, аргументы которых повернуты нужным образом [45]. В § 3 исследован более общий случай светового пучка в виде произведения трёх функций Эйри. В § 4 найдена функция Вигнера три-Эйри пучка и рассмотрены некоторые её свойства [46].

3.1 Пучки Эйри и их распространение в зоне Френеля (обзор)

Рассмотренные в предыдущих двух главах HLG-пучки и спиральные пучки являются, по сути, примерами световых полей гауссова типа, поскольку именно наличие гауссовой компоненты позволяет рассматривать оба класса полей как элементы функционального пространства $L_2(\mathbb{R}^2)$ и, как следствие, использовать некоторые структурные теоремы (равенство Парсеваля, разложение по базису) при решении теоретических задач.

Однако в последние годы заметно возрос интерес к световым полям негауссова типа, когда принадлежность поля пространству $L_2(\mathbb{R}^2)$ обеспечивается наличием других, негауссовых, компонент. Наиболее известными представителями полей негауссова типа являются пучки Эйри.

Обычно функция Эйри определяется условно сходящимся интегралом

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(\frac{i\xi^3}{3} + ix\xi\right) d\xi \quad (3.1)$$

и затем с помощью контурного интегрирования продолжается до целой аналитической функции. Функция Эйри — одна из самых известных специальных функций математической физики [47, 48]. Многие её свойства могут быть найдены, если использовать определение (3.1), связи с функциями Бесселя и результаты классических монографий [49–51]. Функция Эйри помогает вычислить интеграл Фурье от кубической экспоненты общего вида и асимптотики классических ортогональных полиномов [52]. Кроме того, она является решением простого дифференциального уравнения второго порядка, $y'' = xy$, и убывает к нулю при $x \rightarrow \pm\infty$. Благодаря этим свойствам функция Эйри возникает при решении ряда физических задач (см., например, [53–55]).

При решении параксиального уравнения функция Эйри появилась в первый раз в 1979 году, когда были найдены недифрагирующие пучки Эйри с бесконечной энергией [56], однако бум оптических исследований, связанных с функцией Эйри, начался в 2007 году, когда было отмечено, что линейный экспоненциальный множитель позволяет получить параксиальные пучки Эйри с конечной энергией [57]. Сегодня пучки Эйри — объект интенсивных исследований в оптике (см., например, список литературы в [58]).

Среди теоретических работ, связанных с пучками Эйри, необходимо отметить следующие: преобразование пучков Эйри–Гаусса в линейных оптических системах [59], нахождение вектора Пойнтинга и углового момента пучков Эйри [60], непараксиальное исследование пучков Эйри [61, 62], исследование распространения пучков Эйри, ограниченных на начальной плоскости некоторой апертурой [63–65], сравнение пучков Эйри и Эрмита–Гаусса при астигматическом преобразовании [64], теоретическое и экспериментальное исследование пучков Эйри с добавочным множителем, обладающим топологическим зарядом [64, 66] и другие работы [67–71]. Среди экспериментальных исследований следует упомянуть работы, связанные с изучением распространения пучков Эйри в различных средах [72–74], а также применение пучков Эйри для задач, связанных с микроастицами [75].

Пучки Эйри были найдены в [57] как решения одномерного параксиального

уравнения. Двумерный вариант этих пучков можно записать в виде

$$F_0(\mathbf{r}) = \prod_{1 \leq n \leq 2} \exp(\gamma s_n) \text{Ai}(s_n + c_n) \quad (3.2)$$

$$F(\mathbf{r}, \ell) = \prod_{1 \leq n \leq 2} \exp\left(\gamma s_n + \frac{iR_n \ell}{2k} [s_n + c_n + \gamma^2] - \frac{\gamma R_n^2 \ell^2}{2k^2} - \frac{iR_n^3 \ell^3}{12k^3}\right) \times \text{Ai}\left(s_n + c_n + \frac{i\gamma R_n \ell}{k} - \frac{R_n^2 \ell^2}{4k^2}\right),$$

где $s_n = a_n x + b_n y$, $a_n, b_n, c_n \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$, $R_n = a_n^2 + b_n^2$ и

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0. \quad (3.3)$$

Неравенство $\gamma > 0$ является обязательным условием для того, чтобы пучок Эйри обладал конечной энергией. Случай $\gamma = 0$ соответствует недифрагирующим пучкам Эйри с бесконечной энергией [56].

В общем виде пучки Эйри зависят от нескольких вещественных параметров и являются функционально устойчивыми решениями параксиального уравнения. Несмотря на отсутствие структурной устойчивости, при некоторых ограничениях на параметры существует зона распространения, в которой интенсивность пучков Эйри меняется очень слабо. Кроме того, параболическая траектория распространения пучков Эйри предоставляет новые возможности для практического применения таких пучков, которые не характерны для обычных гауссовых пучков.

Для исходного поля

$$F_0(x | a, b, A, B) = \exp(bx - ax^2) \text{Ai}(Ax + B) \quad (3.4)$$

прямым вычислением преобразования Френеля легко получить одномерные пучки Эйри [59]:

$$\begin{aligned} \mathbf{FR}_\ell[e^{bx-ax^2} \text{Ai}(Ax + B)] &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \exp\left(\frac{bx - ax^2}{\sigma} + iL \left[\frac{Ax}{\sigma} + B + \frac{b^2}{A^2}\right] - \frac{2bL^2}{A} - \frac{2iL^3}{3}\right) \times \\ &\quad \times \text{Ai}\left(\frac{Ax}{\sigma} + B + \frac{2ibL}{A} - L^2\right), \end{aligned} \quad (3.5)$$

Здесь $\sigma = 1 + 2ia\ell/k$ и $L = A^2\ell/2k\sigma$ — вспомогательные комплексные параметры.

Если $a = 0$ и $\text{Re}(bA) > 0$, то $\sigma = 1$ и получаются пучки Эйри с конечной энергией [57]:

$$\begin{aligned} \mathbf{FR}_\ell[e^{bx} \text{Ai}(Ax + B)] &= \exp\left(bx + \frac{i\ell}{2k} [A^2(Ax + B) + b^2] - \frac{bA^3\ell^2}{2k^2} - \frac{iA^6\ell^3}{12k^3}\right) \times \\ &\quad \times \text{Ai}\left(Ax + B + \frac{ibA\ell}{k} - \frac{A^4\ell^2}{4k^2}\right). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Если $a = b = 0$, то получаются недифрагирующие пучки Эйри с бесконечной энергией [56]:

$$\mathbf{FR}_\ell[\text{Ai}(Ax + B)] = \exp\left(\frac{iA^2\ell}{2k}(Ax + B) - \frac{iA^6\ell^3}{12k^3}\right) \text{Ai}\left(Ax + B - \frac{A^4\ell^2}{4k^2}\right). \quad (3.7)$$

Вторая функция Эйри, $\text{Bi}(x)$, также может быть использована для построения функционально устойчивого решения параболического уравнения. Поскольку

$$\text{Bi}(z) = e^{\pi i/6} \text{Ai}(\omega z) + e^{-\pi i/6} \text{Ai}(\bar{\omega} z), \quad \omega = \exp(2\pi i/3),$$

и $\text{Ai}(x + iy)$ — целая аналитическая функция порядка роста $\frac{3}{2}$, то вычисление преобразования Френеля от поля $e^{bx-ax^2} \text{Bi}(Ax + B)$ при $\text{Re } a > 0$ можно свести к (3.5). В результате получается [76]

$$\begin{aligned} \mathbf{FR}_\ell[e^{bx-ax^2} \text{Bi}(Ax + B)] &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \exp\left(\frac{bx - ax^2}{\sigma} + iL\left[\frac{Ax}{\sigma} + B + \frac{b^2}{A^2}\right] - \frac{2bL^2}{A} - \frac{2iL^3}{3}\right) \times \\ &\quad \times \text{Bi}\left(\frac{Ax}{\sigma} + B + \frac{2ibL}{A} - L^2\right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Вообще, любая линейная комбинация $c_1 \text{Ai}(x) + c_2 \text{Ai}(\omega x) + c_3 \text{Ai}(\bar{\omega} x)$ может быть подставлена в (3.5) вместо $\text{Ai}(x)$. В частности, легко получить преобразование Френеля от дробных пучков Бесселя–Гаусса

$$\exp\left(-\frac{x^2}{w_0^2}\right) \sqrt{\frac{x}{w_0}} J_{\pm 1/3}\left(c\left[\frac{x}{w_0}\right]^{3/2}\right).$$

Тем не менее, случай $a = 0$ возможен только для функции $\text{Ai}(x)$, т.к. $\text{Bi}(x)$ экспоненциально возрастает при $x \rightarrow +\infty$ [47].

Двумерными аналогами пучков Эйри (3.5)–(3.8) являются поля вида

$$F_0(\mathbf{r}) = F_0(x | a_1, b_1, A_1, B_1) F_0(y | a_2, b_2, A_2, B_2). \quad (3.9)$$

Соответственно, исследование полей (3.9) не добавляет ничего нового к результатам исследования одномерных пучков Эйри.

3.2 Три-Эйри пучки и их свойства

Легко показать, что для двумерного поля общего вида (3.2), т.е. без ограничивающего условия (3.3), экспоненциальный множитель не может быть удален без

потери конечного значения энергии пучка. Однако для произведения трех пучков Эйри такой вариант уже вполне возможен. А именно, поле

$$F_0(\mathbf{r}) = \prod_{1 \leq n \leq 3} \exp(\gamma s_n) \text{Ai}(s_n + c_n)$$

может быть сведено к полю

$$F_0(\mathbf{r}) = \prod_{1 \leq n \leq 3} \text{Ai}(s_n + c_n), \quad (3.10)$$

обладающему конечной энергией, если все коэффициенты подобраны таким образом, что

$$s_1 + s_2 + s_3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 0, \\ b_1 + b_2 + b_3 = 0. \end{cases} \quad (3.11)$$

В частности, выбор линейных комбинаций $s_n = b \operatorname{Re}[\omega^n(x + iy)]$, где b — вещественный параметр, отличный от нуля, $\omega = \exp(2\pi i/3)$ — кубический корень из единицы, и одинаковых смещений $c_n = c$, приводит к полю, которое в нашей работе [45] было названо три-Эйри пучком:

$$\text{tAi}(\mathbf{r}; b, c) = \text{Ai}\left(b \frac{-x - y\sqrt{3}}{2} + c\right) \text{Ai}\left(b \frac{-x + y\sqrt{3}}{2} + c\right) \text{Ai}(bx + c). \quad (3.12)$$

Это поле не изменяется при повороте на угол $2\pi/3$ и зависит от вещественных параметров масштабирования b и смещения c .

Таким образом, три-Эйри пучок можно рассматривать как произведение пучков Эйри [57] или как произведение пучков Эйри [56] в плоскости $\ell = 0$.

