

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук

На правах рукописи

Бусаров Александр Сергеевич

**МЕТОДЫ ВОЛНОВОЙ ОПТИКИ ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ РЕНТГЕНОВСКИХ  
ИЗОБРАЖЕНИЙ НАКЛОННЫХ ОБЪЕКТОВ**

Специальность: 1.3.6 – Оптика

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель: доктор физико-математических  
наук, профессор  
Виноградов Александр Владимирович

Москва – 2023

## Оглавление

<b>Введение</b> .....	4
<i>Актуальность темы исследования</i> .....	4
<i>Современное состояние темы исследования</i> .....	10
<i>Цели и задачи</i> .....	14
<i>Научная новизна</i> .....	14
<i>Практическая значимость работы</i> .....	15
<i>Методология и методы исследования</i> .....	16
<i>Положения, выносимые на защиту</i> .....	16
<i>Степень достоверности и апробация результатов</i> .....	17
<i>Публикации</i> .....	17
<i>Личный вклад автора</i> .....	18
<b>Глава 1. Обзор литературы</b> .....	19
1.1. Вывод параболического волнового уравнения (ПВУ) из уравнения Гельмгольца и условия применения параксиального приближения .....	19
1.2. Решение ПВУ с граничным условием, заданным на вертикальной плоскости .....	21
1.3. Решение ПВУ с граничным условием, заданным на горизонтальной плоскости .....	26
1.4. Решение ПВУ с граничным условием, заданным на наклонной плоскости.	30
1.5. Двумерный случай .....	33
1.6. О расчете интеграла Френеля с помощью быстрого преобразования Фурье (БПФ).....	37
1.7. Краткий обзор литературы по рентгеновской оптике.....	42
<b>Глава 2. Вывод формул геометрической оптики методами волновой в параксиальном приближении</b> .....	48
2.1. Оптически сопряженная прямая.....	49
2.2. Вертикальный объект .....	52
2.3. Наклонный объект .....	55

<b>Глава 3. Оптическая схема с уменьшением (литография) на отражении при скользящих углах падения</b> .....	63
3.1. Двумерный случай .....	63
3.2. Трехмерный случай.....	66
3.3. Получение уменьшенных изображений .....	67
3.4. Обсуждение результатов и выводы по главе .....	72
<b>Глава 4. Оптическая схема с увеличением (микроскопия) на отражении при скользящих углах падения</b> .....	73
4.1. 2D – геометрия .....	74
4.2. 3D – геометрия .....	76
4.3. Численное моделирование .....	77
4.4. Обсуждение результатов и выводы по главе .....	82
<b>Заключение</b> .....	84
Благодарности.....	85
Список публикаций по теме диссертации .....	86
<b>Список литературы</b> .....	88
Приложение 1. Таблица коэффициента отражения для многослойных зеркал.....	99
Приложение 2а (Функция Грина для вертикального случая).....	102
Приложение 2б (Функция Грина для горизонтального случая).....	105
Приложение 3. Соотношения между функциями Грина .....	108
Приложение 4. Вывод преобразования полей в оптической системе для прямых и наклонных объектов.....	111

## Введение

В данной работе речь идет о получении изображений плоских наклонных отражающих объектов в экстремальном ультрафиолетовом и рентгеновском диапазонах (сотни эВ – единицы кэВ). Объект расположен под малым углом как к освещающему, так и отражённому пучку. В случае получения кратно увеличенных изображений речь идет, например, о задачах микроскопии, а в случае уменьшенных – о задачах литографии или микрофабрикации<sup>1</sup> с помощью излучения.

