Учреждение Российской академии наук
Физический Институт им. П. Н. Лебедева

На правах рукописи
УДК 530-145

Гайнутдинов Азат Марсельевич

Квантово–групповые симметрии в логарифмических моделях конформной теории поля

01.04.02 – теоретическая физика

Автореферат
Диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Москва 2009 г.

Работа выполнена в Отделении Теоретической Физики им. И.Е. Тамма
Физического Института им. П.Н. Лебедева РАН

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
Семихатов Алексей Михайлович
(Физический Институт им. П.Н. Лебедева РАН, г. Москва)

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук
Славнов Никита Андреевич
(Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, г. Москва)

доктор физико-математических наук
Хорошкин Сергей Михайлович
(Институт Теоретической и Экспериментальной Физики, г. Москва)

Ведущая организация:
Объединенный институт ядерных исследований,
Лаборатория теоретической физики им Н.Н. Боголюбова, г. Дубна

Защита состоится 22 июня 2009г. в 12 часов на заседании диссертационного совета Д 002.023.02 Физического института им. П.Н. Лебедева РАН по адресу: 119991, г. Москва, Ленинский проспект, д. 53.
С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФИАН.

Автореферат разослан ______________________ 2009г.

Ученый секретатрь диссертационного совета Д 002.023.02
профессор, доктор физико-математических наук
Я.Н. Истомин

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Все двумерные статистические системы можно условно разделить на два класса: "рациональные" и "логарифмические". Критическое поведение первого из них описывается *рациональными* конформными теориями поля, динамика которых задается самосопряженным оператором эволюции, а гильбертово пространство состояний может быть разложено в прямую сумму конечного числа *неприводимых* мультиплетов по отношению к порождающей спектр алгебре. К классу рациональных статфизических систем относятся, например, хорошо известные модели Изинга[1] и Поттса[2], моделирующие критические явления в ферромагнетиках, а также вершинные модели[3], описывающие критические точки для сегнетоэлектриков.

Простейшие примеры рациональных теорий введены в основополагающей работе Белавина, Полякова и Замолодчикова[4], где были "диагонализованы" конформные динамические (бутстрапные) уравнения и получено бесконечное множество их точных решений — *минимальные модели* $\mathsf{M}(p,p')$. Эти модели являются точно решаемыми в очень сильном смысле: корреляционные функции и аномальные размерности всех полей могут быть явно вычислены. Многие минимальные модели отождествляются с известными критическими и мультикритическими точками двумерных статистических систем. В частности, простейшая нетривиальная минимальная модель $\mathsf{M}(3,4)$ описывает хорошо известную критическую точку модели Изинга, а модель $\mathsf{M}(5,6)$ описывает критическую точку модели Поттса с $\mathbb{Z}_3$ симметрией.

---

[1] *E. Ising*, Z. Phys. **31**, 253 (1925).
[2] *R.B. Potts*, Proc. Cam. Phil. Soc. **48**, 106 (1952).
[3] *R.J. Baxter*, Exactly solved models in statistical mechanics, Academic Press, New York, 1982.
[4] *A.A. Belavin, A.M. Polyakov, A.A. Zamolodchikov*, Nucl. Phys. B **241** (2): 333-380 , 1984.

Накопленные к настоящему моменту знания о рациональных моделях двумерной конформной теории поля (RCFTs) столь же обширны и аксиоматически проработаны[5] как, например, в теории простых алгебр Ли. Продолжая ту же аналогию, можно добавить, что RCFTs представлют собой лишь малую часть всего многообразия CFT, так же как и полупростые алгебры Ли являются не более чем малым подмножеством в существенно более широком классе.

Исследование более широкого, *логарифмического* класса конформных теорий мотивировано, в особенности, приложениями – в литературе[6] имеется все возрастающая очевидность того факта, что некоторые системы с беспорядком в критической точке проявляют два необычных свойства: существование в спектре теории логарифмических операторов (корреляционные функции с которыми содержат логарифмические расходимости) и существование бесконечного числа релевантных операторов с отрицательными конформными размерностями. Системы с таким свойством не допускают описания при помощи диагонализуемой трансфер-матрицы — решеточной версии оператора эволюции — и относятся к логарифмическому типу.

К логарифмическому классу задач относятся также теории (мульти)критических полимеров[7], фазовые переходы между плато в целочисленном квантовом эффекте Холла[8], критические точки в статистических моделях геометрического происхождения, таких как двумерная перколяция[9], задача димеров[10] и задача о заполняющих деревьях[11], а также

---

[5] *G. Moore and N. Seiberg*, Lectures on RCFT, *Physics, Geometry, and Topology*, 1989.

