

СЕМЕНОВ Андрей Георгиевич

**КОГЕРЕНТНЫЕ ЭФФЕКТЫ В МЕЗО- И
НАНОРАЗМЕРНЫХ КОЛЬЦАХ**

01.04.02 – теоретическая физика

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Работа выполнена в Учреждении Российской академии наук Физическом институте им. П.Н. Лебедева РАН

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
Заикин Андрей Дмитриевич
Учреждение Российской академии наук
Физический институт им. П.Н. Лебедева
РАН, г. Москва

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
Куприянов Михаил Юрьевич
Научно-Исследовательский Институт
Ядерной Физики МГУ, г. Москва

доктор физико-математических наук,
Мельников Александр Сергеевич
Учреждение Российской академии наук
Институт Физики Микроструктур,
г. Нижний Новгород

Ведущая организация: Учреждение Российской академии наук
Институт Физических Проблем
им. П.Л. Капицы РАН, г. Москва

Защита состоится 20 декабря 2010 года в ____ ч. на заседании диссертационного совета Д 002.023.02 при Физическом Институте им. П.Н. Лебедева РАН по адресу: 119991, г. Москва, Ленинский проспект, д. 53.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Физического Института им. П.Н. Лебедева РАН или на сайте <http://td.lpi.ru/>.

С авторефератом диссертации можно ознакомиться на сайте <http://www.lebedev.ru/>.

Автореферат разослан «__» ноября 2010 года.

Ученый секретарь Диссертационного Совета Д 002.023.02
доктор физико-математических наук

Я.Н. Истомин

Общая характеристика работы

Диссертация посвящена исследованию когерентных эффектов в различных металлических структурах.

Актуальность темы. Теоретическое и экспериментальное исследование транспортных свойств металлических мезо- и наноразмерных структур позволяет заглянуть в квантовый мир атомов и электронов. Электроны, движение которых обуславливает перенос заряда, или проще говоря, ток сквозь систему, имеют квантовую природу, а значит могут интерферировать, что приводит к возникновению таких необычных явлений как слабая локализация, осцилляции Аронова-Бома, незатухающий ток.

Одной из простейших систем, которые могут быть исследованы экспериментально является металлическое кольцо, сквозь которое пропущен магнитный поток. При этом магнитное поле существует лишь внутри кольца, в то время как в самом металле поля нет. Если бы электроны были классическими объектами, то наличие магнитного потока никак бы не отразилось на сопротивлении этого кольца, поскольку никаких сил со стороны магнитного поля на электроны не действовало. Наш мир однако богаче и электроны имеют не классическую, но квантовую природу. Это приводит к тому, что волновая функция электрона приобретает дополнительную фазу, связанную с магнитным потоком, а кондактанс системы (коэффициент пропорциональности между током сквозь систему и приложенным напряжением) становится периодической функцией потока. Данное явление экспериментально наблюдалось, например, в экспериментах Вебба с соавторами¹. Однако способность электрона интерферировать подавляется множеством факторов, таких как взаимодействие с окружением, электрон-электронное и электрон-фононное взаимодействия, взаимодействия с магнитными примесями и др. В результате в системе возникает конкуренция между интерференцией и декогерентностью за счет взаимодействия, что приводит к появлению нового масштаба – длины декогерентности. Эта длина определяет, грубо говоря, расстояние, которое электрон проходит прежде чем забывает свою фазу. Если размер кольца больше длины декогерентности, то квантовых осцилляций кондактанса нет, поскольку интерфе-

¹R. A. Webb, S. Washburn, C. P. Umbach and R. P. Laibowitz, Observation of h/e Aharonov-Bohm oscillations in normal-metal rings, Phys. Rev. Lett., 54, 2696 (1985).

ренция подавлена взаимодействием. С практической точки зрения данная длина (которая безусловно зависит от температуры) определяет область температур и размеров кольца в которой на эксперименте могут наблюдаться интерференционные явления. Оказывается, что при низкой температуре основным фактором, определяющим длину декогерентности, является электрон-электронное взаимодействие, поэтому исследование влияния именно его представляет наибольший интерес .

Отметим еще одно необычайно интересное квантовое явление в металлических кольцах. Оказывается, что при наличии магнитного потока по кольцу течет ток (зависящий от потока). Этот ток является свойством равновесного состояния системы, а потому не приводит к диссипации энергии и не затухает. Теоретические ² и экспериментальные ³ исследования незатухающего тока ведутся с 80-х годов прошлого века, однако, ясной физической картины до сих пор не существует. В некоторых экспериментах результаты измерений превышают теоретические расчеты (для системы невзаимодействующих электронов) на два порядка. В добавок к этому, направление тока, измеренное на эксперименте, не совпадает с теоретически предсказанным. По всей видимости, для корректного описания эксперимента следует учитывать электрон-электронное взаимодействие. Это еще одна демонстрация того факта, что детальное изучение конкуренции между электрон-электронным взаимодействием и квантовой интерференцией актуально в настоящий момент.

Целью работы явилось исследование влияния электрон-электронного взаимодействия на когерентные свойства систем в виде кольца, таких как осцилляции Аронова-Бома кондактанса и незатухающий ток. Помимо этого был поставлен фундаментальный вопрос о том, флуктуирует ли незатухающий ток и, если флуктуирует, то каким образом.

Методы и подходы. В работе используются современные методы теоретической физики, такие как метод функционального интегрирования по полям, определенным на контуре Келдыша и непертурбативные вычисле-

²В качестве обзора см.: U. Eckern, P. Schwab, Persistent Currents versus Phase Breaking in Mesoscopic Metallic Samples, JLTP 126, 1291 (2002).

³Один из недавних экспериментов: H. Bluhm, N.C. Koshnick, J.A. Bert, M.E. Huber and K.A. Moler, Persistent Currents in Normal Metal Rings, Phys. Rev. Lett. 102, 136802 (2009).

ния с использованием инстантонной техники.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются оригинальными и получены впервые.

Научная и практическая ценность диссертационной работы состоит в предсказаниях, которые могут быть проверены на эксперименте. Полученные результаты указывают область температур и размер колец в которых могут наблюдаться осцилляции кондактанса, как функции магнитного потока. Помимо этого предсказывается новое явление – шум незатухающего тока, которое может наблюдаться как в сверхпроводящих, так и в несверхпроводящих кольцах.

Публикации. По материалам диссертационной работы опубликовано 6 статей в журналах из списка рекомендованных ВАК РФ, [1-6], а также одна статья послана в журнал.

Апробация работы. Результаты настоящего исследования были представлены на следующих научных конференциях и семинарах: VII Зимняя школа по теоретической физике, Дубна, 25 янв. - 5 февр., 2009; Международная конференция Quantum Phenomena at Nanoscale, Черногория, 30 авг. - 4 сент., 2009; XIV научная конференция молодых ученых и специалистов ОМУС-2010, Дубна, 1 - 6 февр., 2010; Международная конференция DUBNA-NANO2010, Дубна, 5 - 10 июля, 2010; семинары отделения теоретической физики Физического института им. П.Н. Лебедева РАН.

Структура диссертации и объем работы. Диссертация содержит 148 страниц и состоит из введения, четырёх глав, заключения, библиографии, включающей 60 источников, и пяти приложений.

Краткое содержание работы

Во **введении** описана история вопроса и основные физические идеи, касающиеся квантовых когерентных явлений в металлических кольцах. Сформулированы задачи диссертации.