Распространение три-Эйри пучка в зоне Френеля — сложная теоретическая проблема, однако, можно весьма просто найти его Фурье-образ, используя дважды формулу (3.121) из [48]:

$$\mathcal{F}[\text{tAi}(\mathbf{r}; b, c)](\mathbf{r}) = \frac{1}{3^{5/6} \pi b^2} \exp\left(-\frac{2ir^3 \sin 3\varphi}{27b^3}\right) \text{Ai}\left(3^{2/3}c + \frac{2r^2}{3^{4/3}b^2}\right). \quad (3.13)$$

где

$$\mathcal{F}[f(\mathbf{p})](\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp[-i\langle \mathbf{r}, \mathbf{p} \rangle] f(\mathbf{p}) d\mathbf{p}$$

— двумерное преобразование Фурье. Как видно из (3.13), результирующий пучок имеет кубическую фазу и супергауссово убывание амплитуды на бесконечности, поскольку известна асимптотика функции Эйри при больших значениях аргумента [47]:

$$\text{Ai}(r^2) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi r}} \exp\left(-\frac{2r^3}{3}\right) \quad (r \rightarrow \infty).$$

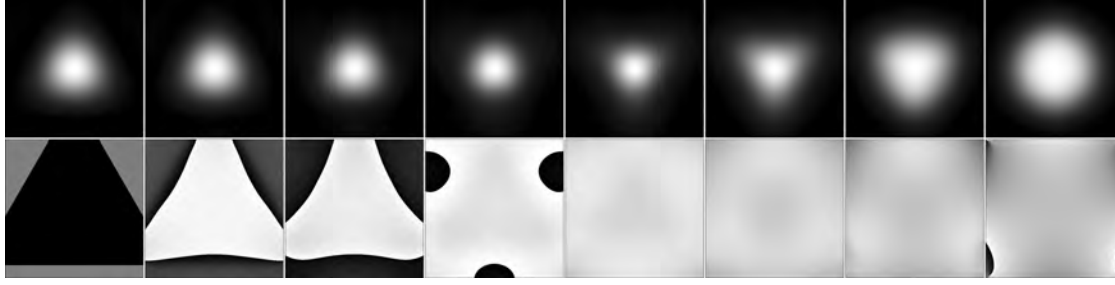


Рис. 3.1. Интенсивность (верхний ряд) и фаза (нижний ряд) пучка $\mathbf{FR}_l[\text{tAi}(\mathbf{r}; 1, c)](\mathbf{r})$, где $3^{2/3}c = a'_1$, при распространении в зоне Френеля, $l \in [0, +\infty]$. Размеры левого фрейма $[-B, B] \times [-B, B]$, где $B = 1.2$. Масштабное увеличение и дефокусировочная фаза на последующих фреймах скомпенсированы.

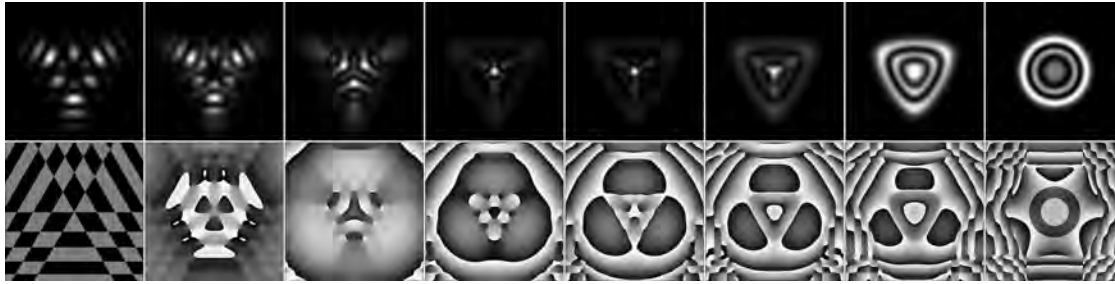


Рис. 3.2. То же самое, что и рис. 3.1, но для случая $3^{2/3}c = a'_3$, $B = 5.8$.

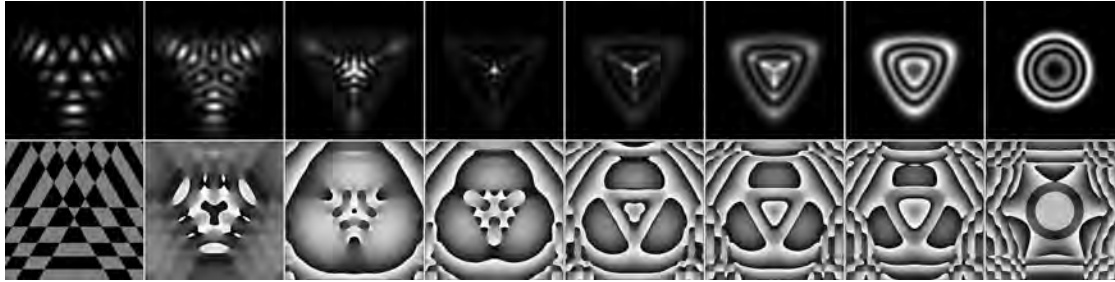


Рис. 3.3. То же самое, что и рис. 3.1, но для случая $3^{2/3}c = a_3$, $B = 5.0$.

Поведение результирующего поля в центре координат определяется величиной параметра смещения c ; поле обращается в нуль при выборе $3^{2/3}c = a_n$ или имеет локальный максимум, если $3^{2/3}c = a'_n$. Здесь a_n и a'_n — n -е нули функций $\text{Ai}(x)$ и $\text{Ai}'(x)$ соответственно (см. таблицу 10.13 в [47]).

На рис. 1–3 показан процесс эволюции пучка $\text{tAi}(\mathbf{r}; a, c)$ в зоне Френеля для случаев, когда параметр $3^{2/3}c$ равен $a'_1 = -1.01879\dots$, $a'_3 = -4.82009\dots$ и $a_3 = -5.52055\dots$. Необходимо отметить, что поле, показанное на рис. 1, является почти вещественным, т.е. при существенно ненулевых значениях интенсивности фаза меняется очень слабо.

Численные расчёты проводились следующим образом. Известно, что функции Эрмита–Гаусса $\{\mathcal{H}_{n,m}(\mathbf{r}), n, m = 0, 1, \dots\}$ образуют базис в пространстве $L_2(\mathbb{R}^2)$. Поэтому произвольное световое поле с конечной энергией $f(\mathbf{p})$ можно разложить в ряд:

$$f(\mathbf{r}) = \sum_{n,m=0}^{\infty} f_{n,m} \mathcal{H}_{n,m}\left(\frac{\mathbf{r}}{w_0}\right),$$

$$f_{n,m} = \frac{1}{2^{n+m-1} \pi n! m! w_0^2} \iint_{\mathbb{R}^2} f(\mathbf{r}) \mathcal{H}_{n,m}\left(\frac{\mathbf{r}}{w_0}\right) d\mathbf{r},$$

где w_0 — произвольный положительный параметр (ширина гауссова пучка), $\sigma = 1 + 2i\ell/kw_0^2$. Известно также, что НГ-пучки структурно устойчивы при распространении в зоне Френеля. Поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{FR}_\ell[f(\mathbf{p})](\mathbf{r}) &= \frac{1}{|\sigma|} \exp\left(\frac{2i\ell r^2}{kw_0^4|\sigma|^2}\right) \sum_{n,m=0}^{\infty} f_{n,m} \exp[i(n+m+1) \arg \sigma] \mathcal{H}_{n,m}\left(\frac{\mathbf{r}}{w_0|\sigma|}\right) \\ &\simeq \sum_{n,m=0}^{\infty} f_{n,m} \exp[i(n+m+1) \arg \sigma] \mathcal{H}_{n,m}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Последнее выражение сохраняет всю информацию о функциональных изменениях поля при распространении в зоне Френеля. Для случая $f(\mathbf{p}) = \text{tAi}(\mathbf{p}; 1, c)$ оно было использовано для численных расчетов, показанных на рис. 3.1–3.3. Коэффициенты разложения $f_{n,m}$, вычисленные однажды, использовались при вычислении всех восьми фреймов каждой картинки.

Выбор параметра w_0 был осуществлен из следующих соображений. Известно, что Фурье-образ гауссова пучка ширины w_0 имеет следующий вид:

$$G_\infty(\mathbf{r}) = \mathcal{F}\left[\exp\left(-\frac{\mathbf{p}^2}{w_0^2}\right)\right](\mathbf{r}) = \frac{w_0^2}{2} \exp\left(-\frac{w_0^2 r^2}{4}\right).$$

Рассмотрим радиальную функцию Эйри из правой части равенства (3.13) для случая $b = 1$ и $3^{2/3}c = a'_1$. Аппроксимируя ее гауссовой функцией по методу наименьших квадратов (см. рис. 3.4):

$$\text{Ai}\left(a'_1 + \frac{2r^2}{3^{4/3}}\right) \approx \text{Ai}(a'_1) \exp\left(-\tilde{b} \frac{2r^2}{3^{4/3}}\right),$$

получаем $\tilde{b} \approx 0.570$. Поскольку аппроксимация происходит в Фурье-плоскости, то

$$\frac{w_0^2}{4} = \frac{2\tilde{b}}{3^{4/3}} \quad \Rightarrow \quad w_0 \approx 1.0272.$$

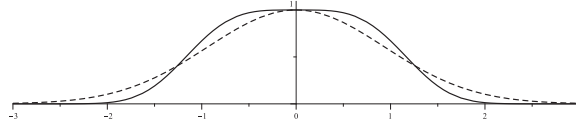


Рис. 3.4. Сравнение радиальных профилей нормированной функции Эйри $\frac{\text{Ai}(a'_1 + r^2)}{\text{Ai}(a'_1)}$ и её приближения гауссовой функцией.

Как оказалось, это значение ширины гауссова пучка является наилучшим для вычисления $\mathbf{FR}_l[\text{tAi}(\mathbf{p}; 1, c)](\mathbf{r})$ и при остальных значениях параметра смещения c , т.е. требует минимального числа членов в обрезанной версии ряда (3.14) для получения приемлемой точности — достаточно было просуммировать те члены ряда, которые удовлетворяют условию $0 \leq n, m \leq 25$. Для простоты в компьютерных экспериментах было использовано значение $w_0 = 1$.

3.3 Обобщённые три-Эйри пучки

Рассмотрим задачу вычисления преобразования Фурье от произведения трех функций Эйри с линейными аргументами общего вида:

$$F(\mathbf{r}, \mathbf{M}) = \mathcal{F}[\text{tAi}(\mathbf{p}; \mathbf{M})](\mathbf{r}) = \mathcal{F}\left[\prod_{n=1}^3 \text{Ai}(a_n \xi + b_n \eta + c_n)\right](\mathbf{r}).$$

Здесь все девять параметров собраны в (3×3) -матрицу для краткости:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}.$$

В качестве отправной точки будем использовать одномерный интеграл Фурье [48, Eq.(3.121)]

$$\int_{\mathbb{R}} e^{ibx} \text{Ai}(Ax + B) \text{Ai}(Cx + D) dx = \frac{1}{\sqrt[3]{|A^3 - C^3|}} e^{ic_0} \text{Ai}(c_1), \quad (3.15)$$

$$c_0 = -\frac{b(A^2B - C^2D)}{A^3 - C^3} - \frac{b^3(A^3 + C^3)}{3(A^3 - C^3)^2}, \quad c_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{A^3 - C^3}} \left(AD - BC - \frac{b^2 AC}{A^3 - C^3} \right).$$

Рассмотрим двумерный аналог формулы (3.15) и вычислим интеграл

$$F_4 = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{i(x\xi + y\eta)} \text{Ai}(a_1\xi + b_1\eta + c_1) \text{Ai}(a_2\xi + b_2\eta + c_2) \text{Ai}(a_3\xi + b_3\eta + c_3) d\xi d\eta,$$

полагая, что параметры подобраны так, что интеграл сходится.