[6] *J.-S. Caux, I.I. Kogan, A.M. Tsvelik*, Nucl. Phys. **B466**, 444 (1996); *J.-S. Caux, I.I. Kogan, A. Lewis and A.M. Tsvelik*, Nucl. Phys. **B489**, 469 (1997); *Z. Maassarani, D. Serban*, Nucl. Phys. **B489**, 603 (1997); *J.-S. Caux, N. Taniguchi, A.M. Tsvelik*, Nucl. Phys. **B525**, 671 (1998); *S. Guruswamy, A. LeClair, A.W.W. Ludwig*, Nucl. Phys. **B583**, 475 (2000).

[7] *H. Saleur*, Nucl. Phys. **B382**, 486 (1992); *H.G. Kausch*, hep-th/9510149.

[8] *V. Gurarie, M. Flohr, C. Nayak*, Nucl. Phys. **B498**, 513 (1997); *K. Ino*, Nucl. Phys. **B532**, 783 (1998);

[9] *J. Cardy*, J. Phys. **A25** (1992) L201–L206; *H. Saleur and B. Duplantier*, Phys. Rev. Lett. **58**, 22 (1987) 2325–2328; *G.M.T. Watts*, J. Phys. **A29**, L363 (1996).

[10] *N.S. Izmailian, V.B. Priezzhev, P. Ruelle, and C.-K. Hu*, Phys. Rev. Lett. **95** (2005) 260602.

[11] *J.G. Brankov, S.Y. Grigorev, V.B. Priezzhev, I.Yu. Tipunin*, J.Stat.Mech. 0811:P11017.

системы с самоорганизацией, например, модель песочной горы[12](модель "sand-pile"). В системах с самоорганизацией возможны начальные (так называемые транзиентные) состояния, в которые система не может вернуться ни при какой возможной ее эволюции.

Математическим выражением наличия в спектре транзиентных состояний является структура жордановых клеток в трансфер-матрице, описывающей эволюцию подобной системы. Наличие нетривиальных жордановых клеток в трансфер-матрице T означает невозможность диагонализовать оператор T на пространстве состояний:

$$T|\psi\rangle = t|\psi\rangle + |\varphi\rangle, \qquad T|\varphi\rangle = t|\varphi\rangle,$$

что приводит к неразложимости представлений порождающей спектр алгебры.

В связи с этим, конформные теории поля с *недиагонализуемым* гамильтонианом представляют особенный интерес — они должны описывать универсальные свойства логарифмического класса критических систем. Определяющей чертой таких теорий поля является *неразложимость* представлений киральной алгебры симметрии на неприводимые составляющие. В частности, это приводит к логарифмическим расходимостям в корреляционных функциях, поэтому такие теории поля называют логарифмическими моделями конформных теорий поля (далее LCFTs).

На существование LCFTs было впервые указано в работе Рожанского и Салера[13] в 1991 г., и почти одновременно в работе Гурари[14]. В течение примерно десяти лет, последовавших за открытием LCFTs, прогресс в логарифмических конформных теориях сдерживался трудностями, связанными главным образом с отсутствием четкого принципа для определения пространства состояний и симметрий в каждой данной модели.

---

[12] *Mathieu, P. Ruelle*, hep-th/0107150; *G. Piroux and P. Ruelle*, J. Stat. Mech. 0401 (2004) P005; *M. Jeng*, Phys. Rev. E **71** (2005) 016140; *M. Jeng, G. Piroux, and P. Ruelle*, cond-mat/0609284.

[13] *L. Rozansky, H. Saleur*, Nucl. Phys. **B376** (1991) 461–509.

[14] *V. Gurarie*, Nucl. Phys. **B410**, 535 (1993).

Мысль о классификации или хотя бы исчерпывающем исследовании отдельных примеров LCFTs представлялась достаточно безнадежной из-за уже одного того опасения, что представления соответствующих киральных алгебр могут иметь сколь угодно сложное устройство – в наличии не было теории представлений, развитой до уровня существующей теории представлений киральных алгебр симметрий в рациональном случае.

Преодоление указанных трудностей в анализе LCFTs позволило бы расширить имеющееся понимание логарифмических конформных теорий до уровня, сравнимого с рациональными конформными теориями поля. Такая задача включает в себя несколько интригующих, но достаточно сложных математических проблем. В первую очередь требуется создание новых методов, поскольку существующие по большей части пригодны лишь в полупростом (т.е. диагонализуемом, "нелогарифмическом") случае.