В **первой главе** рассматривается кольцо, состоящее из квантовых точек. Примеры таких систем изображены на Рисунках 1а и 2а. Сквозь кольцо проткнут магнитный поток таким образом, что внутри металла магнитное поле отсутствует. Основным интерес здесь представляет исследо-

вание осцилляций кондактанса системы как функции магнитного потока. Впервые подобное явление было предсказано в работе Альтшулера с соавторами⁴ и наблюдалось в экспериментах Шарвина и Шарвина⁵. Данный эффект тесно связан с явлением слабой локализации в неупорядоченном металле. Вначале рассматривается простейшая система, состоящая из двух квантовых точек, изображенная на Рисунке 1а. Гамильтониан данной системы имеет вид:

$$\begin{aligned}\hat{H} = & \sum_{i,j=L,R} \frac{C_{ij}\hat{V}_i\hat{V}_j}{2} + \hat{H}_{LL} + \hat{H}_{RL} \\ & + \sum_{j=L,R} \hat{H}_j + \hat{T}_L + \hat{T}_R + \hat{T},\end{aligned}\quad (1)$$

где C_{ij} это матрица емкостей, $\hat{V}_{L(R)}$ - оператор электрического потенциала в левой(правой) квантовой точке,

$$\begin{aligned}\hat{H}_{LL} &= \sum_{\alpha=\uparrow,\downarrow} \int_{LL} d^3\mathbf{r} \hat{\Psi}_{\alpha,LL}^\dagger(\mathbf{r})(\hat{H}_{LL} - eV_{LL})\hat{\Psi}_{\alpha,LL}(\mathbf{r}), \\ \hat{H}_{RL} &= \sum_{\alpha=\uparrow,\downarrow} \int_{RL} d^3\mathbf{r} \hat{\Psi}_{\alpha,RL}^\dagger(\mathbf{r})(\hat{H}_{RL} - eV_{RL})\hat{\Psi}_{\alpha,RL}(\mathbf{r})\end{aligned}$$

- это Гамильтонианы для левого и правого берегов, $V_{LL,RL}$ - электрические потенциалы берегов, которые зафиксированы внешним приложенным напряжением,

$$\hat{H}_j = \sum_{\alpha=\uparrow,\downarrow} \int_j d^3\mathbf{r} \hat{\Psi}_{\alpha,j}^\dagger(\mathbf{r})(\hat{H}_j - e\hat{V}_j)\hat{\Psi}_{\alpha,j}(\mathbf{r})$$

задает Гамильтонианы левой ($j = L$) и правой ($j = R$) квантовых точек и

$$\hat{H}_j = \frac{(\hat{p}_\mu - \frac{e}{c}A_\mu(r))^2}{2m} - \mu + U_j(r)$$

- это одночастичный Гамильтониан в j -той квантовой точке с неупорядоченным потенциалом $U_j(r)$. Перескоки электронов между левой и правой

⁴Б. Л. Альтшулер, А. Г. Аронов и Б. З. Спивак, Эффект Ааронова - Бомы в неупорядоченных проводниках, Письма в ЖЭТФ, 33, 101 (1981).

⁵Д. Ю. Шарвин и Ю. В. Шарвин, Квантование магнитного потока в цилиндрической пленке из нормального металла, Письма в ЖЭТФ, 34, 285 (1981).

квантовыми точками описываются Гамильтонианом

$$\hat{T} = \sum_{\alpha=\uparrow,\downarrow} \int_{J_1+J_2} d^2\mathbf{r} [t(\mathbf{r})\hat{\Psi}_{\alpha,L}^\dagger(\mathbf{r})\hat{\Psi}_{\alpha,R}(\mathbf{r}) + \text{c.c.}].$$

Здесь интегрирование идет по всей площади обоих туннельных контактов J_1 и J_2 . Гамильтонианы $\hat{T}_{L(R)}$, описывающие переходы электронов с берегов в квантовые точки и назад, определены аналогично. Отметим, что в нашем подходе электрон-электронное взаимодействие учитывается посредством операторов $\hat{V}_{L,R}$ в эффективном Гамильтониане (1). Данный подход полностью эквивалентен подходу, в котором пишется стандартное выражение для Кулоновского взаимодействия в Гамильтониане системы. Операторы $\hat{V}_{L,R}$, соответствующие флуктуирующим потенциалам в левой и правой квантовых точках, возникают в результате преобразования Хаббарда-Стратоновича. При помощи метода функционального интегрирования по полям, определенным на контуре Келдыша задача сводится к функциональному интегралу по разностям фаз на центральных барьерах, определенных как

$$\varphi_{F,B}(t) = e \int_0^t d\tau (V_R^{F,B}(\tau) - V_L^{F,B}(\tau)), \quad (2)$$

В работе вычислено эффективное действие, зависящее от разностей фаз с точностью до второго порядка по кондактансам центральных барьеров. Этого достаточно для определения лидирующего вклада в осцилляции кондактанса. Ток сквозь систему вычисляется при помощи стандартной формулы:

$$I = -e \int \mathcal{D}^2\varphi^\pm \frac{\delta S[\varphi^+, \varphi^-]}{\delta \varphi^-(t)} e^{iS[\varphi^+, \varphi^-]}, \quad (3)$$

где классическая φ^+ и квантовая φ^- компоненты определены следующим образом:

$$\varphi^+(t) = \frac{\varphi_F(t) + \varphi_B(t)}{2}, \quad \varphi^-(t) = \varphi_F(t) - \varphi_B(t). \quad (4)$$

В работе показано, что в рассматриваемом пределе,

$$g_L, g_R \gg 1, g_{t1}, g_{t2}, \quad (5)$$

данный функциональный интеграл достаточно вычислить в Гауссовом приближении. При этом оказывается, что существенный вклад в подавление

тока взаимодействием дают лишь флуктуации классической компоненты, в то время как флуктуации квантовой компоненты несущественны. В результате ответ для зависящей от потока поправки к кондактансу оказывается равен:

$$\delta G^{AB}(\Phi) = \frac{e^2 g_{t1} g_{t2} \delta^2 \cos(4\pi\Phi/\Phi_0)}{4\pi^3} \times \int_0^\infty d\tau_1 d\tau_2 e^{-\frac{\tau_1+\tau_2}{\tau_D} - 2F(\tau_1) - 2F(\tau_2) + F(\tau_1 - \tau_2) + F(\tau_1 + \tau_2)}, \quad (6)$$

где функция $F(t) = -\langle(\varphi^+(t) - \varphi^+(0))\varphi^+(0)\rangle$ есть коррелятор двух классических компонент флуктуирующей фазы, δ - расстояние между уровнями в квантовых точках, τ_D - время пролета сквозь квантовую точку. Зависимость амплитуды осцилляций кондактанса от температуры изображена на Рисунке 1б.

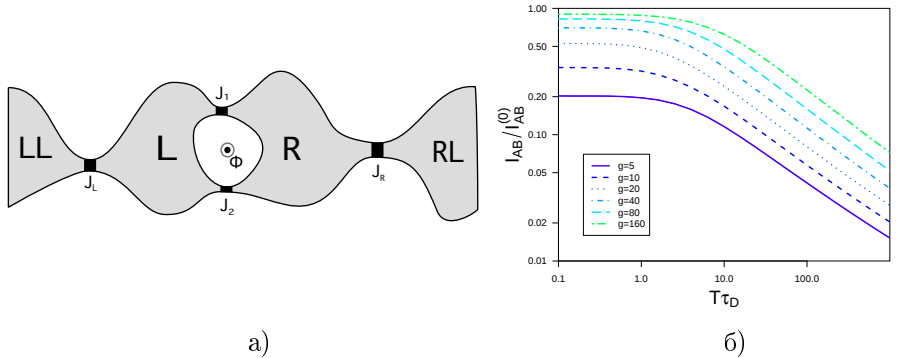


Рис. 1: а) Кольцеобразная система из двух квантовых точек. б) Отношение амплитуды осцилляций во взаимодействующем случае к невзаимодействующему результату как функция температуры при различных значениях безразмерного кондактанса квантовой точки g .

Далее рассматривается система, состоящая из многих квантовых точек, изображенная на Рисунке 2а. Для ее описания используется подход, разработанный Голубевым и Заикиным⁶. Они показали, что слабокали-

⁶D.S.Golubev and A.D.Zaikin, Weak localization in arrays of metallic quantum dots: Combined scattering matrix formalism and nonlinear σ model, Phys. Rev. B 74, 245329 (2006).