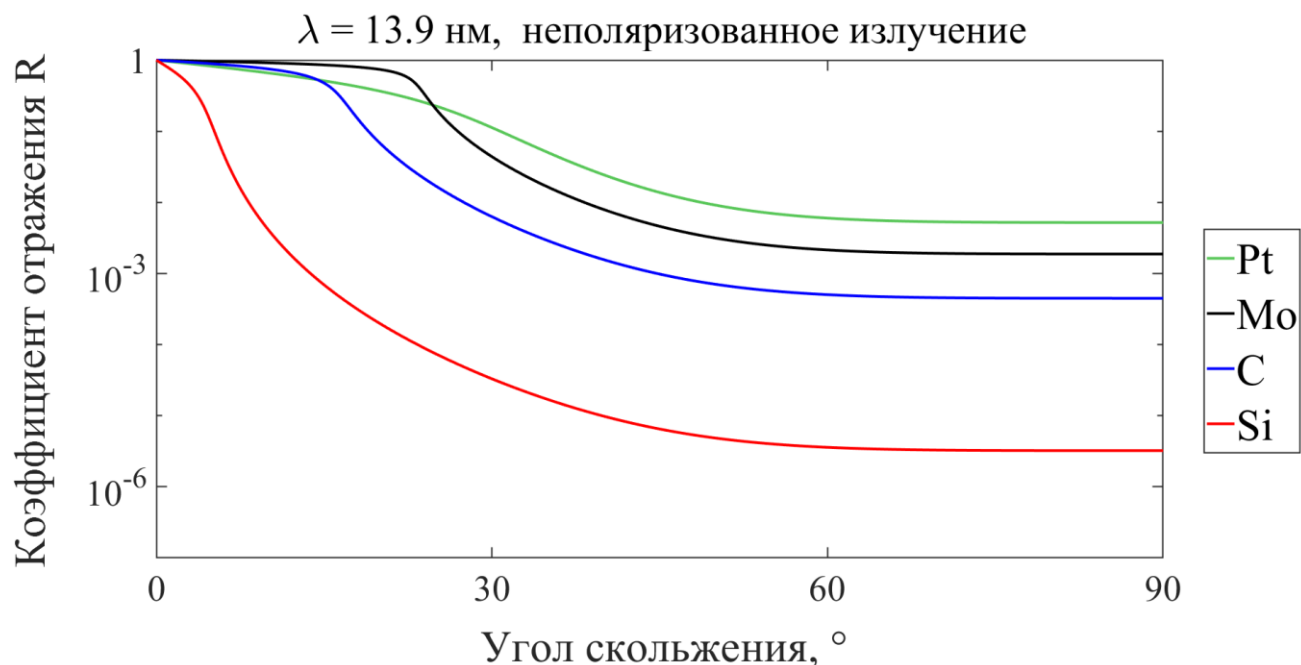
### *Актуальность темы исследования*

В настоящее время существует потребность исследования поверхностей различных материалов и процессов на наномасштабах, в том числе абляции, фазовых переходов, процессов самоорганизации, физико-химических превращений и др. Чтобы наблюдать их, нужна длина волны, которая сможет обеспечить соответствующее пространственное разрешение. С одной стороны, чем меньше длина волны, тем выше разрешение можно получить. С другой стороны, для некоторых задач важную роль играет глубина проникновения излучения в материал. Наконец, с уменьшением длины волны источники и оптика становятся менее доступны и дороже. С учётом указанных факторов во многих задачах нанопластики и нанотехнологий наблюдения ведутся с помощью излучения с энергией фотонов 0,1-10 кэВ. Поскольку исследуются поверхности и плёнки на них, то изображения естественно получать с помощью микроскопа, использующего отражение от поверхности образца. Однако, при таких длинах волн существенная доля излучения отражается лишь при малых углах скольжения  $\leq 10^\circ$ . Таким образом, появляется идея создания рентгеновского микроскопа, работающего на отражении при скользких углах (grazing incidence reflection-type X-ray microscope)

---

<sup>1</sup> patterning.

[1-4]. В данной работе рассматривается одна из возможных оптических схем такого микроскопа.



**Рисунок 1.** График коэффициента отражения  $R$  (в логарифмическом масштабе по оси  $y$ ) различных материалов в зависимости от угла скольжения  $\theta$ , для длины волны  $\lambda = 13.9$  нм. Пунктирной линией показан уровень 50%. Данные для рисунка взяты с сайта: <https://www.cxro.lbl.gov/>. Подобная картина сохраняется для всего рассматриваемого диапазона спектра<sup>2</sup>.

Другой круг задач, приводящих к изображениям наклонных объектов, связан с использованием рентгеновского излучения для печати с уменьшением – одной из важных технологий микроэлектроники и микролитографии. Во многих случаях в них используется получение уменьшенных изображений предварительно созданной маски на слое резиста, покрывающем функциональный материал. Постоянное стремление производить элементы всё меньших размеров

<sup>2</sup> При  $\theta \rightarrow 0$  коэффициент отражения для всех материалов стремится к 1 и близок к ней (например  $1 > R > 0,5$ ) при  $0 < \theta < \theta_c$ . Угол  $\theta_c$  называют критическим или углом полного внешнего отражения. Величина  $\theta_c$  быстро падает при увеличении энергии фотонов и, как видно из рисунка 1, существенно зависит от материала, возрастая с увеличением порядкового номера элемента.