Наиболее развитые и фундаментальные подходы к изучению теоретико-полевых моделей основываются на понятии термодинамического или скейлингового предела решеточных интегрируемых моделей (так, наиболее строгие определения взаимодействующих теорий поля, подобных модели sinh-Гордон, основаны на дискретизации). Методы интегрируемых теорий объединяет *квантово-групповая* симметрия, довольно естественно возникающая в двумерных решеточных моделях в качестве абстрактной алгебраической формализации явления интегрируемости.

Квантовые группы представляют собой определенную деформацию алгебраических соотношений классических групп Ли, точнее соответствующих им инфинитезимальных преобразований. Они были независимо открыты Дринфельдом и Дзимбо[15]. Приложения квантовых групп были впервые предложены Ленинградской школой[16] в середине 80-х для

[15] *V. G. Drinfeld*, Soviet Math. Dokl. **32**, 254-8 (1985); *M. Jimbo*, Lett. Math. Phys. **10**, 63-9 (1985).

[16] *L.D. Faddeev, E.K. Sklyanin, L.A. Takhtajan*, Teor. Mat. Fiz. **40**, 194 (1979); *L.D. Faddeev and L.A. Takhtajan*, Usp. Mat. Nauk **34**, 13 (1979); *L.A. Takhtajan*, Zap. Nauchn. Sem. LOMI **101**, 158 (1981); *L.A. Takhtajan*, Adv. Studies Pure Math. **13**, 19, 1989.

осмысления математических основ квантового метода обратной задачи рассеяния.

Роль квантово-групповой симметрии в интегрируемых моделях настолько фундаментальна, что ее полная реализация уже определяет большинство, если не все, свойства модели. Например, группой из Киото[17] (Дзимбо, Мива, Фода, Накаяшики, и др.) в 90-х годах были выведены интегральные формулы для корреляционных функций сегнетоэлектрических моделей на основе теории представлений (так называемых аффинных) квантовых групп. Также, квантово-групповые симметрии естественным образом реализованы[18] (Паскье, Салер) в системах типа спиновых цепочек, подобных квантовой модели Гейзенберга (XXZ), где *коумножение* позволяет определить действие квантовой группы на цепочке, т.е. на тензорном произведении векторных пространств, связанных с каждым узлом. Квантово-групповая симметрия оказалась крайне полезной как в анализе полного пространства состояний, так и при вычислении спектра гамильтониана.

Таким образом, можно сказать, что приложения квантовых групп в полной мере распространились на решеточные интегрируемые модели двумерной статистической физики. При этом квантовая группа остается “нечувствительной” к увеличению размеров решетки, изменяется лишь состав мультиплетов по квантовой группе, но симметрия при этом остается прежней для любого числа узлов N. Это наталкивает на мысль о возможном выживании квантово-групповой симметрии в термодинамическом пределе ($N \to \infty$), при котором вакууму $|0\rangle$ фоковского пространства соответствовало бы основное состояние с минимальной энергией по отношению к квантовому гамильтониану, а многочастичные состояния отвечали бы низко лежащим возбуждениям над основным состоянием.

---

[17] *M. Jimbo, T. Miwa, K. Miki and A. Nakayashiki*, Phys. Lett. A **168** (1992), 256-263; *H. Boos, M. Jimbo, T. Miwa, F. Smirnov, Y. Takeyama*, Annales Henri Poincare 7:1395-1428, 2006, hep-th/0601132.

[18] *V. Pasquer, H. Saleur*, Nucl. Phys. B **330** (1990) 523.

В связи с этим, возникновение квантово-групповых симметрий в конформных моделях, реализуемых как термодинамический предел двумерных интегрируемых систем в критической области параметров, представляется достаточно естественным. Физически, можно сказать, что явная реализация квантово-групповой симметрии сводится к описанию конформной теории в терминах квазичастичных возбуждений с дробной статистикой (типичный пример таких частиц возникает при изучении дробного квантового эффекта Холла).

Целью работы является построение и анализ логарифмических моделей двумерной конформной теории поля. Рассмотрено семейство логарифмических моделей с различными киральными алгебрами симметрий, востребованными при описании универсальных свойств тех или иных двумерных задач статистической физики с *недиагонализуемой* трансфер-матрицей. В цели диссертационной работы входит построение соответствущих рассматриваемым логарифмическим моделям квантово-групповых симметрий в явных конформно-полевых терминах, а также изучение конформно-полевых структур (корреляционных функций, полного пространства состояний) при помощи найденной квантово-групповой симметрии.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются оригинальными и получены впервые.