зационная поправка к кондактансу отдельного барьера имеет вид:

$$\delta G_1 = -\frac{e^2 g_t \delta}{4\pi^2} \int_0^\infty dt [\beta_t C_{n,n+1}(t) e^{\frac{4\pi i \Phi}{N \Phi_0}} + (1 - \beta_t)(C_{n,n}(t) + C_{n+1,n+1}(t)) + \\ + \beta_t C_{n+1,n}(t) e^{-\frac{4\pi i \Phi}{N \Phi_0}}], \quad (7)$$

где $C_{m,n}(t)$ - это куперон. Квантовая поправка к кондактансу всей системы может быть получена при помощи закона Кирхгофа. Для случая $Ng \ll g_t$, рассматриваемого в диссертации, она дается выражением

$$\delta G = \frac{NL(N-L)g^2}{(2Ng_t + L(N-L)g)^2} \delta g \approx \frac{L(N-L)g^2}{4Ng_t^2} \delta G_1. \quad (8)$$

В отсутствие электрон-электронного взаимодействия $C_{m,n}(t)$ удовлетворяет уравнению типа диффузии, которое имеет решение

$$C_{m,n}^{(0)}(t) = \frac{\tau_D}{N} \sum_{q=1}^N \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega t + \frac{2\pi i q}{N}(m-n)}}{-i\omega \tau_D + \epsilon(q - 2\Phi/\Phi_0)}, \quad (9)$$

где $\epsilon(q) = 1 - \cos \frac{2\pi q}{N}$. В диссертации показано, что учет электрон-электронного взаимодействия приводит к следующей модификации куперона:

$$C_{m,n}(t) = C_{m,n}^{(0)}(t) e^{-\mathcal{F}(t)}. \quad (10)$$

Здесь $\mathcal{F}(t)$ - некоторая функция, выражающаяся через корреляторы флуктуирующих напряжений. Основной вклад в осцилляции кондактанса дают те траектории, которые хотя бы один раз обошли вокруг кольца. Характерное время, необходимое для такого обхода, порядка $t \geq N^2 \tau_D$. Оказалось, что на таких временных масштабах взаимодействие приводит к экспоненциальному затуханию куперона со временем

$$C_{m,n}(t) \approx C_{m,n}^{(0)}(t) e^{-\frac{t}{\tau_\phi}}, \quad (11)$$

где

$$\frac{1}{\tau_\phi} = \begin{cases} \frac{\delta}{\pi} \ln \frac{4E_C}{\delta} & T \ll 1/N\tau_D, \\ \frac{\pi NT}{3g_t} & T \gg 1/N\tau_D, \end{cases} \quad (12)$$

- это эффективное время дефазировки в рассматриваемой задаче. $E_C = e^2/(2C_g)$. Ответ, полученный в первой главе диссертации для зависящей

от потока части кондактанса, может быть представлен в виде ряда Фурье:

$$\delta G^{AB} = \sum_{k=1}^{\infty} \delta G^{(k)} \cos(4\pi k \Phi / \Phi_0), \quad (13)$$

где

$$\delta G^{(k)} = -\frac{e^2 L(N-L)g^2(\beta_t \alpha + 1 - \beta_t)}{2\pi N g_t^2 \sqrt{\alpha^2 - 1}} z^{-N|k|}. \quad (14)$$

В пределе $\tau_\phi \gg \tau_D$ имеем $z \approx 1 + \sqrt{2\tau_D/\tau_\phi} + \dots$, следовательно $\delta G^{(k)}$ ведет себя как

$$\delta G^{(k)} \propto e^{-N|k|\sqrt{\frac{2\tau_D}{\tau_\phi}}}, \quad (15)$$

т.е. при высокой температуре $\log|\delta G|$ изменяется с N как $N^{3/2}$, в то время как при низкой температуре зависимость линейная. Зависимость от температуры первых трех гармоник изображена на Рисунке 2б.

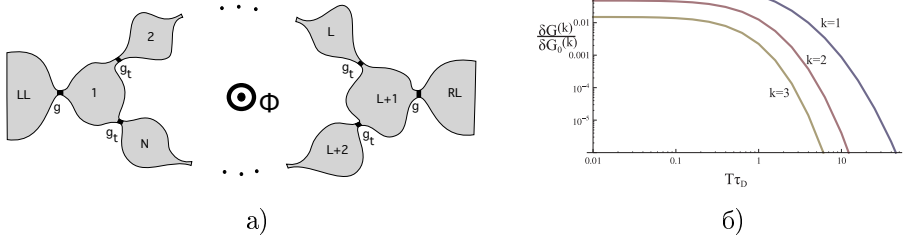


Рис. 2: а) Кольцеобразная система из N квантовых точек. б) Зависимость от температуры первых трех гармоник осцилляций кондактанса при $g_t = 500$, $g = 30$, $N = 10$, $\beta_t = 1$ и $\tau_D/\tau_R C = 120$.

Результаты, полученные в первой главе, позволяют сформулировать количественные предсказания относительно влияния электрон-электронного взаимодействия на осцилляции Аронова-Бома кондактанса для широкого класса неупорядоченных нанокolleц. Наиболее интересен случай большого числа квантовых точек $N \gg 1$, который отражает все свойства нанокolleц из неупорядоченного металла. Для того, чтобы получить связь с этим важным случаем, в работе был введен коэффициент диффузии $D = d^2/(2\tau_D)$ и определена электронная плотность состояний $\nu = 1/(d^3\delta)$, где d - это линейный размер квантовой точки. Это привело к следующему результату:

$$\delta G^{(k)} \sim \begin{cases} e^{-|k|(\mathcal{L}/\mathcal{L}_\phi)} & T \ll D/(\mathcal{L}d), \\ e^{-|k|(\mathcal{L}/\mathcal{L}_\phi)^{3/2}} & T \gg D/(\mathcal{L}d), \end{cases}$$

где периметр кольца $\mathcal{L} = Nd$, а эффективная длина декогерентности равна

$$\mathcal{L}_\phi = \begin{cases} \left(\frac{\pi \nu d^3 D}{\ln \frac{4E_C}{\delta}} \right)^{1/2} & T \ll D/(\mathcal{L}d), \\ \left(\frac{12\nu d^2 D^2}{T} \right)^{1/3} & T \gg D/(\mathcal{L}d). \end{cases}$$

Отметим, что в пределе высокой температуры $T \gg D/(\mathcal{L}d)$ полученные выше результаты совпадают с результатами, полученными иным путем в работах Тексье и Монтамбу, Людвига и Мирлина⁷. Однако при низких температурах T данные результаты отличаются. Это отличие вызвано насыщением τ_ϕ при низкой температуре, которое не было учтено ранее⁷. В данной главе был получен интересный результат, заключающийся в том, что в отличие от слабой локализации⁸ температура кроссовера между тепловым и квантовым режимами дефазировки зависит от длины кольца $\mathcal{L}$. Это связано с тем, что только длинные электронные траектории, полностью огибающие кольцо, могут дать вклад в осциллирующую часть кондактанса.

Теория декогерентности электронов при низких температурах, подобная рассмотренной в первой главе, достаточно сложна. Основная проблема возникает из-за необходимости правильно учесть ферми-статистику для электронов. Однако, само явление декогерентности, по всей видимости, возникает и без подобных усложнений теории, а его физическая причина кроется во взаимодействии электрона с флуктуациями электромагнитного поля, созданного остальными электронами, движущимися в неупорядоченном потенциале.

Для того, чтобы качественно разобраться в физике данной системы Гиней⁹ предложил модель, которая отражает все основные свойства исходной проблемы за исключением принципа запрета Паули. Эта модель описывает квантовую частицу, движущуюся по кольцу с радиусом R и взаимодействующую с квантовым диссипативным окружением. Если в системе в

⁷T. Ludwig and A.D. Mirlin, Interaction-induced dephasing of Aharonov-Bohm oscillations, Phys. Rev. B 69, 193306 (2004); C. Texier and G. Montambaux, Dephasing due to electron-electron interaction in a diffusive ring, Phys. Rev. B 72, 115327 (2005).