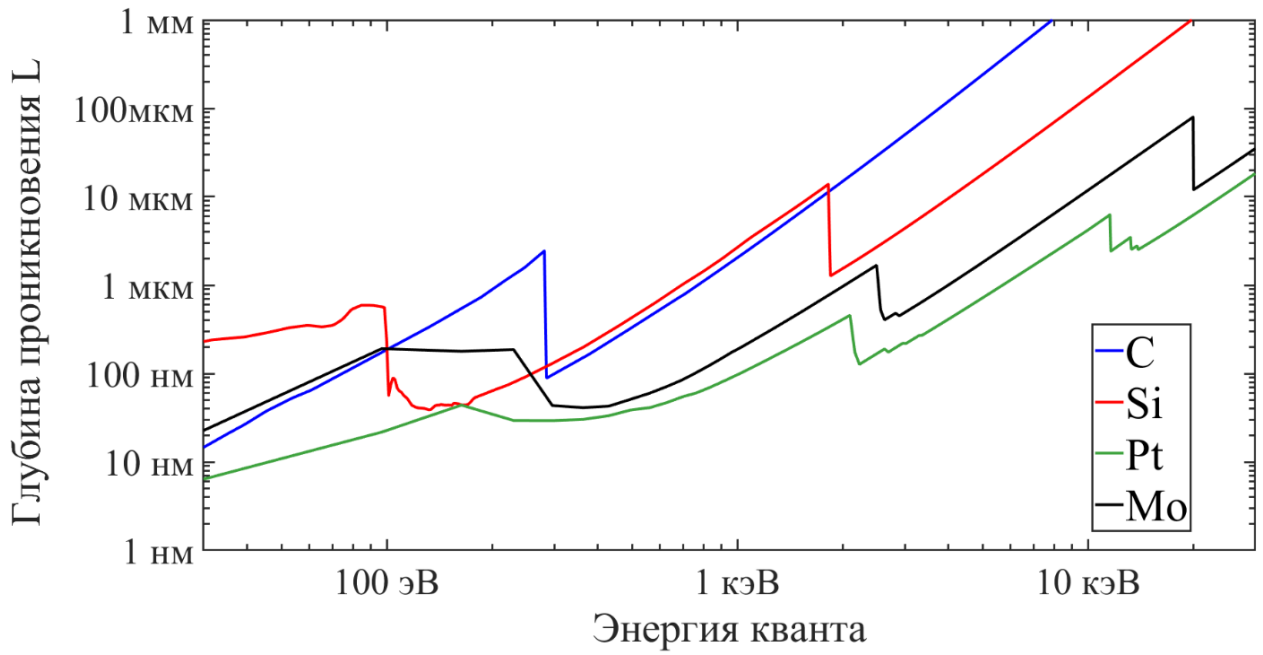
актуализирует применение в промышленной электронике все более коротких длин волн, которые сейчас достигли 13 нм [5-7], обсуждается длина волны 6.7 нм [8]. Из-за большого поглощения маски, работающие на просвет, в этом диапазоне проблематичны. В то же время известно, что изображения с хорошим разрешением получают с помощью оптики нормального падения, в которой образцы освещаются под прямым углом к поверхности. Это приводит к использованию отражающих масок с многослойным покрытием [9]. Однако, и в этом случае коэффициент отражения при нормальном падении резко падает при уменьшении длины волны [10] и возникает вопрос о скользящем падении [11].

Выбор, связанный с получением изображений именно при отражении от образца под малыми углами, обусловлен двумя факторами. Во-первых, в указанном диапазоне энергий для многих материалов глубина проникновения  $L$  (см. рисунок 2) излучения составляет порядка 10 мкм или даже меньше, а значит получать изображения с помощью просвечивающей микроскопии образцов с толщиной  $T > 30$  мкм<sup>3</sup> становится едва ли возможным. При этом изготовление более тонких образцов требует специальных усилий. Во-вторых, коэффициент отражения материалов  $R$  при нормальном падении (отражательная способность) быстро спадает в сторону высоких энергий (см. рисунок 3), оставаясь, однако, близким к 1 при достаточно малых углах скольжения (см. рисунок 1).

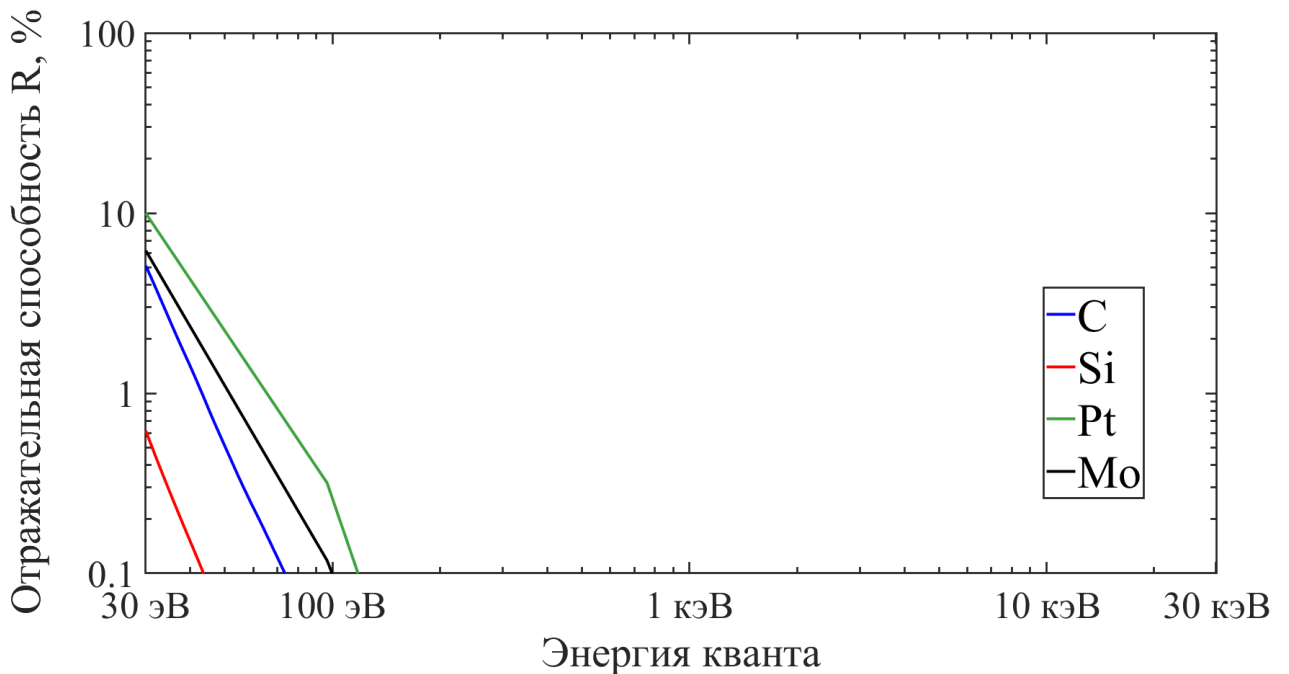
Анализ графиков на рисунках 2 и 3 показывает, что для каждого материала существует выделенный диапазон энергий, определяемый с одной стороны отражательной способностью  $R$ , а с другой – допустимой толщиной образца  $T$  и потерями в нём на поглощение. Действительно, для рассмотренных материалов и объектов толщиной  $T$  не менее 30 мкм этот диапазон лежит в области десятки эВ – десятки кэВ. В нём рентгеновская микроскопия возможна только в режиме отражения под углами скольжения  $\theta$  меньшими критического угла полного