Не изменяя общности, можно считать, что $b_1 > 0$. Делая замену $\eta \rightarrow \eta - \frac{a_1}{b_1} \xi$, запишем F_4 в виде повторного интеграла, чтобы дважды использовать равенство (3.15):

$$\begin{aligned} F_4 &= \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(i\left[x - \frac{a_1}{b_1} y\right]\xi + iy\eta\right) \text{Ai}(b_1\eta + c_1) \times \\ &\quad \times \text{Ai}\left(\left[a_2 - \frac{a_1}{b_1} b_2\right]\xi + b_2\eta + c_2\right) \text{Ai}\left(\left[a_3 - \frac{a_1}{b_1} b_3\right]\xi + b_3\eta + c_3\right) d\xi d\eta = \\ &= b_1 \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(i[b_1x - a_1y]\xi + iy\eta) \text{Ai}(b_1\eta + c_1) \times \\ &\quad \times \text{Ai}([b_1a_2 - a_1b_2]\xi + b_2\eta + c_2) \text{Ai}([b_1a_3 - a_1b_3]\xi + b_3\eta + c_3) d\xi d\eta = \\ &= b_1 \int_{\mathbb{R}} e^{iy\eta} \text{Ai}(b_1\eta + c_1) d\eta \int_{\mathbb{R}} e^{i(b_1x - a_1y)\xi} \times \\ &\quad \times \text{Ai}([b_1a_2 - a_1b_2]\xi + b_2\eta + c_2) \text{Ai}([b_1a_3 - a_1b_3]\xi + b_3\eta + c_3) d\xi \ominus \end{aligned}$$

Исходя из вида интеграла по $d\xi$ и симметричного вхождения параметров a_n и b_n в F_4 , введём обозначения: $R_n = b_nx - a_ny$ при $n = 1, 2, 3$, и

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Тогда внутренний интеграл примет вид

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}} e^{iR_1\xi} \text{Ai}(-\Delta_3\xi + b_2\eta + c_2) \text{Ai}(\Delta_2\xi + b_3\eta + c_3) d\xi = \\ &= \frac{1}{|\Delta_3^3 + \Delta_2^3|^{1/3}} \exp\left(iR_1 \frac{\Delta_3^2(b_2\eta + c_2) - \Delta_2^2(b_3\eta + c_3)}{\Delta_3^3 + \Delta_2^3} + iR_1^3 \frac{\Delta_3^3 - \Delta_2^3}{3(\Delta_3^3 + \Delta_2^3)^2}\right) \times \\ &\quad \times \text{Ai}\left(\frac{\Delta_3(b_3\eta + c_3) + \Delta_2(b_2\eta + c_2)}{(\Delta_3^3 + \Delta_2^3)^{1/3}} + R_1^2 \frac{\Delta_3\Delta_2}{(\Delta_3^3 + \Delta_2^3)^{4/3}}\right). \end{aligned}$$

Возвращаемся к F_4 :

$$\begin{aligned} &\ominus \frac{b_1}{|\Delta_3^3 + \Delta_2^3|^{1/3}} \exp\left(iR_1 \frac{\Delta_3^2c_2 - \Delta_2^2c_3}{\Delta_3^3 + \Delta_2^3} + iR_1^3 \frac{\Delta_3^3 - \Delta_2^3}{3(\Delta_3^3 + \Delta_2^3)^2}\right) \times \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}} \exp\left(i\eta\left[y + R_1 \frac{\Delta_3^2b_2 - \Delta_2^2b_3}{\Delta_3^3 + \Delta_2^3}\right]\right) \text{Ai}(b_1\eta + c_1) \times \\ &\quad \times \text{Ai}\left(\frac{\Delta_3b_3 + \Delta_2b_2}{(\Delta_3^3 + \Delta_2^3)^{1/3}} \eta + \frac{\Delta_3c_3 + \Delta_2c_2}{(\Delta_3^3 + \Delta_2^3)^{1/3}} + R_1^2 \frac{\Delta_3\Delta_2}{(\Delta_3^3 + \Delta_2^3)^{4/3}}\right) d\eta \ominus \end{aligned}$$

упрощаем коэффициенты при η в экспоненте и второй функции Эйри и, делая

замену $b_1\eta \rightarrow \eta$, получаем

$$\begin{aligned} & \ominus \frac{1}{|\Delta_3^3 + \Delta_2^3|^{1/3}} \exp\left(iR_1 \frac{\Delta_3^2 c_2 - \Delta_2^2 c_3}{\Delta_3^3 + \Delta_2^3} + iR_1^3 \frac{\Delta_3^3 - \Delta_2^3}{3(\Delta_3^3 + \Delta_2^3)^2}\right) \times \\ & \quad \times \int_{\mathbb{R}} \exp\left(i\eta \frac{\Delta_3^2 R_2 - \Delta_2^2 R_3}{\Delta_3^3 + \Delta_2^3}\right) \text{Ai}(\eta + c_1) \times \\ & \quad \times \text{Ai}\left(\frac{-\Delta_1 \eta}{(\Delta_3^3 + \Delta_2^3)^{1/3}} + \frac{\Delta_3 c_3 + \Delta_2 c_2}{(\Delta_3^3 + \Delta_2^3)^{1/3}} + R_1^2 \frac{\Delta_3 \Delta_2}{(\Delta_3^3 + \Delta_2^3)^{4/3}}\right) d\eta = \\ & = \frac{1}{|\Delta|^{1/3}} e^{ip_1 + ip_3} \text{Ai}(p_0 + p_2), \end{aligned}$$

где Δ — константа и p_n — однородные полиномы от x, y степени n .

Преобразуя составляющие итоговой формулы, запишем окончательный ответ:

$$F_4 = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{i(x\xi + y\eta)} \prod_{1 \leq n \leq 3} \text{Ai}(a_n \xi + b_n \eta + c_n) d\xi d\eta = \frac{1}{|\Delta|^{1/3}} e^{ip_1 + ip_3} \text{Ai}(p_0 + p_2), \quad (3.16)$$

где используемые в итоговом выражении параметры

$$\begin{aligned} p_0 &= \frac{1}{\Delta^{1/3}} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \quad p_1 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \Delta_1^2 & \Delta_2^2 & \Delta_3^2 \\ R_1 & R_2 & R_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \quad p_2 = \frac{\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3}{\Delta^{4/3}} \sum_{1 \leq n \leq 3} \frac{R_n^2}{\Delta_n}, \\ p_3 &= \frac{1}{3\Delta^2} \left\{ \begin{vmatrix} \Delta_1^3 & \Delta_2^3 & \Delta_3^3 \\ R_1^3 & R_2^3 & R_3^3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \prod_{1 \leq m < n \leq 3} (R_m \Delta_n - R_n \Delta_m) \right\}, \quad \Delta = \Delta_1^3 + \Delta_2^3 + \Delta_3^3 \end{aligned}$$

выражены в терминах вспомогательных величин:

$$R_n = b_n x - a_n y, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Пусть теперь произведение функций Эйри выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} & \text{Ai}(\xi + c_1) \text{Ai}(\xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha + c_2) \text{Ai}(\xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha + c_3) = \\ & = \text{Ai}(\text{Re } \zeta + c_1) \text{Ai}(\text{Re}[\zeta e^{-i\alpha}] + c_2) \text{Ai}(\text{Re}[\zeta e^{i\alpha}] + c_3) \quad (\text{здесь } \zeta = \xi + i\eta). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \quad b_1 = 0, \quad a_2 = a_3 = \cos \alpha, \quad b_2 = -b_3 = \sin \alpha, \\ \Delta_1 &= -2 \cos \alpha \sin \alpha, \quad \Delta_2 = \Delta_3 = \sin \alpha, \quad \Delta = 2 \sin^3 \alpha (1 - 4 \cos^3 \alpha), \\ R_1 &= -y, \quad R_2 = x \sin \alpha - y \cos \alpha, \quad R_3 = -x \sin \alpha - y \cos \alpha, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_0 &= \frac{c_1 \Delta_1 + (c_2 + c_3) \sin \alpha}{\sin \alpha (2[1 - 4 \cos^3 \alpha])^{1/3}} = \frac{c_2 + c_3 - 2c_1 \cos \alpha}{(2[1 - 4 \cos^3 \alpha])^{1/3}}, \\
p_1 &= \frac{x(2 \cos^2 \alpha [c_2 + c_3] - c_1)}{1 - 4 \cos^3 \alpha} + \frac{y(c_3 - c_2)}{2 \sin \alpha}, \\
p_2 &= \frac{1}{(2[1 - 4 \cos^3 \alpha])^{4/3}} \left(-4x^2 \cos \alpha + \frac{(1 - 4 \cos^3 \alpha)y^2}{\sin^2 \alpha} \right), \\
p_3 &= \frac{x}{3 \sin^2 \alpha (1 - 4 \cos^3 \alpha)^2} (3y^2 \cos^2 \alpha [1 - 4 \cos^3 \alpha] - x^2 \sin^2 \alpha [1 + 4 \cos^3 \alpha]).
\end{aligned}$$

Наиболее интересный случай — это чисто радиальный аргумент функции Эйри, что приводит к уравнению

$$-4 \cos \alpha = \frac{1 - 4 \cos^3 \alpha}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow 4 \cos^3 \alpha - 4 \cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha) = 1.$$

Делая замену $t = 2 \cos \alpha$, получаем

$$t^3 - 2t - 1 = (t + 1)(t^2 - t - 1) = 0 \Rightarrow t = -1, \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}.$$

Рассмотрим все три случая по отдельности.

- Если $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, то

$$\begin{aligned}
\cos \alpha &= -\frac{1}{2}, \quad \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad 1 - 4 \cos^3 \alpha = \frac{3}{2}, \quad \Delta = 3 \sin^3 \alpha = \frac{3^{5/2}}{2^3}, \\
p_0 &= \frac{c_1 + c_2 + c_3}{3^{1/3}}, \quad p_1 = \frac{x(c_2 + c_3 - 2c_1) + y\sqrt{3}(c_3 - c_2)}{3}, \quad p_2 = \frac{2(x^2 + y^2)}{3^{4/3}}, \quad p_3 = \frac{2(3xy^2 - x^3)}{3^3}, \\
\iint_{\mathbb{R}^2} e^{i(x\xi + y\eta)} \text{Ai}(\text{Re} \zeta + c_1) \text{Ai}(\text{Re}[\omega \zeta] + c_2) \text{Ai}(\text{Re}[\bar{\omega} \zeta] + c_3) d\xi d\eta &= \frac{2}{3^{5/6}} e^{ip_1 + ip_3} \text{Ai}(p_0 + p_2).
\end{aligned}$$

Поскольку коэффициент $[r^2]p_2$ положителен, то выбирая различные c_k можно получать двумерные поля из $L_2(\mathbb{R}^2)$, обладающие радиальной интенсивностью и конечным набором нулевых линий в виде концентрических окружностей.

В частности, при выборе $c_1 = c_2 = c_3 = c$ получаем

$$\text{Ai}(\text{Re} \zeta + c) \text{Ai}(\text{Re}[\omega \zeta] + c) \text{Ai}(\text{Re}[\bar{\omega} \zeta] + c) \rightarrow \text{Ai}\left(3^{2/3}c + \frac{2(x^2 + y^2)}{3^{4/3}}\right).$$

На рис. 3.5 показаны три-Эйри функция и её фурье-образ, когда $3^{2/3}c = a'_1, a_1, a'_4, a_4$.