⁸D.S. Golubev and A.D. Zaikin, Quantum decoherence of interacting electrons in arrays of quantum dots and diffusive conductors, Physica E 40, 32 (2007).

⁹F. Guinea, Aharonov-Bohm oscillations of a particle coupled to dissipative environments, Phys. Rev. B 65, 205317 (2002).

термодинамическом равновесии присутствует декогерентность, которая не исчезает при температуре стремящейся к нулю, то должна существовать длина дефазировки L_φ , остающаяся конечной даже при нулевой температуре. При этом, все эффекты, чувствительные к квантовой когерентности, такие как, например, незатухающий ток будут подавлены, как только периметр кольца $2\pi R$ превысит L_φ .

Во **второй главе** диссертации рассматривается модель подобная той, что рассматривал Ф.Гиней, однако, с добавлением периодического потенциала для частицы. При этом исследуется незатухающий ток, который течет в кольце и зависимость данного тока от радиуса. Статистическая сумма системы представляется в виде одного функционального интеграла по угловой переменной $\theta(\tau)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &\equiv \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i m \phi_x} \mathcal{Z}_m = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} d\theta_0 \int_0^{2\pi m} \mathcal{D}\theta \exp(2\pi i m \phi_x - S[\theta]). \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь $\beta = 1/T$, $\phi_x = \Phi_x/\Phi_0$ и $\mathcal{Z}_m$ - статистическая сумма с определенным числом намотки. $S[\theta]$ описывает эффективное действие для взаимодействующей частицы на кольце. Это действие состоит из двух частей,

$$S[\theta] = S_0[\theta] + S_{\text{int}}[\theta]. \quad (17)$$

Слагаемое

$$S_0[\theta] = \int_0^\beta d\tau \left[\frac{1}{4E_C} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \tau} \right)^2 + U_0(1 - \cos(\kappa\theta)) \right] \quad (18)$$

представляет собой действие для частицы в отсутствие окружения. Член S_{int} описывает эффект взаимодействия между частицей и окружением.

Для модели, предложенной Ф.Гиней, он имеет вид:

$$S_{\text{int}}[\theta] = \alpha \int_0^\beta d\tau \int_0^\beta d\tau' \frac{\pi^2 T^2 K(\theta(\tau) - \theta(\tau'))}{\sin^2[\pi T(\tau - \tau')]}, \quad (19)$$

$$K(z) = 1 - \frac{1}{\sqrt{4r^2 \sin^2(z/2) + 1}}, \quad (20)$$

где $\alpha = 3/(8k_F^2 l^2)$ и $r = R/l$. Отметим, что интеграл, стоящий в уравнении (19) должен пониматься в смысле главного значения. В диссертации рассмотрен случай, наиболее соответствующий физической реальности $1/k_F \ll l \ll 2\pi R/\kappa$. Первое неравенство в сущности показывает тот факт, что взаимодействие слабо ($\alpha \ll 1$), в то время как второе неравенство означает, что расстояние между соседними минимумами много больше чем l . Соответственно, параметр $r = R/l$ удовлетворяет неравенству

$$r \gg \kappa/2\pi. \quad (21)$$

Отметим, что для вычислений оказалось удобно переписать функцию $K(z)$ через ряд Фурье

$$K(z) = \sum_n a_n \sin^2 \left[\frac{nz}{2} \right] \quad (22)$$

со следующими коэффициентами: $a_n \sim (2/\pi r) \ln(r/n)$ для $1 \leq n \leq r$ и $a_n \approx 0$ - в остальных случаях. В диссертации рассматривается специальный случай внешнего потенциала

$$\kappa^2 E_C \ll U_0. \quad (23)$$

Физические выводы не зависят от этого предположения, однако, вычисления существенно упрощаются. Частица может двигаться по кругу лишь туннелируя между соседними минимумами $\theta = 2\pi p/\kappa$ и $\theta = 2\pi(p \pm 1)/\kappa$ периодического потенциала $U(\theta)$. Каждое такое событие описывается хорошо известной инстантонной траекторией

$$\tilde{\theta}(\tau) = \frac{4}{\kappa} \arctan(\exp(\omega\tau)) \quad (24)$$

и соответствует частоте туннелирования $\Delta/2$, где

$$\Delta = 8 \left(\frac{\kappa U_0 E_C}{\pi} \right)^{1/2} \left(\frac{2U_0}{E_C} \right)^{1/4} \exp \left(-\frac{4}{\kappa} \sqrt{\frac{2U_0}{E_C}} \right) \quad (25)$$

и $\omega = \kappa \sqrt{2U_0 E_C}$. В отсутствие взаимодействия инстантоны образуют практически невзаимодействующий газ, суммирование по всем конфигурациям которого привело к выражению для статистической суммы

$$\mathcal{Z} \sim \sum_{j=1}^{\kappa} e^{\beta \Delta \cos\left(\frac{2\pi(j+\phi_0)}{\kappa}\right)}, \quad (26)$$

откуда следует что при температуре $T \gg \Delta$ ток равен

$$I = I_{C0}(T) \sin(2\pi\phi_x), \quad (27)$$

где

$$I_{C0}(T) = \frac{e\Delta^\kappa}{(2T)^{\kappa-1}\kappa!I_0(\Delta/T)}. \quad (28)$$

Для низкой температуры $T \ll \Delta/\kappa^2$ ток сводится к простой формуле

$$I = \frac{e\Delta}{\kappa} \sin\left(\frac{2\pi\phi_x}{\kappa}\right), \quad -1/2 < \phi_x \leq 1/2. \quad (29)$$

Эта формула показывает, что при $T = 0$ величина незатухающего тока пропорциональна Δ , в то время как зависимость от потока сильно отличается от синусоидальной при всех $\kappa > 1$. В частности в пределе $\kappa \gg 1$ эта зависимость превращается в пилообразную

$$I = I_{C0} \min_n(\phi_x - n), \quad I_{C0} = 2\pi e\Delta/\kappa^2. \quad (30)$$

В диссертации было показано, что значение действия на многоинстантонной траектории имеет вид:

$$S_{\text{int}}[\Theta(\tau)] = 4\pi\alpha r k/\kappa - 2\alpha \sum_{a,b=1, a < b}^k \nu_a \nu_b g(\varphi_{ab}) \ln \left[\frac{\sin[\pi T(\tau_b - \tau_a)]}{\pi T \omega^{-1}} \right], \quad (31)$$

где

$$g(\varphi) = K(\varphi + 2\pi/\kappa) + K(\varphi - 2\pi/\kappa) - 2K(\varphi). \quad (32)$$

Первый член описывает подавление туннелирования частицы между минимумами потенциала за счет взаимодействия. Он приводит к зависящей от радиуса перенормировке туннельной амплитуды

$$\Delta \rightarrow \Delta_r = \Delta e^{-4\pi\alpha r/\kappa}. \quad (33)$$

Оставшийся вклад в уравнении (31) описывает логарифмическое взаимодействие между инстантонами, которое возникает из-за наличия диссипативного окружения. Это логарифмическое взаимодействие отсутствует при $\kappa = 1$, когда $g(\varphi) \equiv 0$. В диссертации данное взаимодействие было учтено в первом порядке по теории возмущений. Были получены следующие результаты.

В случае одного минимума $\kappa = 1$ логарифмическое взаимодействие между инстантонами отсутствует и ответ для тока оказался следующий:

$$I = e\Delta e^{-4\pi\alpha r} \sin(2\pi\phi_x). \quad (34)$$

Этот результат применим при температуре $T \ll \omega$. Он показывает, что при $\kappa = 1$ кулоновское взаимодействие дает экспоненциальное подавление незатухающего тока даже при нулевой температуре, если периметр кольца превышает эффективную длину дефазировки

$$L_\varphi \sim l/\alpha, \quad (35)$$

которая определяется величиной взаимодействия α и не зависит от температуры. Отметим, что при отсутствии периодического потенциала получается точно такой же линейный масштаб¹⁰, на котором происходит дефазировка.