---

<sup>3</sup> При глубине проникновения  $L$  через образец толщиной  $T=3L$  проходит лишь  $e^{-3} \approx 5\%$  падающего излучения.



**Рисунок 2.** Глубина проникновения  $L$  в зависимости от энергии кванта для различных материалов. Данные для рисунка взяты с сайта: <https://www.cxro.lbl.gov/>.



**Рисунок 3.** Отражательная способность  $R$  в зависимости от энергии кванта. Данные для рисунка взяты с сайта: <https://www.cxro.lbl.gov/>.

внешнего отражения  $\theta_c$ <sup>4</sup>. Верхняя граница этого диапазона энергий определяется пропусканием (толщиной и длиной пробега фотона) образца, а нижняя – отражательной способностью материала. Сказанное иллюстрируется рисунком 4, объединяющим рисунки 2 и 3.

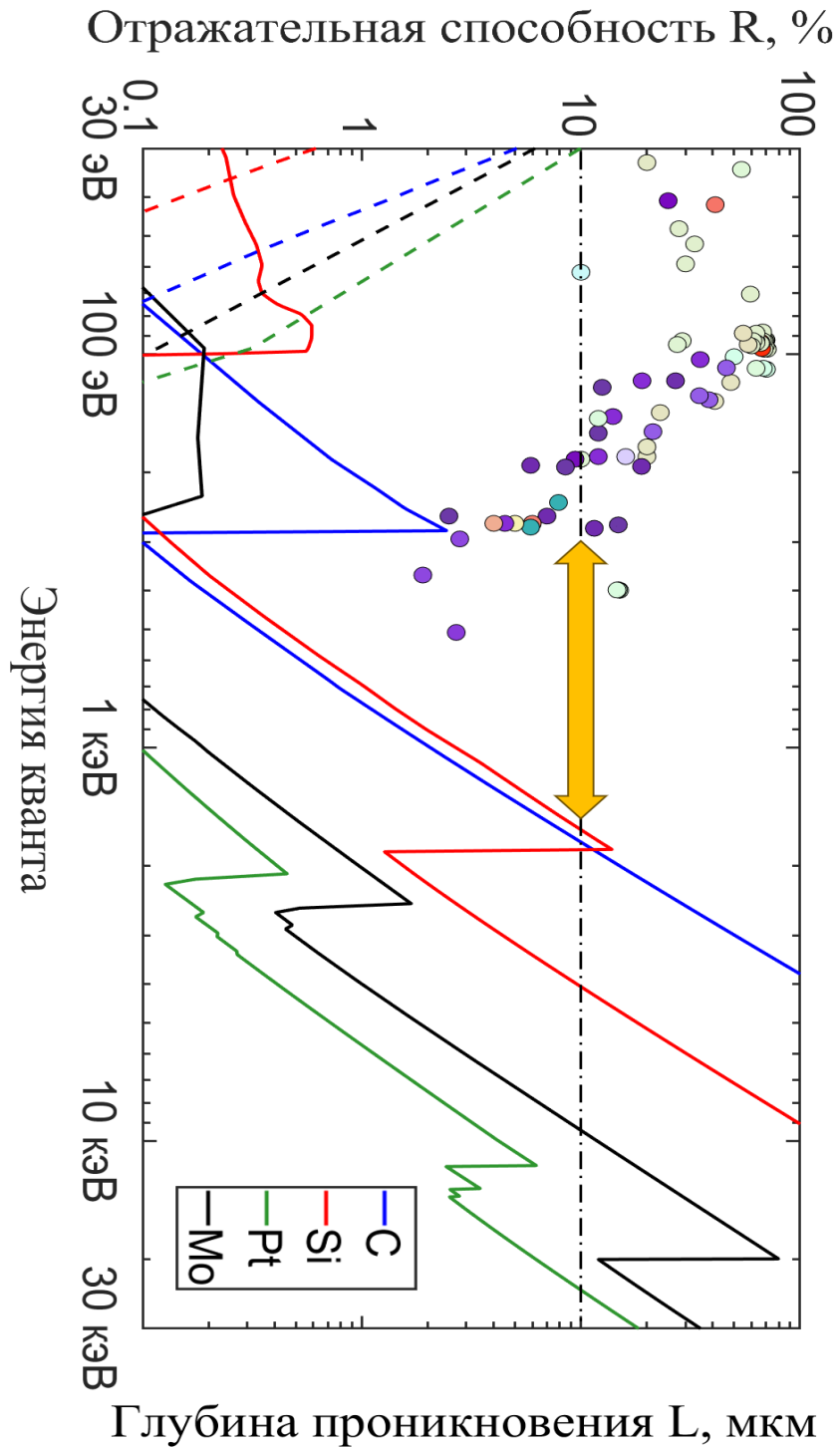
Таким образом, если говорить о микроскопии, в области энергий, где исследования при нормальном падении (на отражение и пропускание) не доступны или малоинформативны, там возможна малоугловая отражательная рентгеновская микроскопия. Соответствующие области энергий указаны в таблице 1.

