

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
им. П.Н. ЛЕБЕДЕВА РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

Дик Алексей Владимирович

**Процессы когерентного и некогерентного
излучения в новейших источниках мощного
электромагнитного излучения**

01.04.20 — физика пучков заряженных частиц
и ускорительная техника

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель д. ф.-м. н., в.н.с.
профессор Дабагов С.Б.

Москва 2013

Оглавление

Введение	3
ГЛАВА 1. Современные источники мощного электромагнитного излучения	12
1.1 Динамика заряженных частиц в электромагнитных полях и сопровождающее излучение	13
1.2 Ускоритель заряженных частиц как источник излучения	15
1.3 Синхротронное и ондуляторное излучения	18
1.4 Лазеры на свободных электронах как источник мощного электромагнитного излучения	26
1.5 Каналирование релятивистских частиц в кристаллах и излучение при каналировании	28
ГЛАВА 2. Динамика и излучение электрона в постоянном электрическом поле при наличии поля лазера	31
2.1 Процесс генерации электронного пучка	32
2.2 Электрон в поле лазера и постоянном ускоряющем поле	36
2.3 Электромагнитное излучение пучка электронов у поверхности фотокатода	40
ГЛАВА 3. Каналирование электрона в скрещенном электромагнитном поле	46

3.1 Формирование устойчивых каналов в скрещенных электромагнитных полях	47
3.2 Связанное движение электрона в поле стоячей лазерной волны	51
3.3 Каналирование электрона в поле электромагнитной волны, распространяющейся в прямоугольном волноводе	56
3.4 Каналирование электрона в аксиально-симметричном цилиндрическом лазерном поле	61
ГЛАВА 4. Динамика и излучение электрона в ионно-плазменном канале	66
4.1 Каналирование плазменного электрона в ионном канале	71
4.2 Излучение каналированного электрона в ионно-плазменном канале	78
4.3 Функция распределения пучка электронов в ионно-плазменном канале	87
Заключение	95
Список литературы	99
Приложение	109

Введение

Поиск новых мощных источников электромагнитного излучения занимает умы исследователей с тех пор, как была построена стройная теория электромагнитного взаимодействия частиц в веществе (в различных полях). Интерес к таким исследованиям вызван тем фактом, что источники мощного высокоэнергетичного излучения являются одними из наиболее эффективных инструментов изучения материи, причем размер изучаемых объектов напрямую зависит от длины волны излучения.

В основе современных источников мощного электромагнитного излучения лежит движение легких заряженных релятивистских частиц в электромагнитных полях различной конфигурации. Первым реальным источником такого излучения был синхротрон. Увеличение мощности излучения может быть достигнуто в ондуляторах, где на смену синхротронному излучению (СИ) приходит ондуляторное излучение (ОИ). По своей природе СИ и ОИ являются магнитотормозными, однако спектр излучения имеют совершенно различный. Главным образом это связано с траекторией частицы: в синхротроне заряд движется по круговой макроскопической орбите, а в ондуляторе совершает малые быстрые осцилляции, перпендикулярные направлению релятивистского движения под действием периодического магнитного поля ондулятора. Следует заметить, что и в вигглере (аналог ондулятора) траектория частицы представляет собой периодическую в перпендикулярном направлении функцию ("змейка"). Различие между ондулятором и вигглером заключается в амплитуде колебаний заряженной частицы. Амплитуда колебаний в вигглере больше, чем в ондуляторе, поэтому электромагнитное излучение частицы, движущейся в ондуляторе

обладает большей степенью когерентности.

Следующим этапом развития источников мощного излучения стали лазеры на свободных электронах (ЛСЭ). В основе ЛСЭ лежит ондуляторное излучение, а принципиальная схема работы аналогична обычным лазерам. Высокая когерентность излучения пучка электронов в ЛСЭ достигается за счет разбиения пучка на более короткие банчи (микробанчи) под действием поля электромагнитной волны, заключенной между двумя зеркалами, в ондуляторе. Это приводит к увеличению структурного фактора пучка и, тем самым, к увеличению вклада когерентных процессов излучения. В отличие от обычных лазеров, частота излучения которых строго фиксирована, в ЛСЭ частота регулируется энергией электронного пучка, являющегося рабочим телом ЛСЭ. Возможность перестраивать частоту излучения является главным преимуществом ЛСЭ перед обычными лазерами, частота излучения которых определяется частотой переходов между энергетическими уровнями электронов в атомах. Современным установкам ЛСЭ уже доступна область мягкого рентгена, однако, для столь высоких энергий фотонов не существует достаточно эффективных зеркал, необходимых для создания резонаторов. По этой причине большое внимание уделяется однопроходному режиму самоусиления спонтанного излучения SASE (Self Amplified Spontaneous Emission). Суть метода SASE заключается в том, что излученная электроном в ондуляторе электромагнитная волна взаимодействует с электроном, вошедшим в ондулятор ранее, в результате чего часть электронов немного замедляется, а другая часть немного ускоряется. Таким образом, происходит микробанчивание исходного пучка электронов на более короткие, отстоящие друг от друга на длину волны генерируемого излучения. Такая периодическая структура приводит к тому, что в интенсивность излучения микробанчей основной вклад вносят когерентные процессы, тем самым увеличивая интенсивность излучения. Увеличение интенсивности в зависимости от пройденного пучком расстояния происходит по экспоненциальному закону [1–14]. Однако для формирования микробанчей требуется некоторое время, и, как выяснилось, образуется всего

несколько первых микробанчей.

В силу чего возник вопрос о разбиении на микробанчи пучка электронов до входа в ондулятор. Одним из решений этой проблемы является использование затравочных (параметрических) ЛСЭ [15, 16]. Такое решение является недешевым, в связи с чем альтернативные методы решения этой проблемы являются на сегодняшний день довольно актуальными. Несмотря на достигнутые успехи в получении пучков электронов с хорошим эмиттансом, необходимым для работы ЛСЭ, а именно, для увеличения вклада в излучение когерентных процессов, остаются плохо изученными процессы, происходящие в момент генерации и формирования электронных пучков в околочатодной области. В частности, изучением вопроса о формировании электронных пучков в момент генерации под действием лазера занимается эксперимент COMB реализуемый в рамках проекта SPARC_LAB в Национальном институте ядерной физики (Фраскати, Италия). Понятно, что образующаяся суперпозиция падающей и отраженной от поверхности катода электромагнитных волн и постоянного ускоряющего поля будет влиять на структуру электронного пучка и приводить к его модуляции. Анализ когерентного движения пучка электронов в таком поле показывает, что при определенном соотношении параметров полей возможно образование каналов, представляющих собой эффективные периодические потенциалы, способные захватывать (удерживать в связанном состоянии) электроны. Посредством таких каналов можно управлять пучками захваченных электронов. Одно из самых примечательных свойств таких каналов заключается в возможности изменения глубины потенциальных ям, а также создания каналов различной геометрии.

Еще одним интересным направлением получения излучения высокой энергии и интенсивности, а также компактных модулированных пучков электронов, являются процессы взаимодействия мощных ультракоротких лазерных импульсов с плазмой. Одна из особенностей таких взаимодействий заключается в том, что за счет большого градиента поля лазерного импульса электроны плазмы могут ускоряться до ультрарелятивистских

энергий на очень малых расстояниях. При таком взаимодействии за лазерным импульсом образуется полость, свободная от плазменных электронов и способная захватывать ускоренные лазерным импульсом электроны, образуя тем самым плотный пучок релятивистских электронов [17–26]. Интересно отметить, что в таком ионно-плазменном канале захваченные электроны будут еще и ускоряться под действием поля ионной полости. Изучению процессов протекающих в плазме при взаимодействии мощных ультракоротких импульсов с плазмой посвящен эксперимент PLASMONX, также проводимый в рамках проекта SPARC_LAB [27]. Важно, что при определенной температуре захватываемого пучка электронов происходит модуляция пучка по плотности в фазовом пространстве, что будет влиять на процессы когерентного и некогерентного излучения захватываемого пучка.

Цель работы.

Целью настоящей диссертации являлось проведение теоретического исследования процессов, происходящих с пучком электронов в момент генерации под действием лазера в фотоинжекторе машины SPARC, для определения возможности формирования модулированных в пространстве пучков электронов непосредственно в момент их генерации; показать, что возможно образование каналов при когерентном движении ультрарелятивистских пучков электронов в поле скрещенных электромагнитных волн. И также исследования когерентных и некогерентных процессов, протекающих с пучком электронов, захваченных ионной полостью (ионно-плазменным каналом), образованной мощным ультракоротким лазерным импульсом. Поставлены следующие задачи:

Изучить возможность формирования модулированного пучка электронов непосредственно в момент генерации электронного пучка под действием поля лазера в ВЧ пушке фотоинжектора машины SPARC. Найти спектральное распределение электромагнитного излучения пучка электронов в момент генерации.

Развить теорию захвата электрона полем электромагнитной волны,

распространяющейся в планарном и круглом волноводе - образование каналов, и рассмотреть возможность фокусировки пучков электронов полем таких каналов.

Определить пределы применимости классической физики при описании процесса движения электрона в ионном канале, образованном мощным ультракоротким лазерным импульсом. Рассмотреть кинетику процессов, происходящих с пучком электронов в ионном канале.

Научная новизна результатов.

1) Рассмотрена динамика и излучение пучка фотоэлектронов в полях скрещенных лазерных волн и постоянном электрическом поле, впервые показана возможность модуляции электронного пучка в момент его генерации.

2) Развита теория захвата релятивистского пучка электронов в каналы, образованные лазерной волной распространяющейся в планарном и круглом волноводах.

3) Впервые определен предел классического описания движения электрона в ионно-плазменном канале, образованном мощным ультракоротким лазерным импульсом. Найдена аналитическая функция распределения пучка электронов в ионном канале в пренебрежении взаимодействием электронов между собой.

4) Обобщен метод Капицы, описывающий движение частицы в быстро осциллирующем поле на случай ультрарелятивистских частиц, движущихся в поле скрещенных электромагнитных волн.

Научно - практическая ценность работы.

Результаты, полученные в диссертации, используются для подготовки и проведения экспериментов COMB и PLASMONX в Национальной Лаборатории Фраскати (LNF).

Достоверность научных выводов и результатов.

Достоверность сформулированных в диссертации положений и выводов подтверждается согласием полученных результатов с результатами других авторов (в предельных случаях), а также согласием с численным

анализом и численными моделями, построенными с использованием системы MATLAB и кода KARAT.

Личный вклад соискателя.

В работах, выполненных в соавторстве, соискателем проделаны все аналитические расчеты. Соискатель принимал активное участие в численном анализе и построении численных моделей. Принимал активное участие в обсуждении результатов работы. Все основные результаты получены лично автором.

Апробация работы.

Результаты работы обсуждались на семинарах LNF и ФИАН, а также докладывались на следующих конференциях:

1. The VIII International Symposium "Radiation from Relativistic Electrons in Periodic Structures", Moscow region, Russia, September 7-11, 2009.

2. "Channeling 2010" 4th International Conference "Charged and Neutral Particles Channeling Phenomena", Ferrara, Italy, October 3 - 8, 2010

3. "Channeling 2012" 5th International Conference "Charged and Neutral Particles Channeling Phenomena", Alghero, Italy, September 23-28, 2012

Публикации.

1) A.S. Podlesnaya, A.V. Dik, S.B. Dabagov, M. Ferrario, "Spectral Distribution of SPARC Photoinjector electrons" *Nuovo Cimento*, V. 34C (2011) 359; DOI:10.1393/ncc/i2011-10964-0;

2) A.S. Podlesnaya, A.V. Dik, S.B. Dabagov, M. Ferrario, "On electron beam motion near the SPARC photoinjector cathode", *Journal of Physics: CS*, V. 236 (2010) 012035; DOI:10.1088/1742-6596/236/1/012035;

3) А.В. Дик, С.Б. Дабагов, "Функция распределения электронов захваченных ионным каналом", *Известия ВУЗов. Физика*: №12, 77 (2012);

4) А.В. Дик, С.Б. Дабагов, "Функция распределения электронов в ионном канале", *Препринт ФИАН №7*, 15(2012);

5) А.В. Дик, Е.Н. Фролов, С.Б. Дабагов, "Каналирование свободного электрона в поле лазерной волны", *Препринт ФИАН №15*, 16(2012);

6) A.V. Dik, A.Z. Ligidov, S.B. Dabagov, "Radiation by electrons channeled in a plasma-ion cavity", Nuclear Instruments and Methods, Section B, 2013, doi:<http://dx.doi.org/10.1016/j.nimb.2013.03.04> (принято в печать).

7) A.V. Dik, E.N. Frolov, S.B. Dabagov, "Dynamics of electrons acceleration in presents of crossed laser field", Nuclear Instruments and Methods, Section B, 2013, doi:<http://dx.doi.org/10.1016/j.nimb.2013.03.17> (принято в печать).

Краткое содержание работы.

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка использованной литературы и приложения. Диссертация содержит 113 страниц, включая рисунки и список использованной литературы. Диссертация содержит 36 рисунков, список литературы из 119 наименований.

Во **введении** обоснована актуальность темы диссертации, сформулированы основные цели работы, указана новизна результатов, приведена структура и содержание диссертации, перечислены защищаемые положения.

В **первой главе** описаны основные принципы работы новейших источников мощного электромагнитного излучения таких, как ондуляторы, лазеры на свободных электронах ЛСЭ. Приведены основные направления решения задачи о генерации мощного электромагнитного излучения в ЛСЭ за счет доминирования когерентных процессов.

Во **второй главе** проведен анализ процессов генерации пучка электронов за счет фотоэффекта под действием поля лазера. Показаны основные явления, сопровождающие процесс формирования пучка электронов, влияющие на его эмиттанс. В рамках классической физики проведен анализ движения электронов вблизи поверхности фотокатода под действием полей лазера, напряженностью $E_0 = 190$ МВ/м, и постоянного ускоряющего поля $E_{acc} = 120$ МВ/м. Построена численная модель генерируемого электронного пучка в системе MATLAB. В рамках классической электродинамики посчитан спектр излучения одного электрона, а также особенность спектра всего генерируемого пучка в целом.

В **третьей главе** показано, что при определенных соотношениях меж-

ду полем падающей и отраженной электромагнитными волнами и постоянным ускоряющим полем образуются периодические стационарные каналы, глубина которых может достигать $\Delta U \sim 100$ МэВ. Определено условие захвата электронов такими каналами. Найдено условие захвата электрона каналом в случае взаимодействия электронов между собой и дополнительным внешним плавно меняющимся со временем полем. На основе анализа процесса образования каналов при движении нерелятивистского электрона развит математический формализм, описывающий движение ультрарелятивистского электрона в поле скрещенных электромагнитных волн. Показано, что при распространении ультрарелятивистского электрона внутри волновода (капилляра) в поле электромагнитной волны образуются эффективные потенциальные ямы (каналы), с помощью которых можно управлять структурным фактором релятивистских пучков электронов, изменяя геометрию каналов.

В **четвертой главе** рассмотрена задача о движении и излучении электрона в ионном канале, образованном мощным ультракоротким лазерным импульсом. Рассмотрены особенности спектрально-углового распределения излучения. Определены границы применимости классической физики при описании движения электрона в пренебрежении спиновыми эффектами. Найдена функция распределения пучка захваченных каналом невзаимодействующих между собой электронов в фазовом пространстве, показана возможность учета взаимодействия электронов между собой в рамках теории возмущений.

В **заключении** сформулированы основные результаты, полученные в диссертации.

Основные положения, выносимые на защиту.

1) Пучок электронов в околорезонансной области фотоинжектора под воздействием поля выбивающего электроны лазера модулируется, приводя к изменению спектра излучения ускоряемых электронов в непосредственной близости от поверхности фотоинжектора из-за вклада когерентного излучения, что может быть использовано для диагностики пучка электронов.

2) Стоячие электромагнитные волны, образованные скрещенными лазерными полями, могут формировать устойчивые каналы, сравнимые с усредненными плоскостными (осевыми) каналами в кристаллах, которые способны не только модулировать пучок, но и затягивать их в потенциальные ямы каналов. Канализованные таким образом электроны могут быть эффективно отклонены на значительные углы с подавлением некогерентного рассеяния, что свидетельствует о возможности использования нового эффекта для управления пучками.

3) В результате кинетического описания процессов, протекающих с пучком электронов, захваченных полем ионного канала, образованного мощным ультракоротким лазерным импульсом, предложена теория каналирования релятивистского электрона в ионном плазменном канале и когерентного излучения каналированного в ионно-плазменном канале электрона в классическом и квантовом приближениях.

Глава 1

Современные источники мощного электромагнитного излучения

В 1666 г. И. Ньютон провел известные опыты по пропусканию естественного света через призму. В то время ученым была известна узкая полоса электромагнитного спектра (380 – 760) нм. Сейчас мы знаем, что этот спектр на много порядков шире и простирается от низкочастотных радиоволн (10^4 м) до гамма излучения (10^{-12} м). В наши дни практически любой вид излучения можно создать в лаборатории. Для генерации электромагнитных волн в диапазоне видимого света и близких к нему ультрафиолетовой и инфракрасной областях используются лампы накаливания, лазеры, газоразрядные лампы. Радиоволны генерируются с помощью электронных устройств. Гамма-излучение получают в реакциях столкновения высокоэнергичных частиц на ускорителях, а также при радиоактивном распаде некоторых ядер. Генерация интенсивного излучения в области электромагнитных волн, лежащих на границе вакуумного ультрафиолетового излучения и охватывающих рентгеновский спектр вплоть до частот мягкого гамма излучения, является малодоступной для обычных лабораторных методов [28–30]. Не так давно появился новый источник, генерирующий электромагнитное излучение в выше указанном диапазоне. Им является излучение электронов, движущихся по круговой орбите со скоростью, близкой к скорости света. Это излучение по своей природе является магнитотормозным излучением и впервые наблюдалось на синхротронах,

поэтому было названо синхротронным излучением. Диапазон длин волн от ультрафиолетового до мягкого гамма излучения совпадает с размерами, характерными для атомов, молекул и молекулярных структур вещества и является прекрасным инструментом в изучении строения материи [32].

1.1 Динамика заряженных частиц в электромагнитных полях и сопровождающее электромагнитное излучение

Наиболее общая формулировка закона движения механических систем дается принципом наименьшего действия [33], согласно которому каждая механическая система характеризуется функцией Лагранжа, а движение системы удовлетворяет условию минимума действия:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = 0,$$

где S , $L(q, \dot{q}, t)$, q , \dot{q} - действие, функция Лагранжа (Лагранжиан), обобщенные координаты и обобщенные скорости, соответственно. Из принципа наименьшего действия выводятся уравнения движения (уравнения Лагранжа),

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0,$$

но сама функция Лагранжа по большому счету постулируется. Так для релятивистского заряда e , движущегося в электромагнитном поле (φ, \mathbf{A}) , функция Лагранжа записывается в виде [34]:

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \mathbf{v} - e\varphi,$$

а уравнения Лагранжа примут вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = -\frac{e}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - e \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{A}$$

Наряду с Лагранжевым формализмом часто бывает удобно использовать Гамильтонов формализм. Функция Лагранжа и функция Гамильтона связаны соотношением:

$$H = \dot{\mathbf{r}} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} - L$$

Сегодня принцип наименьшего действия лежит в основе описания всех известных физических систем, в том числе, и электромагнитного поля. При описании полей используется плотность Лагранжиана, в частности, для электромагнитного поля и движущихся зарядов плотность Лагранжиана определяется выражением (в четырехмерном виде $x^i = (ct, \mathbf{r})$, $A^i = (\varphi, \mathbf{A})$):

$$L_\rho = -\frac{1}{c} A_i j^i - \frac{1}{16\pi} F_{ik} F^{ik}, \quad F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}$$

где F_{ik} , $j^i = (c\rho, \mathbf{j})$ - тензор электромагнитного поля и 4-х мерная плотность тока, соответственно. Применение принципа наименьшего действия дает хорошо известную систему уравнений Максвелла, записанную через потенциалы поля, удовлетворяющих калибровке Лоренца:

$$\frac{\partial^2 A^i}{\partial x^k \partial x_k} = \frac{4\pi}{c} j^i$$

Решение системы уравнений Максвелла для потенциалов может быть представлено в виде:

$$A^i(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} j^i \left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} \right) d^3 r' + A_0^i$$

Здесь первое слагаемое в правой части представляет электромагнитное поле, созданное системой токов j^i , а второе - внешнее поле, действующее на систему. Поле, создаваемое системой зарядов и наблюдаемое на расстоя-

нии, намного превышающем размеры самой системы, может быть записано в виде:

$$A^i(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{cr} \int j^i \left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{r}'\mathbf{r}}{r} \right) d^3r'$$

Из выражения для потенциалов электромагнитного поля видно, что в случае стационарных токов и неподвижных зарядов поле, создаваемое ими, не зависит от времени, а в случае нестационарного распределения зарядов представляет собой электромагнитные волны. В этом случае можно говорить об интенсивности электромагнитного излучения системы зарядов, которая запишется в виде:

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi} \left[\nabla \times \mathbf{A}, \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \varphi \right) \right] \mathbf{nr}^2$$

Вследствие излучения система зарядов теряет энергию. Из выражения для распределения интенсивности электромагнитного излучения по углам видно, что электромагнитные волны в пустоте могут излучать только заряды, движущиеся с ускорением. Более того, интенсивность электромагнитного излучения полностью определяется траекторией зарядов.

1.2 Ускорители заряженных частиц как источник излучения

Получить представление о внутренней структуре вещества можно, изучая угловое и энергетическое распределение, а также поляризацию рассеиваемых заряженных частиц. Объем полезной информации, получаемой при взаимодействии заряженной частицы с исследуемым образцом, прямым образом зависит от энергии налетающих заряженных частиц. Однако на Земле не существует естественных источников, способных генерировать интенсивный поток заряженных частиц с энергиями больше 10 МэВ, поэтому перед физиками конца 19-го начала 20-го вв. встал вопрос о способах получения высокоэнергичных заряженных частиц. Развитие ускорительной

техники, начало которого приходится на 20-30 гг. прошлого столетия, привело к многочисленным открытиям в ядерной физике, к развитию физики высоких энергий, к возможности создания источников мощного излучения. В наше время ускорители элементарных частиц нашли свое применение во многих областях науки (физике, химии, биологии, электронике, медицине).

В основе ускорения заряженных частиц лежит движение последних в электрических и магнитных полях определенной конфигурации. При наличии электрического поля постоянной напряженности энергия частицы увеличивается пропорционально пройденному расстоянию $\Delta E = eZ E_{ac} \Delta x$, где eZ — заряд ускоряемой частицы, E_{ac} — напряженность электрического поля. На этом принципе строятся линейные ускорители [35]. Простейший линейный ускоритель представляет собой вакуумную трубу, на концах которой находятся электроды, создающие в пространстве между собой электрическое поле напряженностью E_{ac} . Для достижения высоких энергий заряженных частиц нужно строить линейные ускорители большой протяженности, а это, в свою очередь, связано с техническими сложностями, а значит, и стоимостью машин.

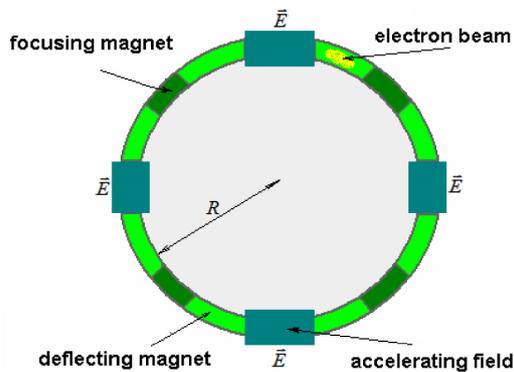


Рис. 1.1. Схема циклического ускорителя - синхротрона.

Дальнейшим развитием ускорителей становятся циклические ускорители. Первым в мире циклическим ускорителем элементарных частиц был циклотрон, построенный американским физиком Е. Лоуренсом. Циклотрон представляет собой циклический ускоритель нерелятивистских тяжелых заряженных частиц (протонов, ионов), в котором частицы движутся в постоянном и однородном магнитном поле и ускоряются высокочастотным электрическим полем неизменной частоты.

Увеличение скорости частиц приводит к росту их энергии и снижению частоты обращения. Частицы не попадают в резонанс с высоко-

частотным электрическим полем и выбывают из пучка, поэтому энергия, которую можно получить в циклотроне, не превышает 20-25 МэВ. Благодаря различным модификациям циклотронов, к настоящему времени их энергия достигает нескольких сотен МэВ [36].

Остановимся подробнее на циклическом ускорителе резонансного типа — синхротроне. Метод ускорения частиц в синхротроне основан на принципе автофазировки, который впервые был предложен советским физиком В. Векслером (1944 г.) и независимо американским физиком Э. Макмилланом (1945 г.). Синхротрон представляет собой кольцевой ускоритель заряженных частиц, как легких — электронов, позитронов, так и тяжелых — протонов, антипротонов, ионов. Частицы, двигаясь по орбите постоянного радиуса, набирают энергию при прохождении через прямолинейные промежутки с ускоряющим электрическим полем радиочастотного диапазона. Расположенные вдоль траектории частиц два типа чередующихся кольцевых магнитов позволяют фокусировать и удерживать пучок заряженных частиц на равновесной орбите. Отклоняющие двухполюсные магниты корректируют движение частиц, а фокусирующие четырехполюсные удерживают частицы в сгустке (рис. 1.1). Удержание заряженных частиц на равновесной орбите осуществляется за счет синхронизации темпа нарастания магнитного поля с темпом нарастания энергии частиц. Энергия, до которой можно было бы ускорять заряженные частицы в синхротроне, ограничена потерями энергии частиц на излучение. Заряженная частица, находясь в циклическом ускорителе, движется по искривленной орбите и имеет центростремительное ускорение. Согласно законам электродинамики, заряженная частица, движущаяся с ускорением, излучает. Потери энергии, связанные с излучением, становятся главным фактором, препятствующим достижению более высоких энергий в циклических ускорителях. В синхротронах, в которых нет других ограничений в получении высоких энергий, этот фактор становится практически единственным критическим параметром. Ограничение на энергию ускоряемых электронов в синхротронах, связанное с потерями энергии на излучение, изначально рассматрива-

лось как большой недостаток. Однако синхротронное излучение обладает рядом важных особенностей, как например, частота, на которую приходится максимальная интенсивность излучения, зависящая от энергии электрона и радиуса орбиты.

1.3 Синхротронное и ондуляторное излучения

Рассмотрим заряженную частицу – электрон, которая движется в постоянном магнитном поле напряженностью \mathbf{H} , с энергией E и проекцией импульса на направление магнитного поля равной нулю. Под действием силы Лоренца электрон будет двигаться по окружности радиуса $R = Ev/eH$ с частотой обращения $\omega_0 = ecH/E$. Для нерелятивистского электрона ($\beta \ll 1$) потери его энергии на излучение определяются формулой Лармора [37, 38]:

$$P = \frac{2e^2}{3c^3} \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)^2,$$

где, P - мгновенная мощность излучения. Для электрона движущегося с релятивистскими скоростями, эта формула принимает следующий вид:

$$P = \frac{2e^2c}{3R^2} \beta^4 \left(\frac{E}{mc^2} \right)^4$$

а энергия, теряемая за один полный оборот по окружности радиуса R , дается формулой:

$$\Delta E = \frac{4\pi e^2}{3R} \beta^3 \left(\frac{E}{mc^2} \right)^4$$

Как видно из приведенного выражения, с увеличением скорости частицы потери энергии на излучение растут пропорционально четвертой степени энергии этой частицы. При движении электрона в синхротроне наступает момент, когда потери энергии на излучение за один оборот становятся больше, чем прирост энергии, который частица получает от ускорителя,

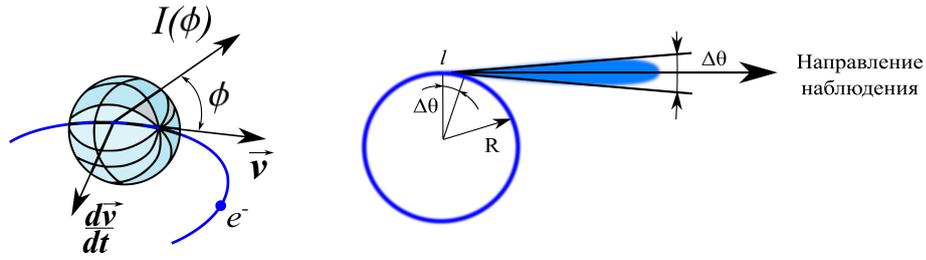


Рис. 1.2. Излучение нерелятивистского электрона *a*), функция распределения излучения $I(\phi) \sim \sin^2 \phi$, и угловое распределение излучения релятивистского электрона *b*).

проходя этот же отрезок пути. Иваненко совместно с Померанчуком [39, 40] показали существование критической энергии, выше которой заряженная частица не может быть ускорена в циклическом ускорителе с данными характеристиками. Излучение электрона, движущегося по искривленной орбите, было названо синхротронным излучением (СИ). Такое название синхротронное излучение получило благодаря тому, что впервые наблюдалось именно на синхротроне (тогда СИ было замечено случайно, во время инженерных работ на ускорителе “General Electric” в США в 1947 г). В начале наличие СИ рассматривалось лишь как источник потери энергии частиц в ускорителе и считалось большой помехой в достижении более высоких энергий. Первой работой по теоретическому описанию СИ можно считать работу немецкого физика Шотта [39, 41, 42], который пытался объяснить дискретную природу атомных спектров, рассматривая движение электрона по круговой орбите, Шотт получил следующее выражение для дифференциальной мощности излучения:

$$W(\nu, \theta) = \frac{e^2 c \beta^2 \nu^2}{2\pi R^2} (\text{ctg } \theta J_\nu^2(\nu\beta \sin \theta) + \beta^2 J_\nu'^2(\nu\beta \sin \theta))$$

Здесь ν - номер гармоники излучения $\omega = \nu\omega_0$, ω_0 - циклическая частота обращения электрона по окружности радиуса R . Формула Шотта представляет собой точное решение уравнений классической электродинамики для излучения релятивистского электрона, движущегося по окружности постоянного радиуса. Позднее формула Шотта была обобщена на

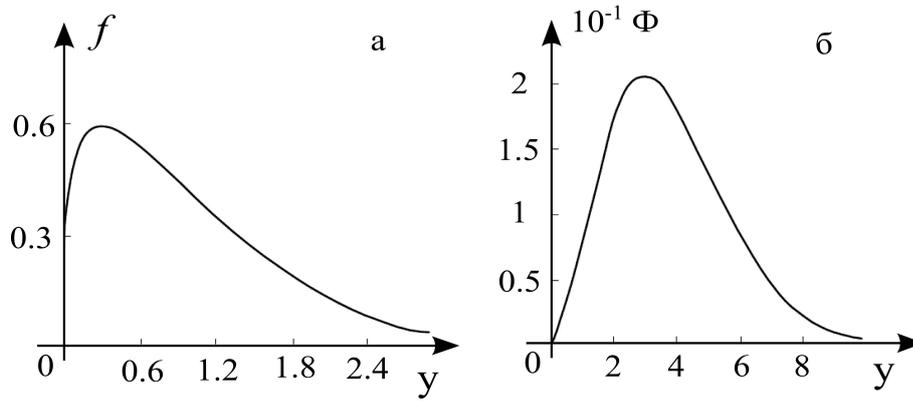


Рис. 1.3. Универсальные кривые характеризующие распределение мощности синхротронного излучения а), и спектр абсолютно черного тела б).