Здесь a_n и a'_n — нули $\text{Ai}(x)$ и $\text{Ai}'(x)$ соответственно.

$$\begin{aligned}
a_1 &\approx -2.3381074, & a_2 &\approx -4.0879494, & a_3 &\approx -5.5205598, & a_4 &\approx -6.7867080, \\
a'_1 &\approx -1.0187929, & a'_2 &\approx -3.2481975, & a'_3 &\approx -4.8200992, & a'_4 &\approx -6.1633073.
\end{aligned}$$

Численные значения нулей были взяты из [47, стр. 294].

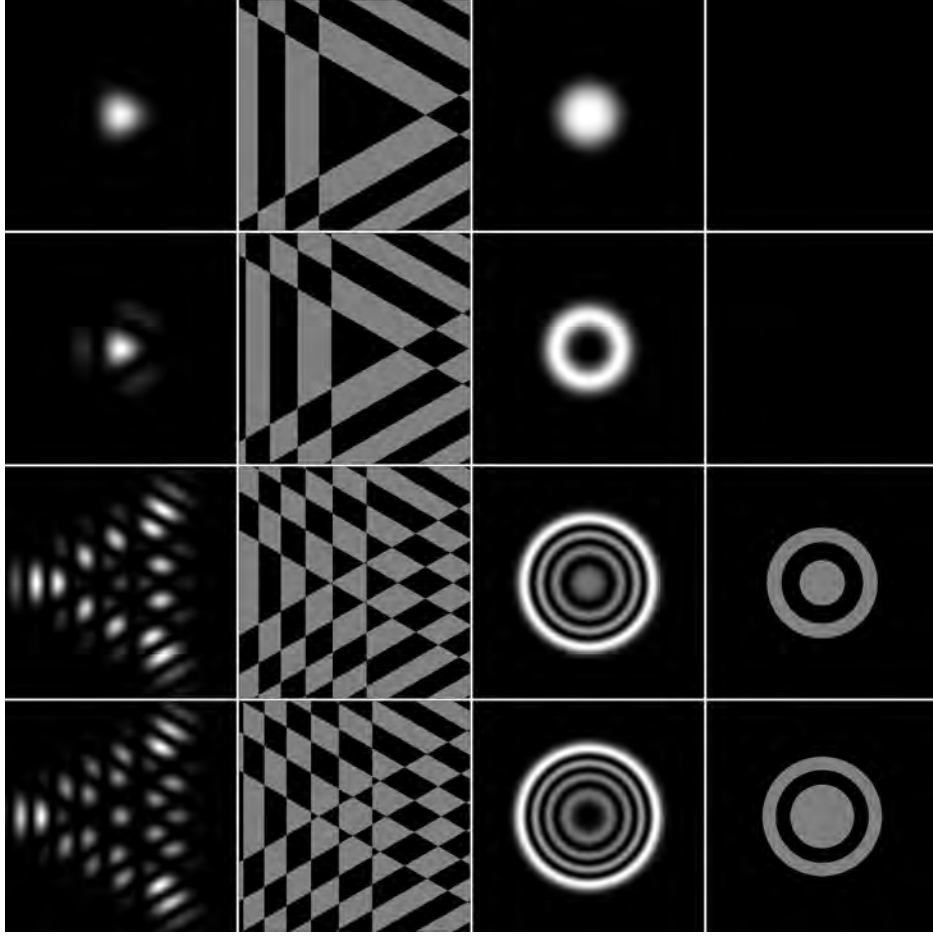


Рис. 3.5. Интенсивность и фаза три-Эйри функции (два кадра слева) и её фурье-образа (два кадра справа), когда параметр $3^{2/3}c$ принимает значения a'_1, a_1, a'_4, a_4 (сверху вниз)

- Если $\alpha = \frac{\pi}{5}$, то

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{1+\sqrt{5}}{4}, \quad \cos^2 \alpha = \frac{3+\sqrt{5}}{8}, \quad 1 - 4 \cos^3 \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}, \\ \sin \alpha &= \frac{1+\sqrt{5}}{4} \sqrt{5-2\sqrt{5}}, \quad \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}} \sqrt{5+2\sqrt{5}}, \quad \Delta = -\sqrt{5} \sin^3 \alpha, \\ p_0 &= -\frac{1}{5^{1/6}} \left(c_2 + c_3 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} c_1 \right), \\ p_1 &= \frac{x[4c_1 - (3+\sqrt{5})(c_2+c_3)] + y(c_3-c_2)\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2\sqrt{5}}, \\ p_2 &= -\frac{(1+\sqrt{5})(x^2+y^2)}{5^{2/3}}, \quad p_3 = -\frac{2x(x^2[4+\sqrt{5}] + 3y^2[2+\sqrt{5}])}{15}, \\ \iint_{\mathbb{R}^2} e^{i(x\xi+y\eta)} \prod_{1 \leq n \leq 3} \text{Ai}(\text{Re}[e^{i(n-2)\pi/5}\zeta] + c_n) d\xi d\eta &= \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{5^{2/3}} e^{ip_1+ip_3} \text{Ai}(p_0+p_2). \end{aligned}$$

В данном случае, в отличие от предыдущего, $[r^2]p_2 < 0$, поэтому итоговое поле не лежит в $L_2(\mathbb{R}^2)$ и имеет бесконечное число нулевых линий.

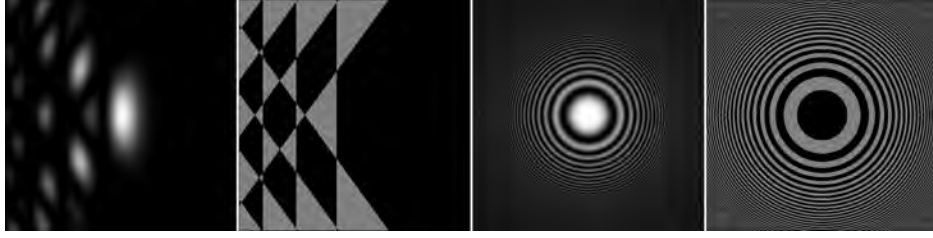


Рис. 3.6. три-Эйри функция с бесконечной энергией и её фурье-образ

На рис. 3.6 показан пример такого преобразования, в котором коэффициенты c_k выбраны следующим образом: $c_2 = c_3 = c$, $c_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}c$ и $5^{1/3}c = a'_1$. Это позволило занулить полином p_1 и сформировать максимальный пик интенсивности в центре:

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathbb{R}^2} e^{i(x\xi+y\eta)} \text{Ai}\left(\text{Re}\zeta + \frac{3+\sqrt{5}}{2}c\right) \text{Ai}\left(\text{Re}[e^{\pi i/5}\zeta] + c\right) \text{Ai}\left(\text{Re}[e^{-\pi i/5}\zeta] + c\right) d\xi d\eta = \\ & = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{5^{2/3}} \exp\left(-\frac{2ix}{15}(x^2[4+\sqrt{5}] + 3y^2[2+\sqrt{5}])\right) \text{Ai}\left(5^{1/3}c - \frac{(1+\sqrt{5})(x^2+y^2)}{5^{2/3}}\right). \end{aligned}$$

- Если $\alpha = \frac{3\pi}{5}$, то

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= -\frac{\sqrt{5}-1}{4}, \quad \cos^2 \alpha = \frac{3-\sqrt{5}}{8}, \quad 1-4\cos^3 \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}, \\ \sin \alpha &= \frac{\sqrt{5}-1}{4} \sqrt{5+2\sqrt{5}}, \quad \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}} \sqrt{5-2\sqrt{5}}, \quad \Delta = \sqrt{5} \sin^3 \alpha, \end{aligned}$$

$$p_0 = \frac{1}{5^{1/6}} \left(c_2 + c_3 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} c_1 \right),$$

$$p_1 = \frac{x[(3-\sqrt{5})(c_2+c_3) - 4c_1] + y(c_3-c_2)\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2\sqrt{5}},$$

$$p_2 = \frac{(\sqrt{5}-1)(x^2+y^2)}{5^{2/3}}, \quad p_3 = \frac{2x(3y^2[\sqrt{5}-2] - x^2[4-\sqrt{5}])}{15},$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{i(x\xi+y\eta)} \prod_{1 \leq n \leq 3} \text{Ai}(\text{Re}[e^{i(n-2)3\pi/5}\zeta] + c_n) d\xi d\eta = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{5^{2/3}} e^{ip_1+ip_3} \text{Ai}(p_0 + p_2).$$

Итак, фурье-образ (а значит и исходное три-Эйри поле) обладает конечной энергией, поскольку $[r^2]p_2 > 0$.

Как и прежде, выберем коэффициенты c_k таким образом, чтобы занулить полином p_1 : $c_2 = c_3 = c$, $c_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}c$. Тогда

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathbb{R}^2} e^{i(x\xi+y\eta)} \text{Ai}\left(\text{Re}\zeta + \frac{3-\sqrt{5}}{2}c\right) \text{Ai}\left(\text{Re}[e^{3\pi i/5}\zeta] + c\right) \text{Ai}\left(\text{Re}[e^{-3\pi i/5}\zeta] + c\right) d\xi d\eta = \\ & = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{5^{2/3}} \exp\left(\frac{2ix}{15}(3y^2[\sqrt{5}-2] - x^2[4-\sqrt{5}])\right) \text{Ai}\left(5^{1/3}c + \frac{(\sqrt{5}-1)(x^2+y^2)}{5^{2/3}}\right). \end{aligned}$$

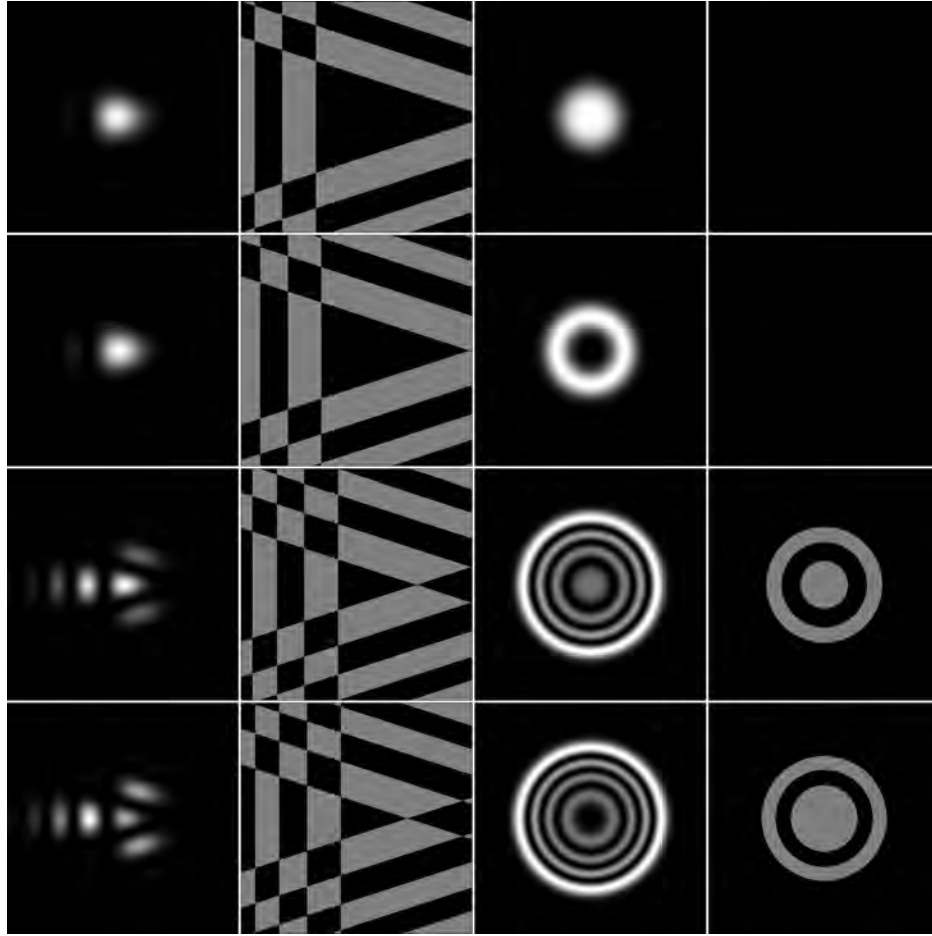


Рис. 3.7. три-Эйри функция и её фурье-образ для случаев $5^{1/3}c = a'_1, a_1, a'_4, a_4$ (сверху вниз)