Научная и практическая ценность диссертационной работы обусловлена возможностью применения полученных в ней результатов в дальнейших исследованиях двумерных критических явлений, в которых существенную роль играют нелокальные степени свободы, например, неупорядоченные системы электронов (уже упоминавшийся квантовый эффект Холла), фазовые переходы в полимерах и критические точки в статистических моделях геометрического происхождения, таких как двумерная перколяция, задача димеров и задача о заполняющих деревьях, а также системы с самоорганизующимся критическим состоянием (например, модель песочной горы).

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на семинарах теоретического отдела ФИАН и других российских и зарубежных научных центров (Протвино, ОИЯИ и университет Киото), а также на международных конференциях: Киото, декабрь 2006; Прага, июнь 2007; Протвино, январь 2008; Киото, январь 2009; Цюрих, май 2009.

Публикации. По теме диссертации написано 5 работ (см. стр. 17), которые опубликованы в отечественных и зарубежных научных журналах.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из Введения, пяти глав, объединяющих 32 раздела, Заключения, четырех приложений и списка цитируемой литературы, включающего 173 названия. Общий объем работы – 126 страниц.

Краткое содержание работы

Во **Введении** описаны объект исследований и цели Диссертации, дан краткий исторический обзор и прокомментировано современное состояние круга вопросов, затрагиваемых в Диссертации. Введение содержит также четыре раздела с предварительными сведениями, объясняющими возникновение и востребованность квантово-групповых симметрий как в решеточных интегрируемых, так и в конформно-полевых моделях. Эти сведения составляют основу методов, используемых в диссертации. Во введении также приводятся результаты диссертации.

Первая глава посвящена построению и исследованию логарифмических расширений минимальных моделей $\mathsf{M}(p,p')$ конформной теории поля — двухпараметрической серии логарифмических моделей $\mathsf{WM}(p,p')$ с так называемой *триплетной* киральной W-алгеброй $\boldsymbol{\mathcal{W}}_{p,p'}$. Изложение главы опирается на работу [1]. Результаты этой главы являются достаточно естественным развитием полученных ранее результатов[19] для логарифмических моделей $\mathsf{WM}(p,1)$ в терминах свободных полей и скрининговых операторов.

[19] *J. Fuchs, S. Hwang, A.M. Semikhatov, and I.Yu. Tipunin*, Commun. Math. Phys. **247** (2004) 713–742.

Напомним, что в двумерии группа локальных конформных преобразований порождается *бесконечным* числом генераторов — аналитическими отображениями комплексной плоскости. Соответствующая бесконечномерная алгебра симметрии квантовой теории с локальным тензором энергии-импульса, известная как *алгебра Вирасоро*, характеризуется своим центральным зарядом, отвечающим появлению конформной аномалии в квантовой теории. При этом все квантовые поля (точнее, их голоморфная часть) в двумерной конформной теории могут быть классифицированы по представлениям этой алгебры[20]. Родоначальники или вектора старшего веса таких представлений называются *примарными* полями.

Существенным в неполупростых/логарифмических теориях является то, что прежде чем говорить о составе полей, соответстующих им корреляционных функциях и т.д., необходимо определить алгебру симметрии как алгебру порождающую спектр теории. Эта алгебра во многих случаях не является очевидной алгеброй симметрии (Вирасоро, например), а являются некоторым ее нелинейным расширением, т.е. является некоторой W-алгеброй.

В логарифмической модели киральная W-алгебра должна быть достаточно большой, чтобы гарантировать появление в теории конечного числа примарных полей (физических наблюдаемых). Только в этом случае можно ожидать конечномерную алгебру слияний полей и представление модулярной группы (напомним, что конечномерное представление модулярной группы является хорошим тестом *самосогласованности* модели).

В первых разделах Главы кратко напоминаются основные понятия о вертекс-операторных алгебрах и теории представлений алгебры Вирасоро. Также вводятся основные понятия о скрининговых операторах (далее, просто скрининги). Киральная алгебра $\boldsymbol{\mathcal{W}}_{p,p'}$, которая представляет собой алебру симметрии логарифмических моделей $\mathsf{WM}(p,p')$, строится из ядра скринингов в вакуумном представлении некоторой решетчатой

[20] *A.A. Belavin, A.M. Polyakov, A.A. Zamolodchikov*, Nucl. Phys. B **241** (2): 333-380 , 1984.