случай, учитывающий поляризацию СИ. Также была развита и квантовая теория СИ. Понять характер распределения интенсивности по углам в случае нерелятивистской частицы можно на качественном анализе. Пространственное распределение мощности излучения можно представить в виде тороида (рис. 1.2). Максимум излучения достигается в направлении внешнего магнитного поля, когда угол ϕ' , отсчитываемый от направления скорости частицы, приближается к значению $\pi/2$. Если электрон движется с релятивистской скоростью $\beta \rightarrow 1$, то тороид благодаря эффекту Доплера сильно деформируется и вытягивается в конус с осью, совпадающей с направлением скорости частицы.

Пусть ϕ' - угол в системе координат, где электрон покоится. Тогда, используя релятивистское преобразование углов, в лабораторной системе координат угол ϕ , под которым наблюдается излучение, будет равен [34]:

$$\sin \phi = \frac{\sqrt{1 - \beta^2} \sin \phi'}{1 + \beta \cos \phi'}$$

Полагая $\phi' = \pi/2$, что соответствует максимуму дипольного излучения, можно получить величину угла, в котором заключено все излучение:

$$\delta\phi = \sqrt{1 - \beta^2} = \gamma^{-1}$$

Из приведенного выражения видно, что СИ обладает ярко выраженным ”прожекторным эффектом”, а его направление совпадает с направлением вектора скорости электрона и сосредоточено в узком конусе (рис. 1.2). Для нахождения спектрального распределения мощности излучения необходимо проинтегрировать формулу Шотта по углам:

$$W(\nu) = \frac{e^2 c \beta \nu}{R^2} \left(2\beta^2 J'_{2\nu}(2\nu\beta) - (1 - \beta^2) \int_0^{2\nu\beta} J_{2\nu}(x) dx \right)$$

И эта формула также в первые была получена Шоттом, исследования Шотта были направлены на изучение излучения атомов. В случае движения электрона в синхротроне радиус орбиты является макроскопическим, а скорость электрона близка к скорости света $\beta \rightarrow 1$. В силу этого спектральная мощность излучения, приходящаяся на низкие гармоники будет пренебрежимо мала, а основной вклад в спектр излучения будут давать высокие гармоники, и здесь уже можно говорить о непрерывном спектре с частотой $\omega = \nu\omega_0$. При больших порядках функции Бесселя $J_\nu(x)$ и условия $\nu \rightarrow x$, функции Бесселя можно заменить их асимптотическим приближением через функции Макдональда. Чтобы ответить на вопрос о спектральном составе СИ, выпишем спектральное распределение СИ в плоскости орбиты электрона [43, 44]:

$$\frac{d^2W}{d\omega d\Omega} = \frac{3e^2\gamma^2}{4\pi^2c} \left(x K_{2/3} \left(\frac{x}{2} \right) \right)^2, x = \frac{\omega}{3\omega_0\gamma^3}$$

Функция Макдональда $K_{2/3}(x)$ максимальна при значении аргумента порядка единицы, откуда следует что максимум излучения будет приходиться на частоту $\omega_{max} \sim \gamma^3\omega_0$. Интересен тот факт, что спектр излучения СИ подобен спектру излучения абсолютно черного тела (рис. 1.3). При сравнении максимумов излучения этих источников $\omega_{max}^b = kT/\hbar = \omega_{max}^{sr} = c/R\gamma^3$ можно заключить, что синхротронное излучение электронов с энергией 1 ГэВ соизмеримо с излучением черного тела, эффективная температура ко-

торого $T \sim 10^7$ К. Земным аналогом такого источника может быть, например, ядерный взрыв или высокотемпературная плазма [37, 45, 46].

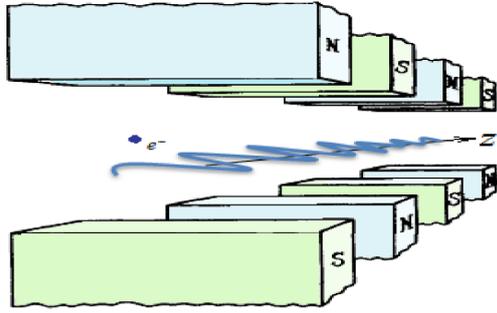


Рис. 1.4. Принципиальная схема ондулятора и траектория электрона.

Большое количество экспериментов, направленных на изучение природы СИ, было проведено в 50-60 гг. прошлого столетия. Во всех опытах наблюдалось хорошее согласие теории и эксперимента. Изучение свойств СИ проводилось в широком диапазоне частот от рентгеновского излучения до инфракрасного. Много работ было посвящено экспериментальному исследованию поляризации СИ. Поляризация СИ исследовалась на синхротроне ФИАН, во Фраскати (Италия), в ФРГ

(DESY), в Томском политехническом институте на синхротроне "Сириус" с энергией 1,5 ГэВ. К настоящему времени свойства СИ хорошо изучены как теоретически, так и экспериментально [39]. Первое практическое использование СИ начинается с работ Гартмана и Томбуляна (1958 г.) по применению СИ в атомной спектроскопии. В 60-х гг. на синхротроне DESY (6 ГэВ) создается отдельный канал для отвода СИ [47–49]. Мировое научное сообщество осознало, что источники синхротронного излучения, благодаря своей яркости и интенсивности, могут стать базой для развития не только физики, но и многих других наук - химии, физики твердого тела, биологии, а также материаловедения [50].

Одним из основных элементов современных источников СИ являются ондуляторы и вигглеры – периодические магнитные структуры, предложение об использовании которых впервые было рассмотрено в работе Гинзбурга [51]. Спустя несколько лет под руководством Мотца [52] был создан и испытан на пучке линейного ускорителя первый в мире ондулятор. Принципиальная схема ондулятора и траектория частицы изображены на рис. 1.4. Ондулятор состоит из двух периодических систем, каждая из кото-

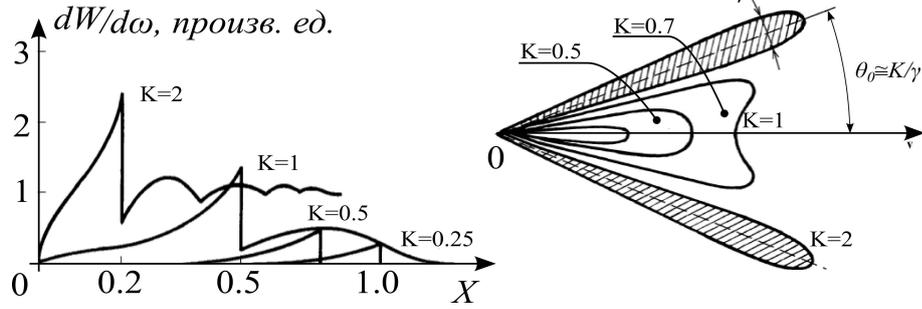


Рис. 1.5. Спектральное распределение мощности ондуляторного излучения при различных параметрах ондуляторности а), и угловое распределение мощности излучения при различных параметрах ондуляторности б).

рых содержит большое число магнитных полюсов чередующейся полярности. Напряженность поперечного магнитного поля ондулятора изменяется вдоль оси по закону близкому к синусоидальному с периодом λ_u :

$$\mathbf{B}_u(z) = \mathbf{B}_u^0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_u} z\right)$$

Полные потери энергии электрона при прохождении периодов периодической структуры ондулятора не зависят от ее конструктивных особенностей [53]:

$$\Delta W_e \sim \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \overline{B_u^2} \gamma^2 N \lambda_u$$

Как видно из приведенного выражения, полные потери энергии электрона определяются величиной поля, периодом и числом периодов магнитного поля и тем больше, чем выше энергия электрона. Режим работы ондулятора определяется соотношением между максимальным углом поворота электрона в магнитном поле ондулятора $\alpha_0 = \lambda_u e B_u^0 / 2\pi m c \gamma$ и характерным углом расходимости излучения из каждой точки траектории электрона $\delta\theta \sim \gamma^{-1}$. Отношение этих величин $K = \lambda_u e B_u^0 / 2\pi m c$ принято называть параметром ондуляторности. Периодические магнитные структуры с параметром ондуляторности $K < 1$ называют ондуляторами, а структуры с $K \geq 1$ - вигглерами [9, 54]. Величина и период магнитного поля вигглера

больше, чем у ондулятора, поэтому интенсивность фотонов, получаемая в вигглере, будет меньше. Вигглер также уступает ондулятору по когерентности генерируемого излучения. Рассмотрим движение электрона в поле плоского ондулятора. Поле ондулятора можно записать в виде:

$$\mathbf{H} = H_u^0 \sin az \mathbf{e}_x,$$

где \mathbf{e}_x - единичный вектор вдоль оси Ox , $a = 2\pi/\lambda_u$ - параметр периодичности поля. Тогда уравнения движения релятивистского электрона в проекциях на оси координат запишутся в виде:

$$\begin{aligned}\ddot{z} &= -\omega_0 \sin(az) \dot{x} \\ \ddot{x} &= \omega_0 \sin(az) \dot{y} \\ \ddot{y} &= 0\end{aligned}$$

где, $\omega_0 = ecH_u^0/E$, и E - энергия электрона. Отметим, что энергия электрона при движении в магнитных полях не изменяется. Решение будем искать со следующими начальными условиями [53]: $x(0) = y(0) = z(0) = 0$, $\mathbf{v}(0) = \{v_{x0}, 0, v_{z0}\}$. Проинтегрировав уравнения движения, получим:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -v_{0x} \cos(az) \\ \ddot{z} - \frac{av_{0x}^2}{2} \sin(az) &= 0\end{aligned}$$

Последнее уравнение представляет собой хорошо известное уравнение колебания физического маятника, решение которого выражается через эллиптические функции. Однако найти приближенное решение этого уравнения, основываясь на очевидных физических соображениях, возможно. На практике электрон движется вдоль оси ондулятора (ось Oz) с огромной скоростью $v_{0z} \rightarrow c \gg v_{0x}$. Тем самым можно найти решение уравнения в элементарных функциях. Модуль скорости электрона при движении в магнитном поле не меняется, тогда, с учетом начальных условий, электрон будет двигаться в плоскости xOz . Принимая во внимание выше сказанное,

можно написать уравнение для координаты z в виде $\dot{z}^2 = v_0^2 - v_{0x}^2 \cos^2(az)$. Раскладывая в ряд последнее выражение по величине $v_{0x}/v_0 \ll 1$, и используя метод последовательных приближений, можно получить приближенное выражение для проекции скорости на оси координат, выражая аргумент синуса через время:

$$\begin{aligned}\dot{z} &= \bar{v}_0 - b \cos(\Omega t) \\ \dot{x} &= v_{0x} \cos(\Omega t)\end{aligned}$$

где, $\bar{v}_0 = v_0(1 - v_{0x}^2/4v_0^2)$ - средняя скорость электрона вдоль оси ондулятора, $\Omega = a\bar{v}_0$ - частота колебания электрона в поперечном направлении к оси ондулятора. Для спирального ондулятора все рассуждения полностью аналогичны, только в этом случае траектория электрона будет представлять собой эллиптическую спираль.

Согласно законам классической электродинамики, спектр излучения заряженной частицы полностью определяется ее траекторией. Угловое распределение ондуляторного излучения обладает такой же как и СИ прожекторной направленностью, но в отличие от СИ максимум излучения приходится на основную частоту $\omega_{max}^{ur} \sim \gamma^2\omega_0$. В случае движения электрона по винтовой линии дифференциальная мощность излучения может быть приведена к компактному аналитическому виду:

$$\frac{dW_\nu}{d\Omega} = \frac{e^2\omega_0^2\nu^2}{2\pi c(1 - \bar{\beta}_0 \cos \theta)^3} \left(\left(\frac{\cos \theta - \bar{\beta}_0}{\sin \theta} \right)^2 J_\nu^2(x) + \beta_\perp^2 (J'_\nu(x))^2 \right),$$

где $x = \nu\beta_\perp \sin \theta / (1 - \bar{\beta}_0 \cos \theta)$. Реальный ондулятор обладает конечной длиной $L = N\lambda_u$. Пользуясь асимптотическим представлением функций Бесселя при малом аргументе (считаем угол излучения малым и рассматриваем низкие гармоники), вводя параметр ондуляторности и учитывая конечность длины ондулятора, можем записать выражение для диффе-

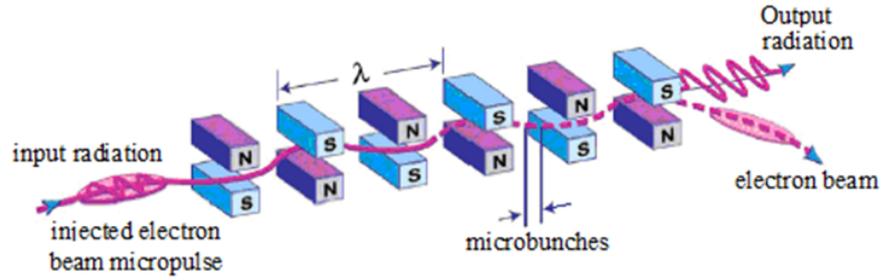


Рис. 1.6. Принципиальная схема ЛСЭ работающего в SASE режиме.

ренциальной мощности излучения в виде:

$$\frac{d^2W}{d\omega d\Omega} = \frac{\beta^2 e^2 K^2 \omega^2 N^2}{\gamma^2 c \omega_0^2} \left(\frac{\sin \xi}{\xi} \right)^2 (J'_\nu(x))^2 \left(1 + \left(\frac{1 + K^2 - \gamma^2 \theta^2}{1 + K^2 + \gamma^2 \theta^2} \right)^2 \right)$$

где, $\xi = N\pi(\omega/\omega_1 - \nu)$, ω_1 - частота первой гармоники.

1.4 Лазеры на свободных электронах как источник мощного электромагнитного излучения

В основе работы ЛСЭ лежит вынужденное ондуляторное излучение. Процесс излучения электрона в ондуляторе становится вынужденным, благодаря электромагнитной волне удерживаемой в ондуляторе зеркалами. Под действием поля электромагнитной волны происходит разбиение исходного пучка электронов на более короткие (микробанчи), размером порядка длины волны излучения. Как известно, мощность излучения пучка электронов складывается из когерентной и некогерентной частей [10–14, 39, 55]:

$$W_N(\omega) = \left(N + N(N - 1) \left| \int f(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{kr}} d^3r \right|^2 \right) W(\omega)$$

Некогерентная часть пропорциональна N , а когерентная N^2 , а величина, стоящая под знаком модуля, называется структурным фактором и характеризует собой отношение размеров пучка к длине волны излучения. Разбиение пучка электронов на микробанчи приводит к росту структурного фактора и увеличению влияния когерентных процессов на интенсивность излучения. Принципиальных ограничений на частоту и интенсивность излучения у ЛСЭ нет, однако имеются технические сложности при генерации излучения с длиной волны меньше 1 \AA силу отсутствия эффективных зеркал для этого диапазона. По этой причине большое внимание уделяется однопроходному режиму работы ЛСЭ (SASE режим, рис. 1.6). В таком режиме испущенная электроном электромагнитная волна взаимодействует с электроном, вошедшим в ондулятор ранее. Электронный пучок взаимодействует со своим полем излучения, разбиваются на микробанчи, что приводит к увеличению вклада когерентных процессов. Однако оказывается, что в таком режиме образуется всего несколько первых микробанчей. Одним из решений этой проблемы является использование каскада ондуляторов [56, 57], но это решение сопряжено с большими финансовыми затратами. Поэтому одним из приоритетных направлений дальнейшего развития ЛСЭ является изучение возможности микробанчевания пучка электронов до входа в ондулятор. Существует много различных методов модуляции электронных пучков, как по энергии и плотности в свободном пространстве [58], так и с изменением параметров каскадных ондуляторов [59, 60] или с добавлением группирующих магнитов [61]. Как говорилось ранее, для работы ЛСЭ требуются пучки электронов с малым эмиттансом. Вопросам, связанным с генерацией таких пучков и их возможной модуляцией, посвящен эксперимент СОМВ. В частности, интересен вопрос о модуляции пучка электронов в момент его генерации под действием лазера в фотоинжекторе, которому посвящена глава 2.

1.5 Каналирование релятивистских частиц в кристаллах и излучение при каналировании

Релятивистский электрон движущийся в ондуляторе, испытывает рассеяния на малые углы под действием периодического магнитного поля. Аналогичные рассеяния происходят в процессах каналирования релятивистских заряженных частиц в кристаллах. Однако в отличии от движения в ондуляторе быстрая частица, пролетающая через монокристалл, испытывает в следствие взаимодействия с электронами и ядрами упругое (как в ондуляторе) и неупругое рассеяние, вызывая разнообразные реакции. Для описания процессов упругого рассеяния релятивистской частицы в кристалле можно ввести эффективный периодический потенциал $U(\mathbf{r})$, усредненный по тепловым колебаниям ядер. Потенциал $U(\mathbf{r})$ можно записать в виде разложения в ряд Фурье:

$$U(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} U(2\pi\mathbf{k})e^{i2\pi\mathbf{k}\mathbf{r}},$$

$$U(2\pi\mathbf{k}) = \frac{1}{\Omega} \sum_j U_{j0}(2\pi\mathbf{k})e^{-\omega_j(2\pi\mathbf{k})}e^{-i2\pi\mathbf{k}\mathbf{r}_j},$$

где Ω - объем элементарной ячейки кристалла, $2\pi\mathbf{k}$ - вектор обратной решетки кристалла, \mathbf{r}_j - координата ядра типа j в элементарной ячейке, квадрат величины $e^{-\omega_j(2\pi\mathbf{k})}$ равен известному из рассеяния рентгеновских лучей тепловому фактору, или фактору Дебая - Уоллера, $U_{j0}(2\pi\mathbf{k})$ - фурье компонента потенциала взаимодействия частицы с атомом, покоящемся в начале координат. В случае движения через кристалл электрона $U(\mathbf{r})$ представляет собой обычное кулоновское взаимодействие, а U_{j0} поределяется выражением:

$$U_{j0}(2\pi\mathbf{k}) = \frac{4\pi e^2}{(2\pi\mathbf{k})^2} (z_j - F_j(2\pi\mathbf{k}))$$

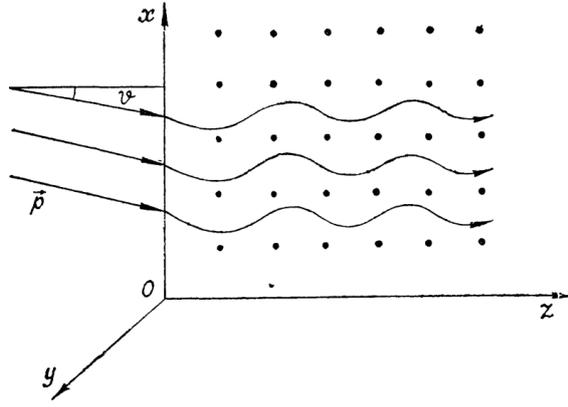


Рис. 1.7. Каналирование частиц в кристалле

где z_j - заряд ядра, расположенного в точке \mathbf{r}_j элементарной ячейки, $F_j(2\pi\mathbf{k})$ - форм-фактор атома расположенного в точке \mathbf{r}_j . При влете заряженной частицы в кристалл под углом, меньшим так называемого угла Линдхарда, частица в кристалле движется в режиме каналирования. Для быстрых частиц, длина волны которых намного меньше расстояния между атомами, периодичность цепочек и плоскостей кристалла в направлении релятивистского движения практически не сказывается на характере ее движения. В результате поведение частицы определяется постоянным вдоль направления падения и периодическим в поперечной плоскости усредненным потенциалом осей (плоскостей) кристалла. Канализующие частицы, как правило, совершают релятивистское движение вдоль канала и нерелятивистское в поперечном к продольной оси канала направлении. Поэтому при описании процессов каналирования вводят так называемую продольную энергию $E_{\parallel} = c\sqrt{p_{\parallel}^2 + (mc)^2}$ и разделяют гамильтониан на поперечный и продольный. Например, для классической релятивистской частицы, движущейся в поле $U(\mathbf{r})$ канала, гамильтониан можно записать в виде:

$$H = c\sqrt{\mathbf{p}^2 + (mc)^2} + U(\mathbf{r}) \approx E_{\parallel} + \frac{p_{\perp}^2 c^2}{2E_{\parallel}} + U(\mathbf{r})$$

здесь $E_{\parallel} = c\sqrt{p_{\parallel}^2 + (mc)^2}$, а p_{\parallel} , p_{\perp} - продольная и поперечная к оси канала компоненты импульса частицы. Траектория частицы, канализующей

в кристалле, похожа на траекторию электрона в ондуляторе (рис.1.7). Спектр излучения каналированной частицы в кристалле в дипольном приближении имеет следующую зависимость от частоты:

$$\frac{dI}{d\omega} \sim \omega \left(1 - 2 \left(\frac{\omega}{\omega_m} \right) + 2 \left(\frac{\omega}{\omega_m} \right)^2 \right), \quad \omega \leq \omega_m \approx 2\gamma^2 \omega_{fi},$$

где γ , ω_m , ω_{fi} - Лоренц-фактор заряженной частицы, максимальная частота излучения и частота перехода из состояния f в состояние i , соответственно. Угловое распределение излучения при каналировании обладает ярко выраженным "прожекторным" свойством как и ОИ и СИ, а частота излученных фотонов может покрывать очень широкий спектр от оптического до γ - диапазона. Однако в отличие от того же ондуляторного излучения, фотон, излученный в кристалле, довольно сильно рассеивается на атомах в зависимости от толщины кристалла и энергии фотона [62–68]. В связи с чем процесс каналирования заряженных частиц в скрещенных электромагнитных полях, которому посвящена глава 3, представляет большой интерес, в связи с отсутствием не упругих процессов.

Глава 2

Динамика и излучение электрона в постоянном электрическом поле и поле лазера

Как было сказано в первой главе, для работы ЛСЭ требуются пучки с малым эмиттансом и большим током. Для генерации сильноточных электронных пучков используются механизмы взрывной, автоэлектронной, термоэлектронной и фотоэлектронной эмиссии.

Автоэлектронную эмиссию из холодного катода можно рассматривать как проявление квантового эффекта туннелирования электронов проводимости сквозь потенциальный барьер на поверхности металла (рис. 2.3). Высота потенциального барьера тем меньше, чем больше величина внешнего электрического поля. Наличие на поверхности катода шероховатостей в виде микроострий высотой порядка 10^{-4} см, и среднего радиуса порядка 10^{-5} см, приводит к тому, что при подаче высокого напряжения на катод, автоэлектронный ток протекающий через микроострия приводит к сильному их омическому нагреву, вызывая испарение микроострий и образование слоя плазмы, который покрывает всю поверхность катода. При этом эффективная эмиттирующая поверхность резко увеличивается, что ухудшает эмиттанс пучка.

Процессы термоэлектронной и фотоэлектронной эмиссии схожи между собой. При термоэлектронной эмиссии катод нагревается до высоких температур до тех пор, пока значительная часть электронов металла не приобретет кинетическую энергию больше, чем $A + E_F$ (рис. 2.3). В слу-

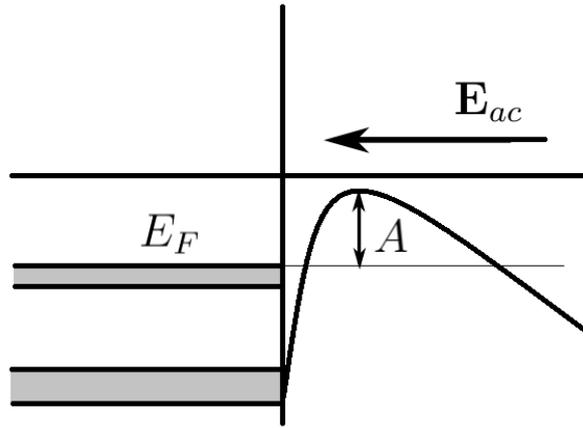


Рис. 2.1. Схематическое изображение фотокатода и его зонной структуры. E_{ac} , A , E_F - внешнее ускоряющее поле, работа выхода электрона из металла и энергия Ферми, соответственно.

чае фотоэффекта кинетическая энергия увеличивается за счет поглощения фотонов [69–72]. Фотоэлектрический эффект имеет несколько преимуществ перед остальными методами при генерации электронных пучков с хорошим эмиттансом. Фотоэффект безынерционен, что позволяет точнее регулировать продольный размер пучка, лазерный луч можно фокусировать, тем самым уменьшая поперечный размер пучка. Изменяя угол падения лазерного импульса на поверхность фотокатода, можно уменьшить угловой разброс импульсов электронов. Одним словом, используя фотоэффект, можно управлять характеристиками пучка на стадии его генерации.

2.1 Процесс генерации электронного пучка

Рассмотрим качественно процесс генерации электронного пучка при многофотонной ионизации. В качестве введения рассмотрим случай нормального падения лазера на катод и покажем отличие нормального падения от падения под углом. Большая величина поля лазерной волны приводит к нелинейным эффектам при взаимодействии с веществом катода. Это значит, что коэффициент поглощения будет зависеть от интенсивности падающего излучения [73, 74]. Найдем изменение интенсивности с глубиной

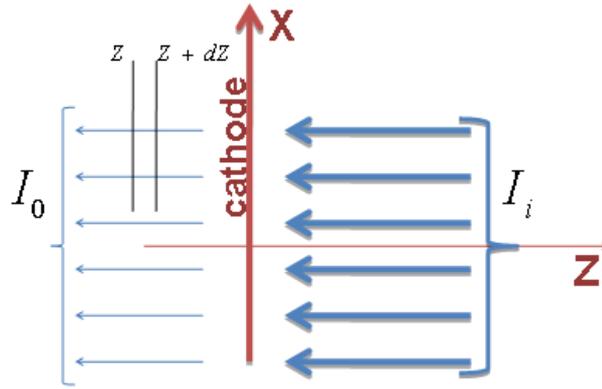


Рис. 2.2. Схематический рисунок взаимодействия лазера с фотокатодом при нормальном падении.

проникновения с учетом нелинейности процесса поглощения в виде:

$$\frac{dI}{dz} = \mu_1 I + \mu_2 I^2 \rightarrow I(z) = I_0 e^{\mu_1 z} \left(1 + I_0 \frac{\mu_2}{\mu_1} (1 - e^{\mu_1 z}) \right)^{-1} \quad (2.1)$$

где I_0 - интенсивность прошедшего внутрь вещества потока, которая определяется через интенсивность падающего потока и коэффициент отражения от поверхности как $I_0 = (1 - R)I_i$, где I_i, R - интенсивность падающего излучения и коэффициент отражения от поверхности (рис.3.4). Можно показать, что для полей лазера, используемых в эксперименте SPARC, $I_0 \mu_2 / \mu_1 \sim eE_0 / (2\pi t c \omega_0) \sim 10^{-3} \ll 1$ [75], а значит, с очень хорошей точностью мы можем пренебречь этим множителем и пользоваться в дальнейшем законами линейной оптики. Далее учтем, что интенсивность лазерной волны по фронту неоднородна, она имеет максимум в центре волнового фронта, и плавно убывает к его краям. Это распределение можно аппроксимировать различными функциями. В разных задачах для этого выбирают разные функции: от прямых зависимостей до распределения Гаусса. Для нашей задачи, как будет показано далее, целесообразнее взять распределение Гаусса. Тогда интенсивность падающего излучения будет иметь вид:

$$I_i(x, y) = C e^{-x^2/(2\sigma_x^2) - y^2/(2\sigma_y^2)} \quad (2.2)$$

Для диапазона частот лазера, используемого в эксперименте SPARC, линейный показатель поглощения $\mu_1 \geq 10/\lambda$, где $\lambda = 2\pi c/\omega_0$ - длина волны падающего излучения. Принимая во внимание зависимость интенсивности от глубины проникновения $I(z) = I_0 e^{\mu_1 z}$, можно считать, что практически все прошедшее внутрь вещества излучение поглощается на поверхности катода. Предположим, что распределение интенсивности по фронту волны не изменяется с глубиной проникновения, и вся поглощаемая энергия идет на "вырывание" электронов из катода, а выбитые фотоэлектроны не взаимодействуют между собой и с веществом катода. Найдем функцию распределения фотоэлектронов в пространстве.