**Таблица 1.** Типы рентгеновской микроскопии в зависимости от диапазона энергии. 1 – Отражательная ( $\theta \gg \theta_c$ ), 2 – малоугловая ( $\theta < \theta_c$ ) отражательная, 3 - Просвечивающая ( $T > 30$  мкм), малоугловая ( $\theta < \theta_c$ ) отражательная (для поверхности).  $T=3L$  - толщина образца,  $L$  - длина пробега фотона в материале.

РЕНТГЕНОВСКАЯ МИКРОСКОПИЯ			
в мягком и жёстком диапазонах: 20эВ<E<30кэВ			
	Отражательная ( $\theta \gg \theta_c$ )	Малоугловая ( $\theta < \theta_c$ ) отражательная	Просвечивающая ( $T > 30\mu$ ), Малоугловая ( $\theta < \theta_c$ ) отражательная (для поверхности)
C	E < 25 эВ	25 эВ < E < 2 кэВ	E > 2 кэВ
Si	E < 20 эВ	20 эВ < E < 4 кэВ	E > 4 кэВ
Pt	E < 30 эВ	30 эВ < E < 30 кэВ	E > 30 кэВ
Mo	E < 30 эВ	30 эВ < E < 10 кэВ	E > 10 кэВ

<sup>4</sup> Угол полного внешнего отражения по определению [4]  $\theta_c = \sqrt{2\delta}$ , где  $\delta$  – безразмерный коэффициент, входящий в выражение для комплексного показателя преломления  $n = 1 - \delta + i\beta$ .





**Рисунок 4.** График глубины проникновения  $L$  и коэффициента отражения  $R$  в зависимости от энергии кванта. Кружками отмечены коэффициенты отражения известных многослойных зеркал для соответствующих энергий.<sup>5</sup> Данные для рисунка взяты с сайта: <https://www.cxro.lbl.gov/>.

<sup>5</sup> Данные приведены в таблице в Приложении 1.

Также можно рассмотреть вариант получения изображения образца, расположенного на специально подобранном для данной длины волны многослойном зеркале. Достигнутые к настоящему времени коэффициенты отражения многослойных зеркал при нормальном падении показаны кружками на рисунке 4. В этом случае коэффициент отражения  $R$  может быть больше 10% вплоть до энергии кванта  $\approx 300$  эВ (см. рисунок 4). Однако, и в этом случае, как видно из рисунка 4, существует диапазон энергии (от нескольких сотен до нескольких тысяч эВ), в котором рентгеновская микроскопия возможна только в режиме отражения под углами скольжения  $\theta$  меньшими критического  $\theta_c$ .

Таким образом, отражательная и поглощающая способность веществ, а также достижение в последние годы многослойной оптикой фундаментальных ограничений<sup>6</sup> определяют область спектра (указана на рисунке 4), где рентгеновские исследования образцов толщиной свыше 30 мкм и их поверхностей возможны только при наклонном падении зондирующего излучения. С учётом научного и практического значения рентгеновских методов это обстоятельство и определило актуальность темы диссертации, сформулированной в названии.

### *Современное состояние темы исследования*

Исследования, связанные с получением рентгеновских изображений под наклонными и скользящими углами, начались на рубеже двухтысячных годов.