На рис. 3.7 показаны примеры преобразования

$$\text{Ai}\left(\text{Re}\zeta + \frac{3-\sqrt{5}}{2}c\right)\text{Ai}\left(\text{Re}[e^{3\pi i/5}\zeta] + c\right)\text{Ai}\left(\text{Re}[e^{-3\pi i/5}\zeta] + c\right) \rightarrow \text{Ai}\left(5^{1/3}c + \frac{(\sqrt{5}-1)(x^2+y^2)}{5^{2/3}}\right),$$

когда $5^{1/3}c = a'_1, a_1, a'_4, a_4$, при этом размеры кадра выбраны такими же, что и для рис. 3.5.

3.4 Вычисление функции Вигнера три-Эйри пучков

Функция Вигнера (the Wigner distribution function, WDF) является примером одного из самых известных операторов, используемых в квантовой механике с 1932 года [77]. В оптике эта функция применяется для одновременного описания

объекта и его Фурье-образа. Для двумерного когерентного светового поля, заданного своей комплексной амплитудой $F(\mathbf{r})$, функция Вигнера является функцией четырёх переменных и определяется следующим выражением

$$W[f](\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-i\langle \mathbf{k}, \boldsymbol{\rho} \rangle} F\left(\mathbf{r} + \frac{\boldsymbol{\rho}}{2}\right) \overline{F}\left(\mathbf{r} - \frac{\boldsymbol{\rho}}{2}\right) d^2\boldsymbol{\rho}, \quad (3.17)$$

где $\mathbf{r} = (x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$, $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$, $\boldsymbol{\rho} = (\xi, \eta)$ — двумерные векторы и $\langle \bullet, \bullet \rangle$ — скалярное произведение векторов на плоскости.

Известны следующие свойства функции Вигнера [78, 79]:

1. Функция Вигнера вещественна, но может принимать отрицательные значения. По этой причине её иногда называют псевдовероятностным распределением.
2. Функция Вигнера поля $F(\mathbf{r})$ определяется по Фурье-образу $\mathcal{F}[F](\mathbf{k})$ следующим выражением

$$W[f](\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{i\langle \mathbf{r}, \boldsymbol{\rho} \rangle} \mathcal{F}[f]\left(\mathbf{k} + \frac{\boldsymbol{\rho}}{2}\right) \overline{\mathcal{F}[f]}\left(\mathbf{k} - \frac{\boldsymbol{\rho}}{2}\right) d\boldsymbol{\rho}.$$

3. Функция Вигнера связана с интенсивностями исходного поля и его Фурье-образа соотношениями:

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} W_F(\mathbf{r}, \mathbf{k}) d\mathbf{k} = |F(\mathbf{r})|^2, \quad \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} W_F(\mathbf{r}, \mathbf{k}) d\mathbf{r} = |\mathcal{F}[F](\mathbf{k})|^2.$$

4. Световое поле $F(\mathbf{r})$ может быть восстановлено по своей функции Вигнера с точностью до постоянного множителя:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-i\langle \mathbf{r}, \mathbf{k} \rangle} W_F\left(\frac{\mathbf{r}}{2}, \mathbf{k}\right) d\mathbf{k} &= F(\mathbf{r}) \overline{F(\mathbf{0})}, \\ \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{i\langle \mathbf{r}, \mathbf{k} \rangle} W_F\left(\mathbf{r}, \frac{\mathbf{k}}{2}\right) d\mathbf{r} &= \mathcal{F}[F](\mathbf{k}) \overline{\mathcal{F}[F](\mathbf{0})}. \end{aligned}$$

5. Пусть $F_0(\mathbf{r})$ является начальным распределением некоторого светового поля, распространяющегося в зоне Френеля:

$$F(\mathbf{r}, l) = \mathbf{FR}_l[F_0(\boldsymbol{\rho})](\mathbf{r}) = \frac{k}{2\pi i l} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(\frac{ik}{2l} |\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}|^2\right) F_0(\boldsymbol{\rho}) d\boldsymbol{\rho}.$$

Тогда

$$W[F](\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}) = W[F_0]\left(\mathbf{r} - \frac{l\boldsymbol{\rho}}{k}, \boldsymbol{\rho}\right). \quad (3.18)$$

6. Пусть поле $F_0(\mathbf{r})$ проходит через линейную оптическую систему, которая определяется вещественной 4×4 -матрицей $\mathbf{ABCD}$. Известно, что поле на выходе системы выражается через исходное поле F_0 посредством интеграла Коллинза:

$$F(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi i \sqrt{\det \mathbf{B}}} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(\frac{i}{2} [\langle \boldsymbol{\rho}, \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} \boldsymbol{\rho} \rangle + \langle \mathbf{r}, \mathbf{D} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{r} \rangle - 2 \langle \mathbf{B}^{-1} \mathbf{r}, \boldsymbol{\rho} \rangle]\right) F_0(\boldsymbol{\rho}) d\boldsymbol{\rho}. \quad (3.19)$$

Тогда функции Вигнера полей на входе и выходе оптической системы связаны соотношением

$$W[F](\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}) = W[F_0](\mathbf{D}^T \mathbf{r} - \mathbf{B}^T \boldsymbol{\rho}, -\mathbf{C}^T \mathbf{r} + \mathbf{A}^T \boldsymbol{\rho}). \quad (3.20)$$

Функция Вигнера используется для восстановления сигналов, а именно:

- Для 1D полей существуют оптические схемы, которые выводят на экран 2D функцию Вигнера.
- Радиально симметричные 2D поля можно восстановить по некоторым 2D сечениям функции Вигнера, если они проходят через центр координат $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^4$.
- Для полей $F(-\mathbf{r}) = \pm F(\mathbf{r})$ функцию Вигнера можно построить с помощью дробного преобразования Фурье (α, β) над интенсивностью поля в фурье-плоскости.
- В общем случае 4D функция Вигнера не восстанавливается по 2D сечениям и используются методы типа щелевого сканирования 2D поля и использования результатов 1D случая.

Функция Вигнера известна для многих световых полей, например, для пучков Эрмита–Гаусса [80, 81], Лагерра–Гаусса [82, 83] и Эрмита–Лагерра–Гаусса [84].

Для три-Эйри пучка

$$\text{tAi}(\mathbf{r}; c) = \text{Ai}\left(\frac{x\sqrt{3}-y}{2} + c\right) \text{Ai}\left(-\frac{x\sqrt{3}+y}{2} + c\right) \text{Ai}(y+c),$$

наиболее привлекательным способом вычислить функцию Вигнера поначалу кажется использование фурье-образа, интенсивность которого радиально симмет-

рична. Однако получающийся в итоге двойной интеграл слишком труден:

$$W[t\text{Ai}](\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{1}{3^{5/3}\pi^2} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{i\langle \mathbf{r}, \boldsymbol{\rho} \rangle} \cdot \exp\left(-\frac{2i}{9} \left[2k_x k_y \xi + [k_x^2 - k_y^2]\eta + \frac{3\xi^2\eta - \eta^3}{12}\right]\right) \times \\ \times \text{Ai}\left(3^{2/3}c + \frac{2}{3^{4/3}}\left[\mathbf{k}^2 + \langle \mathbf{k}, \boldsymbol{\rho} \rangle + \frac{\boldsymbol{\rho}^2}{4}\right]\right) \text{Ai}\left(3^{2/3}c + \frac{2}{3^{4/3}}\left[\mathbf{k}^2 - \langle \mathbf{k}, \boldsymbol{\rho} \rangle + \frac{\boldsymbol{\rho}^2}{4}\right]\right) d\boldsymbol{\rho}. \quad (3.21)$$

Традиционный путь — использование определения (3.17) — сводит вычисление функции Вигнера к вычислению 2D преобразования Фурье от произведения шести функций Эйри:

$$W[t\text{Ai}](\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-ik_y\eta} \text{Ai}\left(y + \frac{\eta}{2} + c\right) \text{Ai}\left(y - \frac{\eta}{2} + c\right) d\eta \times \\ \times \int_{\mathbb{R}} e^{-ik_x\xi} \text{Ai}\left(\frac{x\sqrt{3}-y}{2} + \frac{\xi\sqrt{3}-\eta}{4} + c\right) \text{Ai}\left(\frac{x\sqrt{3}-y}{2} - \frac{\xi\sqrt{3}-\eta}{4} + c\right) \times \\ \times \text{Ai}\left(-\frac{x\sqrt{3}+y}{2} - \frac{\xi\sqrt{3}+\eta}{4} + c\right) \text{Ai}\left(-\frac{x\sqrt{3}+y}{2} + \frac{\xi\sqrt{3}+\eta}{4} + c\right) d\xi \ominus$$

Сделаем замену $\xi = s + 2x$, $\eta = t + 2y$:

$$\ominus \frac{e^{-2i\langle \mathbf{r}, \mathbf{k} \rangle}}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-ik_y t} \text{Ai}\left(2y + c + \frac{t}{2}\right) \text{Ai}\left(c - \frac{t}{2}\right) dt \times \\ \times \int_{\mathbb{R}} e^{-ik_x s} \text{Ai}\left(x\sqrt{3} - y + \frac{s\sqrt{3}-t}{4} + c\right) \text{Ai}\left(-\frac{s\sqrt{3}-t}{4} + c\right) \times \\ \times \text{Ai}\left(-x\sqrt{3} - y - \frac{s\sqrt{3}+t}{4} + c\right) \text{Ai}\left(\frac{s\sqrt{3}+t}{4} + c\right) ds. \quad (3.22)$$

Чтобы вычислить интеграл по ds , воспользуемся найденным ранее интегралом (3.16) и рассмотрим его обобщение:

$$F = \iiint_{\mathbb{R}^3} e^{i(x\xi + y\eta + z\zeta)} \prod_{1 \leq n \leq 4} \text{Ai}(a_n\xi + b_n\eta + c_n\zeta + d_n) d\xi d\eta d\zeta, \quad (3.23)$$

полагая, что параметры a_n, b_n, c_n, d_n подобраны так, что интеграл сходится. Не изменяя общности можно считать, что $c_4 \neq 0$ (случай $c_4 = 0$ в итоговом выражении добавится автоматически). Тогда, делая замену $\zeta \rightarrow \zeta - \frac{a_4}{c_4}\xi - \frac{b_4}{c_4}\eta$, преобразуем последнюю из функций Эйри

$$\text{Ai}(a_4\xi + b_4\eta + c_4\zeta + d_4) \rightarrow \text{Ai}(c_4\zeta + d_4),$$

что позволяет свести интеграл F к повторному и применить формулу (3.16).