В эксперименте SPARC фотокатод выполнен из поликристалла меди, для которого работа выхода электрона $A = 4,7$ эВ [76]. Пусть на фотокатод падает лазерная волна с длиной волны $\lambda = 266$ нм [77], которой соответствует энергия фотона $\hbar\omega_0 = 4,1$ эВ. Из уравнения фотоэффекта $\hbar\omega_0 = E_e + A$ [69] видно, что однофотонный фотоэффект невозможен, так как $E_e < 0$. Следовательно, процесс фотоэффекта будет проходить за счет многофотонного поглощения. В теории многофотонного фотоэффекта число фотонов, поглощенных одним электроном, способным выйти из металла, выражается в виде $n = \text{Int}(1 + A/\hbar\omega_0)$ [78], где $\text{Int}(x)$ - означает целая часть от числа x . Тогда энергия электрона, вырвавшегося из катода вследствие поглощения n фотонов, равна $E_e = n\hbar\omega_0 - A$. Изменение энергии вещества фотокатода объемом $\Delta V = \sigma\Delta z$ за время dt на глубине z будет равна:

$$\frac{d\epsilon(z)}{dt} = \frac{\partial S_z}{\partial z}, \quad (2.3)$$

где S_z - проекция на ось Oz плотности потока энергии электромагнитной волны. Усредняя вектор Пойнтинга по периоду колебания волны и выражая его через интенсивность излучения, получим среднюю энергию, поглощенную за один период колебания на глубине z в объеме dV :

$$\frac{d^2 E}{dt} = \mu_1 I dV \quad (2.4)$$

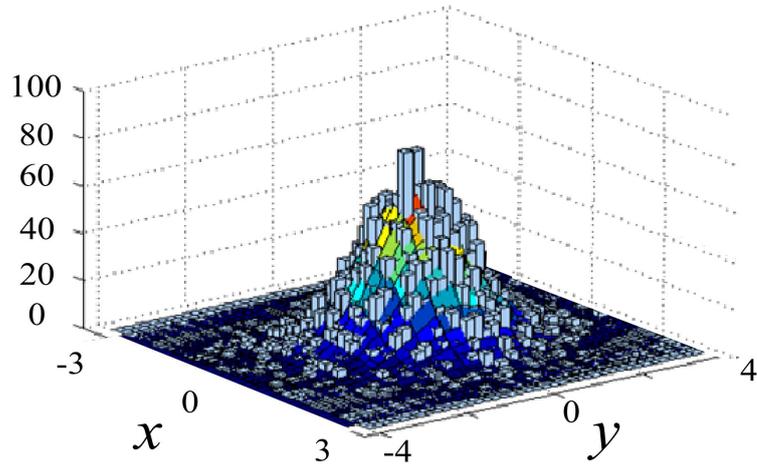


Рис. 2.3. Гистограмма и функция распределения фотоэлектронов в пространстве в плоскости параллельной поверхности катода. Координаты имеют размерность 10^{-4} см.

Так как лазер работает в импульсном режиме, то, вообще говоря, интенсивность имеет временное распределение. Возьмем упрощенную форму временного распределения в виде ступеньки со средним значением напряженности $E_0 \sim 10^8$ В/м [79]. Теперь можно найти концентрацию фотоэлектронов в пространстве. Учитывая, что электрон поглощает в среднем $n = 2$ фотонов с энергией $\hbar\omega_0$, найдем концентрацию фотоэлектронов за один период колебания волны:

$$n_e = \frac{\mu_1}{n\hbar\omega_0}(1 - R)C e^{-x^2/(2\sigma_x^2) - y^2/(2\sigma_y^2)} \quad (2.5)$$

Из результатов такого качественного анализа видно, что распределение фотоэлектронов в пространстве в поперечном к оси Oz направлении определяется распределением поля лазерного импульса. Что касается распределения фотоэлектронов в направлении оси Oz , то оно будет определяться в основном импульсным распределением фотоэлектронов. Теория многофотонного фотоэффекта очень хорошо изучена [78, 80], однако, мы не будем прибегать здесь к сколь-нибудь строгому математическому описанию, чтобы не погружаться в чистую математику. Нужно отметить, что из теории многофотонного фотоэффекта следует, что преимущественное

направление вылета фотоэлектронов происходит в направлении вектора напряженности электрического поля лазера. Следовательно, скользящее падение лазера на поверхность фотокатода при неизменной интенсивности приведет к максимальному выходу фотоэлектронов. Однако, в этом случае освещаемая поверхность фотокатода тоже сильно увеличится, что приведет к ухудшению эмиттанса. Поэтому в реальном эксперименте лазерный импульс падает под некоторым оптимальным углом, для получения пучка с необходимыми характеристиками. При падении лазера под углом к поверхности катода пространственное распределение электронов будет иметь такой же вид (2.5), но с другим поперечным размером лазерного пятна и множителем перед экспонентой.

2.2 Электрон в поле лазера и постоянном ускоряющем поле

Покинув катод, электрон попадает в ускоряющее поле. Рассмотрим нерелятивистский электрон, движущийся в поле, образованном падающей и отраженной электромагнитными волнами и постоянным ускоряющим полем (рис. 2.4). Зададим поле падающей лазерной волны в виде $\mathbf{E}_i = E_0(-\cos\theta, 0, \sin\theta) \sin(\omega_0 t - \mathbf{k}_i \mathbf{r})$, тогда поле отраженной волны запишется в виде $\mathbf{E}_r = \alpha E_0(\cos\theta, 0, \sin\theta) \sin(\omega_0 t - \mathbf{k}_r \mathbf{r})$, а постоянное ускоряющее поле зададим как $\mathbf{E}_{ac} = (0, 0, -E_{ac})$. Так как электрон нерелятивистский, то взаимодействием с магнитной составляющей поля лазера можно пренебречь. Будем рассматривать движение электрона в плоскости поляризации электромагнитной волны лазера. Для описания движения электрона воспользуемся методом Капицы (в литературе принят термин "движение частицы в быстроосциллирующем поле", но так как впервые этот метод был предложен П. Л. Капицей, то для краткости далее будем называть этот метод "методом Капицы") [33], согласно которому движение частицы в быстропеременном и медленно меняющемся полях может быть

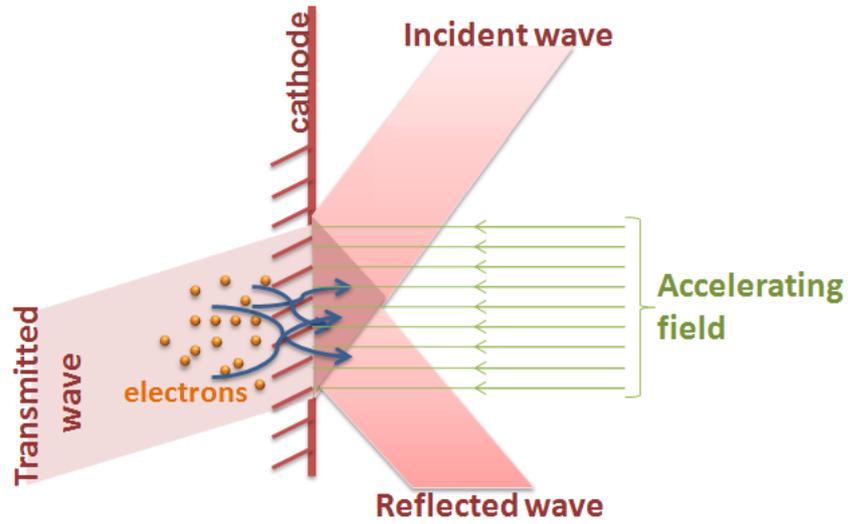


Рис. 2.4. Схематическое изображение полей и области, в которой рассматривается движение электрона.

представлено в виде суммы медленно меняющейся кривой $X_i(t)$, описывающей плавное движение, и быстрых осцилляций $\xi_i(t)$, происходящих под действием быстропеременного поля. При таком описании нет ограничений на величины внешних полей, но есть ограничение на периоды быстропеременного и медленно меняющегося полей. Данный метод тем точнее, чем больше период медленно меняющегося поля по сравнению с периодом быстропеременного поля. Тогда можем записать уравнения, описывающие плавное движение электрона, в виде:

$$m \frac{d^2 X}{dt^2} = 0, \quad (2.6)$$

$$m \frac{d^2 Z}{dt^2} = eE_{ac} - 2\alpha \frac{(eE_0 \sin \theta)^2 \cos \theta}{mc\omega_0} \sin(2kZ \cos \theta), \quad (2.7)$$

а выражения для быстрых осцилляций примет вид:

$$\xi_x(t) = -\frac{f_x(X, Z, t)}{m\omega_0^2}, \quad (2.8)$$

$$\xi_z(t) = -\frac{f_z(X, Z, t)}{m\omega_0^2}, \quad (2.9)$$

где

$$f_x(X, Z, t) = f_1 \sin(\omega_0 t) + f_2 \cos(\omega_0 t), \quad (2.10)$$

$$f_z(X, Z, t) = f_3 \sin(\omega_0 t) + f_4 \cos(\omega_0 t), \quad (2.11)$$

$$f_1 = eE_0 \cos \theta (\cos(k(Z \cos \theta + X \sin \theta)) - \alpha \cos(k(Z \cos \theta - X \sin \theta))), \quad (2.12)$$

$$f_2 = eE_0 \cos \theta (\sin(k(Z \cos \theta + X \sin \theta)) + \alpha \cos(k(Z \cos \theta - X \sin \theta))), \quad (2.13)$$

$$f_3 = -eE_0 \sin \theta (\cos(k(Z \cos \theta + X \sin \theta)) + \alpha \cos(k(Z \cos \theta - X \sin \theta))), \quad (2.14)$$

$$f_4 = eE_0 \sin \theta (\sin(k(Z \cos \theta + X \sin \theta)) - \alpha \sin(k(Z \cos \theta - X \sin \theta))) \quad (2.15)$$

Отвлекаясь от быстрых осцилляций, мы полагаем их малыми, проанализируем плавное движение электрона. Для этого перейдем к безразмерным координатам $\eta = 2kZ \cos \theta$ и сделаем переобозначение $\Omega^2 = 4\alpha(eE_0 \sin \theta)^2 k \cos^2 \theta / (m^2 c \omega_0)$, $A = 2eE_{ac} \cos \theta / m$. В новой форме уравнение примет простой и удобный для анализа вид:

$$\frac{d^2 \eta}{dt^2} + \Omega^2 \sin \eta = A \quad (2.16)$$

Для характерных значений полей в эксперименте SPARC ($E_0 = 190$ МэВ, $E_{ac} = 120$ МэВ) отношение $A/\Omega^2 \sim 10^7$ очень велико. Из последнего уравнения видно, что на плавное движение электромагнитное поле лазера не оказывает сколько-нибудь значимого эффекта. Анализ уравнения (2.16) показывает, что на плавное движение электрона действие поля лазера пренебрежимо мало, и основной вклад в движение вносит постоянное ускоряющее поле. Теперь перейдем к определению начальных условий. Так как известно, что заряженная частица в поле плоской электромагнитной волны

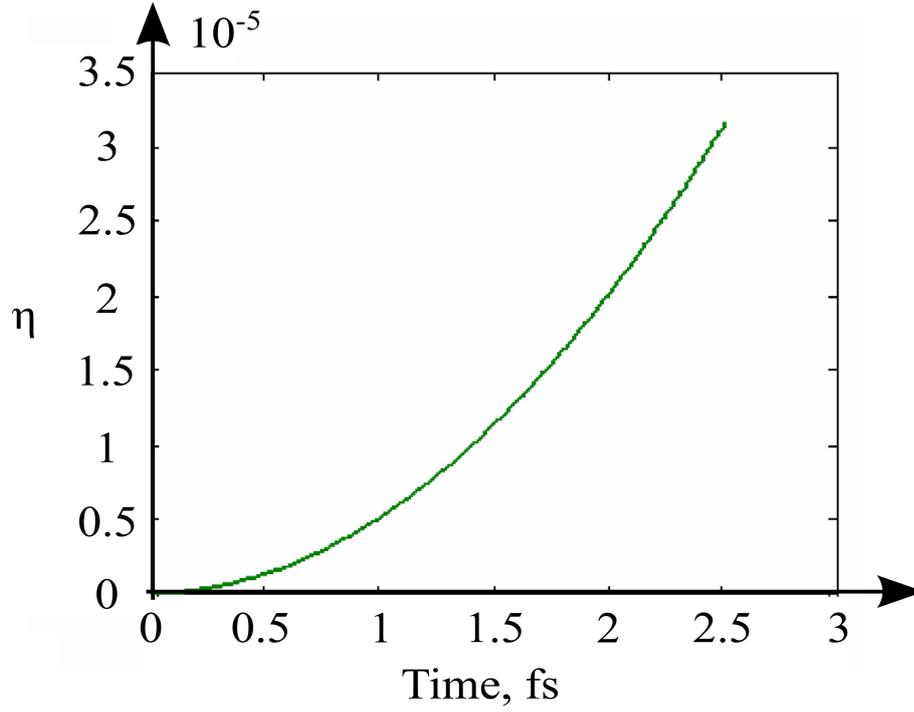


Рис. 2.5. Зависимость безразмерной координаты η от времени; аналитическое решение в пренебрежении членом $\Omega^2 \sin \eta$ и численное решение с учетом этого члена, отличие двух решений $\epsilon \sim 10^{-6}\%$.

получает постоянную скорость дрейфа, то это должно оказывать серьезное влияние на ее движение. Решение уравнений движения, описывающих плавное движение, имеет вид:

$$Z(t) = \frac{eE_{ac}}{2m}t^2 + C_2t + C_3, \quad (2.17)$$

$$X(t) = C_0t + C_1 \quad (2.18)$$

Подставляя начальные условия, получим систему уравнений для нахождения постоянных интегрирования:

$$z_0 = C_3 - \frac{1}{m\omega_0^2}f_4(C_3, C_1), \quad (2.19)$$

$$x_0 = C_1 - \frac{1}{m\omega_0^2}f_2(C_3, C_1), \quad (2.20)$$

$$v_{z0} = C_2 - \frac{1}{m\omega_0} f_3(C_3, C_1), \quad (2.21)$$

$$v_{x0} = C_0 - \frac{1}{m\omega_0} f_1(C_3, C_1) \quad (2.22)$$

Учитывая числовые выражения величин, входящих в вышеприведенную систему, можем приблизительно (с высокой степенью точности $\sim 10^{-11}$ м) записать $z_0 \approx C_3, x_0 \approx C_1$. Тогда значения постоянных C_0, C_2 , соответствующих начальным условиям для плавного движения, можно выразить через начальные скорости и координаты:

$$C_2 = v_{z0} + \frac{1}{m\omega_0} f_3(z_0, x_0), \quad (2.23)$$

$$C_0 = v_{x0} + \frac{1}{m\omega_0} f_1(z_0, x_0) \quad (2.24)$$

Из уравнений (2.23), (2.24) видно, что за счет скорости дрейфа, приобретенной от поля электромагнитных волн, пучок электронов будет модулирован в соответствии с формой поля и его волновыми векторами. В данном случае именно скорость дрейфа будет определяющим фактором модуляции пучка невзаимодействующих между собой электронов [81]. Как будет показано в главе 3, учет взаимодействия не влияет на выводы, сделанные в этом параграфе. В зависимости от коэффициента отражения будет меняться амплитуда малых колебаний, а также форма модулированного пучка. Причем в случае полного отражения при нулевых начальных скоростях возможно ярко выраженное разделение пучка на микробанчи, но такая картина не будет стабильной во времени.

2.3 Электромагнитное излучение пучка электронов у поверхности фотокатода

Рассмотрим спектральное распределение энергии излучения пучка электронов у поверхности фотокатода. Начнем со спектра излучения одно-

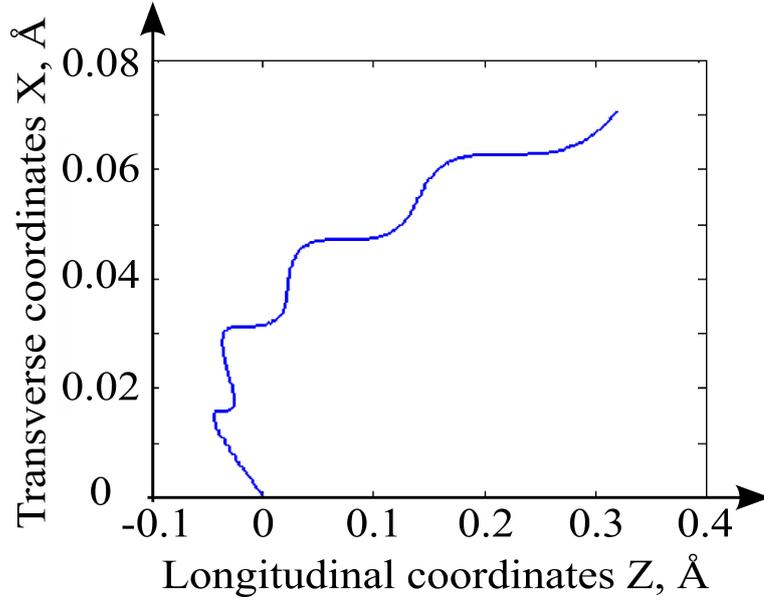


Рис. 2.6. Траектория электрона в плоскости поляризации лазерной волны. Как видно из графика, электрон некоторое время движется в сторону, совпадающую с направлением постоянного ускоряющего поля.

го электрона. Так как электрон нерелятивистский, то энергия излучения будет определяться выражением [34]:

$$dW = \frac{2e^2}{3\pi c^3} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \ddot{\mathbf{r}}(t) e^{i\omega t} dt \right|^2 d\omega \quad (2.25)$$

Интеграл Фурье в нашем случае ограничивается временем действия лазера τ . Спектр излучения электрона будет складываться из движения под действием постоянного ускоряющего поля и поля лазерной волны. Можно показать, что при больших значениях частоты излучения вклад тормозного излучения от постоянного ускоряющего поля будет пренебрежимо мал. Сделаем переобозначения:

$$a = \frac{\omega_0 e E_{ac} \cos \theta}{2mc}, b_1 = \omega_0 \left(\frac{C_2 \cos \theta + C_0 \sin \theta}{c} + 1 \right), \beta_2 = \omega_0 \frac{z_0 \cos \theta - x_0 \sin \theta}{c}$$

$$b_2 = \omega_0 \left(\frac{C_2 \cos \theta - C_0 \sin \theta}{c} - 1 \right), \beta_1 = \omega_0 \frac{z_0 \cos \theta + x_0 \sin \theta}{c}$$

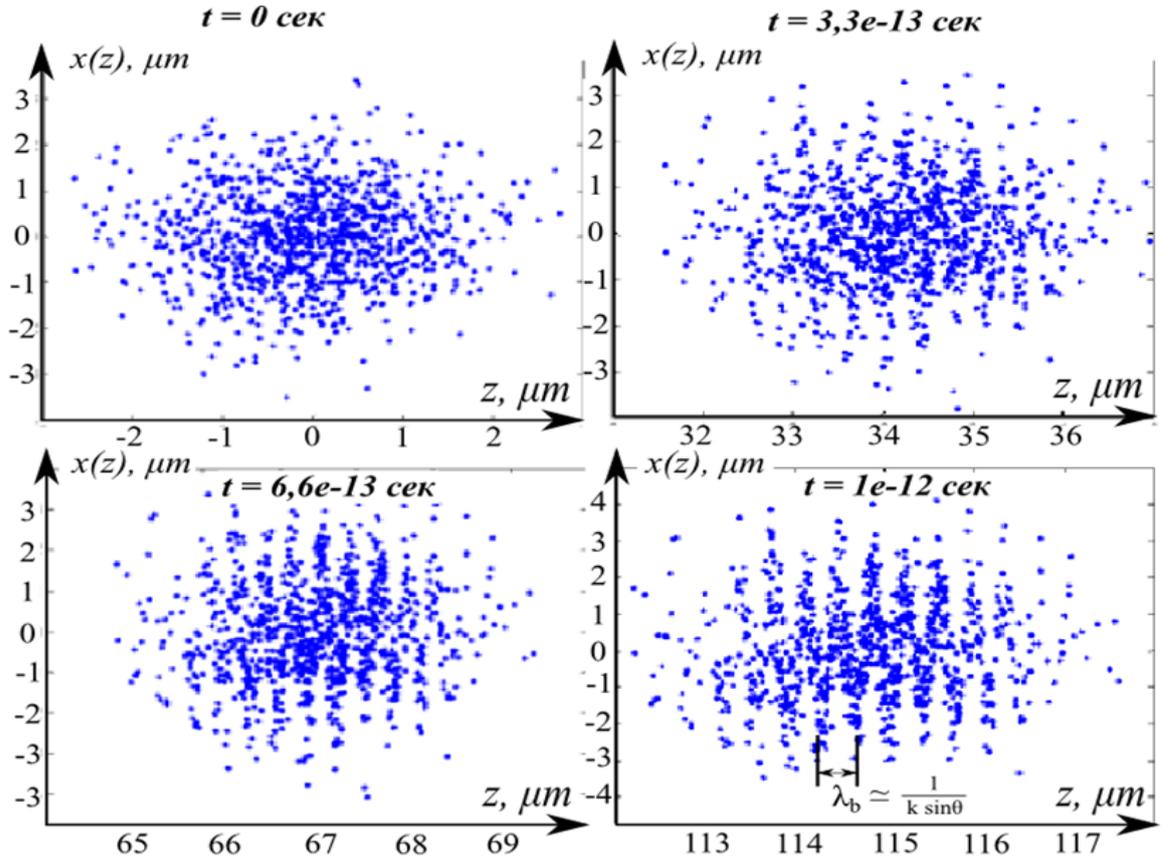


Рис. 2.7. Пространственное распределение невзаимодействующих между собой электронов в различные моменты времени. Полная модуляция происходит в момент времени $t \sim 10^{-12}$ с.

где постоянные C_2 , C_0 входящие в b_1 , b_2 представляют собой начальную скорость плавного движения электрона, а так как электрон нерелятивистский, то этими константами можно пренебречь по сравнению со скоростью света. Опуская вычислительные подробности, получим следующее выражение для распределения излученной энергии одним электроном:

$$f_1(\omega) = \gamma \left[\sin^2 \theta |G_1 + \alpha e^{i\Delta\beta} G_2|^2 + \cos^2 \theta |G_1 - \alpha e^{i\Delta\beta} G_2|^2 \right], \quad (2.26)$$

где

$$\gamma = \frac{1}{12ac^3} \left(\frac{e^2 E_0}{m} \right)^2, \quad \Delta\beta = 2kz_0 \cos \theta,$$

$$G_1(\omega) = e^{i(\omega - \omega_0)^2/a} (C(\phi - \phi_0) - C(-\phi) - i(S(\phi_0 - \phi) - S(-\phi))),$$

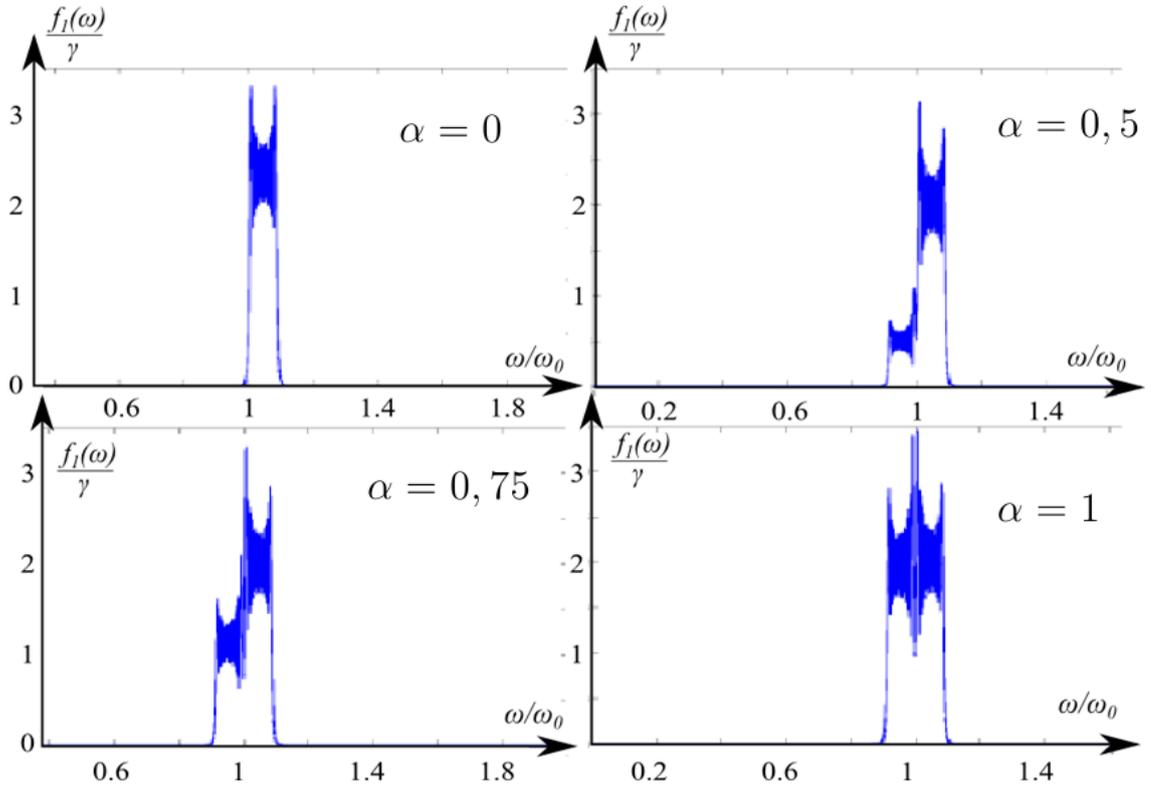


Рис. 2.8. Спектральное распределение излучения одного электрона при различных α .

$$G_2(\omega) = e^{-i(\omega-\omega_0)^2/a} (C(\phi + \phi_0) - C(\phi) + i(S(\phi_0 + \phi) - S(\phi))),$$

$$\phi_0 = \sqrt{\frac{2a}{\pi}}\tau, \phi = \sqrt{\frac{2}{a\pi}}(\omega - \omega_0)$$

Функции $C(x)$, $S(x)$ - интегралы Френеля. Ширина пика на полувысоте пропорциональна длительности лазерного импульса $\Delta\omega \approx \sqrt{2/a\pi}\omega_0\tau$. Ширина пика обусловлена главным образом наличием ускорения электрона, а не конечностью лазерного импульса. Так как излучение должно наблюдаться в процессе генерации пучка из какой-то начальной плоскости, выберем плоскость $z = 0$. Тогда функция распределения излучения может быть записана в виде:

$$f_1(\omega) = \gamma \left[\sin^2 \theta |G_1 + \alpha G_2|^2 + \cos^2 \theta |G_1 - \alpha G_2|^2 \right] \quad (2.27)$$

Суммарное излучение пучка электронов будет зависеть от поперечного размера пучка и распределения электронов в пространстве [14, 55], а функция распределения мощности излучения запишется в виде [14]:

$$d^2W_N = \left(N + N(N-1) (\overline{\cos \phi_0})^2 \right) d^2W_1, \quad (2.28)$$

где $\phi_0 = \mathbf{k}_\perp \mathbf{r}_\perp$ - начальная фаза электрона. В первом параграфе была найдена функция распределения пучка фотоэлектронов в поперечном направлении к оси Oz . Используя (2.5), можно вычислить среднее значение косинуса начальной фазы, входящей в (2.28). Тогда функция спектрального распределения пучка электронов, после суммирования по углам, примет вид:

$$f_N(\omega) = N(t) f_1(\omega), \quad (2.29)$$

где $N(t)$ - полное число фотоэлектронов, выбиваемых из катода в зави-

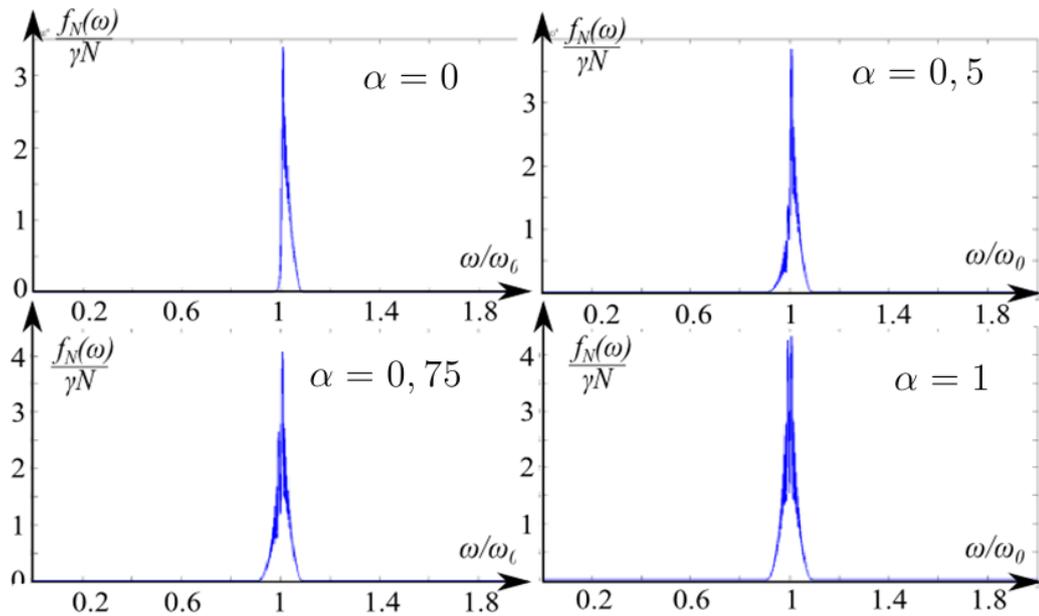


Рис. 2.9. Спектральное распределение излучения пучка фотоэлектронов в момент генерации и формирования при различных α .

симости от времени. Как видно из (2.29), вклад в спектральную интенсив-

ность излучения будут давать некогерентные процессы [82]. Считая, что зависимость количества фотоэлектронов от времени линейна $N(t) = N_0 t / \tau$, где N_0 - полное число выбитых электронов за время действия лазерного импульса, можно посчитать спектр излучения всего пучка. Однако необходимо учесть тот факт, что не все электроны будут излучать в течение времени τ , и это обстоятельство отразится на одночастичной функции распределения $f_1(\omega) = f_1(\omega, \tau - t)$. График спектрального распределения излучения представлен на рис. 4.3.

В данной главе были рассмотрены особенности движения электронов в поле электромагнитной волны и ускоряющем поле. Было показано, что в такой конфигурации полей возможна модуляция пучка невзаимодействующих между собой электронов. За модуляцию пучка ответственна постоянная скорость дрейфа, которую электроны получают от электромагнитной волны. На основе качественного анализа процесса фотоэффекта найдена функция распределения пучка электронов в пространстве при нормальном падении лазерного импульса на поверхность катода. Показана зависимость распределения электронов в пространстве от формы и длительности лазерного импульса при падении под углом. Найдено распределение интенсивности электромагнитного излучения пучка электронов, показаны особенности спектрального распределения излучения электронов в прикатодной области в момент генерации.

Глава 3

Каналирование электрона в скрещенном электромагнитном поле

В задаче о генерации электронного пучка в процессе фотоэффекта, рассмотренной в предыдущей главе, влияние ускоряющего поля намного превосходит действие других полей на частицы, а тонкости динамики пучка на начальном этапе не представляют большого интереса. Хотя, очевидно, при определенных условиях возможно "связывание" некоторых электронов суммарным лазерным полем и возможно каналирование электронов в потенциальной яме стоячей лазерной волны. Действительно, суммарное лазерное поле характеризуется стоячей волной, которая ответственна за формирование потенциальной ямы. Последняя, в свою очередь, затягивает часть электронов. Связанное движение таких электронов аналогично каналированию частиц в кристаллах. И в том, и другом случаях мы имеем дело с преимущественным распространением частиц в строго ориентированном поле. В данной главе приводится упрощенный анализ такого процесса, также показана возможность разделения первоначального пучка на ускоренную и "замороженную" части. Замороженные электроны, в свою очередь, каналируют в поперечном к ускоряющему полю направлении. Как будет видно в дальнейшем, этот факт представляет большой интерес, а рассмотрение задач о движении релятивистского электрона в поле стоячей электромагнитной волны может оказаться очень полезным для практического применения.