вертекс-операторной алгебры $\mathcal{L}$. W-алгебра $\mathcal{W}_{p,p'}$ порождается тензором энергии–импульса $T(z)$ и думя Вирасоровскими примарными полями $W^+(z)$ и $W^-(z)$ с конформной размерностью $(2p-1)(2p'-1)$.

Определение W-алгебры $\mathcal{W}_{p,p'}$ ссылается на модель Кулоновского газа[21], где стартовой точкой является двумерное скалярное поле φ с записанным в комплексных координатах действием

$$S_0 = -\tfrac{1}{8\pi} \int \partial\varphi\bar{\partial}\varphi dz d\bar{z}.$$

(Нормировка выбрана так, чтобы пропагатор имел вид $\langle\varphi(z,\bar{z})\varphi(0,0)\rangle = \log|z|$ и вершинные операторы $\exp(\alpha\varphi(z,\bar{z}))$ не содержали бы множителя i в экспоненте.) Более того, скалярное поле рассматривается как компактифицированное на окружности (радиуса $\sqrt{2pp'}$), что просто означает эквивалентность полей φ и $\varphi + 2i\pi\sqrt{2pp'}$. В таком случае наблюдаемые даются вершинными операторами $\exp(\frac{n}{\sqrt{2pp'}}\varphi(z,\bar{z}))$ при $n \in \mathbb{Z}$.

Так заданная модель с центральным зарядом $c = 1$ имеет существенно большую алгебру симметрии – решетчатую вертекс-операторную алгебру $\mathcal{L}_{p,p'}$, упомянутую выше. Минимальные модели можно рассматривать как конформные точки[22] с $c < 1$, в которые система перенормируется после возмущения

$$S = S_0 + \int \lambda_+ e^{\alpha_+\varphi(z,\bar{z})} dz d\bar{z} + \int \lambda_- e^{\alpha_-\varphi(z,\bar{z})} dz d\bar{z}$$

с подходящими α_+ и α_- (и некоторыми константами $\lambda_\pm$). Симметрия таким образом полученной модели становится алгеброй Вирасоро из минимальных моделей $\mathsf{M}(p,p')$, которая “сильно меньше” алгебры $\mathcal{L}_{p,p'}$.

В таком подходе логарифмические конформные точки возникают для систем со случайно распределенными вмороженными дефектами[23], чье действие имеет вид

$$S = S_0 + \int \lambda_+(z,\bar{z}) e^{\alpha_+\varphi(z,\bar{z})} dz d\bar{z} + \int \lambda_-(z,\bar{z}) e^{\alpha_-\varphi(z,\bar{z})} dz d\bar{z},$$

---

[21] *B. Nienhuis*, J. Stat. Phys. **34** (1984) 731–761; *Vl.S. Dotsenko and V.A. Fateev*, Nucl. Phys. **B240** [FS 12] (1984) 312–348.

[22] *A.B. Zamolodchikov*, JETP. Lett. **43** (1986) 730–732.

[23] J. Cardy, *The stress tensor in quenched random systems*, cond-mat/0111031.

где $\lambda_\pm(z,\bar z)$ являются вмороженными случайными переменными с подходящим образом выбранными корреляторами $\overline{\lambda_\pm(z,\bar z)}$, $\overline{\lambda_\pm(z_1,\bar z_1)\lambda_\pm(z_2,\bar z_2)}$ и т.д. Содержащиеся в этих фиксированных корреляторах параметры перенормируются таким образом, что система появляется в новой инфракрасной фиксированной точке с тем же центральным зарядом $c<1$ как и у минимальных моделей, но с W-алгеброй (подалгеброй в $\boldsymbol{\mathfrak{L}}_{p,p'}$) в качестве алгебры симметрии. Вся система может быть таким образом рассмотрена как тензорное произведение исходной модели Кулоновского газа и дополнительной модели, описывающей вмороженный беспорядок посредством выбранных корреляторов от переменных $\lambda_\pm(z,\bar z)$. В Диссертации не приводится каким именно образом должны быть выбраны эти корреляторы, чтобы воспроизвести логарифмические модели $\mathsf{WM}(p,p')$ конформной теории поля; вместо этого, выбирается алгебраическая постановка задачи и изучается W-алгебра $\boldsymbol{\mathcal{W}}_{p,p'}$ ожидаемой фиксированной точки. В этом направлении возможно восстановить связь с системами вмороженного беспорядка посредством изучения так называемых логарифмических представлений этой W-алгебры.