Все вычисления не представляют особых трудностей, кроме громоздких преобразований. Итоговый ответ получается следующий:

$$\begin{aligned}
& \iiint_{\mathbb{R}^3} e^{i(x\xi+y\eta+z\zeta)} \prod_{1 \leq n \leq 4} \text{Ai}(a_n \xi + b_n \eta + c_n \zeta + d_n) d\xi d\eta d\zeta = \\
& = \frac{1}{|\mathcal{D}|^{1/3}} \exp\left(\frac{i\tilde{P}_1}{\mathcal{D}} + \frac{i\tilde{P}_3}{3\mathcal{D}^2}\right) \text{Ai}\left(\frac{\tilde{P}_0}{\mathcal{D}^{1/3}} + \frac{\tilde{P}_2}{\mathcal{D}^{4/3}}\right), \quad (3.24)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{mn} &= \begin{vmatrix} a_m & b_m & c_m \\ a_n & b_n & c_n \\ x & y & z \end{vmatrix}, \quad \tilde{P}_0 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}, \quad \mathcal{D} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ \mathcal{D}_1^2 & \mathcal{D}_2^2 & \mathcal{D}_3^2 & \mathcal{D}_4^2 \end{vmatrix} = \\
&= - \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_4 \\ b_2 & b_3 & b_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix}^3 + \begin{vmatrix} a_3 & a_4 & a_1 \\ b_3 & b_4 & b_1 \\ c_3 & c_4 & c_1 \end{vmatrix}^3 - \begin{vmatrix} a_4 & a_1 & a_2 \\ b_4 & b_1 & b_2 \\ c_4 & c_1 & c_2 \end{vmatrix}^3 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}^3 \\
&\stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{D}_1^3 + \mathcal{D}_2^3 + \mathcal{D}_3^3 + \mathcal{D}_4^3, \\
\tilde{P}_1 &= x \begin{vmatrix} \mathcal{D}_1^2 & \mathcal{D}_2^2 & \mathcal{D}_3^2 & \mathcal{D}_4^2 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \mathcal{D}_1^2 & \mathcal{D}_2^2 & \mathcal{D}_3^2 & \mathcal{D}_4^2 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ \mathcal{D}_1^2 & \mathcal{D}_2^2 & \mathcal{D}_3^2 & \mathcal{D}_4^2 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}, \\
\tilde{P}_2 &= \mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2 \mathcal{D}_3 \mathcal{D}_4 \sum_{1 \leq m < n \leq 4} \frac{\mathcal{R}_{mn}^2}{\mathcal{D}_m \mathcal{D}_n}, \\
\tilde{P}_3 &= -\mathcal{D}_4^3(\mathcal{R}_{12}^3 + \mathcal{R}_{23}^3 + \mathcal{R}_{31}^3) - 3\mathcal{D}_4^3(\mathcal{R}_{14}^3 + \mathcal{R}_{24}^3 + \mathcal{R}_{34}^3) - \\
&\quad - 6(\mathcal{D}_2 \mathcal{R}_{12} \cdot \mathcal{D}_4^2 \mathcal{R}_{14}^2 + \mathcal{D}_3 \mathcal{R}_{23} \cdot \mathcal{D}_4^2 \mathcal{R}_{24}^2 + \mathcal{D}_1 \mathcal{R}_{31} \cdot \mathcal{D}_4^2 \mathcal{R}_{34}^2) + \\
&\quad + (\mathcal{D}_1^3 + \mathcal{D}_2^3 + \mathcal{D}_3^3)(\mathcal{R}_{12}^3 + \mathcal{R}_{23}^3 + \mathcal{R}_{31}^3) - \{\mathcal{R}_{14}^3[\mathcal{D}_1^3 + \mathcal{D}_3^3 - \mathcal{D}_2^3] + \\
&\quad + \mathcal{R}_{24}^3[\mathcal{D}_1^3 + \mathcal{D}_2^3 - \mathcal{D}_3^3] + \mathcal{R}_{34}^3[\mathcal{D}_2^3 + \mathcal{D}_3^3 - \mathcal{D}_1^3] + \\
&\quad + 2[\mathcal{D}_1^2 \mathcal{R}_{14}^2 \mathcal{D}_2 \mathcal{R}_{24} + \mathcal{D}_2^2 \mathcal{R}_{24}^2 \mathcal{D}_3 \mathcal{R}_{34} + \mathcal{D}_3^2 \mathcal{R}_{34}^2 \mathcal{D}_1 \mathcal{R}_{14}]\}.
\end{aligned}$$

Отметим, что сходство структур полиномов p_n в преобразованиях Фурье для три-Эйри и 4-Эйри функций имеет место только при $n = 0, 1, 2$. Для p_3 сходство пока не найдено.

Сделаем теперь в (3.24) замену $c_n \rightarrow c_n \varepsilon$, устремим $\varepsilon \rightarrow 0$ и проинтегрируем по dz :

$$\begin{aligned}
& 2\pi \iint_{\mathbb{R}^2} e^{i(x\xi+y\eta)} \prod_{1 \leq n \leq 4} \text{Ai}(a_n \xi + b_n \eta + d_n) d\xi d\eta = \\
& = \frac{1}{|\mathcal{D}|^{1/3}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(\frac{i\tilde{P}_1}{\mathcal{D}} + \frac{i\tilde{P}_3}{3\mathcal{D}^2}\right) \text{Ai}\left(\frac{\tilde{P}_0}{\mathcal{D}^{1/3}} + \frac{\tilde{P}_2}{\mathcal{D}^{4/3}}\right) dz. \quad (3.25)
\end{aligned}$$

Здесь правая часть зависит от четырёх параметров c_n , которые можно использовать как свободные параметры для упрощения интеграла по dz .

Ещё одна аналогичная замена $b_n \rightarrow b_n \varepsilon$ приводит к формуле

$$\begin{aligned} 4\pi^2 \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \prod_{1 \leq n \leq 4} \text{Ai}(a_n \xi + d_n) d\xi = \\ = \frac{1}{|\mathcal{D}|^{1/3}} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(\frac{i\tilde{P}_1}{\mathcal{D}} + \frac{i\tilde{P}_3}{3\mathcal{D}^2}\right) \text{Ai}\left(\frac{\tilde{P}_0}{\mathcal{D}^{1/3}} + \frac{\tilde{P}_2}{\mathcal{D}^{4/3}}\right) dy dz, \end{aligned} \quad (3.26)$$

правая часть которой содержит уже восемь свободных параметров.

Если выбрать эти параметры, стараясь упростить полиномы в правой части как можно больше (т.е. чтобы интеграл удалось найти в явном виде), то можно получить значения некоторых интегралов, содержащих четыре функции Эйри с линейными аргументами. Например, достаточно легко получается интеграл Аспнеса [85]:

$$\int_{\mathbb{R}} \text{Ai}^2\left(\frac{c+t}{2^{2/3}}\right) \text{Ai}^2\left(\frac{c-t}{2^{2/3}}\right) dt = \frac{\text{Ai}_1(2^{2/3}c)}{2^{4/3}\pi}, \quad \text{где} \quad \text{Ai}_1(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_x^\infty \text{Ai}(t) dt,$$

однако вернёмся к функции Вигнера (3.22). Чтобы не путаться в переменных x, y , которые в (3.22) и (3.26) имеют разный смысл, запишем вигнеровские переменные x и y как x и y . Итак,

$$\begin{aligned} a_1 = \frac{1}{4}\sqrt{3}, \quad d_1 = c + x\sqrt{3} - y - \frac{1}{4}t, \quad a_2 = -\frac{1}{4}\sqrt{3}, \quad d_2 = c + \frac{1}{4}t, \\ a_3 = -\frac{1}{4}\sqrt{3}, \quad d_3 = c - x\sqrt{3} - y - \frac{1}{4}t, \quad a_4 = \frac{1}{4}\sqrt{3}, \quad d_4 = c + \frac{1}{4}t. \end{aligned}$$

Наиболее простой способ вычисления функции Вигнера состоит в выборе векторов

$$\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3, b_4) = (1, 1, -1, -1), \quad \mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3, c_4) = (1, -1, 1, -1)$$

ортгоналльных к вектору $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4) \sim (1, -1, -1, 1)$. Тогда, возвращаясь к интегралу по ds в (3.22) и временно переобозначая $-k_x := x$, получаем

$$\begin{aligned} 4\pi^2 \int_{\mathbb{R}} e^{ixs} \text{Ai}\left(x\sqrt{3} - y + \frac{s\sqrt{3} - t}{4} + c\right) \text{Ai}\left(-\frac{s\sqrt{3} - t}{4} + c\right) \times \\ \times \text{Ai}\left(-x\sqrt{3} - y - \frac{s\sqrt{3} + t}{4} + c\right) \text{Ai}\left(\frac{s\sqrt{3} + t}{4} + c\right) ds = \\ = \frac{16}{2^{2/3}\sqrt{3}} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-2ix(x + u\sqrt{3}) + i(t + 2y)v - \frac{8ixuv}{\sqrt{3}}\right) \times \\ \times \text{Ai}\left(2^{4/3}\left[c - \frac{y}{2} + \frac{x^2}{3} + u^2 + v^2\right]\right) du dv. \end{aligned}$$

Интегралы по du и по dv одинаковы и сводятся к интегралу Берри (B18) из статьи [54]:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-2iu\left[x\sqrt{3} + \frac{4xv}{\sqrt{3}}\right]\right) \text{Ai}\left(2^{4/3}\left[c - \frac{y}{2} + \frac{x^2}{3} + u^2 + v^2\right]\right) du = \\ & = \pi \prod_{\varepsilon=\pm 1} \text{Ai}\left(2^{2/3}\left[c - \frac{y}{2} + \frac{x^2}{3} + v^2\right] + \frac{\varepsilon}{2^{1/3}}\left[x\sqrt{3} + \frac{4xv}{\sqrt{3}}\right]\right) = \\ & = \pi \prod_{\varepsilon=\pm 1} \text{Ai}\left(2^{2/3}\left[c + \frac{\varepsilon x\sqrt{3} - y}{2} + \left(v + \frac{\varepsilon x}{\sqrt{3}}\right)^2\right]\right) \stackrel{\text{def}}{=} \pi \text{Ai}_- \text{Ai}_+, \end{aligned}$$

что позволяет свести 1D преобразование Фурье от произведения четырёх линейных функций Эйри к интегралу от двух квадратичных функций Эйри:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{ixs} \text{Ai}_1 \text{Ai}_2 \text{Ai}_3 \text{Ai}_4 ds = \frac{4}{2^{2/3} \pi \sqrt{3}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-2ixx + i(t + 2y)v\right) \text{Ai}_- \text{Ai}_+ dv.$$