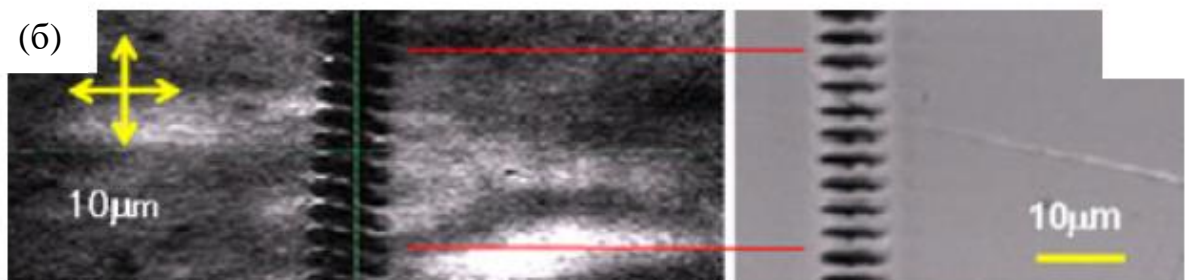
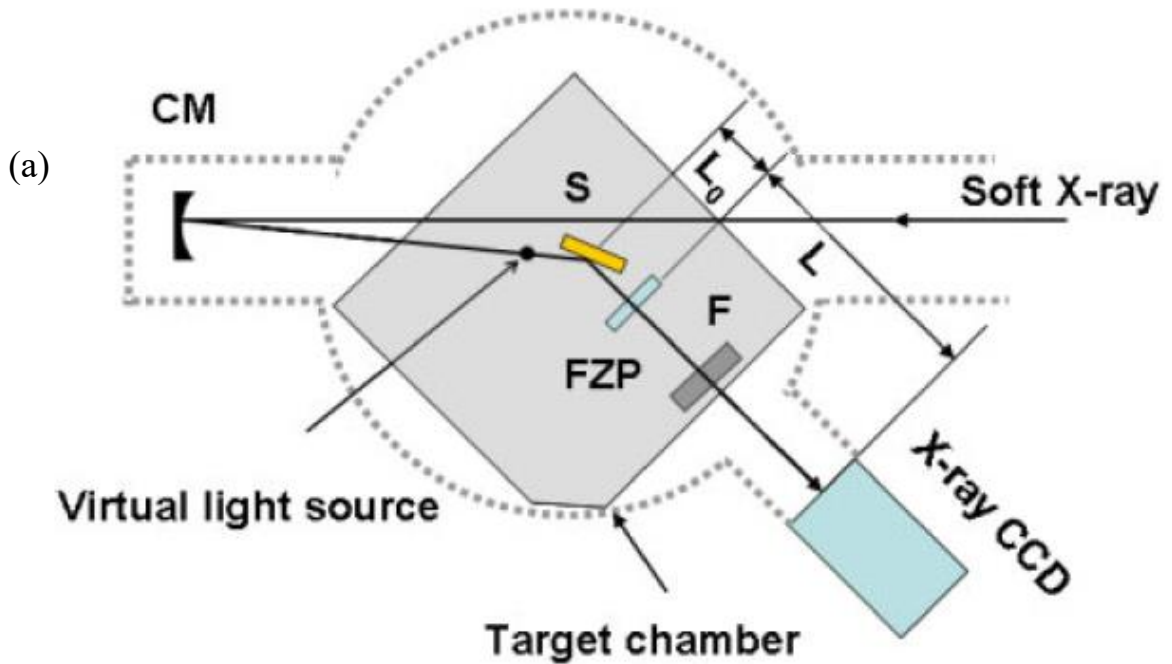
Рассмотрим примеры применения изображающих методов исследования материалов и поверхностных структур под малыми углами скольжения.

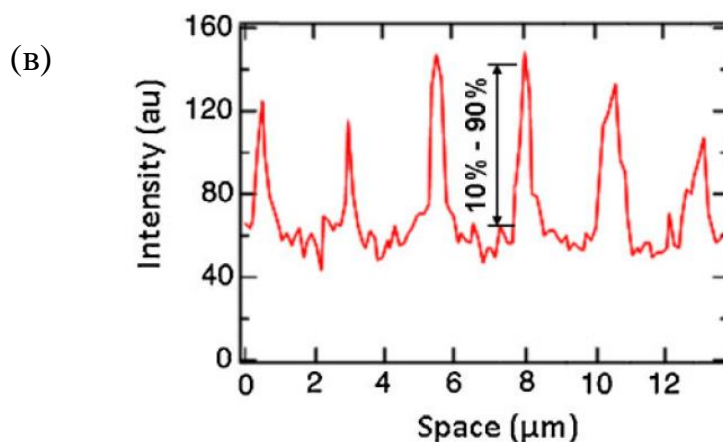
Схемы двух показательных экспериментов представлены на рисунках 5 (а) и 6.

---

<sup>6</sup> Связанных с толщиной слоёв и неидеальностью границ раздела между ними.

В работе [2] использовалась следующая установка (см. рисунок 5 (а)), которая рассматривалась как рентгеновский микроскоп, работающий на отражении при скользящих углах (grazing incidence reflection-type X-ray microscope). Мягкое рентгеновское излучение с длиной волны 13,9 нм отражается от вогнутого зеркала (CM) и освещает образец (S), после чего проходит через зонную пластинку Френеля (FZP), фильтр (F) и падает на детектор (X-ray CCD). Источником излучения служил плазменный рентгеновский лазер на основе серебра [12]. Образцом в данном эксперименте была платиновая пластинка, на поверхности которой был нанесен рельефный рисунок в виде равноотстоящих полос (см. рис. 5 (б)).