В случае $\kappa \geq 2$ инстантоны взаимодействуют логарифмически. Ответ для тока следующий

$$I = I_C(T) \sin(2\pi\phi_x), \quad (36)$$

где

$$I_C(T) = I_{C0}(T) \left(\frac{T}{\omega}\right)^{2\alpha\kappa K(2\pi/\kappa)} e^{-4\pi\alpha r}, \quad (37)$$

а $I_{C0}(T)$ определено уравнением (28). Незатухающий ток экспоненциально подавляется при периметре кольца $2\pi R \geq L_\varphi$ с независимой от температуры длиной дефазировки, определяемой уравнением (35). В то же самое время, предэкспонента в выражении для I_C зависит от температуры степенным образом $I_C(T) \propto T^{-\mu}$ с $\mu = \kappa(1 - 2\alpha K(2\pi/\kappa)) - 1$. Отметим также, что качественно данное поведение при не очень низких температурах наблюдалось при численном моделировании системы без внешнего потенциала $U_0 = 0$ ¹⁰.

В пределе низкой температуры в диссертации получен ответ

$$I = \frac{e\Delta_R}{\kappa} \sin\left(\frac{2\pi\phi_x}{\kappa}\right) - \frac{e\alpha\Delta_R}{\kappa} \sum_{n=-r}^r a_n \sin\left(\frac{\pi n}{\kappa}\right) \cos\left(\frac{2\pi\phi_x + \pi n}{\kappa}\right) \times \ln\left|\sin\left(\frac{\pi n}{\kappa}\right) \sin\left(\frac{2\pi\phi_x + \pi n}{\kappa}\right)\right|, \quad (38)$$

¹⁰D.S. Golubev, C.P. Herrero and A.D. Zaikin, Interaction-Induced Quantum Dephasing in Mesoscopic Rings, Europhys. Lett. 63, 426 (2003).

где

$$\Delta_R = \Delta_r \left(\frac{\Delta_r}{\omega} \right)^{\frac{2\alpha K(2\pi/\kappa)}{1-2\alpha K(2\pi/\kappa)}}. \quad (39)$$

Данный результат позволяет сделать ряд наблюдений.

Во-первых, из зависимости Δ_R от r видно, что при $T = 0$ и достаточно больших периметрах кольца незатухающий ток экспоненциально подавлен

$$I \propto \exp \left(-\frac{4\pi\alpha r}{\kappa(1-2\alpha K(2\pi/\kappa))} \right). \quad (40)$$

В этом случае для любого заданного значения κ можно ввести эффективную длину дефазировки при нулевой температуре:

$$\tilde{L}_\varphi = L_\varphi \kappa(1-2\alpha K(2\pi/\kappa)). \quad (41)$$

Этот результат показывает, что в пределе малого взаимодействия ($\alpha \ll 1$) эффективная длина (41) оказывается приблизительно в κ раз больше чем L_φ , то есть $\tilde{L}_\varphi \approx l/\alpha\kappa$. Если же, однако, предположить, что $\kappa \propto r$, то никакой конечной длины дефазировки ввести нельзя, хотя незатухающий ток экспоненциально сильно подавлен взаимодействием даже при малых α благодаря условию (21).

Во-вторых, результат (38) показывает, что при температуре $T \rightarrow 0$ влияние электрон-электронного взаимодействия сводится не только к перенормировке амплитуды туннелирования $\Delta \rightarrow \Delta_R$. Заметим, что уравнение (38) также содержит дополнительные члены, вычисленные в диссертации в первом порядке по теории возмущений по α . Данный, зависящий от радиуса вклад первого порядка, оказывается сингулярным при значениях ϕ_x близких к $\pm 1/2$ и ко всем остальным полуцелым числам, что указывает на неприменимость теории возмущений, по крайней мере при этих значениях ϕ_x . Старшие порядки по теории возмущений могут содержать подобные (или даже более сильные) сингулярности, которые, вдобавок, могут расти с увеличением r . Следовательно, при $T \rightarrow 0$ теория возмущений по α неприменима, в частности при больших r . Таким образом, в данном случае можно лишь констатировать тот факт, что взаимодействие способно привести к дополнительной зависимости незатухающего тока от радиуса r , вдобавок к получающейся из выражения для Δ_R . Вероятно, именно такая дополнительная зависимость наблюдалась в численном моделировании¹⁰

в случае $U_0 = 0$. Кроме того, подобное поведение получается в точно решаемом случае, который рассмотрен в конце второй главы диссертации.

Хотя по своим свойствам незатухающий ток сильно отличается от диссипативного тока, протекающего в обычных проводниках при приложении напряжения, попробуем провести некоторые аналогии. Известно, что ток в проводнике шумит. В частности известен так называемый дробовой шум, связанный с дискретностью заряда переносчиков тока.

Третья глава посвящена исследованию вопроса о том, шумит ли незатухающий ток. Хотя конкретный вид зависимости мощности шума от частоты зависит от модели, общие свойства одинаковы. В качестве примеров в работе исследуются модель частицы на кольце во внешнем потенциале и модель частицы, взаимодействующей с диссипативным окружением. Гамильтониан частицы на кольце имеет вид:

$$\hat{H} = \frac{(\hat{p} - \phi_x)^2}{2MR^2} + U(\hat{\theta}) + \hat{H}_{int}(\hat{\theta}, \hat{X}) + \hat{H}_{bath}(\hat{X}). \quad (42)$$

Здесь, помимо кинетической энергии и потенциала, в котором движется частица, мы добавили член взаимодействия с остальными степенями свободы $\hat{H}_{int}$ такими как, например, диссипативное окружение описываемое членом $\hat{H}_{bath}$. Отметим, что взаимодействие зависит лишь от оператора координаты, но не импульса. Оператор тока имеет стандартный вид:

$$\hat{I} = \frac{e}{2\pi} \dot{\hat{\theta}} = \frac{ie}{2\pi} [\hat{H}, \hat{\theta}] = \frac{e(\hat{p} - \phi_x)}{2\pi MR^2}. \quad (43)$$

В диссертации исследуется шум незатухающего тока, который на языке формул описывается автокорреляционной функцией токов:

$$S(t) = \frac{1}{2} \langle \langle \hat{I}(t) \hat{I}(0) + \hat{I}(0) \hat{I}(t) \rangle \rangle = \int \frac{d\omega}{2\pi} S_\omega e^{-i\omega t}. \quad (44)$$

Здесь двойные скобки означают, что коррелятор приведенный, то есть $\langle \langle AB \rangle \rangle \equiv \langle AB \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle$. В начале третьей главы исследуются общие свойства данного коррелятора. В частности существенным является представление мощности шума через собственные состояния гамильтониана $\hat{H}|n\rangle = \varepsilon_n|n\rangle$. Для мощности шума в диссертации получено выражение

$$S(t) = \frac{1}{2\mathcal{Z}} \sum_{m,n} e^{it(\varepsilon_m - \varepsilon_n)} |\langle m | \hat{I} | n \rangle|^2 (e^{-\beta\varepsilon_m} + e^{-\beta\varepsilon_n}) - \langle \hat{I} \rangle^2, \quad (45)$$

которое имеет следующий вид в частотном представлении:

$$S_\omega = \frac{\pi}{Z} \sum_{m,n} |\langle m | \hat{I} | n \rangle|^2 (e^{-\beta \varepsilon_m} + e^{-\beta \varepsilon_n}) \delta(\omega + \varepsilon_m - \varepsilon_n) - 2\pi \langle \hat{I} \rangle^2 \delta(\omega). \quad (46)$$

В зависимости от того, какие собственные значения имеет гамильтониан, можно выделить два случая.