3.1 Формирование устойчивых каналов в скрещенных электромагнитных полях

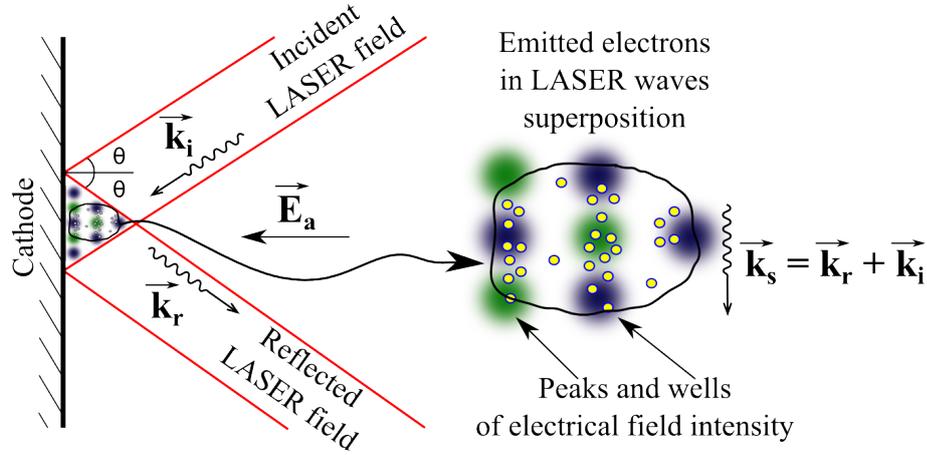


Рис. 3.1. Качественный вид исследуемой системы. Здесь \mathbf{k}_i — волновой вектор падающей волны лазерного излучения, \mathbf{k}_r — волновой вектор волны лазерного излучения, отраженной от катода, \mathbf{k}_s — волновой вектор электромагнитного излучения, являющегося результатом сложения падающей и отраженной волн, \mathbf{E}_a — постоянное ускоряющее электрическое поле, θ — угол падения лазерного излучения на плоскость катода.

Задача о взаимодействии электрона с полем стоячей волны рассматривалась в [83–85]. В этих работах авторы рассматривали рассеяние электронов в отличие от задачи рассматриваемой далее. Рассмотрим одиночный нерелятивистский электрон в поле двух плоских электромагнитных волн (как схематически показано на рис. 3.1): падающей $\mathbf{E}_i = E_0(\cos \theta, 0, -\sin \theta) \sin(\omega_0 t + k(z \cos \theta + x \sin \theta))$, отраженной $\mathbf{E}_r = E_0(-\cos \theta, 0, -\sin \theta) \sin(\omega_0 t - k(z \cos \theta - x \sin \theta))$ и в постоянном ускоряющем поле $\mathbf{E}_a = (0, 0, -E)$. Уравнения движения в проекциях на оси координат примут вид:

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = eE \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(x, z) & f_2(x, z) \\ f_3(x, z) & f_4(x, z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(\omega_0 t) \\ \cos(\omega_0 t) \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

где

$$\begin{aligned}
f_1 &= -2eE_0 \cos \theta \sin(kz \cos \theta) \sin(kx \sin \theta), \\
f_2 &= 2eE_0 \cos \theta \sin(kz \cos \theta) \cos(kx \sin \theta), \\
f_3 &= -2eE_0 \sin \theta \cos(kz \cos \theta) \sin(kx \sin \theta), \\
f_4 &= -2eE_0 \sin \theta \cos(kz \cos \theta) \cos(kx \sin \theta).
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Как и в главе 2, будем искать решение согласно [33]: траектория электрона $x_i = X_i + \xi_i$ будет представлять собой плавную кривую X_i , вдоль которой будут совершаться быстрые осцилляции ξ_i . Отвлекаясь от малых осцилляций (порядок $\xi_i \sim eE_0/m\omega_0^2$), рассмотрим плавное движение электрона и введем эффективную потенциальную энергию взаимодействия электрона с суммарным полем:

$$\begin{aligned}
U_{eff} &= -eEz + \frac{1}{4m\omega_0^2} \left(f_3^2 + f_4^2 + 2 \int \left(f_1 \frac{\partial f_3}{\partial x} + f_2 \frac{\partial f_4}{\partial x} \right) dz \right) = \\
&= -eEz + \frac{(eE_0)^2}{m\omega_0^2} \sin^2 \theta \cos(2kz \cos \theta) + U_0
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Как видно, эффективная энергия зависит пространственно только от координаты z . Сделав переобозначения $\alpha = eE_0^2 \sin^2 \theta k \cos \theta / (m\omega_0^2 E)$ и $\phi = 2kz \cos \theta$ для этого выражения и отбрасывая постоянное слагаемое, так как оно не влияет на движение электрона, рассмотрим функцию:

$$f(\phi) = \frac{U_{eff} 2k \cos \theta}{eE} = -\phi + \alpha \cos \phi \tag{3.4}$$

Нужно отметить, что $\alpha \sim A_0/A_{ac}$ характеризует отношение работы лазерного поля при перемещении заряда на величину малого отклонения ξ к работе постоянного ускоряющего поля при перемещении заряда на расстояние порядка длины волны лазерного излучения. Функция $f(\phi)$ представляет собой безразмерную эффективную потенциальную энергию электрона в суммарном поле. Как видно из выражения для эффективной энергии, при $\alpha \geq 1$ ($A_0 \geq A_{ac}$) возможно образование связанных состояний. Случай

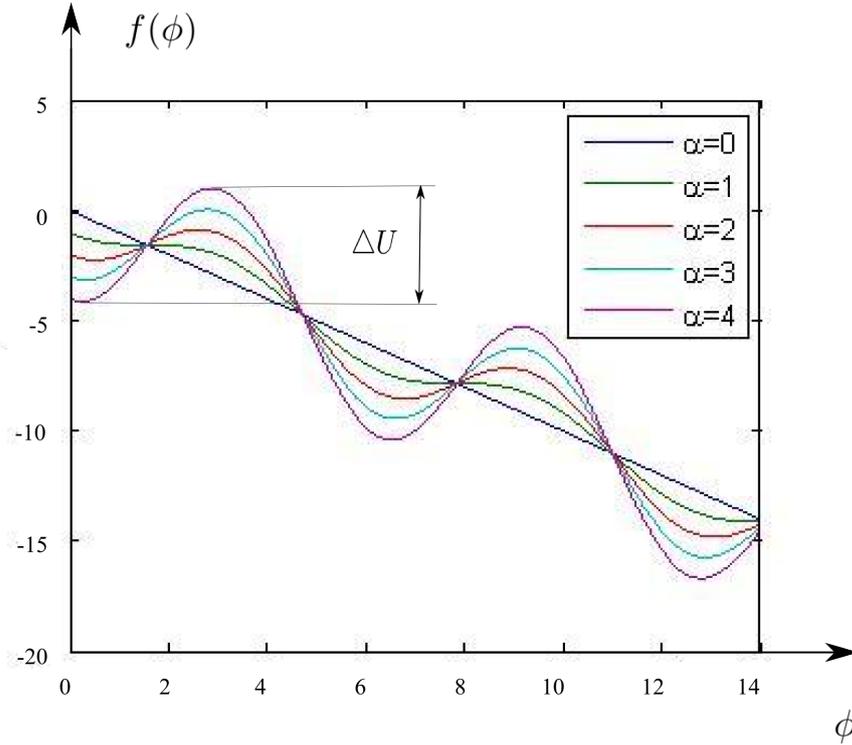


Рис. 3.2. Зависимость безразмерной потенциальной энергии $f(\phi)$ от безразмерной координаты ϕ при различных значениях параметра α . Для значений $\theta = \pi/6$, $\omega_0 = 7 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$ напряженности электромагнитных полей связаны с α соотношением $E = 3,6 \cdot 10^{-14} E_0^2 / \alpha$ (напряженности имеют размерность В/м, $\alpha \neq 0$). Для напряженности $E_0 = 10^8 \div 10^{11} \text{ В/м}$ и $\alpha = 4$ глубина каждой потенциальной ямы $\Delta U \approx 10^{-4} \div 10^2 \text{ эВ}$.

$\alpha \ll 1$ был рассмотрен ранее в главе 2, где было показано, что пучок становится модулированным, но никаких связанных состояний не образуется. Рассмотрим проекцию на ось Oz уравнения, описывающего плавную траекторию частицы:

$$m\ddot{Z}(t) = eE - eE\alpha \sin(2kZ \cos \theta) \quad (3.5)$$

Перепишем уравнение движения, заменяя координату $Z(t)$ на $\phi(t) = 2kZ(t) \cos \theta$, и вводим переобозначение $a = eE2k \cos \theta / m$, $b = \alpha eE2k \cos \theta / m$; тогда уравнение примет вид:

$$\ddot{\phi}(t) = a - b \sin \phi \quad (3.6)$$

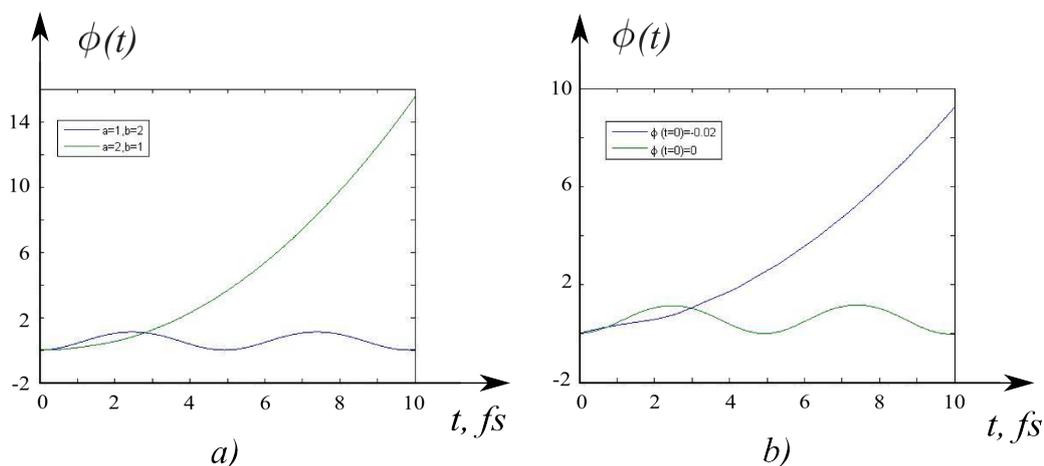


Рис. 3.3. Зависимость безразмерной координаты $\phi(t)$ от времени t а) при различных константах a и b и одинаковых начальных условиях. Видно, что для синей кривой условие захвата выполняется и частица совершает вдоль оси Oz финитное движение, а для зеленой кривой условие захвата не выполняется и частица улетает на бесконечность, б) при $a = 1$, $b = 2$ и различных начальных условиях. Здесь условие захвата выполняется, однако в зависимости от начального положения частицы она либо ускоряется (синяя кривая) либо совершает финитное движение.

Таким образом, в новых обозначениях условие образования связанных состояний $\alpha > 1$ принимает вид $b > a$. Как видно из графика, изображенного на рис. 3.3.а, при выполнении условия $b > a$ график представляет собой кривую, сформированную несколькими потенциальными ямами, ответственными за связанное движение электронов. На рис. 3.3.б изображены зависимости безразмерной продольной координаты от времени при различных начальных условиях (различные начальные координаты). Из графиков видно, что если частица в начальный момент времени попала на "гребень" потенциальной энергии (все начальные скорости равны нулю), то частица будет ускоряться. Если же в начальный момент времени частица находилась в "яме", то она оказывается в связанном состоянии и совершает колебания около постоянного положения равновесия.

3.2 Связанное движение электрона в поле стоячей лазерной волны

В силу использованного метода скорость электрона будет складываться из скорости, описывающей плавное движение, и скорости, отвечающей за быстрые осцилляции: $v_i = V_i + \dot{\xi}_i$. Начальная скорость, описывающая плавную траекторию, в зависимости от истинной скорости, может оказаться достаточно высокой для образования связанных состояний. Если начальная скорость плавного движения будет положительной и такой, что $E_k = mV^2/2 > \alpha eE$, то даже при выполнении условия захвата связанные состояния не могут образовываться. Для нахождения начальных скоростей, при которых образование таких состояний возможно, необходимо решить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x_0 = C_2 + \frac{2eE_0}{m\omega_0^2} \cos\theta \sin(kZ_0 \cos\theta) \cos(kC_2 \sin\theta), \\ z_0 = Z_0 - \frac{2eE_0}{m\omega_0^2} \sin\theta \cos(kZ_0 \sin\theta) \cos(kC_2 \sin\theta), \end{cases} \quad (3.7)$$

где x_0, z_0 — произвольные начальные координаты. Определяя константы, начальное значение проекции скорости на ось Oz , можно записать в виде:

$$v_{z0} = -\frac{2eE_0}{m\omega_0} \sin\theta \cos(kZ_0 \cos\theta) \cos(kC_2 \sin\theta) \quad (3.8)$$

Нами был использован метод Ньютона ввиду простоты его реализации и скорости сходимости. Его квадратичная сходимость [86] дает задаваемую точность решения за малое число шагов.

В результате решения этим методом системы (3.7) найдены Z_0 и C_2 , которые, как оказалось, пренебрежительно мало отличаются от соответствующих им начальных координат x_0 и z_0 электронов моделируемого ансамбля.

Более того, разница значений $v_{z0}(x_0^i, z_0^i)$ и $v_{z0}(C_2^i, Z_0^i)$ составляет тысячную долю от $v_{z0}(C_2^i, Z_0^i)$, где x_0^i и z_0^i соответствуют i -м значениям C_2^i и Z_0^i .

В таком случае можем для нахождения искомой проекции начальной скорости на ось Oz , при которой возможно образование ”вмороженных” состояний, напрямую использовать начальные координаты частиц. Данные v_{z0} использовались в компьютерном эксперименте. Результаты моделирования подтвердили наличие связанных состояний электронов в полях описанной конфигурации. Максимальные скорости, достигаемые частицами за время в 100 пкс на 3 порядка меньше скорости света, что оправдывает пренебрежение составляющей силы Лоренца, обусловленной взаимодействием с магнитным полем волны (рис.3.4-3.6). Остается интересным

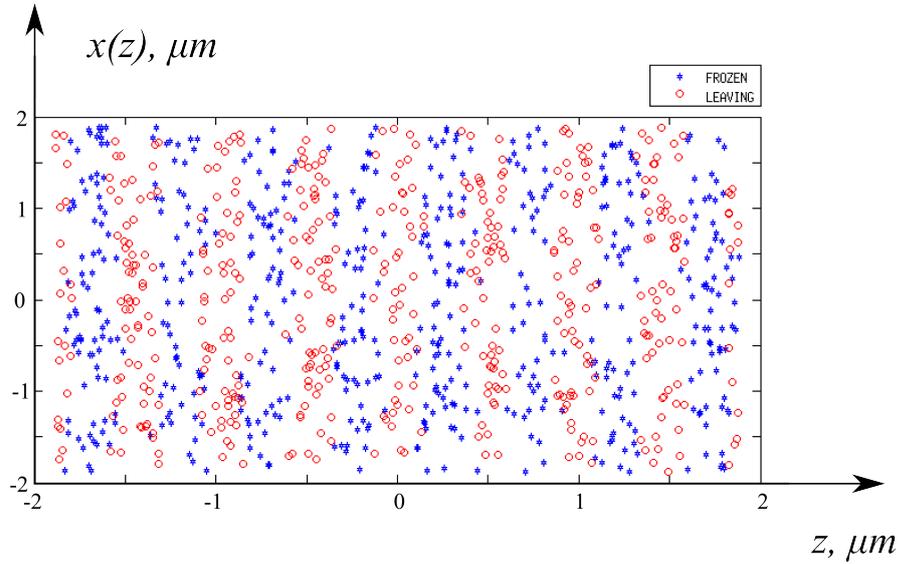


Рис. 3.4. Координаты ”вмороженных” электронов (”*FROZEN*”) и несвязанных (”*LEAVING*”) $x(z)$ в момент времени $t = 0$.

вопрос, как на характер движения электронов повлияет их взаимодействие между собой. Так как электроны нерелятивистские, то можно пренебречь магнитным полем, созданным электронами. Тогда поле, создаваемое всеми электронами в точке \mathbf{r}_i нахождения i -го электрона в момент времени t , будет равно:

$$\varphi_i = - \sum_{j \neq i}^N \frac{e}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|} \quad (3.9)$$

Представляя движение электрона в виде плавной кривой \mathbf{R}_i и малых быстрых осцилляций $\delta \mathbf{r}_i$, перепишем потенциал в виде (как и ранее, полагая

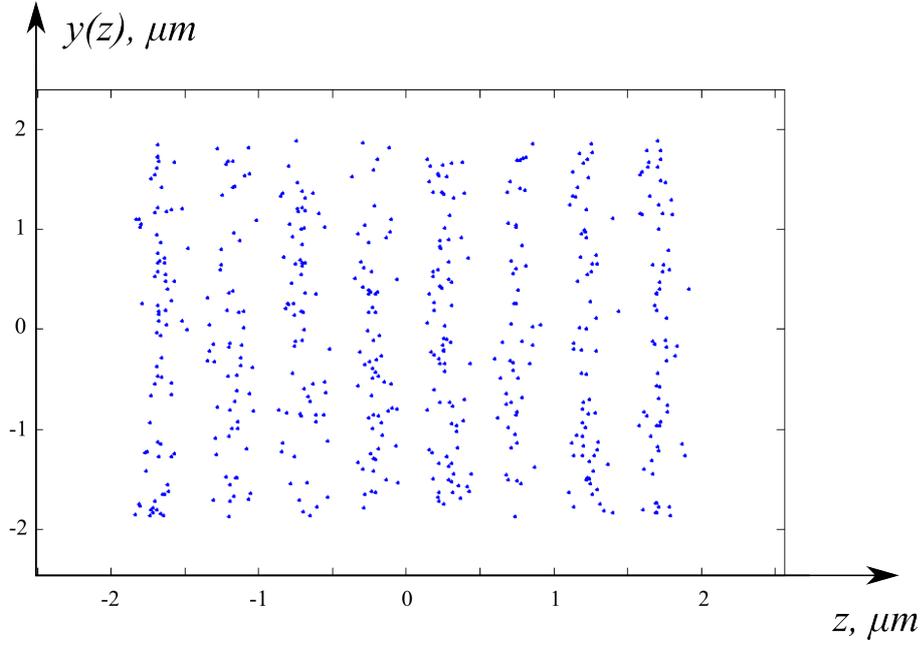


Рис. 3.5. Координаты "вмороженных" электронов $y(z)$ в момент времени $t = 1$ пкс.

$|\delta \mathbf{r}| \ll |\mathbf{r}|$):

$$\varphi_i \approx - \sum_{j \neq i}^N \frac{e}{|\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_i|} - \sum_{j \neq i}^N \frac{e (\delta \mathbf{r}_j - \delta \mathbf{r}_i) (\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_i)}{|\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_i|^3} = \bar{\varphi}_i + \delta \varphi_i, \quad (3.10)$$

где $\bar{\varphi}_i$ — плавно меняющаяся со временем функция, $\delta \varphi_i$ — малая ($|\delta \varphi_i| \ll |\bar{\varphi}_i|$) быстро осциллирующая функция. Тогда условие образования связанных состояний примет вид:

$$\alpha(t) = 2 \frac{e E_0^2 \sin^2 \theta k \cos \theta}{m \omega_0^2} \left(E + \frac{\partial \bar{\varphi}(t)}{\partial z} \right)^{-1} > 1 \quad (3.11)$$

Как видно из приведенного выражения, коэффициент α будет зависеть, вообще говоря, от координат и времени: $\alpha \equiv \alpha(z, t)$. Однако, не зная явного вида функции $\bar{\varphi}(z, t)$, можно сделать определенные выводы относительно условия захвата. Пусть в любой момент времени выполняются условие $E > \bar{\varphi}'_z$ (сила взаимодействия между электронами меньше силы, действующей на электрон со стороны постоянного поля), условие захвата в пренебре-

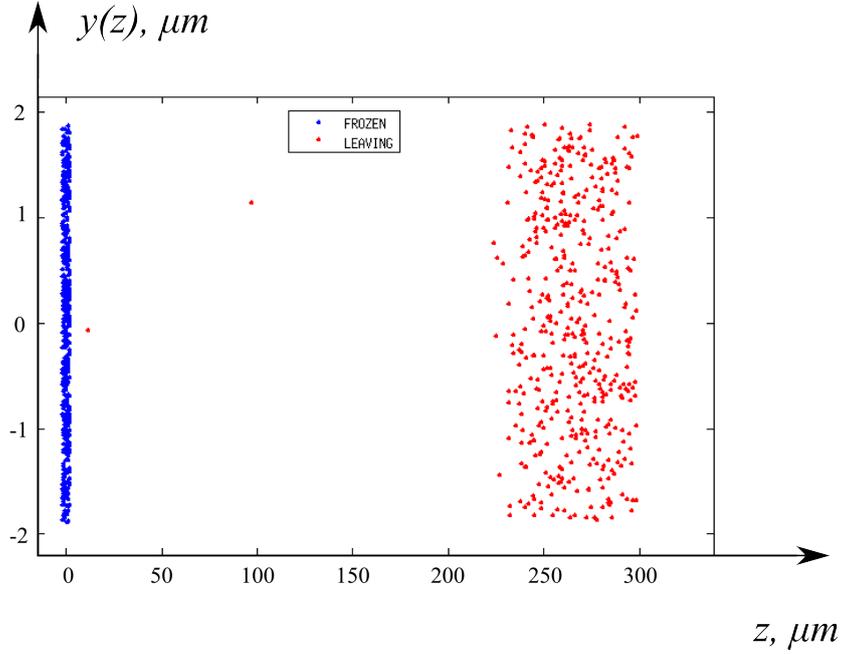


Рис. 3.6. Координаты ”вмороженных” (”FROZEN”) и несвязанных (”LEAVING”) электронов $y(z)$ в момент времени $t = 1$ пкс.

жении взаимодействием между электронами $\alpha > 1$ (напряженности поля лазера E_0 и постоянного ускоряющего поля E связаны с α как и ранее), и пусть пучок симметричен в любой момент времени относительно какой-либо плоскости $z = z_0(t)$. Тогда функция $\bar{\varphi}'_z$ будет иметь разные знаки в точках слева и справа от $z_0(t)$, следовательно, в любой момент времени, по крайней мере для половины электронов, условие захвата будет выполняться. Говоря на языке каналирования, можно ввести условие, необходимое для захвата электрона каналом (рис.3.7); угол влета электрона в канал должен удовлетворять условию:

$$\operatorname{tg} \beta < \frac{\sqrt{2m\Delta U}}{p_x}, \quad (3.12)$$

где ΔU — глубина потенциальной ямы, зависящая от напряженности поля лазера как:

$$\Delta U = \frac{e^2 E_0^2 \sin^2 \theta}{m\omega_0^2 \alpha} \left[2 \left(\arcsin(\alpha^{-1}) + \sqrt{\alpha^2 - 1} \right) - \pi \right], \alpha \geq 1 \quad (3.13)$$

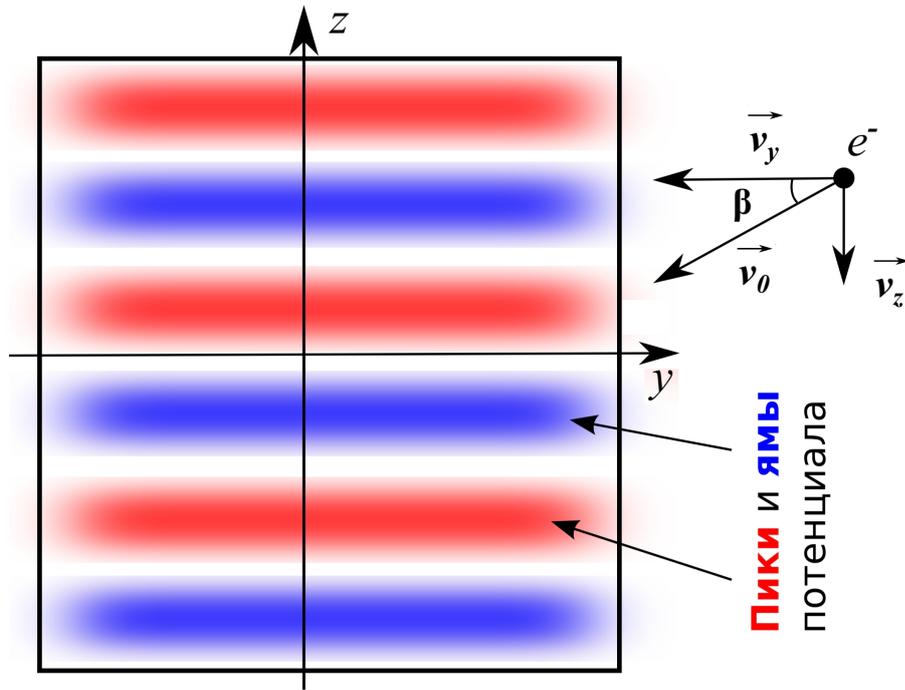


Рис. 3.7. Схематическое изображение каналов и направления влета электрона.

Следовательно, при увеличении напряженности поля лазера на порядок, глубина ямы увеличивается на два порядка при постоянных θ , ω_0 , α [87,88]. Из результатов решения задачи можно сделать одно важное замечание о возможности фокусировки и модуляции электронного пучка, транспортируемого в поле лазерной волны, распространяющейся в волноводе [89,90]. В отличие от рассмотренной модели в цилиндрическом волноводе (капилляре) возможно формирование кольцевых стоячих волн, что равносильно формированию аксиальных концентрических каналов, потенциальных ям, способных захватывать часть пучка электронов. Распространение лазера в волноводе (капилляре) и взаимодействие пучка электронов с суммарной электромагнитной волной будут рассмотрены в следующих параграфах.

3.3 Каналирование электрона в поле электромагнитной волны, распространяющейся в прямоугольном волноводе

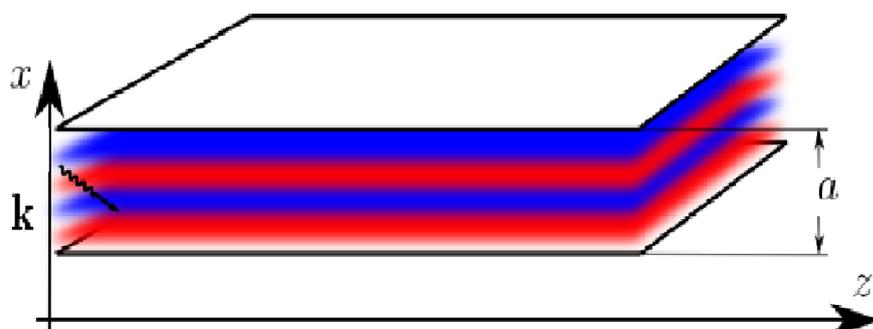


Рис. 3.8. Схематическое изображение плоского волновода и распространяющейся электромагнитной волны. Красным цветом показаны максимумы амплитуды волны, а синим - минимумы.