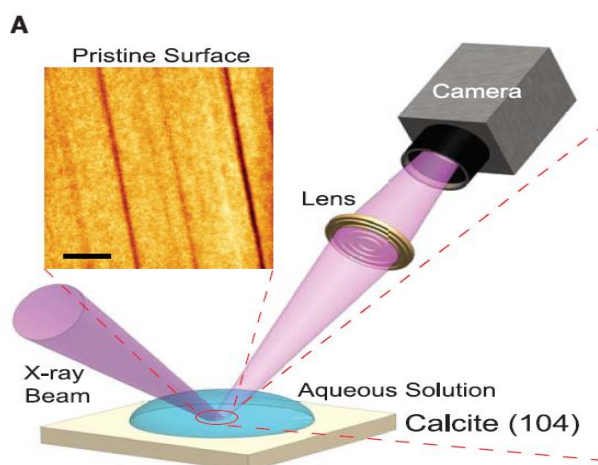
**Рисунок 5.** (а) Оптическая схема рентгеновского микроскопа, работающего на скользящем отражении от образца. (б) Изображения периодического образца - платиновой пленки, нанесенной с помощью сфокусированного ионного пучка на кремниевую подложку, затем на данной пленке с помощью ножа сделали засечки. Слева изображение получено с помощью рентгеновского микроскопа, схема которого представлена выше на рисунке 5 а), справа – с помощью сканирующего электронного микроскопа. (в) Пропись интенсивности вдоль зеленой прямой на рисунке 5б). Изображения взяты из работы [2].

На рисунке 5 (б) слева – изображение, полученное с помощью данного рентгеновского микроскопа, справа – с помощью сканирующего электронного микроскопа.

На рисунке 5 (в) представлена интенсивность излучения, соответствующая вертикальной прямой зеленого цвета на рисунок 5 б). С помощью этого графика определялось разрешение полученного изображения методом 10% - 90% [13].

Максимальный коэффициент увеличения этой установки составил 79 раз. И разрешением по одной оси – 280 нм, по другой – 730. Угол скольжения к поверхности образца составлял  $\theta = 22,5^\circ$ .

В другой работе [3] изучались процессы, индуцированные синхротронным излучением на границе вода-кальцит (см. рисунок б).



**Рисунок 6.** Оптическая схема рентгеновского отражательного микроскопа, работающего при скользящих углах падения. Изображение заимствовано из работы [3].

Пространственное разрешение этого микроскопа составляет до 100 нм.

Энергия излучения в этом эксперименте составляла 10 кЭв, угол скольжения  $\theta = 11,8^\circ$ .

В обоих экспериментах (рисунки 5 и 6) авторы вынуждены обратиться к наклонному и скользящему падению из-за низкой отражательной способности образцов. Однако, последовательная теория для моделирования результатов измерений в подобных случаях отсутствует.

В книге известного специалиста по рентгеновской микроскопии К. Якобсена также ставится вопрос получения изображений на отражении под скользящими углами от поверхности образца [4]. Теоретическим вопросам посвящены работы [14-18]. Вероятно, впервые дифракционный интеграл специального вида в оптических системах с наклонными поверхностями был применён в работе И.А. Щёлокова и Ю.А. Басова [14]. В работе [15] используются методы геометрической оптики без учёта дифракции и фазовых эффектов. В работах [16,17] рассматривается решение скалярного уравнения Гельмгольца с наклонным граничным условием, однако, в отсутствие оптических элементов или систем. Для того, чтобы включить их в рассмотрение, был использован более простой (и

естественно приближённый) дифракционный интеграл. Он получен в совместной работе учёных ИЗМИРАН и ФИАН – Артюковым И.А., Виноградовым А.В. и Поповым Н.Л. в 2009 году [18], как решение параболического волнового уравнения с наклонным граничным условием. Этот дифракционный интеграл и послужил отправной точкой для моделирования оптических систем с наклонными объектами в данной работе, в дальнейшем он будет упоминаться как АВП-интеграл (названный по первым буквам фамилий указанных авторов).

### *Цели и задачи*

Целью данной диссертационной работы является разработка теории оптических преобразований при наклонном освещении объектов и разработка методов моделирования изображающих оптических систем в такой геометрии.

Для достижения этой цели в рамках диссертационной работы решались следующие задачи:

1. Получение интегральных преобразований амплитуды поля при прохождении излучения в изображающих оптических системах, содержащих наклонные объекты.
2. Использование полученных преобразований для моделирования оптических схем в геометриях увеличения и уменьшения для задач микроскопии и литографии мягкого рентгеновского диапазона.
3. Определение в упомянутых системах разрешения и поля зрения для разных числовых апертур.

### *Научная новизна*

1. В параболическом приближении получены формулы оптического преобразования для тонкой линзы, связывающего поля в плоскостях объекта и детектора, при наклонном положении объекта и детектора.