Первый случай соответствует системе с дискретным спектром гамильтониана. Тогда в выражении (46) можно выделить член пропорциональный $\delta(\omega)$ и представить выражение для шума в следующем виде:

$$S_\omega = 2\pi \mathcal{P} \delta(\omega) + \tilde{S}_\omega. \quad (47)$$

Здесь используются обозначения:

$$\mathcal{P} = \frac{1}{Z} \sum_m e^{-\beta \varepsilon_m} |\langle m | \hat{I} | m \rangle|^2 - \langle \hat{I} \rangle^2, \quad (48)$$

$$\tilde{S}_\omega = \frac{\pi}{Z} \sum_{m \neq n} |\langle m | \hat{I} | n \rangle|^2 (e^{-\beta \varepsilon_m} + e^{-\beta \varepsilon_n}) \delta(\omega + \varepsilon_m - \varepsilon_n). \quad (49)$$

Подобная ситуация реализуется, если взаимодействие частицы с окружением пренебрежимо мало ($\hat{H}_{int} = 0$). В этом случае спектр частицы на кольце дискретный и шум представляет собой сумму дельта-функций. Однако, на практике, невозможно реализовать одно единственное тонкое кольцо. В системах, на которых производят измерения, существует много каналов, по которым могут двигаться электроны. В каждом из каналов будут свои уровни энергии. Тогда, для шума всей системы, получим следующий ответ ($\langle \dots \rangle$ обозначает усреднение по множеству каналов):

$$\langle S_\omega \rangle = 2\pi \langle \mathcal{P} \rangle \delta(\omega) + \langle \tilde{S}_\omega \rangle. \quad (50)$$

После усреднения дельта-функциональная особенность на нулевой частоте остается, в то время как остальные дельта функции в сумме могут дать гладкую функцию $\langle \tilde{S}_\omega \rangle$. Данная ситуация проиллюстрирована в диссертации на примере модели частицы на кольце во внешнем поле.

Второй случай отвечает системе с непрерывным спектром. Такая ситуация реализуется, например, в системе, состоящей из частицы на кольце, взаимодействующей с баней из осцилляторов ($\hat{H}_{int} \neq 0$). В этом случае

дельта-функции расплываются, и мощность шума перестает быть сингулярной при нулевой частоте. В диссертации показано, что такое поведение связано с принципом расщепления корреляций. Иными словами, в такой системе $\langle \hat{I}(t)\hat{I}(0) \rangle \rightarrow \langle \hat{I}(t) \rangle \langle \hat{I}(0) \rangle$ при $t \rightarrow \infty$.

В случае нулевой температуры мощность шума имеет вид:

$$S_\omega = \pi \sum_{m>0} |\langle m | \hat{I} | 0 \rangle|^2 (\delta(\omega + \varepsilon_0 - \varepsilon_m) + \delta(\omega + \varepsilon_m - \varepsilon_0)). \quad (51)$$

Отсюда сразу следует, что на нулевой частоте (при нулевой температуре) шум равен нулю.

Первый пример, рассмотренный в диссертации отвечает частице на кольце в периодическом потенциале. В этом случае применяется метод функционального интегрирования в представлении Мацубары. Мощность шума находится при помощи аналитического продолжения с использованием флуктуационно-диссипативной теоремы:

$$\tilde{S}_\omega = \coth \frac{\beta\omega}{2} \Im \tilde{\Pi}_{\omega+i0}, \quad (52)$$

где

$$\Pi(\tau) = \langle \langle \mathcal{T} \hat{I}_M(\tau) \hat{I}_M(0) \rangle \rangle = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Pi_{i\omega_n} e^{-i\omega_n \tau}, \quad (53)$$

- мацубаровский коррелятор. Для вычисления данного коррелятора в третьей главе вычисляется производящий функционал:

$$\mathcal{Z}[\zeta] = \int_0^{2\pi} d\theta_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i m \phi_x} \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi m} \mathcal{D}\theta e^{-\int_0^\beta d\tau \left(\frac{MR^2 \dot{\theta}^2}{2} + U(\theta) - i\zeta \dot{\theta} - \frac{\zeta^2}{2MR^2} \right)}, \quad (54)$$

из которого все корреляторы находятся путем варьирования по источнику:

$$\langle \langle I(\tau_1) \dots I(\tau_N) \rangle \rangle = \left(\frac{e}{2\pi} \right)^N \frac{\delta^N \ln \mathcal{Z}[\zeta]}{\delta \zeta(\tau_1) \dots \delta \zeta(\tau_N)} \Big|_{\zeta=0}, \quad (55)$$

Как и во второй главе диссертации в третьей рассматривается случай глубокого потенциала такого, что частица движется перескакивая из одного минимума в другой. В приближении разреженного инстантонного газа производящий функционал оказывается следующим:

$$\mathcal{Z}[\zeta] = \mathcal{Z}_0[\zeta] \sum_{k=1}^{\kappa} e^{\Delta \int_0^\beta d\tau \cos \left(\frac{2\pi(\phi_x - k)}{\kappa} + \int_0^\beta \zeta(\tau_1) \dot{\theta}(\tau - \tau_1) d\tau_1 \right)}. \quad (56)$$

где $\mathcal{Z}_0[\zeta]$ - это производящий функционал для гармонического осциллятора. Из этого общего выражения в диссертации получено выражение для мощности шума

$$S_\omega = 2\pi\mathcal{P}\delta(\omega) + \frac{e^2\Omega^3}{4\pi\kappa^2U_0\bar{\mathcal{Z}}} \sum_{k=1}^{\kappa} e^{\beta\Delta \cos\left(\frac{2\pi(\phi_x-k)}{\kappa}\right)} (\delta(\omega - \Omega - \epsilon_k) + \delta(\omega + \Omega + \epsilon_k)), \quad (57)$$

где $\epsilon_k = (32U_0\Delta/\Omega) \cos(2\pi(\phi_x - k)/\kappa)$ и

$$\mathcal{P} = \frac{e^2\Delta^2}{\kappa^2} \frac{\sum_{k=1}^{\kappa} \sin^2\left(\frac{2\pi(\phi_x-k)}{\kappa}\right) e^{\beta\Delta \cos\left(\frac{2\pi(\phi_x-k)}{\kappa}\right)}}{\sum_{k=1}^{\kappa} e^{\beta\Delta \cos\left(\frac{2\pi(\phi_x-k)}{\kappa}\right)}} - \frac{e^2\Delta^2}{\kappa^2} \left(\frac{\sum_{k=1}^{\kappa} \sin\left(\frac{2\pi(\phi_x-k)}{\kappa}\right) e^{\beta\Delta \cos\left(\frac{2\pi(\phi_x-k)}{\kappa}\right)}}{\sum_{k=1}^{\kappa} e^{\beta\Delta \cos\left(\frac{2\pi(\phi_x-k)}{\kappa}\right)}} \right)^2. \quad (58)$$

Как уже указывалось выше в реальных экспериментах часто приходится иметь дело с кольцами, состоящими из множества каналов или ансамблями из колец, каждое из которых имеет свои параметры. На Рисунке За изображена зависимость мощности шума от частоты в случае ансамбля колец при нулевой температуре.

Далее в диссертации рассматривается система, состоящая из частицы на кольце взаимодействующей с диссипативным окружением. Диссипативное окружение, имеет такой же вид, что и во второй главе. В этом случае оказалось более удобным использовать метод функционального интегрирования по полям $x^F(t)$ и $x^B(t)$, определенным на прямой и обратной частях контуре Келдыша. Функционал влияния¹¹, полученный в диссертации имеет вид:

$$\mathcal{F}[x^{cl}(t), x^q(t)] = e^{iS_{q-cl}[x^{cl}(t), x^q(t)] + iS_{cl-q}[x^{cl}(t), x^q(t)] - S_{q-q}[x^{cl}(t), x^q(t)]}. \quad (59)$$

¹¹См., например, обзор: G. Schön, A.D. Zaikin, Quantum Coherent Effects, Phase Transitions, and The Dissipative Dynamics of Ultra Small Tunnel Junctions, Phys. Rep. 198, 237 (1990).