Делая замены $\frac{s\sqrt{3}}{4} \rightarrow \frac{s}{2^{2/3}}$, $c \rightarrow \frac{c}{2^{2/3}}$, $2^{1/3}v \rightarrow v$, $\frac{4x}{\sqrt{3}} \rightarrow 2^{2/3}x$, получаем равенство

$$\int_{\mathbb{R}} e^{ixs} \text{Ai}^2\left(\frac{c+s}{2^{2/3}}\right) \text{Ai}^2\left(\frac{c-s}{2^{2/3}}\right) ds = \frac{1}{2^{1/3} \pi} \int_{\mathbb{R}} \text{Ai}\left(c + \left[v + \frac{x}{2}\right]^2\right) \text{Ai}\left(c + \left[v - \frac{x}{2}\right]^2\right) dv, \quad (3.27)$$

которое, очевидно, справедливо в силу формулы Берри (B18):

$$\begin{aligned} & \text{Ai}^2\left(\frac{c+s}{2^{2/3}}\right) \text{Ai}^2\left(\frac{c-s}{2^{2/3}}\right) = \frac{1}{2^{4/3} \pi^2} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-is(u+v)} \text{Ai}(c+u^2) \text{Ai}(c+v^2) du dv \Rightarrow \\ & \int_{\mathbb{R}} e^{ixs} \text{Ai}^2\left(\frac{c+s}{2^{2/3}}\right) \text{Ai}^2\left(\frac{c-s}{2^{2/3}}\right) ds = \frac{1}{2^{1/3} \pi} \iint_{\mathbb{R}^2} \text{Ai}(c+u^2) \text{Ai}(c+v^2) \delta(x-u-v) du dv. \end{aligned}$$

Далее, интеграл по dt в (3.22) также известен — это интеграл, обратный к интегралу Берри (B18):

$$\int_{\mathbb{R}} e^{it(v-k_y)} \text{Ai}\left(2y + c + \frac{t}{2}\right) \text{Ai}\left(c - \frac{t}{2}\right) dt = 2^{2/3} e^{-2iy(v-k_y)} \text{Ai}\left(2^{2/3}[y + c + (v - k_y)^2]\right).$$

И, наконец (вспоминая, что $x := -k_x$), можно записать функцию Вигнера в виде интеграла по dv :

$$\begin{aligned} W[\text{tAi}](\mathbf{r}, \mathbf{k}) &= \frac{e^{-2i\langle \mathbf{r}, \mathbf{k} \rangle}}{4\pi^2} \cdot \frac{16}{2^{2/3} \sqrt{3}} \cdot \frac{2^{2/3} \pi}{4\pi^2} \times \\ & \quad \times \int_{\mathbb{R}} e^{-2ixx + 2iyv - 2iy(v-k_y)} \text{Ai}_- \text{Ai}_+ \text{Ai}\left(2^{2/3}[y + c + (v - k_y)^2]\right) dv = \\ &= \frac{1}{\pi^3 \sqrt{3}} \int_{\mathbb{R}} \text{Ai}\left(2^{2/3}\left[c + \frac{x\sqrt{3} - y}{2} + \left(v - \frac{k_x}{\sqrt{3}}\right)^2\right]\right) \times \\ & \quad \times \text{Ai}\left(2^{2/3}\left[c - \frac{x\sqrt{3} + y}{2} + \left(v + \frac{k_x}{\sqrt{3}}\right)^2\right]\right) \text{Ai}\left(2^{2/3}[c + y + (v - k_y)^2]\right) dv. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Здесь на заключительном этапе были возвращены переменные x, y вместо временно использованных x, y .

Получившееся выражение хоть и громоздко, но является вещественным. Если положить в нём $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ и сравнить с интегралом (3.21), то получим

$$\begin{aligned} W[\text{tAi}](\mathbf{r}, \mathbf{0}) &= \frac{1}{3^{5/3} 4\pi^4} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(i\langle \mathbf{r}, \boldsymbol{\rho} \rangle - i \frac{3\xi^2 \eta - \eta^3}{54}\right) \text{Ai}^2\left(3^{2/3} \left[c + \frac{\boldsymbol{\rho}^2}{18}\right]\right) d\boldsymbol{\rho} = \\ &= \frac{1}{\pi^3 \sqrt{3}} \int_{\mathbb{R}} \text{Ai}\left(2^{2/3} \left[c - \frac{x\sqrt{3} + y}{2} + v^2\right]\right) \text{Ai}\left(2^{2/3} \left[c + \frac{x\sqrt{3} - y}{2} + v^2\right]\right) \times \\ &\quad \times \text{Ai}\left(2^{2/3} [c + y + v^2]\right) dv. \end{aligned}$$

При $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ интеграл слева можно проинтегрировать по полярному углу, если воспользоваться производящей функций для семейства функций Бесселя:

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{x}{2} \left[t - \frac{1}{t}\right]\right) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n(x) t^n \quad \Rightarrow \quad e^{ix \sin \varphi} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n(x) e^{in\varphi} \quad \Rightarrow \\ &\int_0^{2\pi} e^{ix \sin 3\varphi} d\varphi = 2\pi J_0(x). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \text{Left} &= \frac{1}{3^{5/3} 4\pi^4} \int_0^\infty \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \exp\left(-\frac{i\rho^3}{54} \sin 3\varphi\right) \text{Ai}^2\left(3^{2/3} \left[c + \frac{\rho^2}{18}\right]\right) = \\ &= \frac{1}{3^{5/3} 4\pi^3} \int_0^\infty J_0\left(\frac{\rho^3}{54}\right) \text{Ai}^2\left(3^{2/3} \left[c + \frac{\rho^2}{18}\right]\right) \cdot 2\rho d\rho = \\ &= \frac{3^{1/3}}{\pi^3} \int_0^\infty J_0(t^3 \sqrt{2}) \text{Ai}^2(3^{2/3} [c + t^2]) t dt, \end{aligned}$$

а интеграл справа свести к интервалу $[0, \infty]$. В результате получаем интересное равенство, содержащее функции Бесселя и Эйри:

$$\frac{3^{5/6}}{2} \int_0^\infty J_0(t^3 \sqrt{2}) \text{Ai}^2(3^{2/3} [c + t^2]) t dt = \int_0^\infty \text{Ai}^3(2^{2/3} [c + t^2]) dt, \quad (3.29)$$

которое численно подтверждает Mathematica.

Заключение к главе 3

В данной главе показано, существует двумерное световое поле в виде произведения трёх пучков Эйри, Фурье-образ которого обладает кубической фазой и радиально симметричной интенсивностью с супергауссовым убыванием.

Результаты третьей главы докладывались на международных конференциях «Days on Diffraction» и APCOM-2011 Workshop. Опубликовано 1 статья.

Три-Эйри пучки, полученные и исследованные в третьей главе, уже сейчас находят применение при проектировании и создании трёхмерных оптических ловушек [86–88].

Заключение

Основные результаты диссертационной работы можно сформулировать следующим образом:

1. Показано, что описание преобразования HLG-пучков в оптических системах с астигматизмом общего вида допускают интерпретацию в терминах операторов поворота в трёхмерном пространстве.
2. Предложено обобщение понятия плоскости перетяжки для астигматического гауссова пучка как плоскости, в которой площадь светового пятна принимает минимальное значение. Показано, что в этой плоскости дефокусировка пучка равна нулю.
3. Показано, что для HLG-пучков можно сформулировать обобщённый закон $ABCD$.
4. Найдено интегральное представление произвольного спирального пучка с целочисленным параметром вращения.
5. Найдено двумерное поле в виде произведения трёх пучков Эйри, Фурье-образ которого обладает кубической фазой и радиально симметричной интенсивностью с супергауссовым убыванием.

Литература

- [1] Е.Г. Абрамочкин, Е.В. Разуева и В.Г. Волостников. Обобщённые гауссовы пучки и их преобразование в астигматических оптических системах. *Вестник Самарского гос. ун-та*, 2:103–121, 2006.
- [2] E.G. Abramochkin, V.G. Volostnikov, and E.V. Razueva. Hermite–Laguerre–Gaussian beams in astigmatic optical systems. In I.A. Sukhoivanov, V.A. Svich, Y.S. Shmaliy, and S.A.Kostyukevych, editors, *Proc. SPIE/Ukraine, Current Research in Optics and Photonics: Selected Papers from the Int. Conf. Adv. Optoelectronics and Lasers (2005)*, volume 6, pages 174–185, 2006.
- [3] E. Abramochkin, E. Razueva, and V. Volostnikov. General astigmatic transform of Hermite–Laguerre–Gaussian beams. *J. Opt. Soc. Am. A*, 27(11):2506–2513, 2010.
- [4] E. Razueva, A. Krutov, and E. Abramochkin. Definition of the waist plane for general astigmatic Gaussian beams. *Opt. Lett.*, 40(9):1936–1939, 2015.
- [5] H. Kogelnik and T. Li. Laser beams and resonators. *Appl. Opt.*, 5(10):1550–1567, 1966.
- [6] Ю.А. Ананьев. *Оптические резонаторы и гауссовы пучки*. М.: Наука, 1990.
- [7] М.Б. Виноградова, О.В. Руденко и А.П. Сухоруков. *Теория волн*. М.: Наука, 1979.
- [8] J.A. Arnaud and H. Kogelnik. Gaussian beams with general astigmatism. *Appl. Opt.*, 8(8):1687–1693, 1969.
- [9] H.M. Ozaktas, M.A. Kutay, and Z. Zalevsky. *The fractional Fourier transform with applications in optics and signal processing*. Wiley, New York, 2000.

- [10] M.J. Bastiaans and T. Alieva. Propagation law for Hermite– and Laguerre–Gaussian beams in first-order optical systems. *Proc. SPIE*, 6027:272–277, 2006.
- [11] E. Abramochkin and V. Volostnikov. Beam transformations and nontransformed beams. *Opt. Commun.*, 83:123–135, 1991.
- [12] E. Abramochkin and V. Volostnikov. Generalized Gaussian beams. *J. Opt. A: Pure and Appl. Optics*, 6(5):S157–S161, 2004.
- [13] Е.Г. Абрамочкин. Функции Эрмита–Лагерра–Гаусса. *Вестник Самарского гос. ун-та*, 4:19–41, 2001.
- [14] G. Nemes and A.E. Siegman. Measurement of all ten second-order moments of an astigmatic beam by use of rotating simple astigmatic (anamorphic) optics. *J. Opt. Soc. Am. A.*, 11(8):2257–2264, 1994.
- [15] Ю.А. Ананьев. Ещё раз о критериях «качества» лазерных пучков. *Оптика и спектроскопия*, 86(3):499–502, 1999.
- [16] P.A. Bélanger. Beam propagation and the *ABCD* ray matrices. *Opt. Lett.*, 16(4):196–198, 1991.
- [17] Д.А. Варшалович, А.Н. Москалев и В.К. Херсонский. *Квантовая теория углового момента*. Л.: Наука, 1975.
- [18] L. Allen, M.W. Beijersbergen, R.J.C. Spreeuw, and J.P. Woerdman. Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre–Gaussian laser modes. *Phys. Rev. A*, 45(11):8185–8189, 1992.
- [19] A. M. Yao and M.J. Padgett. Orbital angular momentum: origins, behaviour and applications. *Advances in Optics and Photonics*, 3:161–204, 2011.
- [20] J.F. Nye and M. Berry. Dislocation in wave trains. *Proc. R. Soc. Lond.*, 336:165–190, 1974.
- [21] Л. Биденхарн and Дж. Лаук. *Угловой момент в квантовой физике*. М.: Мир, 1984.