Впервые задача о каналировании релятивистских заряженных частиц в скрещенных электромагнитных полях была рассмотрена в [91], но без определения явного вида эффективных потенциалов. Указать на области образования каналов при распространении электромагнитной волны в волноводе можно усреднив энергию электромагнитного поля по его частоте (или найти моды колебаний) [92,93], но, как будет показано далее, этот подход неточен. Рассмотрим электромагнитную волну, распространяющуюся в волноводе, образованном двумя бесконечными плоскостями. Направим оси координат как показано на рис. 3.8. Пусть в волноводе распространяется волна электрического типа $H_z = 0, E_z \neq 0$, тогда для определения компоненты поля E_z получим систему уравнений [94, 95]:

$$\nabla^2 E_z - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_z = 0, \quad (3.14)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (3.15)$$

$$E_z(x = 0, a) = 0 \quad (3.16)$$

Обычно в задачах о распространении электромагнитных волн в волноводах работают с напряженностями полей, но для наших целей удобнее перейти к потенциалам поля. Введем потенциалы электромагнитного поля \mathbf{A} , φ , и наложим на потенциалы дополнительное условие $\varphi = 0$, тогда напряженности полей будут определяться выражениями:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (3.17)$$

$$\mathbf{H} = [\nabla, \mathbf{A}] \quad (3.18)$$

Тогда для компоненты векторного потенциала получим систему:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) A_z - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} A_z = 0, \quad (3.19)$$

$$A_z(t, x = 0, a) = 0 \quad (3.20)$$

Будем искать решение уравнения в виде бегущих в направлении оси Oz волн $A_z = u(x) \sin(\omega t - k_z z)$, тогда получим следующее уравнение для функции $u(x)$:

$$u_{xx} + k_x^2 u = 0, \quad k_x^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2, \quad (3.21)$$

$$u(x = 0, a) = 0 \quad (3.22)$$

Решением приведенного уравнения является функция $u(x) = u_0 \sin(k_x x)$, где $k_x = n\pi/a$, $n \in N$, тогда для компоненты векторного потенциала получим:

$$A_z = u_0 \sin(k_x x) \sin(\omega t - k_z z) \quad (3.23)$$

используя дополнительное условие $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, находим вторую компоненту векторного потенциала:

$$A_x = -u_0 \frac{k_z}{k_x} \cos(k_x x) \cos(\omega t - k_z z) \quad (3.24)$$

Рассмотрим движение электрона в волноводе с приведенными полями и в постоянном ускоряющем поле $U = eE_0z$. В пренебрежении взаимодействием электрона с веществом волновода. Будем рассматривать задачу о движении релятивистского электрона в направлении оси волновода. Пусть до взаимодействия с электромагнитным полем электрон имел скорость $v_z(t=0) = v_0 \rightarrow c$ вдоль оси волновода, которой соответствует Лоренц-фактор γ_0 . Для $\gamma_0 = 10$ скорость v_0 отличается от скорости света на величину $c - v_0 \sim 10^{-2}c$, и это очень важно, если мы хотим применить метод Капицы для описания релятивистского движения заряженной частицы в поле электромагнитных волн, так как фаза электромагнитной волны равна $\phi = \omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}$. А при движении релятивистского заряда в таком поле частота колебаний поля сильно меняется, и становится невозможным разделить радиус вектор на два: медленно меняющийся и быстро осциллирующий векторы. Перейдем к новым переменным z', P'_z с помощью производящей функции $S = (z - v_0t)P'_z, \mathbf{r}'_{\perp} = \mathbf{r}_{\perp}, \mathbf{P}'_{\perp} = \mathbf{P}_{\perp}$ [33,34]. Тогда, записывая уравнения Гамильтона и переходя от обобщенных импульсов к кинематическим, получим систему уравнений движения:

$$\dot{p}'_i = -\frac{e}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{e}{c} v_0 \frac{\partial A_z}{\partial x'_i} - \frac{e}{c} \dot{x}'_j \left(\frac{\partial A_i}{\partial x'_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x'_i} \right) - \frac{\partial U}{\partial x'_i}, \quad (3.25)$$

$$\dot{x}'_i = \frac{cp'_i}{\sqrt{(mc)^2 + p'_j p'_j}} - v_0 \delta_{i,z} \quad (3.26)$$

Теперь представим траекторию электрона в виде $x'_i = X_i + \xi_i$ плавной медленно меняющейся со временем кривой X_i и быстрых малых осцилляций ξ_i (также полагая скорость быстрых осцилляций много меньше скорости света $\dot{\xi}_i \ll c$) и применим метод Капицы для движения частицы в быстроосциллирующем поле, уравнения движения можем записать в виде:

$$\dot{P}_{xi} + \dot{p}_{\xi i} = f_i \left(\mathbf{X}, \frac{\dot{\mathbf{X}}}{c}, t \right) + \xi_j \left. \frac{\partial f_i}{\partial x'_j} \right|_{\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}} + \dot{\xi}_j \left. \frac{\partial f_i}{\partial \dot{x}'_j} \right|_{\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}} - \left. \frac{\partial U}{\partial x'_i} \right|_{\mathbf{X}} \quad (3.27)$$

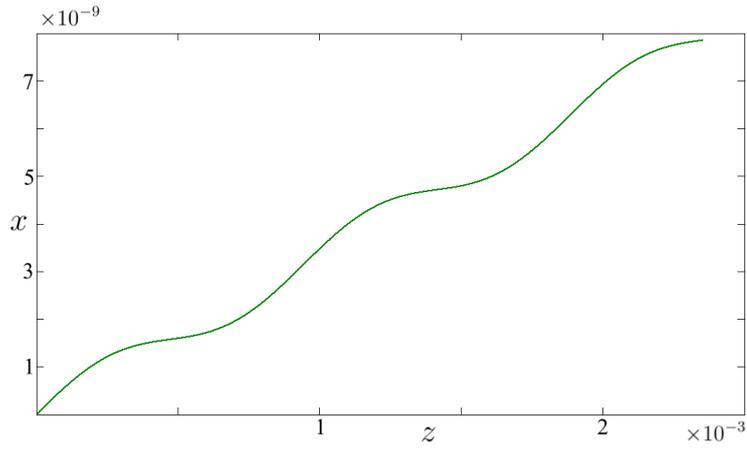


Рис. 3.9. На графике изображены две кривые. Одна кривая — это траектория электрона в пространстве вычисленная численно точно, а вторая, в соответствии с методом Капицы. Эти два решения практически полностью совпадают, абсолютная ошибка $|x_i^e - x_i^a| \sim 10^{-15}$ см, что подтверждает правильность описываемого подхода к решению подобных задач.

$$\begin{aligned} \dot{X}_i + \dot{\xi}_i = & \frac{cP_{xi}}{\sqrt{(mc)^2 + P_{xj}P_{xj}}} + \frac{cP_{\xi i}}{\sqrt{(mc)^2 + P_{xj}P_{xj}}} - \\ & - \frac{cP_{xi}P_{xj}P_{\xi j}}{((mc)^2 + P_{xj}P_{xj})^{3/2}} - v_0\delta_{i,z} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Разделяя в приведенной системе функции разного характера (быстро и медленно меняющиеся) и усредняя систему уравнений для медленно меняющихся функций, получим систему уравнений, описывающих плавное движение:

$$\dot{P}_{xi} = - \left. \frac{\partial U}{\partial x'_i} \right|_{\mathbf{X}} + \overline{\xi_j \left. \frac{\partial f_i}{\partial x'_j} \right|_{\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}}} + \overline{\dot{\xi}_j \left. \frac{\partial f_i}{\partial \dot{x}'_j} \right|_{\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}}}, \quad (3.29)$$

$$\dot{X}_i = \frac{cP_{xi}}{\sqrt{(mc)^2 + P_{xj}P_{xj}}} - v_0\delta_{i,z} \quad (3.30)$$

и систему уравнений, описывающих быстроосциллирующее движение:

$$\dot{p}_{\xi i} = f_i \left(\mathbf{X}, \frac{\dot{\mathbf{X}}}{c}, t \right), \quad (3.31)$$

$$\dot{\xi}_i = \frac{c p_{\xi i}}{\sqrt{(mc)^2 + P_{xj} P_{xj}}} - \frac{c P_{xi} P_{xj} p_{\xi j}}{((mc)^2 + P_{xj} P_{xj})^{3/2}} \quad (3.32)$$

Как и ранее, полагаем, что электрон совершает релятивистское движение вдоль оси волновода (ось Oz) и нерелятивистское в поперечном к оси волновода (ось Ox) направлении. Если до взаимодействия с полем электрон имел Лоренц-фактор много больше единицы, $\gamma \gg 1$, то дальнейшее ускорение под действием постоянного поля будет происходить очень медленно, и скорость в новой переменной z' будет много меньше скорости света $z' \ll c$. Тогда, расписывая поля в явном виде и производя усреднение, получим систему уравнений для плавного движения и величины быстрых осцилляций:

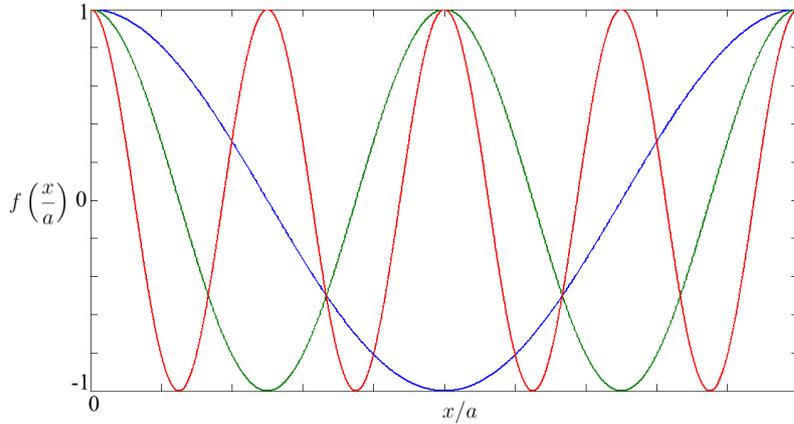


Рис. 3.10. Зависимость безразмерной поперечной эффективной потенциальной энергии $f(x) = U_{\perp}^{eff}(x) 8\gamma_z m c^4 k_x^2 \omega'^2 / (e^2 u_0^2 (\omega k_z - v_0 k^2))$, для трех различных значений поперечного волнового вектора электромагнитной волны (первые три моды), от поперечной координаты x . Как видно, число узлов стоячей волны равно числу каналов.

$$\frac{d}{dt} (\gamma_z m \dot{X}) = \frac{e^2 u_0^2 (k_z \omega - v_0 k^2)^2}{4\gamma_z m c^2 \omega'^2 k_x} \sin(2k_x X), \quad (3.33)$$

$$\frac{d}{dt} (\gamma_z m \dot{Z}) = -e E_0, \quad (3.34)$$

$$\xi_z = \frac{e u_0 \omega}{\gamma_z^3 m c \omega'^2} \sin(k_x X) \cos(\omega' t - k_z Z), \quad (3.35)$$

$$\xi_x = \frac{eu_0(k_z\omega - v_0k^2)}{c \gamma_z m k_x \omega'^2} \cos(k_x X) \sin(\omega' t - k_z Z) \quad (3.36)$$

Записывая гамильтониан, выделяя в нем плавную функцию и быстроосциллирующую, получим после усреднения следующее выражение для эффективной поперечной потенциальной энергии:

$$U_{\perp}^{eff} = U_0 + \frac{e^2 u_0^2 (\omega k_z - v_0 k^2)^2}{8 \gamma_z m c^4 k_x^2 \omega'^2} \cos(2k_x X) \quad (3.37)$$

Необходимым условием захвата электрона таким потенциалом является малость поперечной кинетической энергии по сравнению с максимальным значением эффективной потенциальной энергии $E_{\perp} < \max(U_{\perp}^{eff})$, или, на языке угла расхождения пучка электронов, влетающих в такой волновод:

$$\Delta\theta < \frac{p_{x0}}{p_{z0}} = \frac{eu_0(\omega k_z - v_0 k^2)}{2\sqrt{2}\gamma_z m c^2 k_x \omega'}, \quad (3.38)$$

где амплитуда векторного потенциала имеет размерность единиц СГС. Для напряженности электромагнитного поля $E_{max} \sim 10^8$ В/м и Лоренц фактора $\gamma \sim 10^3$ условие захвата $\Delta\theta < 10^{-4}$ рад.

Аналогичные расчеты условий каналирования можно провести и для случая цилиндрического волновода. Это сделано в следующем параграфе.

3.4 Каналирование электрона в аксиально-симметричном цилиндрическом лазерном поле

Рассмотрим электромагнитную волну, распространяющуюся в цилиндрическом капилляре радиуса R (рис. 3.11). Будем описывать электромагнитное поле в капилляре аналогично предыдущему параграфу. Пусть в капилляре распространяется электромагнитная волна электрического типа,

тогда для векторного потенциала будем иметь уравнение:

$$\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) A_z - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} A_z = 0, \quad (3.39)$$

$$A_z(t, \rho = 0) < \infty, A_z(t, \rho = R) = 0 \quad (3.40)$$

Ищем решения уравнения в виде бегущих вдоль оси капилляра волн $A_z = u(\rho) \sin(\omega t - k_z z)$. Тогда для функции $u(\rho)$ получаем уравнение:



Рис. 3.11. Схематическое изображение цилиндрического волновода и распространяющейся в нем электромагнитной волны. Красным цветом показаны максимумы амплитуды волны, а синим - минимумы.

$$\frac{d^2 u}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{du}{d\rho} + k_\rho^2 u = 0, \quad (3.41)$$

$$u(\rho = 0) < \infty, u(\rho = R) = 0$$

Решением полученного уравнения являются функции Бесселя нулевого порядка. Неизвестная k_ρ находится из уравнения $J_0(k_\rho R) = 0$, где $k_\rho^2 = \omega^2/c^2 - k_z^2$. Тогда решение запишется в виде:

$$A_z = u_0 J_0(k_\rho \rho) \sin(\omega t - k_z z) \quad (3.42)$$

Используя уравнения Максвелла получаем радиальную составляющую векторного потенциала:

$$A_\rho = u_0 \frac{k_z}{k_\rho} J_1(k_\rho \rho) \cos(\omega t - k_z z) \quad (3.43)$$

Для описания движения электрона в приведенных выше полях удобно перейти к цилиндрическим координатам (ϕ, ρ, z) . Проводя аналогичные действия с переменными и гамильтонианом, как и в задаче с волноводом, получим следующую систему уравнений движения (перейдя от обобщенных импульсов к кинематическим):

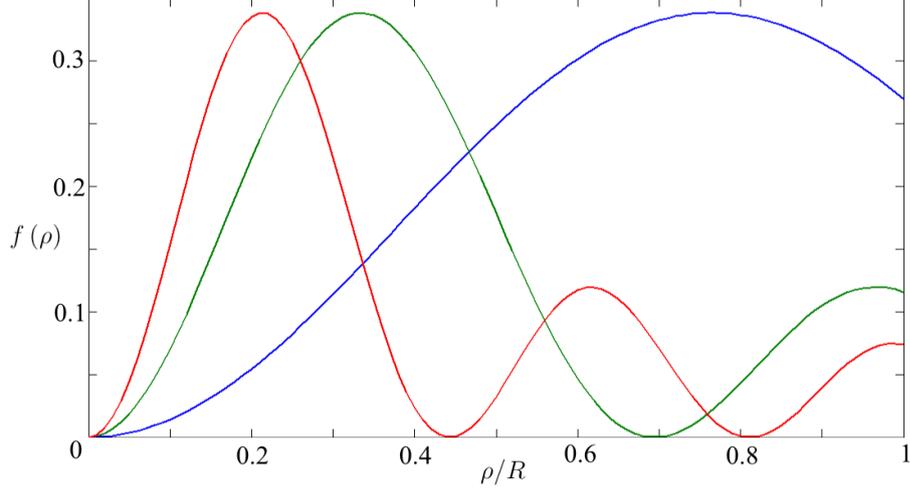


Рис. 3.12. Зависимость безразмерной поперечной эффективной потенциальной энергии $f(\rho) = U_{\perp}^{eff}(\rho)4\gamma_z m c^2 k_{\rho}^2 \omega'^2 / (e^2 u_0^2 (\omega k_z - v_0 k^2)^2)$, для трех различных значений поперечного волнового вектора электромагнитной волны (три первых моды), от расстояния до оси волновода. Как видно число каналов соответствует числу нулей функции Бесселя нулевого порядка, аналогично случаю с плоским волноводом.

$$\dot{p}'_z = -\frac{e}{c} \frac{\partial A_z}{\partial t} + \frac{e}{c} v_0 \frac{\partial A_z}{\partial z'} - \frac{\partial U}{\partial z'}, \quad (3.44)$$

$$\dot{p}'_{\rho} = -\frac{e}{c} \frac{\partial A_{\rho}}{\partial t} + \frac{e}{c} v_0 \frac{\partial A_z}{\partial \rho} + \gamma m \dot{\phi}^2 \rho, \quad (3.45)$$

$$\dot{p}'_{\phi} = 0, \quad (3.46)$$

$$\dot{z}' = \frac{p'_z}{\gamma m} - v_0, \gamma = \sqrt{1 + \frac{p'^2_z + p'^2_{\rho} + p'^2_{\phi}/\rho^2}{m^2 c^2}}, \quad (3.47)$$

$$\dot{\rho} = \frac{p_{\rho}}{\gamma m}, \quad (3.48)$$

$$\dot{\phi} = \frac{p_{\phi}}{\gamma m \rho^2} \quad (3.49)$$

Разделяя переменные на малые быстропеременные $\phi_{\xi}, z_{\xi}, \rho_{\xi}$ и плавно меняющиеся Z, ρ, ϕ , получим следующую систему, описывающую быстропеременное движение:

$$\rho_{\xi} = -\frac{eu_0(\omega k_z - v_0 k^2)}{\gamma_z m \omega'^2 c k_{\rho}} J_1(k_{\rho} \rho) \sin(\omega' t - k_z Z), \quad (3.50)$$

$$z_{\xi} = \frac{eu_0 \omega}{\gamma_z^3 m c \omega'^2} J_0(k_{\rho} \rho) \cos(\omega' t - k_z Z) \quad (3.51)$$

и систему уравнений, описывающих плавное движение:

$$\frac{d}{dt} (\gamma_z m \dot{Z}) = -eE, \quad (3.52)$$

$$\frac{d}{dt} (\gamma_z m \dot{\rho}) = \frac{e^2 u_0^2 (\omega k_z - v_0 k^2)^2}{2c^2 \gamma_z m k_{\rho}^2 \omega'^2} J_1'(k_{\rho} \rho) J_1(k_{\rho} \rho) + \frac{p_{\phi}^2}{\gamma_z m \rho^3} \quad (3.53)$$

Записывая энергию электрона и выделяя в ней плавно меняющуюся и быстро осциллирующую составляющие, после усреднения получим следующее выражение для эффективной поперечной потенциальной энергии:

$$U_{\perp}^{eff}(\rho) = \frac{e^2 u_0^2 (\omega k_z - v_0 k^2)^2}{4c^2 \gamma_z m k_{\rho}^2 \omega'^2} J_1^2(k_{\rho} \rho) \quad (3.54)$$

Как видно из приведенного решения, эффективный потенциал в капилляре отличается от эффективного потенциала в волноводе лишь видом функциональной зависимости. Однако такое описание справедливо в том случае, когда малые колебания еще можно считать малыми, что накладывает определенные ограничения на величины электромагнитного поля и его частоты $|\mathbf{r}| \gg eu_0 \omega / (\gamma m c \omega'^2)$. Условие захвата электрона таким полем (предельный угол влета электрона в канал) запишется в виде:

$$\Delta\theta < 0,59 \frac{eu_0(\omega k_z - v_0 k^2)}{2\gamma_z m c^3 k_{\rho} \omega'} \quad (3.55)$$

Из вида эффективной поперечной потенциальной энергии видно, что в релятивистском случае величина эффективного потенциала зависит от энергии частицы: чем больше энергия частицы, тем меньше максимальное значение эффективного потенциала.

В данной главе было показано, что движение заряженных частиц в скрещенных полях электромагнитных волн приводят к образованию каналов. Глубина каналов зависит от геометрии полей и их напряженностей, которые могут регулироваться, при этом глубина каналов достигает значений $\Delta U \sim 100$ эВ, наблюдаемых в процессах каналирования заряженных частиц в кристаллах [62–68]. В отличие от процессов каналирования в кристаллах, при каналировании в скрещенных полях электромагнитных волн будут отсутствовать неупругие процессы, которые имеют место при неупругом рассеянии частиц на узлах кристаллических решеток, что делает каналирование в лазерной волне крайне привлекательным для практического использования.

Глава 4

Динамика и излучение электрона в ионно-плазменном канале

Другим альтернативным методом получения электронных пучков и интенсивного высокоэнергетического электромагнитного излучения является процесс взаимодействия мощного ультракороткого лазерного импульса с плазмой. Он обладает рядом преимуществ перед СИ и ЛСЭ, которые требуют больших материальных затрат и сравнительно громоздкие, что накладывает определенные ограничения на их применимость. В этих установках, как было сказано ранее, для получения интенсивного высокоэнергетического излучения необходимо ускорять заряженные частицы до высоких скоростей, что требует строительства больших машин и связано с определенными техническими сложностями [96, 97]. Кроме того, необходимым условием для таких источников является получение малого эмиттанса ускоряемых пучков и большого пикового тока [98].

Исследования последних лет показали, что взаимодействие интенсивных ультракоротких лазерных импульсов со средой может служить источником компактных пучков электронов. Примечательным при этом является тот факт, что формирование плазмы при таком взаимодействии способствует не только выбиванию электронов, но и их последовательному ускорению. Действительно, исследования распространения в плазме нелинейных электромагнитных волн, представляющие большой практический интерес в связи с большим прогрессом в лазерной технике [99, 100], пока-

зали, что с помощью мощных ультракоротких лазерных импульсов, распространяющихся в плазме, можно ускорять электроны плазмы на малых расстояниях до ультррелятивистских энергий [27, 101–103].

Это можно увидеть на простом примере. Рассмотрим движение электрона в поле ультракороткого лазерного импульса, распространяющегося в направлении оси Oz . Так как поле лазерного импульса имеет большой градиент, то на движение электрона основное влияние будет оказывать поперечная сила со стороны лазерного импульса. Для качественной оценки движения электрона под действием линейно поляризованного лазерного импульса представим амплитуду лазерного импульса длительностью 2τ , распространяющегося вдоль оси Oz со скоростью света, в виде:

$$\mathbf{A} = (1, 0, 0) \begin{cases} -A_0(z - c(t + \tau))/(c\tau), & z \in [ct, c(t + \tau)] \\ A_0(z - c(t - \tau))/(c\tau), & z \in [c(t - \tau), ct] \end{cases}$$

Обычно амплитуда лазерного импульса имеет форму распределения Гаусса, но как было показано в [73], для многих оценок можно использовать упрощенный вид амплитуды лазерного импульса в виде прямых зависимостей. Уравнения движения в проекциях на оси координат запишутся в виде:

$$\begin{aligned} m\dot{\gamma}v_z + m\gamma\dot{v}_z &= -v_x \frac{e^2}{c} \frac{\partial A_x}{\partial z}, \\ m\dot{\gamma}v_x + m\gamma\dot{v}_x &= -v_z \frac{e^2}{c} \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{e^2}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} \end{aligned}$$

Из закона сохранения энергии следует:

$$mc^2\dot{\gamma} = -v_x \frac{e^2}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t}$$

Так как векторный потенциал линейно зависит от z и времени, сделаем

переобозначение:

$$\frac{\partial A_x}{\partial t} = a_1 = \begin{cases} A_0/\tau, & z \in [ct, c(t + \tau)], \\ -A_0/\tau, & z \in [c(t - \tau), ct] \end{cases}$$

$$\frac{\partial A_x}{\partial z} = a_2 = \begin{cases} -A_0/(c\tau), & z \in [ct, c(t + \tau)], \\ A_0/(c\tau), & z \in [c(t - \tau), ct] \end{cases}$$

т. о. систему уравнений можно свести к уравнению:

$$\frac{dv_x}{dv_z} = \frac{-a_1 - v_z a_2 + a_1 v_x^2/c^2}{-a_2 v_x + a_1 v_z v_x/c^2}$$

и далее, сделав замену $u = v_x^2$, $y = -a_2 + a_1 v_z/c^2$, получим уравнение:

$$\frac{a_1}{2c^2} \frac{du}{dy} = \left(\frac{a_1}{c^2} u - a_1 - \frac{a_2 c^2}{a_1} (y + a_2) \right) \frac{1}{y}$$

Данное уравнение имеет следующее общее решение:

$$u(y) = c^2 + Cy^2 - \frac{a_2 c^4}{a_1^2} y - \frac{a_2^2 c^4}{2a_1^2}$$

Воспользовавшись условием равенства нулю скоростей электрона до взаимодействия с лазерным импульсом, находим постоянную интегрирования и записываем решения через компоненты скорости:

$$v_x^2 = c^2 - \frac{1}{a_2^2} \left(c^2 + \frac{a_2^2 c^4}{2a_1^2} \right) \left(\frac{a_1}{c^2} v_z - a_2 \right)^2 - \frac{a_2 c^4}{a_1^2} \left(\frac{a_1}{c^2} v_z - a_2 \right) - \frac{a_2^2 c^4}{2a_1^2}$$

Рассмотрим область $[ct, c(t + \tau)]$, для нее $a_2 = -a_1/c$. Тогда после упрощений получаем следующее уравнение, связывающее компоненты скоростей:

$$v_x = c\alpha (1 + \alpha^2)^{-1/2}$$

$$\alpha = \frac{5}{9}\delta\frac{t}{\tau}, \quad t \leq \tau$$

$$v_x^2 + \left(\sqrt{\frac{3}{2}}v_z - \sqrt{\frac{2}{3}}c \right)^2 = \frac{2}{3}c^2, \quad t \leq \tau,$$

где $\delta = eA_0/mc^2$ — отношение энергии поля к энергии покоя электрона. Из первого выражения видно, что для значения $\delta = 10$ за время $t = \tau/\delta$ электрон уже приобретает скорость, по порядку величины равную скорости света: как поперечную v_x , так и продольную v_z компоненты скорости по отношению к направлению распространения лазерного импульса. Образующаяся за лазерным импульсом электромагнитная волна, вырождаясь в полость свободную от плазменных электронов и движущаяся вместе с лазерным импульсом, может захватывать ускоренные лазерным импульсом до высоких энергий плазменные электроны, тем самым являясь источником плотного электронного пучка. Захваченные электроны образуют плотный пучок и имеют большую энергию, и могут служить источником мощного жесткого излучения [104–106]. В работе [105] была рассмотрена задача о взаимодействии мощного ультракороткого лазерного импульса с плазмой. Основываясь на результатах численного моделирования, авторы построили модель сильно нелинейного режима взаимодействия мощного лазерного импульса с плазмой. В процессе такого взаимодействия электроны плазмы вытесняются из области локализации поля лазерного импульса. В результате за лазерным импульсом, движущимся в направлении оси Oz , образуется почти сферическая полость — ”пузырь”, свободная от плазменных электронов, представляющая собой большой положительный заряд, и движущаяся со скоростью лазерного импульса. Таким образом, движущийся пузырь формирует некий ориентированный в направлении распространения лазерного импульса градиент поля. Другими словами, ионный канал, представляющий собой ярко выраженную потенциальную яму для электронов. Потенциальная яма захватывает электроны плазмы, последовательно ускоряя их. Однако, захвачены могут быть только очень быстрые релятивистские электроны. Внутри ”пузыря” потенциалы электромагнит-

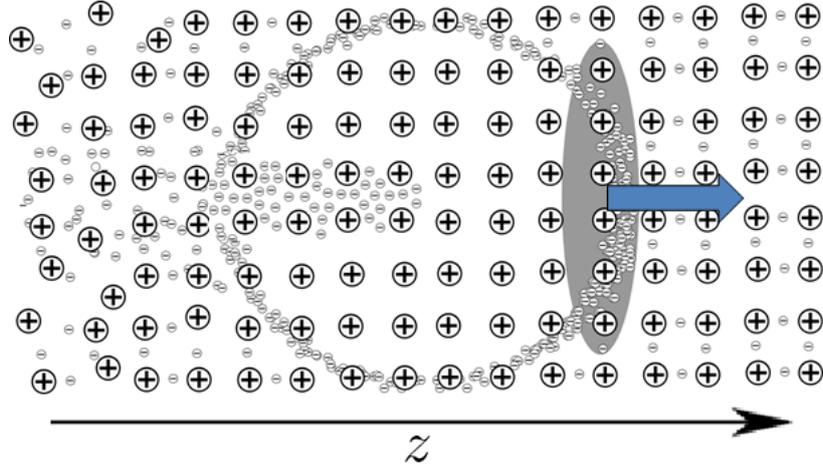


Рис. 4.1. Схематический рисунок сильно нелинейного режима взаимодействия ультракороткого лазерного импульса с плазмой

ного поля (с точностью до постоянных интегрирования \mathbf{A}_0, φ_0) имеют вид:

$$\begin{cases} \mathbf{A} = \pi e n_0 (x^2 + y^2 + (z - v_0 t)^2) \mathbf{e}_z / 2, \\ \varphi = -\pi e n_0 (x^2 + y^2 + (z - v_0 t)^2) / 2 \end{cases}$$

Для захваченных электронов справедливо неравенство $p_z \gg |\mathbf{p}_\perp|$, т. е. в поперечном к оси Oz направлении электроны совершают нерелятивистское движение, а в направлении оси Oz электроны являются ультрарелятивистскими. Уравнение движения электрона в выше приведенном поле и при условии $p_z \gg |\mathbf{p}_\perp|$ запишется в виде:

$$\frac{dp_z}{dt} \approx -2\pi e^2 n_0 (z - v_0 t),$$

$$\frac{d\mathbf{p}_\perp}{dt} \approx -2\pi e^2 n_0 \mathbf{r}_\perp$$

Как видно из приведенного выражения, за ускорение отвечает сила пропорциональная $\sim -(z - v_0 t)$, для электронов, движущихся со скоростью большей, чем скорость ионной полости, сила, действующая со стороны последней, будет замедлять электроны и, напротив, для электронов движущихся со скоростью меньшей, чем скорость ионной полости, сила, действующая со стороны последней, будет ускорять электроны.

щихся со скоростью, меньшей, чем скорость полости, выше указанная сила будет их ускорять. Если пренебречь ускорением электронов в канале, пренебрегая отличием скорости электронов от скорости ионной полости, то пузырь становится бесконечным цилиндрическим ионным каналом. Следуя [105], будем рассматривать поведение пучка захваченных электронов в бесконечном цилиндрическом ионном канале [24, 107] с потенциалами поля (соответствующими бесконечному цилиндрическому каналу неподвижных ионов):

$$\begin{cases} \mathbf{A} \approx 0, \\ \varphi = -\pi n_0 e r_{\perp}^2, \end{cases} \quad (4.1)$$

где постоянные интегрирования \mathbf{A}_0 , φ_0 положены равными нулю $\mathbf{A}_0 = \varphi_0 = 0$, так как они не влияют на уравнения движения. Поскольку захватываются только очень быстрые электроны, движущиеся вдоль оси Oz , $|\mathbf{p}_{\perp}| \ll p_z$, то далее всюду положено $\gamma \approx \gamma_z = E_z/mc^2 = 10^3$, что соответствует энергии электронного пучка $\sim 0,5$ ГэВ и Лоренц-фактор определяется продольной энергией, и концентрация ионов $n_0 = 10^{19}$ см $^{-3}$.

4.1 Каналирование плазменного электрона в ионном канале

Рассмотрим движение релятивистского электрона в электромагнитном поле в декартовой прямоугольной системе координат, где потенциалы поля имеют вид (4.1). Гамильтониан электрона запишется в виде [34]:

$$H = c\sqrt{m^2c^2 + \mathbf{p}^2} - e\varphi \quad (4.2)$$

Разделим импульс на продольный и поперечный к оси Oz , $\mathbf{p} = \mathbf{p}_{\perp} + p_z\mathbf{e}_z$, тогда гамильтониан примет вид:

$$H = c\sqrt{m^2c^2 + p_{\rho}^2 + p_z^2} - e\varphi \quad (4.3)$$

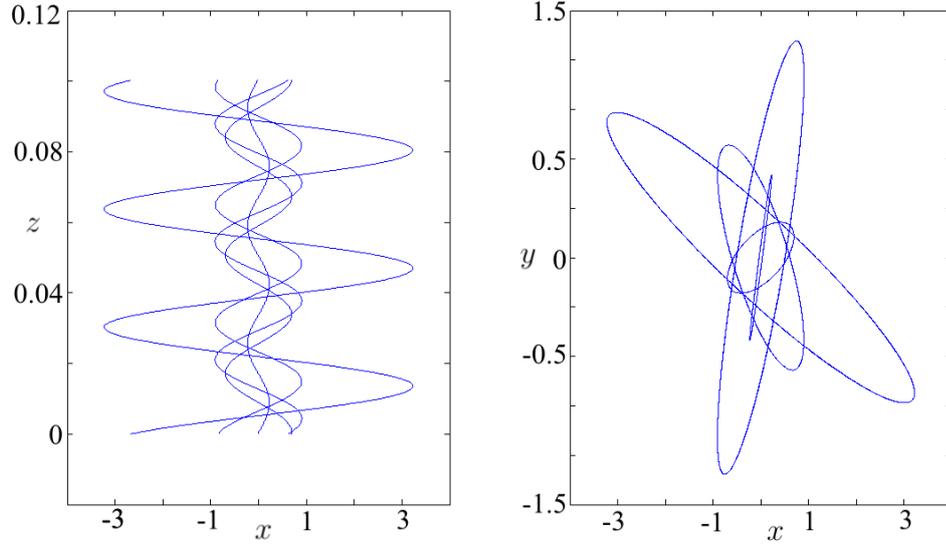


Рис. 4.2. Проекция траектории электрона в ионном канале на плоскости xOy и xOz при различных начальных условиях. Координаты приведены в сантиметрах; поперечные координаты нормированы на 10^{-5} см. Как видно, траектория практически не отличается от эллиптической спирали; это связано с тем, что движение электрона в поперечном направлении нерелятивистское.