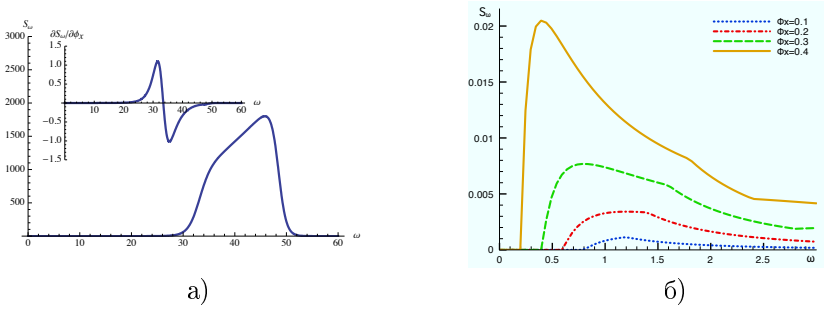


Рис. 3: а) Мощность шума как функция частоты для ансамбля колец. Частота измеряется в единицах $E_C = 1/(2MR^2)$. При этом U_0 однородно распределено в интервале от $60E_C$ до $130E_C$. На вставке показана зависимость производной по потоку от частоты. б) Мощность шума при нулевой температуре при различных значениях потока. Частота ω измеряется в единицах E_C , а мощность шума S_ω в единицах $e^2 E_C / (4\pi^2)$, константы $\alpha = 0.05$, $r = 5$.

где

$$S_{q-q}[x^{cl}(t), x^q(t)] = -2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{t_i}^{t_f} dt' \frac{\pi T^2}{\sinh^2(\pi T(t-t'))} \times \cos(n(x^{cl}(t) - x^{cl}(t'))) \sin \frac{nx^q(t)}{2} \sin \frac{nx^q(t')}{2} \quad (60)$$

и

$$S_{q-cl}[x^{cl}(t), x^q(t)] + S_{cl-q}[x^{cl}(t), x^q(t)] = -\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n n \int_{t_i}^{t_f} dt \dot{x}^{cl}(t) \sin(nx^q(t)), \quad (61)$$

а $x^{cl}(t)$ и $x^q(t)$ - это линейные комбинации $x^F(t)$ и $x^B(t)$, определенные следующим образом:

$$x^{cl}(t) = \frac{x^F(t) + x^B(t)}{2} \quad x^q(t) = x^F(t) - x^B(t). \quad (62)$$

В работе рассматривается два возможных случая. Первый из этих случаев соответствует малым радиусам кольца, что позволяет использовать теорию возмущений по взаимодействию. В диссертации построена

диаграммная техника, из которой выводится уравнение на диагональную часть редуцированной матрицы плотности частицы (которая получается из полной матрицы плотности путем взятия следа по переменным окружения). Данное уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial |\mathcal{P}(t)\rangle}{\partial t} = \int_{-\infty}^t dt' \hat{S}(t-t') |\mathcal{P}(t')\rangle, \quad (63)$$

где под $|\mathcal{P}(t')\rangle$ подразумевается вектор-столбец, составленный из диагональных элементов редуцированной матрицы плотности частицы. Матрица $\hat{S}(t-t')$ определяется собственно-энергетической частью и в работе она была вычислена в первом порядке по константе связи. Это уравнение решается численно в частотном представлении откуда вычисляется мощность шума. Результат вычисления мощности шума при нулевой температуре приведен на Рисунке 3б. Как и должно быть, при нулевой температуре мощность шума на нулевой частоте равна нулю. В диссертации также проведены расчеты при ненулевой температуре. В этом случае на нулевой частоте появляется пик, который с ростом температуры растет и становится все шире и шире. При высокой температуре есть лишь центральный широкий пик, который имеет форму лоренциана. Интересной особенностью является тот факт, что при низкой температуре мощность шума сильно зависит от потока, пронизывающего систему, что отражает наличие в системе квантовомеханической когерентности. Особенно сильно система шумит, когда поток становится близким к полуцелому значению, поскольку в этом случае в системе есть два близлежащих уровня, соответствующих разным значениям тока и частица быстро скачет между ними.

При высокой температуре или сильном взаимодействии с окружением в третьей главе используется квазиклассическое приближение. Незатухающий ток при этом экспоненциально подавлен. Результат для мощности шума следующий:

$$S_\omega = \frac{e^2 \gamma E_C^2}{2\pi^2 (\omega^2 + (\gamma E_C)^2)} \omega \coth \frac{\omega}{2T}, \quad (64)$$

где $\gamma = 2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n n^2$. В этом случае шум является некогерентным и поэтому не зависит от потока. Также в конце третьей главы подробно проанализирован случай высокой температуры, который допускает точное решение.

Известно, что в сверхпроводящих кольцах, пронизанных магнитным потоком Φ течет незатухающий ток. Это явление есть следствие макроскопической фазовой когерентности, присутствующей в сверхпроводнике. И хотя причины возникновения тока в данной системе отличны от рассмотренных выше нормальных металлических колец, в задаче о сверхпроводнике можно поставить аналогичные вопросы. Например, шумит ли этот незатухающий ток, или как он подавляется за счет различных флуктуационных эффектов? Если кольцо достаточно толстое, то флуктуационные эффекты несущественны. При уменьшении сечения кольца и близких к нулю температурах в кольце начинают возникать флуктуации, которыми, как известно, являются квантовые явления проскальзывания фазы. Именно эта область температур исследуется в **четвертой главе** диссертации. Низкая температура означает, что температура $T \ll \Delta$, где Δ - это сверхпроводящая щель. В этом случае квазичастицы практически отсутствуют и поведение системы определяется динамикой фазы параметра порядка. В диссертации используется низкоэнергетическое описание в терминах фазы¹², причем в тонком кольце фаза зависит лишь от координаты x вдоль кольца и от мнимого времени τ . Эффективное действие в этом случае имеет вид:

$$S = \frac{g}{2\pi} \int dx d\tau [v(\partial_x \varphi)^2 + v^{-1}(\partial_\tau \varphi)^2]. \quad (65)$$

Здесь $g = \frac{\pi^2 \hbar N_0 D \Delta s}{2v}$, где s -площадь поперечного сечения, N_0 -плотность электронных состояний на уровне Ферми, D - коэффициент диффузии, а $v = \sqrt{\frac{\pi \sigma \Delta s}{C}}$ - это скорость распространения низколежащей плазменной моды - моды Муи-Шона, σ - проводимость металла в нормальном состоянии, C - удельная емкость провода. Для вычисления статистической суммы и различных корреляторов необходимо вычислить функциональный интеграл по переменной $\varphi(x, \tau)$, имеющей смысл фазы волновой функции Куперовской пары. Поскольку фаза определена с точностью до $2\pi n$, где n - целое, то и интегрирование необходимо производить по всем таким многозначным функциям. Таким образом, по временной переменной граничные условия $\varphi(x, 0) = \varphi(x, \beta) + 2\pi m$, где m - произвольное целое число. По пространственной переменной дополнительный набег фазы создает маг-

¹²См. обзор: K.Yu. Arutyunov, D.S. Golubev and A.D. Zaikin, Superconductivity in one dimension, Phys. Rep. 464, 1 (2008).