- [22] A. Wada, T. Ohtani, Y. Miyamoto, and M. Takeda. Propagation analysis of the Laguerre–Gaussian beam with astigmatism. *J. Opt. Soc. Am. A*, 22(12):2746–2755, 2005.
- [23] V. Namias. The fractional order Fourier transform and its applications to quantum mechanics. *J. Inst. Math. Appl.*, 25:241–265, 1980.
- [24] R. Simon and K.B. Wolf. Fractional fourier transform in two dimensions. *J. Opt. Soc. Am. A*, 17(12):2368–2381, 2000.
- [25] T. Alieva, V. Lopez, F. Agullo-Lopez, and L.B. Almeida. The fractional Fourier transform in optical propagation problems. *J. Mod. Opt.*, 41(5):1037–1044, 1994.
- [26] T. Alieva, V. Lopez, F. Agullo-Lopez, and L.B. Almeida. Reply to the comment on the fractional Fourier transform in optical propagation problems. *J. Mod. Opt.*, 42(12):2379–2383, 1995.
- [27] A.E. Siegman. How to (maybe) measure laser beam quality. *OSA Trends in Optics and Photonics*, 17:184–199, 1998.
- [28] А.Б. Плаченнов, В.Н. Кудашов и А.М. Радин. Простая формула для гауссова пучка со сложным астигматизмом в однородной среде. *Оптика и спектроскопия*, 106(6):998–1000, 2009.
- [29] В.В. Прасолов. *Многочлены*. М.: МЦНМО, 2001.
- [30] M. Mansuripur. *Classical optics and its applications*. Cambridge University, 2009.
- [31] T. Alieva, E. Abramochkin, A. Asenjo-Garcia, and E. Razueva. Rotating beams in isotropic optical system. *Opt. Express*, 18(4):3568–3573, 2010.
- [32] G. Indebetouw. Optical vortices and their propagation. *J. Mod. Opt.*, 40:73–87, 1993.
- [33] E.G. Abramochkin and V.G. Volostnikov. Spiral-type beams. *Opt. Commun.*, 102(3–4):336–350, 1993.
- [34] E. Abramochkin and V. Volostnikov. Spiral-type beams: optical and quantum aspects. *Opt. Commun.*, 125(4–6):302–323, 1996.

- [35] Е.Г. Абрамочкин and В.Г. Волостников. Спиральные пучки света. *Успехи физических наук*, 174(12):1273–1300, 2004.
- [36] Е.Г. Абрамочкин and В.Г. Волостников. *Современная оптика гауссовых пучков*. М.: Физматлит, 2010.
- [37] A.Ya. Bekshaev, M.S. Soskin, and M.V. Vasnetsov. Centrifugal transformation of the transverse structure of freely propagating paraxial light beams. *Opt. Lett.*, 31(6):694–696, 2006.
- [38] A. Bekshaev and M. Soskin. Rotational transformations and transverse energy flow in paraxial light beams: linear azimuthons. *Opt. Lett.*, 31(14):2199–2201, 2006.
- [39] E.G. Abramochkin, S.P. Kotova, A.V. Korobtsov, N.N. Losevsky, A.M. Mayorova, M.A. Rakhmatulin, and V.G. Volostnikov. Microobject manipulations using laser beams with nonzero orbital angular momentum. *Laser Physics*, 16(5):842–848, 2006.
- [40] Е.Г. Абрамочкин, К.Н. Афанасьев, В.Г. Волостников, А.В. Коробцов, С.П. Котова, Н.Н. Лосевский, А.М. Майорова и Е.В. Разуева. Формирование вихревых световых полей с заданной формой интенсивности для задач лазерной манипуляции микрообъектами. *Известия РАН (серия физическая)*, 72(1):76–79, 2008.
- [41] А.В. Наумов. Спектроскопия органических молекул в твёрдых матрицах при низких температурах: от эффекта Шпольского к лазерной люминесцентной спектромикроскопии всех эффективно излучающих одиночных молекул. *Успехи физических наук*, 56(6):633–652, 2013.
- [42] S.R.P. Pavani and R. Piestun. High-efficiency rotating point spread functions. *Opt. Express*, 16(5):3484–3489, 2008.
- [43] А.П. Прудников, Ю.А. Брычков и О.И. Маричев. *Интегралы и ряды. Специальные функции*. М.: Наука, 1983.
- [44] Ю.А. Брычков. *Специальные функции. Производные, интегралы, ряды и другие формулы*. М.: Физматлит, 2006.

- [45] E. Abramochkin and E. Razueva. Product of three Airy beams. *Opt. Lett.*, 36(19):3732–3734, 2011.
- [46] E. Abramochkin and E. Razueva. The Wigner distribution function of three-Airy beams. In *Proc. of Int. Conf. “Days on Diffraction, 2014” (Saint-Petersburg, 26–30.05.2014)*, pages 74–75, 2014.
- [47] М. Абрамовиц and И. Стиган, editors. *Справочник по специальным функциям*. М.: Наука, 1979.
- [48] O. Vallée and M. Soares. *Airy functions and applications to physics*. Imperial College Press, London, 2004.
- [49] Дж.Н. Ватсон. *Теория бесселевых функций*. М.: ИЛ, 1949.
- [50] Э.Ч. Титчмарш. *Введение в теорию интегралов Фурье*. М.-Л.: Гостехиздат, 1948.
- [51] Г. Бейтмен and А. Эрдейи. *Высшие трансцендентные функции*, тт. 1–3. М.: Наука, 1965–1967.
- [52] Ф. Олвер. *Асимптотика и специальные функции*. М.: Наука, 1990.
- [53] М. Абловиц and Х. Сигур. *Солитоны и метод обратной задачи*. М.: Мир, 1987.
- [54] M.V. Berry, J.F. Nye, and F.J. Wright. The elliptic umbilic diffraction catastrophe. *Phil. Trans. R. Soc. A*, 291:453–484, 1979.
- [55] M.V. Berry. Focused tsunami waves. *Proc. R. Soc. A*, 463:3055–3071, 2007.
- [56] M.V. Berry and N.L. Balazs. Nonspreading wave packets. *Amer. J. Phys.*, 47:264–267, 1979.
- [57] G.A. Siviloglou and D.N. Christodoulides. Accelerating finite energy Airy beams. *Opt. Lett.*, 32:979–981, 2007.
- [58] A. Torre. Gaussian modulated Ai- and Bi-based solutions of the 2D PWE: a comparison. *App. Phys. B*, 99:775–799, 2010.

- [59] M.A. Bandres and J.C. Gutiérrez-Vega. Airy-Gauss beams and their transformation by paraxial optical systems. *Opt. Express*, 15:16719–16728, 2007.
- [60] H.I. Sztul and R.R. Alfano. The Poynting vector and angular momentum of Airy beams. *Opt. Express*, 16:9411–9416, 2008.
- [61] A.V. Novitsky and D.V. Novitsky. Nonparaxial Airy beams: role of evanescent waves. *Opt. Lett.*, 34:3430–3432, 2009.
- [62] A. Torre. Airy beams beyond the paraxial approximation. *Opt. Commun.*, 283:4146–4165, 2010.
- [63] S.N. Khonina and S.G. Volotovskiy. Specular Airy laser beams. *Computer Optics (Samara, Russia)*, 34:203–213, 2010.
- [64] S.N. Khonina. Specular and vortical laser Airy beams. *Opt. Commun.*, 284:4263–4271, 2011.
- [65] M.I. Carvalho and M. Facão. Propagation of Airy-related beams. *Opt. Express*, 18:21938–21949, 2010.
- [66] H.T. Dai, Y.J. Liu, D. Luo, and X.W. Sun. Propagation dynamics of an optical vortex imposed on an Airy beam. *Opt. Lett.*, 35:4075–4077, 2010.
- [67] M.A. Bandres. Accelerating parabolic beams. *Opt. Lett.*, 33:1678–1680, 2008.
- [68] M.A. Bandres. Accelerating beams. *Opt. Lett.*, 34:3791–3793, 2009.
- [69] T.J. Eichelkraut, G.A. Siviloglou, I.M. Besieris, and D.N. Christodoulides. Oblique Airy wave packets in bidispersive optical media. *Opt. Lett.*, 35:3655–3657, 2010.
- [70] S. Vo, K. Fuerschbach, K.P. Thompson, M.A. Alonso, and J.P. Rolland. Airy beams: a geometric optics perspective. *J. Opt. Soc. Am. A*, 27:2574–2582, 2010.
- [71] S. Barwick. Accelerating regular polygon beams. *Opt. Lett.*, 35:4118–4120, 2010.
- [72] G.A. Siviloglou, J. Broky, A. Dogariu, and D.N. Christodoulides. Observation of accelerating Airy beams. *Phys. Rev. Lett.*, 99:213901, 2007.

- [73] P. Polynkin, M. Kolesik, J. Moloney, G. Siviloglou, and D. Christodoulides. Extreme nonlinear optics with ultra-intense self-bending Airy beams. *Opt. Photonics News*, 21(9):38–43, 2010.
- [74] S. Jia, J. Lee, J.W. Fleischer, G.A. Siviloglou, and D.N. Christodoulides. Diffusion-trapped Airy beams in photorefractive media. *Phys. Rev. Lett.*, 104:253904, 2010.
- [75] J. Baumgartl, M. Mazilu, and K. Dholakia. Optically mediated particle clearing using Airy wavepackets. *Nat. Photonics*, 2:675–678, 2008.
- [76] A. Torre. A note on the Airy beams in the light of the symmetry algebra based approach. *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.*, 11:125701, 2009.
- [77] E. Wigner. On the quantum correction for thermodynamic equilibrium. *Phys. Rev.*, 40:749–759, 1932.
- [78] D. Dragoman. Applications of the Wigner distribution function in signal processing. *EURASIP J. Appl. Signal Processing*, 10:1520–1534, 2005.
- [79] M.A. Alonso. Wigner functions in optics: describing beams as ray bundles and pulses as particle ensembles. *Adv. Opt. and Photon.*, 3:272–365, 2011.
- [80] H.J. Groenewold. On the principles of elementary quantum mechanics. *Physica*, 12(7):405–460, 1946.
- [81] В.И. Татарский. Представление Вигнера в квантовой механике. *Успехи физических наук*, 139:587–619, 1983.
- [82] R. Gase. Representation of Laguerre–Gaussian modes by the Wigner distribution function. *Quantum Electronics*, 31:1811–1818, 1995.
- [83] R. Simon and G.S. Agarwal. Wigner representation of Laguerre–Gaussian beams. *Opt. Lett.*, 25:1313–1315, 2000.
- [84] E.G. Abramochkin and V.G. Volostnikov. Wigner distribution function and intensity integral moments of Hermite–Laguerre–Gaussian beams. In *Proc. of Int. Conf. “Days on Diffraction, 2007” (Saint-Petersburg, 29.05–1.06.2007)*, pages 6–9, 2007.

- [85] D.E. Aspnes. Electric-field effects on optical absorption near thresholds in solids. *Phys.Rev.*, 147:554–566, 1966.
- [86] A. Torre. Airy beams and paraxiality. *J. Opt.*, 16:035702, 2014.
- [87] Y. Liang and Z. Ye. Generation of linear and nonlinear propagation of three-Airy beams. *Opt. Express*, 21(2):1615–1622, 2013.
- [88] Y.V. Izdebskaya, T.-H. Lu, D.N. Neshev, and A. Desyatnikov. Dynamics of three-Airy beams carrying optical vortices. *Appl. Opt.*, 53(10):B248–B253, 2014.