Вторая глава посвящена изучению квантово-групповых симметрий в однопараметрическом $\mathsf{WM}(p,1)$-подсемействе из числа логарифмических моделей описанных в предыдущей главе. Изложение главы основано на работе [2].

Наличие квантово-групповой симметри в LCFTs связано с тем, что квантовая группа проявляется явно как алгебра нелокальных зарядов – упомянутых ранее скринингов, которые действуют на пространстве состояний логарифмической теории. Сами состояния находятся в однозначном соответствии с *нелокальными* полями с нетривиальными свойствами по отношению к преобразованию монодромии — обнесению полей по замкнутому контуру вокруг любого другого поля. Действие квантовой группы на таком пространстве нелокальных полей коммутирует с действием киральной алгебры, что означает наличие взаимнооднозначного соответствия между старшими векторами квантовой группы и примарными полями конформной теории. Это соответствие говорит о глубокой связи между теориями представлений киральной алгебры и соответствующей квантовой группы.

В качестве примера квантово-групповой симметрии в физических системах можно привести анизотропную модель Гейзенберга (XXZ-модель) с гамильтонианом

$$H = \sum_{j=1}^{N-1} \left(\sigma_j^x \sigma_{j+1}^x + \sigma_j^y \sigma_{j+1}^y + \frac{\mathfrak{q} + \mathfrak{q}^{-1}}{2} \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z\right) + \frac{\mathfrak{q} - \mathfrak{q}^{-1}}{2} (\sigma_1^z - \sigma_N^z), \tag{1}$$

который является определенной “деформацией” гамильтониана изотропной XXX-модели ($\mathfrak{q} \to 1$) с хорошо-известной $SU(2)$-симметрией. Симметрия гамильтониана (1) деформируется соответствующим образом — гамильтониан H коммутирует не только с оператором “числа частиц” ($[H, S^z] = 0$), но и со всей квантовой группой $SU_{\mathfrak{q}}(2)$:

$$[S^z, S^{\pm}] = \pm S^{\pm}, \qquad [S^+, S^-] = [2S^z]_{\mathfrak{q}}, \quad \text{где} \quad [x]_{\mathfrak{q}} = \frac{\mathfrak{q}^x - \mathfrak{q}^{-x}}{\mathfrak{q} - \mathfrak{q}^{-1}}, \tag{2}$$

$$\Delta(\mathfrak{q}^{S^z}) = \mathfrak{q}^{S^z} \otimes \mathfrak{q}^{S^z}, \qquad \Delta(S^{\pm}) = S^{\pm} \otimes \mathfrak{q}^{S^z} + \mathfrak{q}^{-S^z} \otimes S^{\pm}, \tag{3}$$

где соотношения (2) представляют собой деформацию обычных соотношений для алгебры Ли $s\ell(2, \mathbb{C})$, а действие на тензорах ($\Delta(J) = J \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes J$) изменяется согласованным образом, так что (3) определяет представление соотношений (2) на тензорном произведении двух любых представлений. Квантовая группа $SU_{\mathfrak{q}}(2)$ является, таким образом, алгеброй классифицирующей спектр гамильтониана H — каждый мультиплет по квантовой группе состоит из собственных векторов гамильтониана на одном уровне энергии.

Полученная в описываемой главе квантово-групповая симметрия логарифмических моделей $\mathsf{WM}(p, 1)$ является некоторой версией квантовой группы $SU_{\mathfrak{q}}(2)$ с параметром деформации в корне из единицы ($\mathfrak{q} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/p}$).

Основываясь на этой симметрии, был произведен анализ корреляционных функций, точнее, вычислена алгебра слияний квантовых полей в теории.

Напомним, что структура корреляционных функций в конформной теории во многом определяется из разложения операторных произведений примарных полей. Непосредственное вычисление таких разложений представляется как правило крайне нетривиальной задачей. Первым шагом на пути к ее решению является изучение операции типа тензорного произведения на соответствующих представлениях киральной алгебры симметрии. Такая операция дает не зависящее от выбора базиса описание операторных произведений примарных полей и формализуется в понятии алгебры слияний (фьюжина) – коммутативной ассоциативной алгебры с выделенным базисом из представлений киральной алгебры, в котором структурные константы являются *неотрицательными* целыми числами и определяют набор правил или каналов, по которым могут осуществляться "столкновения частиц".