нитное поле внутри кольца. Это приводит к тому, что граничные условия по оси x будут $\varphi(L, \tau) = \varphi(0, \tau) + 2\pi(\phi_x + n)$. Здесь $\phi_x = \Phi/\Phi_{sc0}$, где Φ_{sc0} - сверхпроводящий квант магнитного потока, $L = 2\pi R$ -периметр кольца. Как уже упоминалось, основную роль в данной системе играют квантовые явления проскальзывания фазы. Физически они отвечают процессу, при котором квант потока входит в кольцо или выходит из кольца. Математически это означает, что у классических уравнений движения существуют решения типа квантовых вихрей. В диссертации строятся такие решения и показывается, что при учете всех возможных процессов со множеством явлений проскальзывания фазы, статистическая сумма равна

$$\mathcal{Z} = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n \phi_x} \int^{mn} \mathcal{D}\chi e^{-S}, \quad (66)$$

где функциональный интеграл вычисляется по вспомогательной переменной χ с граничными условиями

$$\chi(x, \beta) - \chi(x, 0) = 2\pi n, \quad \chi(L, \tau) - \chi(0, \tau) = 2\pi m. \quad (67)$$

и действием

$$S = \frac{1}{4\pi^3 \hbar N_0 D \Delta s} \int dx d\tau ((\partial_\tau \chi)^2 + v^2 (\partial_x \chi)^2) - \frac{e}{\pi L} \int dx d\tau J(\tau) \partial_\tau \chi - \gamma_{qps} \int dx d\tau \cos(\chi) + \frac{\pi^2 \hbar e^2 N_0 D \Delta s}{L} \int d\tau J^2(\tau), \quad (68)$$

в котором $J(\tau)$ - это источник, варьирование по которому дает всевозможные корреляторы токов, а γ_{qps} - это частота явлений проскальзывания фазы, которая была вычислена в рассматриваемом нами случае грязного сверхпроводника Голубевым и Заикиным¹².

Поле χ определено на прямоугольнике в пространстве времени с размерами $\beta v \times L$. Если температура низкая, а размеры кольца малы, то этот прямоугольник сильно вытянут во временном направлении. Это означает, что эффективно теория становится нольмерной. В этом случае поле χ практически не зависит от пространственной переменной, а значит производящий функционал будет иметь следующий вид:

$$\mathcal{Z}[J(\tau)] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i m \phi_x} \int^m \mathcal{D}\chi(\tau) e^{-S_0 D[\chi(\tau), J(\tau)]} \quad (69)$$

с действием

$$S_{0D} = \frac{R}{2\pi^2\hbar N_0 D \Delta s} \int d\tau (\partial_\tau \chi)^2 - \frac{e}{\pi} \int d\tau J(\tau) \partial_\tau \chi - \gamma_{qps} L \int d\tau \cos(\chi) + \frac{\pi \hbar e^2 N_0 D \Delta s}{2R} \int d\tau J^2(\tau). \quad (70)$$

Это есть действие для частицы на кольце в периодическом потенциале. Переменную χ можно отождествить с флуктуирующим потоком. Эта задача была подробно исследована во второй и третьей главах диссертации в случае, когда член с косинусом является доминирующим. Необходимо лишь провести замену $E_C \rightarrow \frac{E_R}{2} \equiv \frac{\pi^2 \hbar N_0 D \Delta s}{2R}$ и $U_0 \rightarrow 2\pi R \gamma_{qps}$, $\kappa \rightarrow 1$. Отсюда сразу следует, что частота малых колебаний вблизи минимума потенциала $\Omega = \pi \sqrt{\pi \hbar N_0 D \Delta s \gamma_{qps}}$ не зависит от радиуса. Из тождественности данной модели и модели, рассмотренной во второй и третьей главах в диссертации делается вывод, что сверхпроводящий незатухающий ток шумит. Причем этот шум когерентный, то есть зависит от потока. Далее в диссертации вычисляется мощность данного шума. В частности при нулевой температуре получен следующий ответ

$$S_\omega = \frac{e^2 U_0^2}{\pi(1+2\phi_x)^2} (\delta(\omega - E_R(1/2 + \phi_x)) + \delta(\omega + E_R(1/2 + \phi_x))) + \frac{e^2 U_0^2}{\pi(1-2\phi_x)^2} (\delta(\omega - E_R(1/2 - \phi_x)) + \delta(\omega + E_R(1/2 - \phi_x))), \quad (71)$$

при $U_0 \ll E_R$ и

$$S_\omega = \frac{e^2 \Omega^3}{2\pi U_0} \left(\delta(\omega - \Omega - \tilde{\Delta} \cos(2\pi\phi_x)) + \delta(\omega + \Omega + \tilde{\Delta} \cos(2\pi\phi_x)) \right) \quad (72)$$

при $U_0 \gg E_R$, где

$$\tilde{\Delta} = 256 \sqrt{\frac{U_0^3}{\pi \Omega}} e^{-\frac{s U_0}{\Omega}}. \quad (73)$$

В конце четвертой главы все параметры выражаются через $g_\xi = \frac{2\pi \hbar \sigma s}{e^2 \xi}$ - безразмерный кондактанс куска проволоки с длиной, равной длине когерентности ξ :

$$E_R = \frac{\pi g_\xi \xi \Delta}{4R}, \quad (74)$$

$$U_0 = \frac{2\pi g_\xi \Delta R}{\xi} e^{-\frac{g_\xi}{4}}, \quad (75)$$

$$\Omega = \frac{\pi g_{\xi} \Delta}{\sqrt{2}} e^{-\frac{g_{\xi}}{8}}. \quad (76)$$

В заключении приведены основные результаты диссертации.

В приложениях описаны полезные соотношения и приведены некоторые громоздкие выкладки.

Основные результаты, выносимые на защиту

1. Получены выражения для осцилляций кондактанса кольца, состоящего из металлических квантовых точек, как функции магнитного потока с учетом электрон-электронного взаимодействия. Оказалось, что электрон-электронное взаимодействие подавляет осцилляции даже при нулевой температуре. Показано, что существует два режима подавления в данной системе, классический и квантовый, причем температура кроссовера между этими двумя режимами зависит от радиуса кольца.

2. Изучено влияние электрон-электронного взаимодействия на незатухающий ток в модели частицы на кольце, взаимодействующей с диссипативным окружением типа “неупорядоченный металл” во внешнем периодическом потенциале. При этом вычислена длина декогерентности и показано, что при низкой температуре взаимодействие приводит не только к перенормировке амплитуды незатухающего тока, но и к изменению формы зависимости незатухающего тока от потока.

3. Исследовано новое явление, флуктуации незатухающего тока. Мощность шума незатухающего тока вычислена в модели частицы на кольце в периодическом потенциале и в модели частицы на кольце, взаимодействующей с диссипативным окружением.

4. Показано, что мощность шума незатухающего тока зависит от потока в случае, когда в системе присутствует квантовомеханическая когерентность. При подавлении когерентности шум не исчезает, но перестает зависеть от потока.

5. Продемонстрировано, что эффективное действие, описывающее тонкое сверхпроводящее кольцо в котором существуют квантовые явления проскальзывания фазы, эквивалентно действию для частицы на кольце в периодическом потенциале. Вычислена мощность шума незатухающего тока в таком кольце.

Публикации по теме диссертации

- [1] A.G. Semenov, D.S. Golubev and A.D. Zaikin, “Aharonov-Bohm oscillations in coupled quantum dots: Effect of electron-electron interactions” // *Phys. Rev. B*, 79, 115302 (2009).
- [2] A.G. Semenov and A.D. Zaikin, “Persistent currents in nanorings and quantum decoherence by Coulomb interaction” // *Phys. Rev. B*, 80, 155312 (2009).
- [3] A.G. Semenov and A.D. Zaikin, “Aharonov–Bohm oscillations in disordered nanorings with quantum dots: Effect of electron–electron interactions” // *Physica E*, 42, 600 (2010).
- [4] D.S. Golubev, A.G. Semenov, A.D. Zaikin, “Weak localization, Aharonov-Bohm oscillations and decoherence in arrays of quantum dots” // *Физика Низких Температур*, 36, 1163 (2010).
- [5] A.G. Semenov and A.D. Zaikin, “Fluctuations of persistent current” // *принято к печати в J. Phys. Cond. Mat.*.
- [6] A.G. Semenov and A.D. Zaikin, “Persistent current noise” // *принято к печати в J. Phys. Conf. Series*.