предположим, что $p_z \gg |\mathbf{p}_\perp|$, удерживая члены первого порядка малости, запишем гамильтониан в виде:

$$H \approx c\sqrt{m^2c^2 + p_z^2} + \frac{cp_\perp^2}{2\sqrt{m^2c^2 + p_z^2}} - e\varphi \quad (4.4)$$

Введем продольную энергию $E_z = c\sqrt{m^2c^2 + p_z^2}$, тогда гамильтониан примет вид:

$$H = E_z + \frac{c^2p_\perp^2}{2E_z} - e\varphi, \quad (4.5)$$

и запишем уравнения движения:

$$\frac{d\mathbf{p}_\perp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}_\perp} = e\nabla_\perp\varphi, \quad (4.6)$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{c^2p_z}{E_z} \left(1 - \frac{c^2p_\perp^2}{2E_z^2}\right), \quad (4.7)$$

$$\frac{dp_z}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial z} = 0 \Rightarrow p_z = \text{const}, \quad (4.8)$$

$$\frac{d\mathbf{r}_\perp}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_\perp} = \frac{c^2 \mathbf{p}_\perp}{E_z} \quad (4.9)$$

Так как проекция импульса на Oz постоянна, то и продольная энергия не меняется во времени. Тогда в поперечном к оси Oz направлении уравнение движения можно записать в виде:

$$\frac{E_z}{c^2} \frac{d^2 \mathbf{r}_\perp}{dt^2} = e \nabla_\perp \varphi, \quad (4.10)$$

записывая в явном виде потенциалы поля, получим уравнение движения в поперечном к оси Oz направлении:

$$\ddot{\mathbf{r}}_\perp + \omega_0^2 \mathbf{r}_\perp = 0, \quad \omega_0^2 = \frac{2\pi e^2 n_0 c^2}{E_z} \quad (4.11)$$

Решение получившегося уравнения в общем случае имеет вид $\mathbf{r}_\perp(t) = \mathbf{r}_0 \cos(\omega_0 t) + \mathbf{v}_0/\omega_0 \sin(\omega_0 t)$. Введем обозначение $v_{z0} = c^2 p_{z0}/E_z$ и перепишем уравнение для проекции скорости на ось Oz и его решение:

$$\frac{dz}{dt} = v_{z0} \left(1 - \frac{(\mathbf{r}_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t) - \mathbf{v}_0 \cos(\omega_0 t))^2}{2c^2} \right), \quad (4.12)$$

$$z(t) = z_0 + v_{z0} \left(1 - \frac{r_0^2 \omega_0^2 + v_0^2}{4c^2} \right) t + v_{z0} \frac{r_0^2 \omega_0^2 - v_0^2}{8c^2 \omega_0} \sin(2\omega_0 t) - v_{z0} \frac{(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)}{4c^2} \cos(2\omega_0 t)$$

Условие $p_{z0} \gg |\mathbf{p}_\perp|$ нерелятивистского движения в поперечном к оси Oz направлении справедливо при $r_0 \ll c/\omega_0 \sim 10^{-3} \text{ см}$ и $v_0 \ll c$. Введем новое обозначение:

$$a = v_{z0} \left(1 - \frac{r_0^2 \omega_0^2 + v_0^2}{4c^2} \right), \quad \alpha = \text{arctg} \left(\frac{2(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0) \omega_0}{r_0^2 \omega_0^2 - v_0^2} \right)$$

$$b = v_{z0} \sqrt{\left(\frac{r_0^2 \omega_0^2 - v_0^2}{8c^2 \omega_0}\right)^2 + \left(\frac{(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)}{4c^2}\right)^2}$$

и перепишем уравнения движения в виде:

$$\begin{aligned} z(t) &= at + b \sin(2\omega_0 t + \alpha), \\ \mathbf{r}_\perp(t) &= \mathbf{r}_0 \cos(\omega_0 t) + \mathbf{v}_0 \sin(\omega_0 t)/\omega_0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

Так как рассматриваемая выше задача стационарна, а электрон является квантовой частицей, то, естественно, интересен вопрос о движении квантовой частицы в поле (4.1). Рассмотрим квантовомеханическую задачу о движении электрона в пренебрежении спиновыми эффектами. Тогда движение электрона будет описываться уравнением Клейна-Гордона-Фока [108]:

$$\left(c^2 \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c^2 \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + c^2 \hbar \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \Psi + \left(\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + e\varphi\right)^2 - m^2 c^4\right) \Psi = 0$$

Так как гамильтониан не зависит от времени и оператор проекции импульса на ось Oz коммутирует с гамильтонианом (на движение вдоль оси Oz накладываем условие периодичности на промежутке $-L_z/2 \leq z \leq L_z/2$), то будем искать решение в виде $\Psi(\mathbf{r}, t) = \psi(x, y) e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - p_z z)}$ (собственные значения проекции оператора импульса на ось Oz $p_z = \hbar 2\pi n_z / L_z$). Тогда уравнение примет вид:

$$\left(c^2 \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c^2 \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} - p_z^2 c^2\right) \psi + \left((E + e\varphi)^2 - m^2 c^4\right) \psi = 0 \quad (4.14)$$

Разделим энергию на продольную и поперечную $E = E_z + E_r$, $E_z = c\sqrt{p_z^2 + m^2 c^2}$, положим $E_z \gg E_r \sim |e\varphi|$. Это приближение справедливо в том случае, когда энергия взаимодействия электрона с внешним полем много меньше продольной энергии электрона или же рассматриваются небольшие значения поперечной энергии в сколь угодно большом внешнем поле. Раскладывая второе слагаемое по степеням E_z^{-1} и оставляя в уравнении члены первого порядка малости по величинам порядка E_r/E_z ,

получаем уравнение:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{2E_z E_r}{c^2 \hbar^2} + \frac{2E_z e\varphi}{c^2 \hbar^2} \right) \psi = 0 \quad (4.15)$$

И далее используя явный вид для потенциала поля

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{2\gamma_z m E_r}{\hbar^2} - \frac{(\gamma_z m)^2 \omega_0^2}{\hbar^2} (x^2 + y^2) \right) \psi = 0,$$

где ω_0 совпадает с классической частотой, $\gamma_z m = E_z/c^2$. Получившееся уравнение описывает двумерный гармонический осциллятор, для которого уровни энергии равны:

$$E_{r,n_x,n_y} = \hbar\omega_0 (n_x + n_y + 1)$$

Таким образом, уровни энергии будут иметь вид:

$$E_{p_z,n} = c\sqrt{p_z^2 c^2 + m^2 c^2} + \hbar\omega_0 (n + 1)$$

Уровень энергии $E_{p_z,n}$ получается $g = 2(n + 1)$ кратно вырожденным (строго говоря, в силу свободного движения вдоль оси Oz энергетический спектр бесконечно вырожден; однако, как будет видно далее для наших целей можно считать продольную энергию постоянной). Введем обозначение $\alpha = \sqrt{\gamma_z \omega_0 m / \hbar}$, тогда волновая функция электрона запишется как

$$\Psi_{n_x,n_y,p_z}(\mathbf{r}, t) = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\frac{\alpha^2}{2}(x^2+y^2) + \frac{i}{\hbar}(p_z z - (E_z + E_{r,n})t)}}{\sqrt{L_z 2^{n_x+n_y} n_x! n_y!}} H_{n_x}(\alpha x) H_{n_y}(\alpha y) \quad (4.16)$$

Остановимся на некоторых свойствах уравнения КГФ, которые нам понадобятся позднее. Для уравнения (4.14) справедливо следующее условие ортонормируемости:

$$\int \Psi_m^* \left(\frac{E_n + E_m}{2} + e\varphi(\mathbf{r}) \right) \Psi_n d^3r = mc^2 \delta_{mn}, \quad (4.17)$$

из которого следует диагональность матричных элементов потенциальной энергии. Легко видеть, что волновые функции (4.16) не удовлетворяют условию (4.17), точнее можно сказать, что найденные волновые функции удовлетворяют этому условию с той точностью, с которой они были найдены. В связи с этим условие ортонормируемости в рассмотренном приближении примет вид:

$$E_n \int \Psi_m^* \Psi_n d^3r = mc^2 \delta_{mn}, \quad (4.18)$$

а волновые функции

$$\Psi_{n_x, n_y, p_z}(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\frac{mc^2}{E_n}} \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\frac{\alpha^2}{2}(x^2+y^2) + \frac{i}{\hbar}(p_z z - E_n t)}}{\sqrt{L_z 2^{n_x+n_y} n_x! n_y!}} H_{n_x}(\alpha x) H_{n_y}(\alpha y) \quad (4.19)$$

Плотность вероятности для уравнения КГФ в рассматриваемом приближении запишется в виде:

$$\rho(\mathbf{r}, t) \approx -\frac{i\hbar}{2mc^2} \left(\frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \Psi - \frac{\partial \Psi}{\partial t} \Psi^* \right) \quad (4.20)$$

При квантово-механическом описании, как наиболее общем, включающем в себя классический случай при предельном переходе $\hbar \rightarrow 0$, наиболее интересен вопрос, связанный с поправками, обусловленными отличием скорости электрона от скорости ионной полости. В этом случае потенциалы поля ионной полости можно записать в виде:

$$\begin{cases} \mathbf{A} = A_0(x, y) \mathbf{e}_z + A_1(z - v_0 t) \mathbf{e}_z, A_0 \gg A_1, \\ \varphi = \varphi_0(x, y) + \varphi_1(z - v_0 t), \varphi_0 \gg \varphi_1 \end{cases} \quad (4.21)$$

Тогда потенциалы A_1 , φ_1 представляют собой возмущения, зависящие от времени. Стационарная задача запишется в виде:

$$\left(c^2 \hbar^2 \nabla_{\perp}^2 - c^2 \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial z} + \frac{e}{c} A_0 \right)^2 \right) \Psi^{(0)} + \left(\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + e\varphi_0 \right)^2 - m^2 c^4 \right) \Psi^{(0)} = 0$$

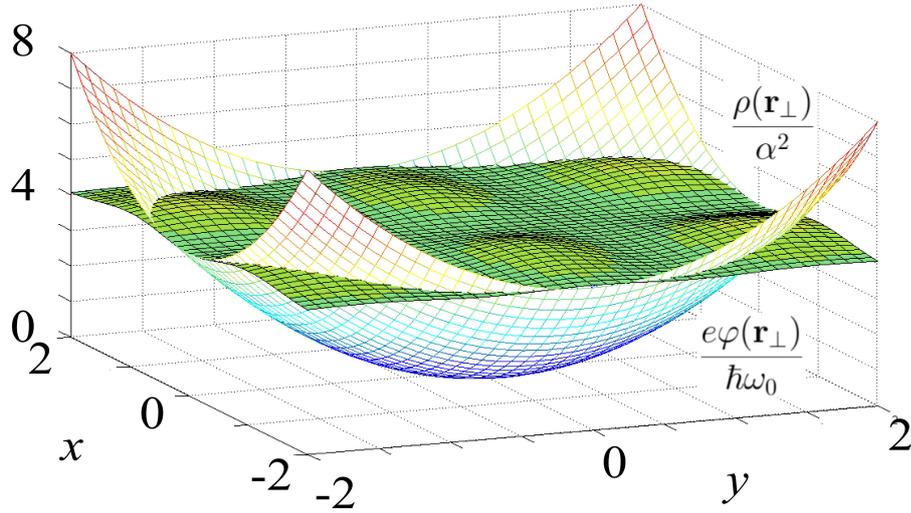


Рис. 4.3. На графике изображена безразмерная потенциальная энергия $U(\mathbf{r}_\perp) = e\varphi(\mathbf{r}_\perp)/\hbar\omega_0$ и безразмерная плотность вероятности $\rho(\mathbf{r}_\perp)/\alpha^2$ обнаружения в плоскости xOy электрона, находящегося в состоянии $\mathbf{n}_\perp = \{n_x = 2, n_y = 1\}$.

в такой постановке задачи сохраняться будет проекция обобщенного импульса на ось Oz . Вводя "продольную энергию" в виде $E_z = c\sqrt{P_z^2 + m^2c^2}$ (здесь E_z , строго говоря, не является продольной энергией, так как P_z не совпадает с кинематическим импульсом электрона) и представляя энергию, как и ранее, в виде суммы продольной и поперечной энергии, делая преобразования, аналогичные сделанным выше и учитывая соотношение между потенциалами поля $A_0 = -\varphi_0$, получим уравнение:

$$\left(\nabla_\perp^2 + \frac{2E_z E_r}{c^2 \hbar^2} + \frac{2E_z e \varphi_0}{c^2 \hbar^2} \left(1 + \frac{c P_z}{E_z} \right) \right) \psi^{(0)} = 0 \quad (4.22)$$

В силу того, что величина eA_0/c много меньше проекции кинематического импульса электрона $eA_0/c \ll p_z$, величина $cP_z/E_z \rightarrow 1$. Значит, мы можем записать $\varphi_0(1 + cP_z/E_z) \approx \varphi$, тем самым придя к задаче о движении электрона в бесконечном ионном канале, решение которой найдено выше. Следует отметить, что, вообще говоря, при переходах с изменением проекции импульса на ось Oz величина ω_0 уже не будет постоянной и при переходах с большим изменением p_z будет давать очень существенный

вклад в результат. Зная решение стационарной задачи, можно учесть вклад малых поправок $A_1 = -\varphi_1$ в рамках теории возмущений, согласно которой [108, 109] волновая функция электрона в первом порядке запишется в виде:

$$\Psi_n(\mathbf{r}, t) = \Psi_n^{(0)}(\mathbf{r}, t) + \sum_m C_m(t) \Psi_m^{(0)}(\mathbf{r}, t), \quad (4.23)$$

где n — набор всех квантовых чисел, описывающих движение электрона, а коэффициент $C_m(t)$ в рассмотренном приближении является решением уравнения:

$$\frac{dC_m}{dt} = \frac{e}{mc^2} \int (\Psi_m^{(0)})^* \varphi_1 \left(c \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \Psi_n^{(0)} d^3\mathbf{r} \quad (4.24)$$

Здесь, конечно, нужно отметить, что в силу свободного движения в направлении оси Oz , применять теорию возмущений нужно, предварительно перейдя к импульсному представлению.

4.2 Излучение каналированного электрона в ионно-плазменном канале

Электрон, движущийся с ускорением, будет излучать электромагнитные волны, найдем функцию распределения излучения по углам и частотам. Для этого запишем решение волнового уравнения для векторного потенциала через интеграл Дюамеля [6]:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}', t') G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') d^3r' dt',$$

где

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = \frac{\delta\left(t - t' - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = & -e((a + 2b\omega_0 \cos(2\omega_0 t + \alpha)) \mathbf{e}_z - \mathbf{r}_0 \omega_0 \cos(\omega_0 t) + \\ & + \mathbf{v}_0 \sin(\omega_0 t)) \delta(z - (at + b \sin(2\omega_0 t + \alpha))) \times \end{aligned}$$

$$\times \delta \left(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}_0 \sin(\omega_0 t) - \frac{\mathbf{v}_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \right)$$

Для дальнейших вычислений разложим плотность тока в ряд и интеграл Фурье вида [34, 96]:

$$\mathbf{j} = \frac{-e}{(2\pi)^3} \sum_{n,m,l} \int e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - i((2n+m+l)\omega_0 + k_z a)t - in\alpha - il\pi/2} J_n(\xi_1) J_l(\xi_2) \times$$

$$\left[\left(\left(a + \frac{2n\omega_0}{k_z} \right) \mathbf{e}_z - \frac{\mathbf{r}_0 \omega_0 m}{\xi_3} \right) J_m(\xi_3) + i\mathbf{v}_0 J'_m(\xi_3) \right] d^3 k,$$

где $\xi_1 = k_z b$, $\xi_2 = (\mathbf{k}_\perp, \mathbf{r}_0)$, $\xi_3 = (\mathbf{k}_\perp, \mathbf{v}_0)/\omega_0$. Будем рассматривать поле на больших расстояниях от электрона, так что в знаменателе функции Грина величина $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \approx r$, а в аргументе дельта функции $t - t' - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c \approx t - t' - r/c + \mathbf{n}\mathbf{r}'/c$. После интегрирования по переменным t' , \mathbf{r}' , \mathbf{k} векторный потенциал примет вид:

$$\mathbf{A} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{A}_n \frac{e^{-in\omega(t-r/c) - in\pi/2}}{r}, \quad \omega = \frac{\omega_0}{1 - \beta_z n_z},$$

$$\mathbf{A}_n = -\frac{e}{4\pi} \sum_{m,l=-\infty}^{\infty} J_m \left(n\omega \frac{bn_z}{c} \right) J_{n-2m-l} \left(n\omega \frac{(\mathbf{n}_\perp, \mathbf{r}_0)}{c} \right) e^{-i(2m+l)\pi/2 - im\alpha} \times$$

$$\times \left[\left(\left(\beta_z + \frac{2m\omega_0}{n\omega n_z} \right) \mathbf{e}_z - \frac{l\mathbf{r}_0 \omega_0^2}{n\omega (\mathbf{n}_\perp, \mathbf{v}_0)} \right) + i\beta_\perp \frac{d}{d\xi} \right] J_l(\xi),$$

где $\beta_z = a/c$, $\xi = n\omega(\mathbf{n}_\perp, \mathbf{v}_0)/(\omega_0 c)$, $\beta_\perp = \mathbf{v}_0/c$ и $J_n(x)$ — функции Бесселя порядка n . Полученное выражение представляет собой разложение векторного потенциала по сферическим монохроматическим волнам. Прodelывая аналогичные действия для скалярного потенциала, получим:

$$\varphi = \sum_n \frac{e^{-in\omega(t-r/c) - in\pi/2}}{r} \varphi_n,$$

$$\varphi_n = -\frac{e}{4\pi} \sum_{m,l=-\infty}^{\infty} J_m \left(n\omega \frac{bn_z}{c} \right) J_{n-2m-l} \left(n\omega \frac{(\mathbf{n}_\perp, \mathbf{r}_0)}{c} \right) J_l(\xi) e^{-i(2m+l)\pi/2 - im\alpha}$$

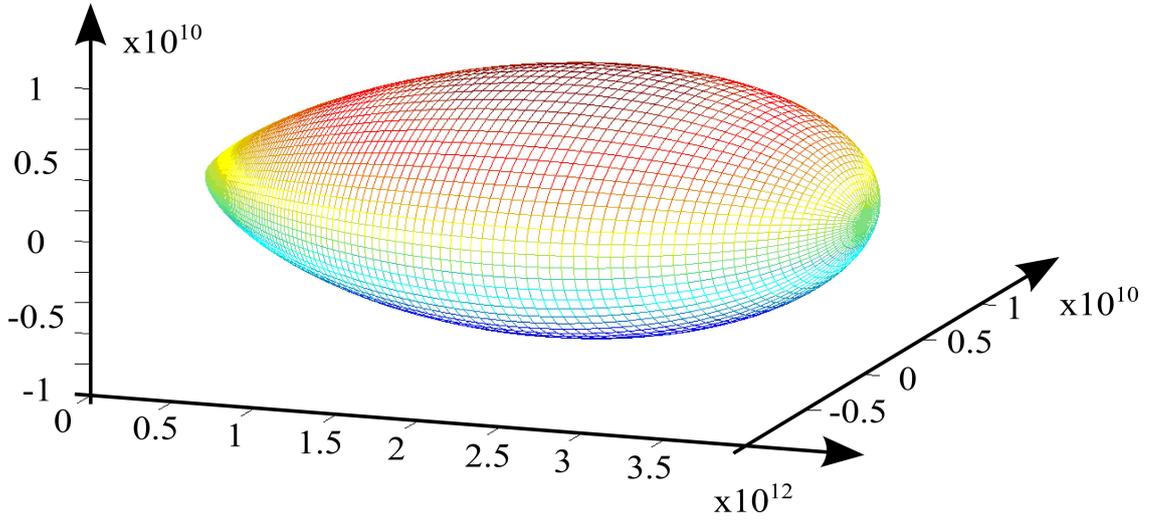


Рис. 4.4. Угловое распределение излучения электрона, движущегося по круговой спирали

Как видно из полученных выражений для потенциалов, они удовлетворяют условию Лоренца в волновой зоне. Найдем электрическую и магнитную напряженность поля, пренебрегая в знаменателе степенями r больше 1, также опуская в экспоненте величину $in\pi/2$, не влияющую на модуль компонент поля:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi = -\frac{1}{cr} \sum_n e^{-in\omega(t-r/c)} in\omega (\mathbf{n}\varphi_n - \mathbf{A}_n), \quad (4.25)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = [\nabla, \mathbf{A}] = \frac{1}{cr} \sum_n e^{-in\omega(t-r/c)} in\omega [\mathbf{n}, \mathbf{A}_n] \quad (4.26)$$

Распределение интенсивности электромагнитного излучения с частотой $n\omega_0$ по углам:

$$\frac{dI_n}{d\Omega} = \frac{\omega^2 n^2}{2\pi c} (|\mathbf{A}_n|^2 - |\varphi_n|^2)$$

Выше было получено точное выражение для поля излучения электрона на больших расстояниях. Найти точное выражение для спектрального и углового распределений излучения не представляется возможным в аналитическом виде. Найдем распределение излучения по углам в пренебрежении отличием траектории электрона от круговой спирали $b = 0, v_0 = r_0\omega_0$, в

этом случае распределение интенсивности по углам n -ой гармоники примет вид [96]:

$$\frac{dI_n}{d\Omega} = \frac{e^2\omega_0^2 n^2}{2\pi c(1 - \beta_z \cos \theta)^3} \left(\left(\frac{\cos \theta - \beta_z}{\sin \theta} \right)^2 J_n^2(\xi) + \beta_\perp^2 J_n'^2(\xi) \right),$$

$$\xi = \frac{n\beta_\perp \sin \theta}{1 - \beta_z \cos \theta}$$

Найдем распределение излучения по углам, просуммировав по n с помощью следующих выражений:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 J_n^2(nz) = \frac{z^2(4 + z^2)}{16(1 - z^2)^{7/2}}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^2 J_n'^2(nz) = \frac{4 + 3z^2}{16(1 - z^2)^{5/2}}$$

Тогда распределение интенсивности по углам примет вид:

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{e^2\omega_0^2 (\cos \theta - \beta_z)^2 (4z_1 + z_2) + \beta_\perp^2 (4z_1 + 3z_2)(z_1 - z_2)}{2\pi c 16(z_1 - z_2)^{7/2}}, \quad (4.27)$$

где $z_1 = (1 - \beta_z \cos \theta)^2$, $z_2 = \beta_\perp^2 \sin^2 \theta$. Как видно из рис. 4.4, максимум интенсивности излучения приходится на угол $\theta = 0$, что не удивительно, так как в собственной системе распределение интенсивности по углам пропорционально $\sim \sin^2 \theta_0$, а при переходе к лабораторной системе синус переходит в $\sin \theta_0 \sim \sin \theta / (1 - \beta_z \cos \theta)$. Вернемся к исходной задаче и рассмотрим интенсивность излучения в направлении движения электрона, под нулевым углом будут излучаться только нечетные гармоники, интенсивность излучения в направлении движения электрона будет равна:

$$\frac{dI_n}{d\theta}(\theta = 0) = \frac{e^2\omega_0^2 n^2 \gamma_z^4}{\pi^2 c} \left(a_1 \left(J_{\frac{n+1}{2}}^2(\xi) + J_{\frac{n-1}{2}}^2(\xi) \right) + a_2 J_{\frac{n+1}{2}}(\xi) J_{\frac{n-1}{2}}(\xi) \right) \quad (4.28)$$

$$a_1 = \frac{r_0^2 \omega_0^2 + v_0^2}{4c^2}, \quad a_2 = \frac{r_0^2 \omega_0^2 - v_0^2}{2c^2} \cos \alpha + \frac{\omega_0(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)}{c^2} \sin \alpha, \quad \xi = 2n\omega_0 \gamma_z^2 \frac{b}{c}$$

Рассмотрим подробнее аргумент функций Бесселя $\xi \approx 2\gamma_z^2 \omega_0 b / c$. Величина ξ может принимать два предельных значения $\xi \rightarrow 1$ и $\xi \ll 1$. В случае

$\xi \ll 1$ основной вклад в излучение будут давать низкие гармоники, соответствующие максимуму излучения на частоте $\omega_{max} = 2\gamma_z^2\omega_0$. При $\xi \rightarrow 1$, что соответствует рассмотренному ранее приближению, основной вклад будут давать высокие гармоники. Для больших значений порядка можно воспользоваться асимптотическими выражениями для функций Бесселя через функции Макдональда [110–112]:

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2(n-x)}{3x}} K_{1/3} \left(\frac{(2(n-x))^{3/2}}{3\sqrt{x}} \right)$$

при больших n различие между n и $n+1$ гармоникой будут мало отличаться. Поэтому можно говорить о непрерывном спектре, вводя частоту излучения $\omega = n\omega_0$, получим следующее выражение для спектрального распределения интенсивности в направлении движения электрона:

$$\frac{dI(\theta=0)}{d\omega} = \frac{e^2\gamma_z^4\omega'^2}{3\pi^3c\omega_0} \left(\frac{3\omega_0}{\omega'} \right)^{2/3} f \left(\frac{\omega}{\omega'} \right), \quad (4.29)$$

$$f(\xi) = \xi^2 \left((2a_1 + a_2) \left(K_{1/3}(\xi) - \left(\frac{3\omega_0}{\omega'} \right)^{1/3} K_{2/3}(\xi) \right) K_{1/3}(\xi) + \right. \\ \left. + a_1 \left(\frac{3\omega_0}{\omega'} \right)^{2/3} K_{2/3}(\xi) \right), \omega' = 3\omega_0 \left(1 - \left(2\omega_0\gamma_z^2 \frac{b}{c} \right)^2 \right)^{-3/2}$$

Независимость формы спектра от начальных условий обусловлена малым отличием функций $xK_{1/3}(x)$ от $xK_{2/3}(x)$. Максимум излучения приходится на частоту $\omega_{max} \sim \omega'$, при которой аргумент у функции Бесселя сравним с единицей. Как было показано в [22, 24] частота $\omega' \sim 10^{19} \text{ с}^{-1}$, на которую приходится максимум излучения, лежит в рентгеновском диапазоне.

Найдем вероятность спонтанного перехода электрона с испусканием одного фотона и распределение по энергиям и углам излученных фотонов.

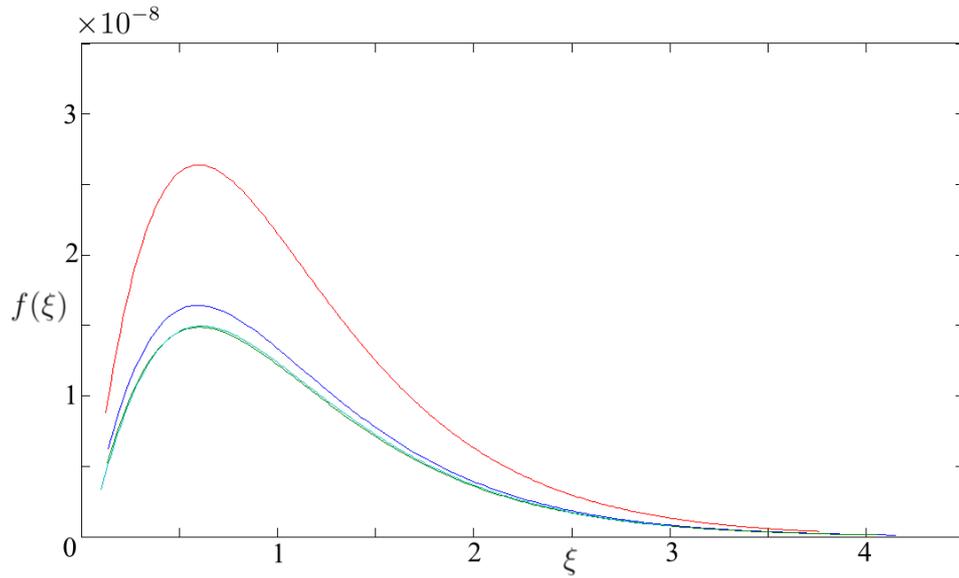


Рис. 4.5. Спектральное распределение излучения в направлении движения электрона при различных начальных условиях. По оси ординат отложена безразмерная величина $f(\xi)$, а по оси абсцисс безразмерная частота $\xi = \omega/\omega'$. Как видно из графика, форма спектра практически не меняется в зависимости от начальных условий.