Замкнутость алгебры слияний примарных полей, а также инвариантность теории при модулярных преобразованиях[24] — глобальных (а не только локальных) диффеоморфизмах мировой двумерной поверхности, на которой задана конформная теория поля, — составляют критерий полноты множества полей в теории.

Неожиданным оказался результат об эквивалентности модулярных свойств модели $\mathsf{WM}(p,1)$ и соответствующей ей квантовой группы. Точнее, показано, что известное ранее[19] действие модулярной группы на пространстве конформных блоков нуль-точечных корреляций[25] совпадает с модулярным действием на центре квантовой группы. Такой результат окажется существенным в последующих разделах Диссертации при

[24] Требование модулярной инвариантности дополняет требование замкнутости операторной алгебры: не каждое множество представлений, замкнутых относительно операции слияния, удовлетворяет условию инвариантности при модулярных преобразованиях.

[25] Частным примером таких конформных блоков являются обычные характеры представлений киральной алгебры, которые являются "сторительными блоками" статистической суммы – функциями, порождающими энергетические уровни в соответствующем представлении.

установлении связи в моделях $\mathsf{WM}(p,1)$ между обоими постулатами полноты множества полей – алгеброй слияний и модулярной инвариантностью. Так называемая формула Верлинде, речь о которой пойдет ниже, позволяет вычислять правила слияний полей зная лишь информацию о поведении системы при глобальных диффеоморфизмах ее мировой поверхности. В случае системы с периодическими граничными условиями речь идет о модулярных преобразованиях на торе.

Третья глава основана на работе [3] и ставит своей целью анализ логарифмических представлений киральной алгебры из моделей $\mathsf{WM}(p,1)$ на основе найденной квантово-групповой симметрии. В логарифмических представлениях имеется недиагонализуемое действие гамильтониана (скейлингового оператора L_0) и в них "живут" логарифмические партнеры примарных полей теории. В корреляционных функциях именно с такими полями появляются члены с логарифмическими расходимостями. И прежде чем строить полное пространство состояний в каждом киральном секторе, необходимо знать структуру логарифмических представлений. В этом состоит важное отличие неполупростых/логарифмических теорий от рациональных.

На примере простейшей нетривиальной модели $\mathsf{WM}(2,1)$ приведена явная конструкция квантово-групповой симметрии в терминах симплектических фермионов. Показано, что существует $1:1$ соответствие между всевозможными неразложимыми представлениями киральной W-алгебры и квантовой группы.

Четвертая глава посвящена исследоваию фундаментальной связи между двумя критериями полноты множества полей – алгеброй слияний и модулярной инвариантностью – и следует работе [4]. Напомним, на примере ряда рациональных моделей Верлинде было установлено[26], что модулярная S-матрица диагонализует правила слияний в рациональной теории. Это позволяет свести исходно нелинейную задачу вычисления алгебры слияний к линейной задаче о модулярных свойствах теории.

[26] *E.P. Verlinde*, Nucl. Phys. **B 300** (1988) 360.

Результат такого наблюдения отразился в уже упоминавшейся формуле Верлинде.

Сложность в анализе пространства состояний логарифмических теорий ограничивает изучение как соответствующих логарифмическим моделям неполупростых алгебр слияний примарных полей, так и обобщение на логарифмический случай формулы Верлинде. В литературе делались неоднократные попытки построения логарифмических формул Верлинде[19,27], но общая структура до сих пор остается неясной и зависит от конкретного класса моделей.

Основой применяемого в Диссертации метода при построении логарифмической версии формулы Верлинде является установленное в предыдущем разделе Диссертации отождествление представления модулярной группы на стороне конформной теории поля $\mathsf{WM}(p,1)$ с модулярным представлением на центре соответствующей квантовой группы. Соединив такое наблюдение с анализом квантового преобразования Фурье на центре квантовой группы, построено обобщение формулы Верлинде на случай логарифмических моделей $\mathsf{WM}(p,1)$.

Пятая глава посвящена исследованию логарифмических моделей с нерасширенной симметрией и опирается на работу [5]. А именно, рассмотрено однопараметрическое $(p,1)$-семейство моделей с киральной алгеброй Вирасоро $\boldsymbol{\mathcal{V}}_{p,1}$, отвечающей той подалгебре в моделях $\mathsf{WM}(p,1)$ с расширенной W-симметрией, которая порождена модами тензора энергии-импульса. Вообще, выбор той или иной киральной алгебры (Вирасоро или ее расширение) диктуется условиями на состав примарных полей (или критических экспонент в статфизичекой модели) и возможными граничными условиями, которые может допустить теория.