Вероятность испускания фотона с заданным импульсом имеет вид [113,114]:

$$dw_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \langle 0_{ei} 1_{ef} | \hat{V} | 1_{ei} 0_{ef} \rangle \right|^2 \delta(E_i - E_f - \hbar\omega_\lambda) \frac{\omega_\lambda^2 V d\Omega}{(2\pi c)^3 \hbar} d(\hbar\omega_\lambda),$$

где оператор перехода электрона из начального состояния в конечное с испусканием одного фотона равен:

$$\hat{V}_{fi} = -e \left(\frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega} \right)^{1/2} \mathbf{e}_\lambda \int \hat{\mathbf{j}}_{fi}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}_\lambda \mathbf{r}} dV,$$

$$\hat{\mathbf{j}}_{fi} = \frac{1}{2m} \left(\hat{\psi}_i (\hat{\mathbf{p}} \hat{\psi}_f)^* + \hat{\psi}_f^* \hat{\mathbf{p}} \hat{\psi}_i \right)$$

Так как в рассматриваемой задаче не рождаются позитроны, то пси-операторы запишутся в виде $\hat{\psi}_i = \hat{a}_i \psi_i(\mathbf{r})$, $\hat{\psi}_f^* = \hat{a}_f^+ \psi_f^*(\mathbf{r})$. Тогда вероятность перехода электрона из начального состояния в конечное с испусканием

одного фотона примет вид:

$$dw_{fi} = \frac{e^2 \omega_\lambda}{2\pi c \hbar} |\mathbf{e}_\lambda \mathbf{j}_{fi}(\mathbf{k})|^2 \delta(E_i - E_f - \hbar \omega_\lambda) d\Omega d(\hbar \omega_\lambda), \quad (4.30)$$

где

$$\mathbf{j}_{fi}(\mathbf{k}) = \int \mathbf{j}_{fi}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} dV,$$

$$\mathbf{j}_{fi} = \frac{1}{2mc} (\psi_i (\hat{\mathbf{p}} \psi_f)^* + \psi_f^* \hat{\mathbf{p}} \psi_i)$$

При вычислении интеграла от матричного элемента тока перехода воспользуемся определением эрмитова оператора и учтем, что для фотона справедливо равенство $(\mathbf{e}_\lambda, \mathbf{k}_\lambda) = 0$, тогда интеграл примет вид:

$$\mathbf{j}_{fi}(\mathbf{k}) = \frac{1}{mc} \int \psi_f^* e^{-i\mathbf{k}_\lambda \mathbf{r}} \hat{\mathbf{p}} \psi_i dV$$

После суммирования по поляризациям фотона вероятность перехода примет вид:

$$dw_{fi} = \frac{e^2 \omega_\lambda}{2\pi c \hbar} |[\mathbf{n}, \mathbf{j}_{fi}(\mathbf{k})]|^2 \delta(E_i - E_f - \hbar \omega_\lambda) d\Omega d(\hbar \omega_\lambda), \quad (4.31)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор в направлении распространения фотона. В выше приведенных рассуждениях полагалось, что частота ω_0 является постоянной, однако, как видно из выражения для частоты, ω_0 является функцией от проекции обобщенного импульса на ось Oz , тем не менее будем считать ее постоянной и определенной по начальному состоянию p_{zi} . Проинтегрировав по энергии фотона, вероятность перехода электрона из начального в конечное состояние, получим закон сохранения энергии, а для частоты излученного фотона получим в приближении $cp_{zi} \gg \hbar \omega_\lambda \cos \theta$ (импульс фотона намного меньше проекции импульса электрона на ось Oz , что соответствует квазиклассическому приближению [96]):

$$\omega_\lambda = \frac{\omega_0 (n_i - n_f)}{1 - \beta_z \cos \theta}, \quad \beta_z = \frac{p_{zi}}{\gamma mc}$$

Таким образом, мы полагаем, что продольное движение электрона не меняется при излучении фотона. Для вычисления матричных элементов тока перехода выразим операторы поперечных импульсов через операторы рождения и уничтожения [109]:

$$\hat{p}_y = \frac{\hbar\alpha}{i\sqrt{2}} (\hat{a}_y - \hat{a}_y^+), \hat{p}_x = \frac{\hbar\alpha}{i\sqrt{2}} (\hat{a}_x - \hat{a}_x^+)$$

Для вычисления интеграла

$$I_{nm} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} e^{-a^2x^2} H_n(ax) H_m(ax) dx$$

воспользуемся производящей функцией полиномов Эрмита [112]:

$$e^{-z^2+2zx} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{z^n}{n!}$$

Тогда интересующий нас интеграл будет равен:

$$\begin{aligned} I_{nm} &= \left(\frac{\partial^{(n+m)}}{\partial z_1^n \partial z_2^m} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z_1^2 - z_2^2 - a^2x^2 + 2(z_1+z_2)ax - ikx} dx \right)_{z_1=z_2=0} = \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{-\frac{k^2}{4a^2}} \left(\frac{\partial^m}{\partial z_2^m} \left(\left(2z_2 - \frac{ik}{a} \right)^n e^{2z_1z_2 - \frac{ik}{a}(z_1+z_2)} \right) \right)_{z_1=z_2=0} = \\ &= \frac{\sqrt{\pi} 2^m}{a} e^{-\frac{k^2}{4a^2}} \left(-\frac{ik}{a} \right)^{n-m} L_m^{n-m} \left(\frac{k^2}{2a^2} \right), \quad m \leq n \end{aligned}$$

где $L_n^{n-m}(x)$ — обобщенные многочлены Лагерра. Тогда для матричных элементов тока перехода получим:

$$j_z^{fi} = \frac{p_{zi} (-i)^{n_i - n_f}}{\gamma_z mc} \left(\frac{k_x}{|k_x|} \right)^{n_{xi} - n_{xf}} \left(\frac{k_y}{|k_y|} \right)^{n_{yi} - n_{yf}} I_{n_{xi}, n_{xf}}(\xi_x^2) I_{n_{yi}, n_{yf}}(\xi_y^2),$$

$$j_x^{fi} = \frac{\hbar\alpha (-i)^{n_i-n_f}}{\gamma_z mc \sqrt{2/\xi_x^2}} \left(\frac{k_x}{|k_x|} \right)^{n_{xi}-n_{xf}-1} \left(\frac{k_y}{|k_y|} \right)^{n_{yi}-n_{yf}} I'_{n_{xi},n_{xf}}(\xi_x^2) I_{n_{yi},n_{yf}}(\xi_y^2),$$

$$j_y^{fi} = \frac{\hbar\alpha (-i)^{n_i-n_f}}{\gamma_z mc \sqrt{2/\xi_y^2}} \left(\frac{k_x}{|k_x|} \right)^{n_{xi}-n_{xf}} \left(\frac{k_y}{|k_y|} \right)^{n_{yi}-n_{yf}-1} I_{n_{xi},n_{xf}}(\xi_x^2) I'_{n_{yi},n_{yf}}(\xi_y^2),$$

где $\sqrt{E_i E_f} \approx \gamma_z mc^2$, а $I_{n,m}$ — функции Лагерра, связанные с обобщенными многочленами Лагерра выражением:

$$I_{n,m}(x) = \frac{1}{\sqrt{n!m!}} e^{-x/2} x^{(n-m)/2} L_m^{n-m}(x), \xi_{x,y} = \frac{k_{x,y}}{\sqrt{2}\alpha},$$

$$k_x = \frac{\omega_0 (n_i - n_f)}{c} \frac{\sin \theta \cos \varphi}{1 - \beta_z \cos \theta}, k_y = \frac{\omega_0 (n_i - n_f)}{c} \frac{\sin \theta \sin \varphi}{1 - \beta_z \cos \theta}$$

В пределе больших квантовых чисел функции Лагерра переходят в функции Бесселя и можно показать, что интенсивность излучения фотонов с определенной энергией будет совпадать с классическим выражением. Но для нас более интересен вопрос, связанный с шириной энергетических уровней по отношению к процессам спонтанного излучения фотонов. Так как начальное и конечное состояние электрона вырождены, то для нахождения вероятности испускания фотона с частотой ω_λ при переходе электрона из состояния, описываемого квантовыми числами \mathbf{n}_i в состояние с квантовыми числами \mathbf{n}_f нужно усреднить по начальным состояниям и просуммировать по конечным состояниям. Понятно, что квантовые эффекты будут проявляться для низко лежащих энергетических уровней, и для них ширина i -го низко лежащего энергетического уровня примет вид (Приложение):

$$\Delta E_i = \frac{e^2 \omega_0 p_{zi}^2}{2\pi \gamma_z^2 m^2 c^3 n_i} \sum_{n_f < n_i} \frac{n_{xi}! n_{yi}!}{n_{xi}! n_{yi}! (\Delta n_x!)^2 (\Delta n_y!)^2} \left(\frac{\hbar \omega_0 \Delta n^2}{2\gamma_z mc^2} \right)^{\Delta n} F_{i,f}, \quad (4.32)$$

Выражение (4.34) является точным для малых Δn , однако сделать точный его анализ довольно затруднительно. Поэтому сделаем грубую оценку, выделяя в выражении для $F_{i,f}$ основную степенную зависимость $F_{i,f} \sim \gamma_z^{2\Delta n+2}$ и пренебрегая суммированием по квантовым числам, получим следующую

оценку для ширины i -го энергетического уровня:

$$\Delta E_i \sim \frac{e^2 \omega_0 \gamma_z^2}{c} \left(\frac{\hbar \omega_0 \gamma_z \Delta n^2}{mc^2} \right)^{\Delta n} \quad (4.33)$$

Такая грубая оценка дает для 30-го уровня энергии ширину сравнимую по порядку величины с расстоянием между уровнями $E_{i+1} - E_i = \hbar \omega_0 \sim 10^{-4}$ эВ.

Приведенные вычисления ширины уровней проводились в приближении бесконечно глубокого потенциала, на самом деле глубина канала радиусом $r_0 = 10$ мкм имеет значение $\Delta U = \pi n_0 e^2 r_0^2 \sim 10^6$ эВ. Глубина канала на много порядков превосходит как значения энергии 30-го уровня так и расстояние между энергетическими уровнями, что оправдывает использованное приближение [115]. Необходимо отметить, что максимум излучения приходится на переходы между высоко лежащими энергетическими уровнями, тем не менее представляет интерес указание применимости классического описания движения электрона в ионном канале.

4.3 Функция распределения пучка электронов в ионно-плазменном канале

Для описания кинетических процессов, протекающих в пучке заряженных частиц, находящегося во внешних электромагнитных полях, необходимо решить систему нелинейных интегро-дифференциальных уравнений, что, в общем случае, представляется невозможным в силу отсутствия методики решения таких уравнений. Однако, в ряде случаев система уравнений может быть линеаризована, а решение может представлять собой сходящийся ряд по какому-нибудь малому параметру задачи. Довольно просто решается задача о нахождении функции распределения невзаимодействующих между собой электронов, затягиваемых в бесконечный ионный канал. Зная функцию распределения невзаимодействующих между собой элек-

тронов, можно построить ряд теории возмущений по их взаимодействию и учесть конечность размеров ионной полости. Используя результаты рассмотренной выше задачи о движении одного электрона в бесконечном ионном канале, найдем функцию распределения невзаимодействующих между собой системы электронов. Интересен вопрос о влиянии теплового разброса по поперечным импульсам. Чтобы ответить на него, рассмотрим задачу об эволюции функции распределения бесконечного пучка невзаимодействующих между собой электронов в бесконечном ионном канале. Уравнение, описывающее эволюцию функции распределения электронов в обобщенном фазовом пространстве в пренебрежении интегралом столкновений и взаимодействия между электронами [116], имеет вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{d\mathbf{p}}{dt} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} = 0 \quad (4.34)$$

В силу вышесказанного, функция распределения не должна зависеть от координаты z ; с учетом этого запишем уравнение для функции $f(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$, подставляя явные выражения для производных по времени от обобщенных координат и импульсов из (4.2) и (4.4). Записывая скалярный потенциал в явном виде, перепишем кинетическое уравнение:

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \omega_0^2 \frac{E_z}{c^2} x_i \frac{\partial f}{\partial p_i} + \frac{c^2}{E_z} p_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0,$$

где x_i, p_i — координаты радиус-вектора и импульса, соответственно; здесь и далее по повторяющемуся индексу идет суммирование. Решением этого уравнения будет любая функция вида:

$$f = f \left(x_i \cos(\omega_0 t) - p_i \frac{c^2}{E_z \omega_0} \sin(\omega_0 t), p_i \cos(\omega_0 t) + x_i \frac{\omega_0 E_z}{c^2} \sin(\omega_0 t) \right)$$

Будем считать, что при $t = 0$ электроны в канале имели линейную плотность n_1 вдоль оси Oz , имели максвелловское распределение по поперечным импульсам, и подчинялись распределению Гаусса по координатам в

поперечном сечении. Тогда начальная функция распределения в фазовом пространстве примет вид (ширина пучка $1/a = 10^{-5}$ см)

$$f(\mathbf{p}, \mathbf{r}_\perp) |_{t=0} = \frac{n_1 a^2 b^2}{\pi^2} e^{-a^2 r_\perp^2 - b^2 p_\perp^2} \delta(p_z - p_{z0})$$

где коэффициент $b^2 = c^2/(2TE_z)$, а функция распределения в любой момент времени:

$$f(\mathbf{p}, \mathbf{r}_\perp, t) = \frac{n_1 a^2 b^2}{\pi^2} e^{-a^2 \xi_i \xi_i - b^2 \zeta_i \zeta_i} \delta(p_z - p_{z0}), \quad (4.35)$$

где

$$\xi_i = x_i \cos(\omega_0 t) - p_i \frac{c^2}{E_z \omega_0} \sin(\omega_0 t), \quad \zeta_i = p_i \cos(\omega_0 t) + x_i \frac{\omega_0 E_z}{c^2} \sin(\omega_0 t)$$

Проинтегрировав выражение (4.35) по импульсам, определим пространственное распределение электронов в поперечном сечении в произвольный момент времени:

$$n(\mathbf{r}_\perp, t) = \frac{n_1 a^2 b^2}{\pi \alpha^2(t)} e^{-(a^2 b^2 / \alpha^2(t)) r_\perp^2}, \quad (4.36)$$

$$\alpha^2(t) = a^2 \left(\frac{c^2}{E_z \omega_0} \right)^2 \sin^2(\omega_0 t) + b^2 \cos^2(\omega_0 t)$$

Как видно из полученного выражения, функция распределения электронов в поперечном сечении бесконечного пучка в момент времени t имеет вид распределения Гаусса, как и при $t = 0$, а вот ширина на полувысоте меняется с течением времени по гармоническому закону. Интересно отметить, что при температуре равной $2T = E_z(\omega_0/ac)^2 \sim 10^{-2} E_z$ пространственное распределение электронов не будет зависеть от времени, множители стоящие перед квадратами синуса и косинуса становятся равными. Таким образом, влияние начального разброса по поперечным импульсам (энергиям) играет важную роль. Рассмотрим случай, когда в начальный момент времени в канале не было электронов, а в плоскости $z = 0$ имеется источник монохроматических холодных электронов, действующий в течении времени τ .

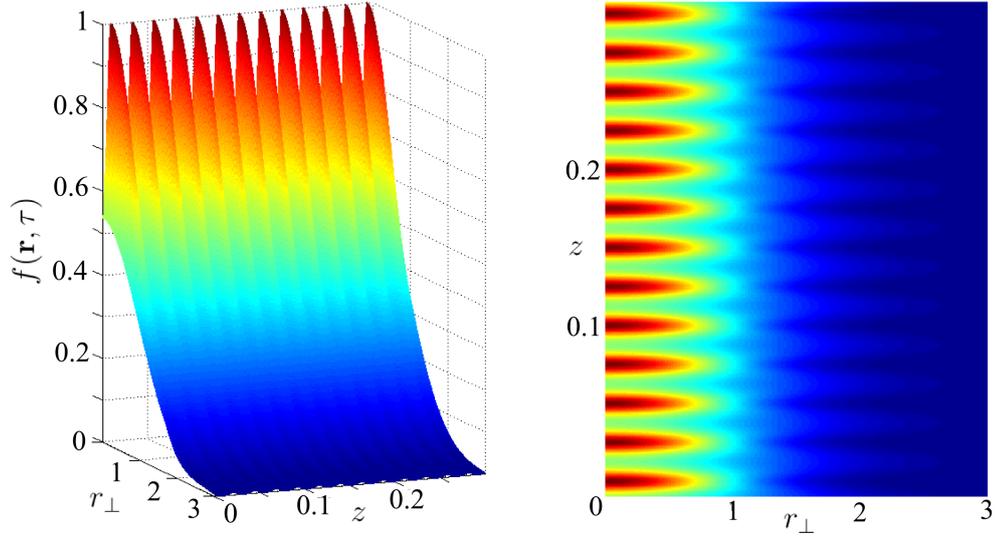


Рис. 4.6. Функция распределения электронов в пространстве в момент времени $\tau = 10$ пкс с неподвижным источником электронов и температурой $T = E_z(\omega_0/ac)^2 \sim 10^{-3}E_z$. Здесь функция распределения нормирована на $n_0a^2b^2E_z/(\pi\tau c^2p_{z0})$, модуль поперечного радиуса вектора r_\perp нормирован на 10^{-5} см, координаты имеют размерность сантиметров.

Тогда уравнение непрерывности в фазовом пространстве запишется следующим образом:

$$\frac{df}{dt} = \frac{n_0a^2b^2}{\pi^2\tau} e^{-a^2r_\perp^2 - b^2p_\perp^2} \delta(z) \delta(p_z - p_{z0}) [H(t) - H(t - \tau)], \quad (4.37)$$

где $H(t)$ — функция Хевисайда, n_0 — полное число электронов, захваченных каналом. В уравнении Гамильтона (4.7) оставим только первое слагаемое в силу $|\mathbf{p}_\perp| \ll p_z$:

$$\frac{dz}{dt} \approx \frac{c^2p_z}{E_z}$$

При этом решение уравнения (4.37) запишется в виде $0 \leq t \leq \tau$:

$$f(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) = \frac{n_0a^2b^2E_z}{\pi^2\tau c^2p_z} e^{-a^2\psi_1^2 - b^2\psi_2^2} \delta(p_z - p_{z0}) \left(H(z) - H\left(z - \frac{c^2p_z}{E_z}t\right) \right), \quad (4.38)$$

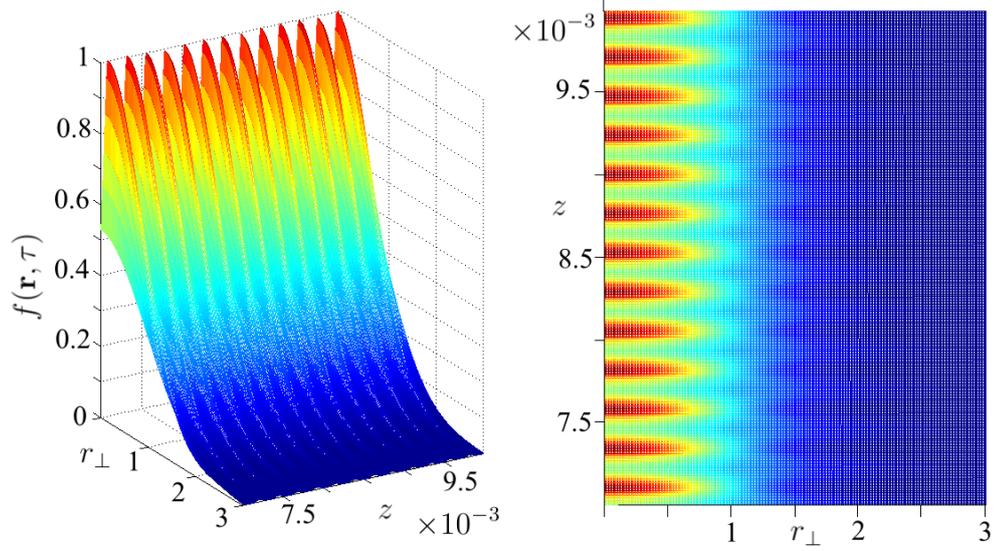


Рис. 4.7. Функция распределения электронов в пространстве в момент времени $\tau = 10$ пкс, источник электронов движется со скоростью $v_0 = 0,99c$ в направлении оси Oz . Здесь функция распределения нормирована на $n_0 a^2 b^2 E_z / (\pi \tau (c^2 p_{z0} - v_0 E_z))$, модуль поперечного радиуса вектора r_\perp нормирован на 10^{-5} см, температура $T = E_z (\omega_0 / ac)^2 \sim 10^{-3} E_z$. Как видно из графиков Рис. 4.6, 4.8, движение источника приводит к уменьшению продольного размера пучка и увеличению периода функции распределения.

где

$$\psi_1^2 = x_i x_i \cos^2 \phi + p_i p_i \left(\frac{c^2}{E_z \omega_0} \right)^2 \sin^2 \phi - p_i x_i \frac{c^2}{E_z \omega_0} \sin 2\phi,$$

$$\psi_2^2 = p_i p_i \cos^2 \phi + x_i x_i \left(\frac{E_z \omega_0}{c^2} \right)^2 \sin^2 \phi + p_i x_i \frac{E_z \omega_0}{c^2} \sin 2\phi,$$

$$\phi = \omega_0 \left(\frac{z E_z}{c^2 p_z} - 2t \right),$$

где $i = \{x, y\}$. Найдем функцию распределения электронов в пространстве проинтегрировав по импульсам полученное выражение

$$n(\mathbf{r}, t) = \frac{n_0 a^2 b^2 E_z}{\pi \tau c^2 p_{z0} \alpha^2(t)} e^{-a^2 b^2 r_\perp^2 / \alpha^2(t)} \left(H(z) - H \left(z - \frac{c^2 p_{z0}}{E_z} t \right) \right) \quad (4.39)$$

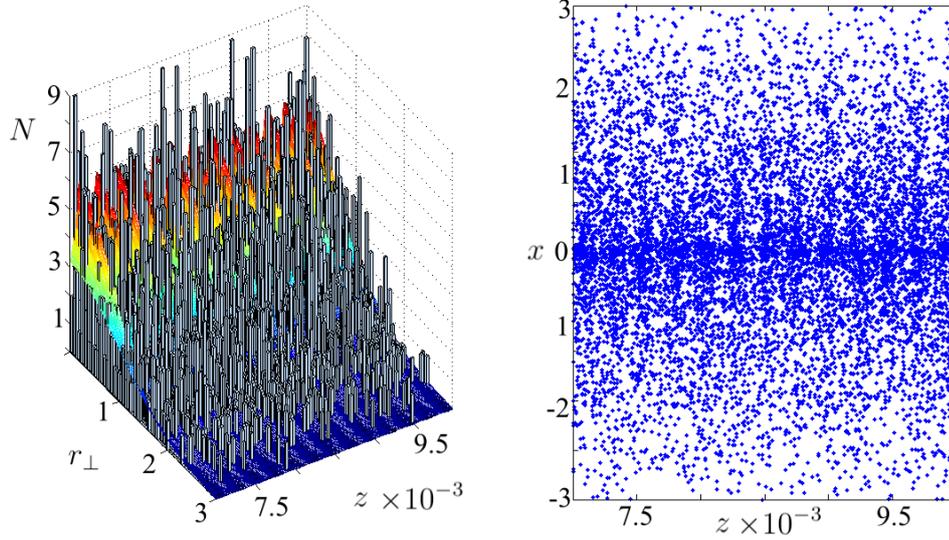


Рис. 4.8. На левом графике изображено распределение $n_0 = 10^3$ электронов с движущимся источником $v_0 = 0.99c$ в пространстве в момент времени $\tau = 10$ пкс с температурой $T = E_z(\omega_0/ac)^2 \sim 10^{-3}E_z$ и гистограмма промоделированных координат частиц методом исключения, справа показано распределение частиц в этот же момент времени в плоскости xOz ; поперечные координаты нормированы как и ранее.

$$\alpha^2(t) = b^2 \cos^2 \phi + a^2 \left(\frac{c^2}{E_z \omega_0} \right)^2 \sin^2 \phi$$

Как видно из графика на рис. 4.6, продольный размер пучка становится порядка сантиметра, что совсем не соответствует действительности (продольный размер пучка порядка 10^{-3} см [105]). Чтобы объяснить это отличие, необходимо учесть, что источник движется в направлении оси Oz со скоростью v_0 , что соответствует замене в кинетическом уравнении $\delta(z) \rightarrow \delta(z - v_0 t)$. При этом решение будет иметь такой же вид, что и (4.38), но с другим множителем перед экспонентой $E_z/c^2 p_z \rightarrow E_z/(c^2 p_z - v_0 E_z)$, с другим аргументом ϕ и аргументом u функций Хэвисайда:

$$\phi = \frac{\omega_0 E_z}{c^2 p_z - v_0 E_z} \left(z - \left(2 \frac{c^2 p_z}{E_z} - v_0 \right) t \right),$$

$$H(z) - H\left(z - \frac{c^2 p_z}{E_z} t\right) \rightarrow H(z - v_0 t) - H\left(z - \frac{c^2 p_z}{E_z} t\right)$$

Отличие функции распределения электронов в случае движущегося источника заключается в уменьшении продольного размера пучка и уменьшении периода функции распределения (рис. 4.4) [117,118]. Зная функцию распределения пучка захватываемых электронов в любой момент времени можно найти различные физические величины характеризующие пучок (например энергию пучка и его эмиттанс, а так же их разброс). Если не пренебрегать отличием скорости ионной полости от скорости света $\beta_0 = v_0/c$, но продолжая пренебрегать ускорением электронов под действием поля ионной полости, выше приведенные выкладки остаются справедливыми, но в этом случае вместо кинематического импульса будет обобщенный, а частота поперечных колебаний будет иметь вид:

$$\omega_0'^2 = \frac{\pi e^2 n_0 c^2}{E_z} \left(1 + \beta_0 \frac{c P_z}{E_z}\right)$$

Как показал Власов [119], в системах заряженных частиц основной вклад во взаимодействие дает не интеграл столкновений, а самосогласованное поле. Полагая поле создаваемое электронным пучком малым по сравнению с полем ионов (что справедливо пока четырех мерный вектор плотности тока пучка электронов меньше плотности тока ионов), можно утверждать, что поле, создаваемое ионами, превалирует над полем электронов. Это в нашем случае соответствует малости электронной концентрации по сравнению с ионной. Таким образом функция распределения представима в виде $f \approx f^{(0)} + \delta f$, а гамильтониан в виде $H \approx H^{(0)} + \delta H$, где $\delta H = \delta H_1 + \delta H_2$ складывается из изменения энергии вследствие конечности ионной полости δH_1 и поправки на взаимодействие δH_2 электронов между собой.

В данной главе рассмотрена задача о движении и излучении электрона в бесконечном ионном канале, образованном мощным ультракоротким лазерным импульсом. Рассмотрена классическая и квантовомеханическая

задачи в приближении скалярной частицы. Рассмотрены особенности спектрального распределения излучения электрона при различных начальных условиях, отвечающих различным траекториям электрона: лежащие в плоскости гармонические колебания, круговая спираль и эллиптическая спираль. Отличие углового распределения излучения электрона при движении по эллиптической спирали от углового распределения излучения при движении по круговой спирали заключается в отсутствии симметрии по отношению к направлению релятивистского движения. Спектральное распределение излучения электрона не зависит от начальных условий. Посчитана ширина низколежащих энергетических уровней электрона, проведена оценка, показывающая, что начиная с 30-го уровня движение электрона можно рассматривать, как движение классической частицы. Найдена функция распределения невзаимодействующих электронов в фазовом пространстве, затачиваемых в ионный канал.

Заключение

Современные источники мощного электромагнитного излучения вплотную подошли к рентгеновскому и гамма - диапазону. Увеличение мощности в современных источниках электромагнитного излучения возможно за счет доминирования когерентных процессов излучения над некогерентными. На сегодняшний день ЛСЭ являются одними из самых эффективных источников излучения наряду с СИ и излучением заряженных частиц в кристаллах. Для успешной работы ЛСЭ в выше указанном диапазоне частот необходимы промодулированные в пространстве электронные пучки, получение таких пучков является приоритетной задачей. Другим новейшим источником излучения и пучков электронов является процесс взаимодействия мощных ультракоротких лазерных импульсов с плазмой, активно изучаемый в настоящее время.

Представленная работа посвящена теоретическому анализу процессов, происходящих в экспериментах COMB и PLASMONX, проводимых в рамках проекта SPARC_LAB в Национальном институте ядерной физики (Фраскати, Италия). Оба эксперимента посвящены новейшим мощным источникам электромагнитного излучения, в которых увеличение интенсивности излучения достигается за счет доминирования когерентных процессов. Для работы ЛСЭ необходимы пучки электронов с хорошим эмиттансом, эксперимент COMB посвящен диагностике пучков используемых для работы ЛСЭ.

В представленной работе был рассмотрен качественный процесс генерации и формирования пучка электронов в фотоинжекторе машины SPARC под действием поля лазера. Показаны основные процессы влияющие на

характеристики пучка в момент его генерации, получена функция распределения электронов в пространстве. Показано, что распределение пучка электронов в поперечном сечении имеет форму профиля лазерного импульса, под действием которого происходит процесс фотоэффекта.

Рассмотрена задача о модуляции пучка невзаимодействующих между собой электронов под действием поля лазера в прикатодной области фотоинжектора машины SPARC. Показано, что под действием лазерного поля и постоянного ускоряющего поля происходит продольная модуляция электронного пучка в соответствии с продольной длиной волны лазерного излучения. В работе показано, что за модуляцией пучка ответственна постоянная скорость дрейфа, которую электроны получают от электромагнитных волн, а действие сил Миллера-Гапонова пренебрежимо мало для полей, используемых в эксперименте SPARC. Посчитано спектральное распределение излучения пучка электронов в прикатодной области инжектора, рассмотрены случаи различных коэффициентов отражения лазера от поверхности фотокатода.

В работе впервые проанализирована динамика движения электрона в поле двух скрещенных электромагнитных волн. Было показано, что поле скрещенных электромагнитных волн может образовывать стоячие волны, представляющие собой некий эффективный потенциал, формирующий пространственные каналы. Эти каналы могут захватывать заряженные частицы при выполнении определенных условий захвата. Глубина каналов может достигать значений $\Delta U \sim 10^2$ эВ, что сравнимо с глубиной каналов в кристаллах. Потому связанное движение в таких каналах, по аналогии с каналированием в кристаллах, может быть описано в рамках новой теории каналирования в поле стоячей лазерной волны. Похожая форма эффективного потенциала образуется при движении электрона в поле электромагнитной волны, распространяющейся в планарном и цилиндрическом волноводах. В отличие от планарного волновода, в котором движение частицы свободно в 2-х измерениях, эффективный потенциал, образованный в цилиндрическом волноводе, представляет собой набор коаксиальных цилин-

дрических каналов, и может быть использован для управления и фокусировки пучков электронов. Изогнутые цилиндрические волноводы подобны изогнутым кристаллам, потому могут эффективно отклонять пучки. Такие каналы обладают рядом преимуществ перед каналами в кристаллах. Каналами, образованными стоячими электромагнитными волнами, можно управлять как по глубине, так и по геометрии. Более того, при каналировании заряженных частиц в поле стоячих лазерных волн не происходит неупругих процессов рассеяния как на узлах кристаллических решеток в кристаллах.

Другим методом получения плотных электронных пучков, а также интенсивного высокоэнергетического излучения является процесс взаимодействия мощного ультракороткого лазерного импульса с веществом, исследуемый в эксперименте PLASMONX. При таком взаимодействии мы получаем плазму, и за лазерным импульсом образуется полость, свободная от плазменных электронов и способная захватывать периферийные плазменные электроны, ускоренные лазером до высоких скоростей. Если пренебречь ускорением электрона под действием поля ионной полости, то полость становится бесконечным ионным каналом, в котором движется пучок электронов. Нами была рассмотрена задача о движении и излучении электрона в таком ионном канале. В приближении скалярной частицы была выведена формула для ширины энергетических уровней, и тем самым, впервые определен предел применимости классической физики для описания движения электрона в ионном канале. Напомним, что данные процессы описаны в литературе лишь классически. Анализ выражения для ширины энергетических уровней показал, что движение электрона с поперечной энергией до $E_{\perp} \approx 30\hbar\omega_0 \sim 10^{-2}$ эВ является квантовым. В основном электроны, захваченные ионной полостью совершают колебания с большой амплитудой и, соответственно, имеют поперечную энергию много больше 10^{-2} эВ, поэтому процессы движения и электромагнитного излучений, протекающие с ними, могут быть описаны в рамках классической физики.