Основываясь на найденной в описываемой главе квантово-групповой симметрии логарифмических моделей с киральной алгеброй Вирасоро

[27] *M.A.I. Flohr and H. Knuth*, arXiv:0705.0545; *M.R. Gaberdiel and I. Runkel*, arXiv:0707.0388[hep-th].

$\mathcal{V}_{p,1}$, вычислены всевозможные правила слияний для полей из неприводимых и логарифмических представлений. Результаты квантово-группового вычисления правил слияний для вирасоровских примарных полей и их логарифмических партнеров оказались в точном соответствии с недавними результатами Пирса и Расмуссена[28], основанными на решеточном подходе к тем же логарифмическим моделям, а также с последними результатами Рида и Салера[29], основанных на детальном изучении моделей XXZ с параметром анизотропии в корне из единицы.

Ожидается, что изучаемый класс логарифмических моделей с Вирасоровской симметрией имеет непосредственное отношение к описанию фазовых переходов в полимерах и ряда других задач с самоорганизацей типа модели песочной горы.

В заключении приводится краткий список полученных результатов.

В приложениях собраны технические подробности и стандартные факты об алгебрах Хопфа.

[28] *J. Rasmussen and P. A. Pearce*, J. Phys. A **40**, 13711 (2007).
[29] *N. Read and H. Saleur*,Nucl. Phys. **B 777** (2007) 316.

Основные результаты

(1) Построены и систематически исследованы логарифмические расширения минимальных моделей $\mathsf{M}(p,p')$ двумерной конформной теории поля — двухпараметрическая серия логарифмических моделей $\mathsf{WM}(p,p')$ с триплетной киральной W-алгеброй симметрии, которая представляет собой некоторое расширение алгебры Вирасоро из минимальных моделей при помощи триплета примарных полей. Построены неприводимые представления киральной W-алгебры, а также соответствующие модули Верма, которые представляют собой необходимое промежуточное звено при построении полного пространства состояний.

(2) Предложена конструктивная схема исследования логарифмических моделей конформной теории поля на основе квантово-групповых симметрий, реализуемых в терминах должного числа скрининговых операторов. В рамках предложенного формализма вычислены правила слияний для квантовых полей из $(p,1)$-подсемейства логарифмических моделей как с расширенной W-симметрией, так и с Вирасоровской симметрией, а также произведен анализ им соответствующих логарифмических представлений.

(3) Получено обобщение формулы Верлинде на случай логарифмических моделей $\mathsf{WM}(p,1)$ на основе анализа квантового преобразования Фурье на центре соответствующей квантовой группы и установленной в Диссертации эквивалентности представлений модулярной группы на стороне конформной теории поля $\mathsf{WM}(p,1)$ и на центре квантовой группы. Полученная формула вычисляет правила слияний, исходя лишь из информации о поведении системы при глобальных диффеоморфизмах ее мировой поверхности.

Список литературы

[1] B.L. Feigin, A.M. Gainutdinov, A.M. Semikhatov, and I.Yu. Tipunin, *Logarithmic extensions of minimal models: characters and modular transformations*, Nucl. Phys. **B 757** (2006) 303-343.

[2] B.L. Feigin, A.M. Gainutdinov, A.M. Semikhatov, I.Yu. Tipunin, *Modular group representations and fusion in logarithmic conformal field theories and in the quantum group center*, Comm. Math. Phys., **265**, 47-93 (2006).

[3] А.М. Гайнутдинов, А.М. Семихатов, И.Ю. Типунин, Б.Л. Фейгин, *Соответствие Каждана–Люстига для категории представлений триплетной W-алгебры в логарифмических конформных теориях поля*, Теоретическая и Математическая Физика, т. 148, N 3, 399-428, 2006.

[4] A.M. Gainutdinov, *A generalization of the Verlinde formula in Logarithmic CFT*, Theor. Math. Phys., **159**(2): 575-586 (2009).

[5] P.V. Bushlanov, B.L. Feigin, A.M. Gainutdinov, and I.Yu. Tipunin, *Lusztig limit of quantum $sl(2)$ at root of unity and fusion of $(1,p)$ Virasoro logarithmic minimal models*, Nucl. Phys. **B 818** [FS] (2009) 179-195.