Также была найдена функция распределения в фазовом пространстве

невзаимодействующих между собой электронов, захватываемых ионным каналом. Показано, что взаимодействие электронов между собой может быть учтено в рамках теории возмущений. Кинетическое описание процессов, происходящих с электронным пучком, захватываемым ионной полостью, показало, что на когерентные и некогерентные процессы излучения будут оказывать основное влияние начальные условия захвата электронов каналом.

Благодарности. Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю профессору С.Б. Дабагову за помощь и внимание к работе, Е.Г. Бессонову за внимательное прочтение диссертации и полезные советы и рекомендации. Также хочу поблагодарить Лигидова А.З., Бабаева А.А., Богданова О.В. за внимание к работе и обсуждения решаемых задач. Особо благодарен Фролову Е.Н. за помощь в оформлении диссертации и конструктивные обсуждения.

Мне также хотелось отметить поддержку моих исследований руководством ФИАН и LNF INFN, без которой было бы невозможно выполнение поставленных передо мной задач и представление результатов кандидатской диссертации на различных международных конференциях.

Список литературы

- [1] Е.Г. Бессонов, А.В. Виноградов. Ондюляторные и лазерные источники мягкого рентгеновского излучения// УФН, Т. 159, 143(1989)
- [2] L.R. Elias et al. Observation of Single-Mode Operation in a FEL// Phys. Rev. Lett., V 57, 424(1986)
- [3] Е.Н. Рогозин, И.И. Собельман. Продвижение ЛСЭ в рентгеновскую область спектра// УФН, Т. 174, 207(2004)
- [4] Е.Н. Рогозин, И.И. Собельман. Лазерные источники в мягкой рентгеновской области спектра// УФН, Т. 175, 1340(2005)
- [5] L.H. Yu et al. First Ultraviolet High-Gain Harmonics-Generation FEL// Phys. Rev. Lett., V 91, 074801-1(2003)
- [6] А.А. Коломенский, А.Н. Лебедев. Вынужденное ондуляторное излучение релятивистских электронов и физические процессы в электронном лазере// Квантовая электроника, Т. 5, 1543(1978)
- [7] V.A. Buts, A.N. Lebedev, V.I. Kurilko. The Theory of Coherent Radiation by Intense Electron Beams// Springer, 259(2006)
- [8] Т. Маршал. Лазеры на свободных электронах// Мир, М., (1987)
- [9] В.А. Буц, А.Н. Лебедев. Когерентное излучение интенсивных электронных пучков// ФИАН, (2006)

- [10] R. Kato, R.A.V. Kumar, T. Igo et al. Generation of Self – Amplified Spontaneous Emission and it's higher Harmonics in the far – infrared region// Proceedings of the Second Asian Particle Accelerator conference, China, (2001)
- [11] L. Serafini. Conditions to Operate a Thomson Source in FEL mode// Proceedings of Channeling-2006, Frascati, (2006)
- [12] C. Vaccarezza. Status of the SPARX FEL project// Proceedings of FLS, Hamburg, (2006)
- [13] D.Alesini et al. The SPARX project: R and D activity towards X – RAYS FEL sources// Proceedings of the FEL Conference, (2004)
- [14] И.М. Тернов. Синхротронное излучение// УФН, Т. 165 № 4, (1995)
- [15] Е.Г. Бессонов. К теории параметрических лазеров на свободных электронах// Препринт ФИАН №195, 23(1985)
- [16] В.И. Алексеев, Е.Г. Бессонов, А.В. Серов. К теории параметрических лазеров на свободных электронах, использующих открытые резонаторы// Препринт ФИАН №29, 15(1988)
- [17] L.M. Chen et al. Study of X-Ray Emission Enhancement via a High-Contrast Femtosecond Laser Interacting with a Solid Foil// Phys. Rev. Lett., V. 100, 045004(2008);
- [18] V. Malka et al. A Laser-Plasma Accelerator Producing Monoenergetic Electron Beams// Nature, V. 431, 541(2004)
- [19] T. Hosokai et al. Observation of Strong Correlation Between Quasimonoenergetic Electron Beam Generation by Laser Wakefield and Laser Guiding inside a Preplasma Cavity// Phys. Rev. E, V. 73, 036407(2006)

- [20] A. Pukhov, S. Kiselev. X-Ray Generation in Strongly Nonlinear Plasma Waves// Phys. Rev. Lett., V. 93, 135004(2004)
- [21] A. Pukhov, S. Kiselev, I. Kostyukov. Fenomenological Theory of Laser-Plasma Interection in "Bubble" Regime// Phys. Plasmas, V. 11, 5256(2004)
- [22] A. Pukhov, S. Kiselev, I. Kostyukov. X-Ray Generation in Ion-Channel// Phys. Plasmas, V. 10, 4818(2003)
- [23] A. Pukhov, J. Meyer-Ter-Vehn. Laeser Wakefield Acceleretion: The Highly Non-Linear Broken-Wave Regime// Appl. Phys. B, V. 74, 355(2002)
- [24] E. Esarey, C.B. Schroeder, P. Leemans. Phusics of Laser-Driven Plasma-Based Electron Accelerators// Rev. Mod. Phys., V. 81, 1229(2009)
- [25] S. Wang et al. X-Ray Emission from Betatron Motion in a Plasma Wiggler// Phys. Rev. Lett., V. 88, 135004(2002)
- [26] D.H. Wittum, A.M. Sessler, J.M. Dawson. Ion-Channel Laser// Phys. Rev. Lett., V. 64, 2511(1990)
- [27] L. Serafini. Stato dei Progretti Speciali SPARC/SPARCX e NTA-PLASMONX// INFN/Milano, (2008)
- [28] Г.Л. Терехова, Г.М. Дробжева. Введение в философию. История философских учений// ТГГУ, (2004)
- [29] И.В. Савельев. Оптика, атомная физика, физика атомного ядра и элементарных частиц// Наука, М., (1970)
- [30] Д.В. Сивухин. Атомная физика// Наука, М., (1986)
- [31] А. Зоммерфельд. Строение атома и спектры// Наука, М., (1956)

- [32] Э. Роув, Дж. Уивер. Использование синхротронного излучения// УФН, Т. 126, вып. 2, 269(1978)
- [33] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Механика// Наука, М., (1988)
- [34] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теория поля// Наука, М., (1982)
- [35] А.И. Алиханьян, С.А. Хейфец. Современное состояние физики и техники ускорения// УФН, Т. 101, вып. 2, 217(1970)
- [36] http://nuclphys.sinp.msu.ru/experiment/accelerators/linear_ac.htm
- [37] В.А. Базылев, Н.К. Жеваго. Излучение быстрых частиц в веществе и во внешних полях// Наука, М., (1987)
- [38] В.Г. Багров, Г.С. Бисноватый-Коган, В.А. Бордовицын, А.В. Борисов, О.Ф. Дорофеев, В.Ч. Жуковский, Ю.Л. Пивоваров, О.В. Шорохов. Теория излучения релятивистских частиц// Физматлит, (2002)
- [39] И.М. Тернов, В.В. Михайлин. Синхротронное излучение. Теория и эксперимент// Энергоатомиздат, (1986)
- [40] Д.Д. Иваненко, И.Я. Померанчук// Доклад АН СССР, Т. 44, (1944)
- [41] Г.Н. Кулипанов, А.Н. Скринский. Использование синхротронного излучения: состояние и перспективы// УФН, Т. 122 вып. 3, 369(1977)
- [42] В.Л. Гинзбург, С.И. Сыроватский. Космическое магнитотормозное (синхротронное излучение)// УФН, Т. 87, вып. 1, (1965)
- [43] S. Ebashi, M. Koch, E. Rubenstein. Hand book on synchrotron radiation// North – Holand, (1991)
- [44] H. Winick, S. Doniach. Synchrotron radiation research// Plenum Press, (1982)
- [45] I.M. Ternov, V.V. Mikhailin, V.R. Khalilov. Synchrotron radiation and it's application// Harwood Academic Publishers, (1985)

- [46] E. Wehreter. Compact synchrotron light sources// World Scientific, (1996)
- [47] F.R. Elder, R.V. Lengmuir, H.C. Pollock. Radiation from electrons accelerated in a synchrotron// Phys. Rev., V. 74 № 1 (1948)
- [48] K. Takayama. Crucial aspect of beam breakup in a steady – state free – electron laser in the microwave regime// Phys. Rev. A, (1988)
- [49] D.H. Tomboulian, P.L. Hartman. Spectral and angular distribution of ultraviolet radiation from the 300 Mev Cornell synchrotron// Phys. Rev., V. 102 № 6 (1956)
- [50] <http://www.sbras.ru/HBC/hbc.phtml>
- [51] Г.Н. Кулипанов. Изобретение В. Л. Гинзбургом ондуляторов и их роль в современных источниках синхротронного излучения и лазерах на свободных электронах// УФН, Т. 177, вып. 4, (2007)
- [52] X. Motz. Миллиметровые и субмиллиметровые волны// Издательство иностранной литературы, М., (1959)
- [53] P. Rullhusen, X. Artru, P. Dhez. Novel radiation sources using relativistic electrons// World Scientific, (1998)
- [54] Д.Ф. Алфёров, Ю.А. Башмаков, П.А. Черенков. Излучение релятивистских электронов в магнитном ондуляторе// УФН, Т. 157 вып. 3, (1989)
- [55] Д. Иваненко, А. Соколов. Классическая теория поля// Гос. Изд. Техничко-Теоретической лит., (1951)
- [56] H. Motz, M. Nakamura. The generation of submillimeter waves and fast wave// Proc. Symp. Millimeter Waves, V. 9, 155(1959)

- [57] Д.Ф. Алферов, Е.Г. Бессонов. К классической теории индуцированного электромагнитного излучения заряженных частиц в ондуляторах// Препринт ФИАН, № 162, (1977)
- [58] R.M. Phillips. The ubitron, a high-power traveling-wave tube based on a periodic beam interaction in unloded waveguide// Trans. IRE. Electron. Devic., V. 7, № 4, 231(1960)
- [59] А.В. Серов, Е.Г. Бессонов. О генерировании электромагнитных волн пучками частиц в ондуляторах и ускорении частиц в ондуляторном линейном ускорителе// Препринт ФИАН, № 87, (1980)
- [60] Е.Г. Бессонов, А.В. Серов. Ондуляторный группирователь пучков заряженных частиц// ЖЭТФ, Т. 52, № 2, 383(1982)
- [61] Н.А. Винокуров, А.Н. Скринский. Генераторный клистрон оптического диапазона на ультрарелятивистских электронах// Препринт ИЯФ, № 77, (1977)
- [62] В.А. Рябов. Эффект каналирования// Энергоатомиздат, Москва (1994)
- [63] В.Г. Барышевский. Каналирование, излучение и реакции в кристаллах при высоких энергиях// БГУ им. В.И. Ленина (1982)
- [64] S.B. Dabagov, N.K. Zhevago. On radiation by relativistic electrons and positrons channeled in crystals// Nuovo Cimento, V. 31, 491(2008)
- [65] S.B. Dabagov, L. Palumbo and V. Guidi. Charged and neutral particles channeling phenomena// Proc. of 4th conf. "Channeling 2010 Nuovo Cimento C 34 (2011)
- [66] S.B. Dabagov, L. Palumbo. Charged and neutral particles channeling phenomena// Proc. of 51th workshop of the INFN "Channeling 2008 World Scientific (2010)

- [67] S.B. Dabagov. Charged and neutral particles channeling phenomena// Proc. of SPIE 6634 (2007)
- [68] S.B. Dabagov. Charged and neutral particles channeling phenomena// Proc. of conf. "Channeling 2004"(2005)
- [69] С.В. Вонсовский, А.В. Соколов, А.З. Векслер. Фотоэффект в металлах// УФН, Т. 6 вып. 4, (1955)
- [70] Р. Миллер. Введение в физику сильноточных пучков заряженных частиц// Мир, М., (1984)
- [71] Р. Пайерлс. Квантовая теория твердых тел// Наука, (1956)
- [72] Дж. Лоусон. Физика пучков заряженных частиц// Мир, (1980)
- [73] Н.Б. Делоне. Взаимодействие лазерного излучения с веществом// Наука, М., (1989)
- [74] Н. Бломберген. Нелинейная оптика// Мир, М., (1966)
- [75] М. Шуберт, Б. Вильгельми. Введение в нелинейную оптику// Мир, М., (1973)
- [76] <http://webelements.narod.ru/elements/Cu.htm>
- [77] M. Ferrario. Overview of FEL injectors// Proceedings of 10th EPA, Edinburgh, (2006)
- [78] С.И. Анисимов, В.А. Бендерский, Д. Фаркаш. Нелинейный фотоэлектрический эффект в металлах под действием лазера// УФН, Т. 122 вып. 2, (1977)
- [79] M. Ferrario, D. Alesini, A. Bacci, et al. Direct Measurement of the Double Emittance Minimum in the Beam Dynamics of the Sparc High-Brightness Photoinjector// Phys. Rev. Let. 99, 234801 (2007)

- [80] В.С. Попов. Энергетические и угловые распределения фотоэлектронов при многофотонной ионизации// Письма в ЖЭТФ, Т. 70, вып. 8, 493(1999)
- [81] A.S. Podlesnaya, A.V. Dik, S.B. Dabagov, M. Ferrario. On electron beam motion near the SPARC photoinjector cathode // Journal of Physics: CS V. 236, 012035(2010)
- [82] A.S. Podlesnaya, A.V. Dik, S.B. Dabagov, M. Ferrario. Spectral Distribution of SPARC Photoinjector electrons // Nuovo Cimento, V. 34C, 359(2011)
- [83] М.А. Ефремов, М.В. Федеров. Классическая и квантовая версии эффекта Капицы-Дирака// ЖЭТФ, Т. 116 вып. 3, 870(1999)
- [84] M.V. Fedorov. The Kapitza-Dirac Effect in a Strong Radiation Field// Sov. Phys. JETP, V. 25, № 5, 952(1967)
- [85] А.П. Казанцев, Г.И. Сурдутович. Эффект Капицы-Дирака для атомов в сильном резонансном поле// Письма в ЖЭТФ, Т. 21 вып. 6, 346(1975)
- [86] А.А. Самарский, А.В. Гулин. Численные методы// Наука, (1989)
- [87] А.В. Дик, Е.Н. Фролов, С.Б. Дабагов. Каналирование свободного электрона в поле лазерной волны // Препринт ФИАН, №15, 16(2012)
- [88] A.V. Dik, E.N. Frolov, S.B. Dabagov. Dynamics of electrons acceleration in presents of crossed laser field // Nuclear Instruments and Methods, Section B, 2013, doi:<http://dx.doi.org/10.1016/j.nimb.2013.03.17> (принято в печать).
- [89] С.Б. Дабагов. Каналирование нейтральных частиц в микро- и наноканалах// УФН, Т. 173, № 10, 1083(2003)

- [90] S.B. Dabagov, M. Ferrario, L. Palumbo and L. Serafini. Cheneled projects at LNF: From crystal undulators to capillary waveguides// World Scientific Publishing, (2007)
- [91] A.V. Andreev, S.A. Akhmanov. Interaction of relativistic particles with intense interference optical fields// Sov. Phys. JETP. V. 72. 930(1991)
- [92] А.В. Гапонов, М.А. Миллер. Об использовании движущихся высокочастотных потенциальных ям для ускорения заряженных частиц// ЖЭТФ, Т. 34, 751(1958)
- [93] А.В. Гапонов, М.А. Миллер. О потенциальных ямах для заряженных частиц в высокочастотном электромагнитном поле// Письма в ЖЭТФ, Т. 34, 242(1958)
- [94] В.В. Борисов. Неустановившиеся поля в волноводах// Изд. Ленинградского университета, Ленинград (1991)
- [95] Г.Ф. Заргано и др. Волноводы сложных сечений// Радио и связь, Москва (1986)
- [96] А.А. Соколов, И.М. Тернов. Релятивистский электрон// Наука, (1974)
- [97] Z. Huang, R.J. Kim. Review of x-ray free-electron laser theory// Phys. Rev. Special Topics - Accelerators and Beams 10, 034801(2007)
- [98] J. Buon. Beam phase space and emittance// CERN Accelerator school, V. 1, 89(1994)
- [99] G. Mourou, C. Barty, M. Perry. Ultrahigh-intensity lasers: physics of the extreme on a tabletop// Physics Today, V. 51, № 1, 22 (1998)
- [100] S.P.D. Mangles, B.R. Walton, M. Tzoufras et al. Electron accelerator in cavitated channels formed by a petawatt laser in low-density plasma// Phys. Rev. Lett., V. 94, 245001(2005)

- [101] K.P. Singh. Electron acceleration by intense short pulse laser in a static magnetic field in vacuum// Phys. Rev. E 69, 056410 (2004)
- [102] T. Tajima, J. Dawson. Laser electron accelerator// Phys. Rev. Let., V. 43, № 4, 267(1979)
- [103] С.В. Буланов, В.И. Кирсанов, А.С. Сахаров. Ультрарелятивистская теория лазерного ускорения на кильваторной плазменной волне// Физика Плазмы, Т. 16, № 8, 935(1990)
- [104] Н.Е. Андреев, Л.М. Горбунов, В.И. Кирсанов и др. Резонансное возбуждение кильватерных волн лазерным импульсом в плазме// Письма в ЖЭТФ, Т. 55, № 10, 551(1992)
- [105] А. Пухов, С. Киселев, И.Ю. Костюков. Сильно нелинейный режим взаимодействия лазерного импульса с плазмой: генерация электромагнитного излучения и ультрарелятивистских электронов// Прикладная физика, № 6, 2006, 35(2006)
- [106] N. Naseri et al. Channeling of relativistic laser pulses, surface waves, and electron acceleration// Phys. Rev. Let. V. 108, 105001(2012)
- [107] N. Naseri, E. Esarey, P. Catravas, W.P. Leemans // Proceedings of AIP, 569(2001)
- [108] А.В. Андреев. Релятивистская квантовая механика. Частицы и зеркальные частицы// Физматлит, М., (2009)
- [109] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Квантовая механика. Нерелятивистская теория// Наука, М., (1982)
- [110] Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции// Наука, (1974)
- [111] М. Абрамовиц, И. Стиган. Справочник по специальным функциям// Наука, (1979)

- [112] Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Лёш. Специальные функции// Наука, (1964)
- [113] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Квантовая электродинамика// Наука, М., (1988)
- [114] В. Гайтлер. Квантовая теория излучения// Физматлит, М., (2009)
- [115] A.V. Dik, A.Z. Ligidov, S.B. Dabagov. Radiation by electrons channeled in a plasma-ion cavity // Nuclear Instruments and Methods, Section B, 2013, doi:http://dx.doi.org/10.1016/j.nimb.2013.03.04 (принято в печать)
- [116] А.И. Ахиезер, С.В. Пелетминский. Методы статистической физики// Наука, (1977)
- [117] А.В. Дик, С.Б. Дабагов. Функция распределения электронов в ионном канале Препринт ФИАН, №7, 15(2012)
- [118] А.В. Дик, С.Б. Дабагов. Функция распределения электронов захваченных ионным каналом // Известия ВУЗов. Физика, №12, 77(2012)
- [119] А.И. Морозов. Введение в плазмодинамику// Физматлит, Москва, (2006)

Приложение

Ширина энергетических уровней

Ширина n_i - го энергетического уровня имеет вид:

$$\Delta E_i = \frac{e^2}{2\pi c n_i} \sum_{n_f, n_{xi}=0}^{n_i} \sum_{n_{xf}=0}^{n_f} \int \frac{\omega_0}{(1 - \beta_z \cos \theta)^2} |[\mathbf{n}, \mathbf{j}]|^2 d\Omega =$$

$$= \frac{e^2 \omega_0}{2\pi c n_i} \sum_{n_f < n_i} (I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 - I_6 - I_7 - I_8 - I_9 - I_{10} - I_{11}) \quad (40)$$

где,

$$I_1 = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin^2 \theta \cos^2 \phi |j_y^{if}|^2 \frac{\sin \theta d\theta}{(1 - \beta_z \cos \theta)^2} \quad (41)$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \cos^2 \theta |j_y^{if}|^2 \frac{\sin \theta d\theta}{(1 - \beta_z \cos \theta)^2} \quad (42)$$

$$I_3 = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin^2 \theta |j_z^{if}|^2 \frac{\sin \theta d\theta}{(1 - \beta_z \cos \theta)^2} \quad (43)$$

$$I_4 = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \cos^2 \theta |j_x^{if}|^2 \frac{\sin \theta d\theta}{(1 - \beta_z \cos \theta)^2} \quad (44)$$

$$I_5 = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin^2 \theta \sin^2 \phi |j_x^{if}|^2 \frac{\sin \theta d\theta}{(1 - \beta_z \cos \theta)^2} \quad (45)$$

$$I_6 = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \cos \theta \sin \theta \sin \phi (j_y^{if})^* j_z^{if} \frac{\sin \theta d\theta}{(1 - \beta_z \cos \theta)^2} \quad (46)$$

$$I_7 = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \cos \theta \sin \theta \sin \phi (j_z^{if})^* j_y^{if} \frac{\sin \theta d\theta}{(1 - \beta_z \cos \theta)^2} \quad (47)$$

$$I_8 = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \cos \theta \sin \theta \cos \phi (j_x^{if})^* j_z^{if} \frac{\sin \theta d\theta}{(1 - \beta_z \cos \theta)^2} \quad (48)$$

$$I_9 = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \cos \theta \sin \theta \cos \phi (j_z^{if})^* j_x^{if} \frac{\sin \theta d\theta}{(1 - \beta_z \cos \theta)^2} \quad (49)$$

$$I_{10} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin^2 \theta \cos \phi \sin \phi (j_x^{if})^* j_y^{if} \frac{\sin \theta d\theta}{(1 - \beta_z \cos \theta)^2} \quad (50)$$

$$I_{11} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin^2 \theta \cos \phi \sin \phi (j_y^{if})^* j_x^{if} \frac{\sin \theta d\theta}{(1 - \beta_z \cos \theta)^2} \quad (51)$$

Аргумент функций Лагерра, входящие в матричные элементы тока перехода, изменяется в пределах $0 \leq \xi_{x,y}^2 \leq (\hbar\omega_0/2mc^2)\gamma_z(n_i - n_f)^2 \sim 10^{-3}(n_i - n_f)^2$. Таким образом при переходах между низко лежащими энергетическими уровнями аргумент функций Лагерра остается маленькой величиной и можно воспользоваться следующим приближением:

$$I_{n,m}(x) \approx \sqrt{\frac{n!}{m!(n-m)!}} x^{(n-m)/2}$$

Тогда интегралы I_i из кратных разбиваются на независимые по ϕ и θ . Интегралы по ϕ будут иметь вид:

$$4 \int_0^{\pi/2} \cos^n \phi \sin^m \phi d\phi = 2B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{m+1}{2}\right), m, n \in N \quad (52)$$

где, $B(x, y)$ - бета функция Эйлера. Интегралы по θ будут трех видов:

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_0^{\pi} \left(\frac{\sin \theta}{1 - \beta_z \cos \theta}\right)^{2n} \frac{\sin^3 \theta d\theta}{(1 - \beta_z \cos \theta)^2} = \frac{1}{\beta_z^{2n+3}} \int_{1-\beta_z}^{1+\beta_z} \frac{(\beta_z^2 - (1-x)^2)^{n+1}}{x^{2(n+1)}} dx = \\ &= \frac{1}{\beta_z} \sum_{k_1=0}^{n+1} \sum_{k_2=0}^{n+1-k_1} C_{n+1}^{k_1} C_{n+1-k_1}^{k_2} \left(1 - \frac{1}{\beta_z^2}\right)^{n+1-k_1-k_2} \frac{(-1)^{k_1} 2^{k_2}}{\beta_z^{2(k_1+k_2)}} \times \\ &\times \left(\frac{4^{2k_1+k_2-2n-1} - \gamma_z^{-2(2k_1+k_2-2n-1)}}{2^{2k_1+k_2-2n-1}(2k_1+k_2-2n-1)} + 2 \ln(4\gamma_z) \Big|_{2k_1+k_2=2n+1} \right) \quad (53) \end{aligned}$$

Сдесь была сделана замена $1 - \beta_z \cos \theta = x$ и возведение суммы в степень представленно с помощью биномиального разложения. Аналогичные опи-

рации делаются и для вычисления следующего интеграла:

$$\begin{aligned}
A_2 &= \int_0^\pi \left(\frac{\sin \theta}{1 - \beta_z \cos \theta} \right)^{2n} \frac{\cos^2 \theta \sin \theta d\theta}{(1 - \beta_z \cos \theta)^2} = \frac{1}{\beta_z^{2n+3}} \int_{1-\beta_z}^{1+\beta_z} \frac{(\beta_z^2 - (1-x)^2)^n}{x^{2(n+1)}} \times \\
&\times (1-x)^2 dx = \frac{1}{\beta_z^3} \sum_{k_1=0}^n \sum_{k_2=0}^{n-k_1} C_n^{k_1} C_{n-k_1}^{k_2} \left(1 - \frac{1}{\beta_z^2}\right)^{n-k_1-k_2} \frac{(-1)^{k_1} 2^{k_2}}{\beta_z^{2(k_1+k_2)}} \times \\
&\times \left(\frac{4^{2k_1+k_2-2n-1} - \gamma_z^{-2(2k_1+k_2-2n-1)}}{2^{2k_1+k_2-2n-1}(2k_1+k_2-2n-1)} + 2 \ln(4\gamma_z) \Big|_{2k_1+k_2=2n+1} - \right. \\
&\quad - 2 \frac{4^{2k_1+k_2-2n} - \gamma_z^{-2(2k_1+k_2-2n)}}{2^{2k_1+k_2-2n}(2k_1+k_2-2n)} - 4 \ln(4\gamma_z) \Big|_{2k_1+k_2=2n} + \\
&\quad \left. + \frac{4^{2k_1+k_2-2n+1} - \gamma_z^{-2(2k_1+k_2-2n+1)}}{2^{2k_1+k_2-2n+1}(2k_1+k_2-2n+1)} + 2 \ln(4\gamma_z) \Big|_{2k_1+k_2=2n-1} \right) \quad (54)
\end{aligned}$$

и последний интеграл:

$$\begin{aligned}
A_3 &= \int_0^\pi \left(\frac{\sin \theta}{1 - \beta_z \cos \theta} \right)^{2(n+1)} \cos \theta d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi \left(\frac{\sin \theta}{1 - \beta_z \cos \theta} \right)^{2(n+1)} \cos \theta d\theta = \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{4i\beta_z^{2(n+1)}} \oint_{|z|=1} \left(\frac{\beta_z(z^2-1)}{\beta_z z^2 - 2z + \beta_z} \right)^{2(n+1)} \frac{z^2-1}{z^2} dz = \\
&= \pi \frac{(-1)^{n+1}}{2\beta_z^{2(n+1)}} \left[\left(\frac{d}{dz} \left[\left(\frac{\beta_z(z^2-1)}{\beta_z z^2 - 2z + \beta_z} \right)^{2(n+1)} (z^2+1) \right] \right) \Big|_{z=0} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{(2n+1)!} \left(\frac{d^{2n+1}}{dz^{2n+1}} \left[\left(\frac{\beta_z(z^2-1)}{\beta_z z^2 - 2z + \beta_z} \right)^{2(n+1)} \frac{z^2+1}{z^2} \right] \right) \Big|_{\beta_z z=1-\gamma_z^{-1}} \right] \quad (55)
\end{aligned}$$

При вычислении интеграла A_3 использовалась четность подынтегральной функции для продолжения интеграла на промежуток $[-\pi, \pi]$, продолжение подынтегральной функции на комплексную плоскость, заменой $z = e^{i\theta}$, и использование теории вычетов. Во всех интегралах A_i $n = \Delta n = n_i -$

$n_f, (n_i \neq n_f)$. Таким образом ширина n_i - го энергетического уровня принимает вид ($\Delta n_{x,y} = n_{xi,yi} - n_{xf,yf}$):

$$\Delta E_i = \frac{e^2 \omega_0 p_{zi}^2}{2\pi \gamma_z^2 m^2 c^3 n_i} \sum_{n_f < n_i} \frac{n_{xi}! n_{yi}!}{n_{xi}! n_{yi}! (\Delta n_x!)^2 (\Delta n_y!)^2} \left(\frac{\hbar \omega_0 \Delta n^2}{2\gamma_z m c^2} \right)^{\Delta n} F_{i,f} \quad (56)$$

где

$$\begin{aligned} F_{i,f} = & B \left(\Delta n_x + \frac{1}{2}, \Delta n_y + \frac{1}{2} \right) A_1 + \frac{\hbar^2 \alpha^2}{4p_{zi}^2} \Delta n_y^2 \left(B \left(\Delta n_x + \frac{3}{2}, \Delta n_y + \frac{1}{2} \right) A_1 + \right. \\ & \left. + B \left(\Delta n_x + \frac{1}{2}, \Delta n_y + \frac{1}{2} \right) A_2 - 8 \frac{p_{zi}}{\sqrt{2\hbar\alpha}} B \left(\Delta n_x + \frac{1}{2}, \Delta n_y + 1 \right) A_3 \right) + \\ & + \frac{\hbar^2 \alpha^2}{4p_{zi}^2} \Delta n_x^2 \left(B \left(\Delta n_x + \frac{1}{2}, \Delta n_y + \frac{1}{2} \right) A_2 + B \left(\Delta n_x + \frac{1}{2}, \Delta n_y + \frac{3}{2} \right) A_1 - \right. \\ & \left. - \frac{8p_{zi}}{\sqrt{2\hbar\alpha}} B \left(\Delta n_x + 1, \Delta n_y + \frac{1}{2} \right) A_3 \right) - \frac{\hbar^2 \alpha^2}{4p_{zi}^2} \Delta n_x^2 \Delta n_y^2 B \left(\Delta n_x + 1, \Delta n_y + 1 \right) A_2 \end{aligned}$$

Выражение (56) является точным для малых Δn .