2. С помощью этих преобразований разработан метод анализа и моделирования волновых процессов в оптических схемах рентгеновской микроскопии и литографии при наклонном и скользящем освещении объекта, что позволяет выйти за рабочий диапазон применения многослойной рентгеновской оптики нормального падения.

### *Практическая значимость работы*

Предложенные и использованные в работе методы анализа эффективности и моделирования оптических схем могут найти применение при разработке схем печати и получения изображений в коротковолновом диапазоне спектра: сотни – тысячи электронвольт, где целесообразно или необходимо наклонное освещение объектов и литографических масок.

Благодаря свойствам параболического уравнения (простота, сохранение энергии, применимость к задачам взаимодействия рентгеновского излучения с веществом и пр.), а также удобству его численной реализации, предложенный в диссертации подход допускает обобщения на различные практические задачи рентгеновской и ультрафиолетовой оптики. В частности, его можно использовать для моделирования многокомпонентных рентгеновских систем с дифракционными и преломляющими оптическими элементами.

Результаты расчётов дифракции на объектах, расположенных на наклонной плоскости, также могут быть использованы в работах по рентгеновским линзовым и безлинзовым способам контроля сверхгладких поверхностей, микро- и наноструктур, а также интегральных схем.

### *Методология и методы исследования*

Диссертационная работа выполнена в квазиоптическом приближении с использованием параболического волнового уравнения (ПВУ). Впервые ПВУ было опубликовано в работе М. А. Леонтовича и В. А. Фока «Решение задачи о распространении электромагнитных волн вдоль поверхности земли по методу параболического уравнения» в ЖЭТФ в 1946 г. [19,20]. ПВУ можно вывести из скалярного уравнения Гельмгольца, осуществляя параболическое приближение.

Решением ПВУ с граничным условием в плоскости перпендикулярной вектору  $\vec{k}$  распространения излучения является хорошо известный интеграл Френеля. Этот дифракционный интеграл и его обобщение на случай ПВУ с наклонным относительно вектора  $\vec{k}$  граничным условием, – АВП-интеграл [18] составляют основу для расчетов в данной работе.

### *Положения, выносимые на защиту*

1. Применение дифракционного АВП - интеграла расширяет использование теории оптических преобразований на случай наклонного расположения объекта и детектора для диапазонов волн, ранее не используемых в практике рентгеновской микроскопии и литографии.
2. Волновые эффекты, связанные с наклонным положением объекта при формировании его изображения в сопряженной плоскости, представляются в виде поправки к выражению, соответствующему геометрической оптике.
3. Применение параболического уравнения с граничным условием, заданным на наклонной плоскости, является эффективным методом анализа работоспособности, моделирования и исследования характеристик систем отражательной рентгеновской микроскопии в диапазоне 0.1 - 50 нм и литографии при больших углах наклона к оптической оси.



### *Степень достоверности и апробация результатов*

Высокая степень достоверности приведенных в работе результатов подтверждается использованием различных аналитических и численных методов, представлением и обсуждением результатов на многочисленных научных конференциях и семинарах.

Основные результаты диссертации докладывались на ежегодных Международных конференциях по фотонике и информационной оптике (МИФИ, Москва, 28 - 30 января 2015, 3 - 5 февраля 2016, 1 - 3 февраля 2017, 24 - 26 января 2018), Седьмом международном научном семинаре и Пятой международной молодежной научной школе-семинаре "Современные методы анализа дифракционных данных и актуальные проблемы рентгеновской оптики", (Великий Новгород, 24-29 августа 2015), Международной конференции по рентгеновским лазерам (ICXRL 2020, Швейцария, 8 - 10 декабря 2020, онлайн), XXVII Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов», МГУ, 10 - 27 ноября 2020, на объединенной конференции «Электроннолучевые технологии и рентгеновская оптика в микроэлектронике» - КЭЛТ-2021 (Черноголовка, 13-17 сентября 2021), а также на научных семинарах сектора теоретической радиофизики ОКРФ Физического института РАН.

### *Публикации*

Основные результаты работы изложены в 6 публикациях (в том числе 3-х статьях) в рецензируемых научных изданиях, входящих в базу данных Web of Science и в 6 тезисов докладов в сборниках трудов конференций, ссылки на которые приведены в разделе «Список публикаций по теме диссертации».

*Личный вклад автора*

Все изложенные в диссертации результаты получены лично автором, либо при его непосредственном участии.

## Глава 1. Обзор литературы

### 1.1. Вывод параболического волнового уравнения (ПВУ) из уравнения Гельмгольца и условия применения параксиального приближения

Рассмотрим волновое уравнение для напряженности электромагнитного поля  $\vec{\mathcal{E}}$  в пустом пространстве:

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \vec{\mathcal{E}} = 0, \quad (1)$$

которое следует из уравнений Максвелла [21-23]. В том случае, когда речь идет о монохроматическом излучении, в результате замены:

$$\vec{\mathcal{E}}(x, y, z, t) = \vec{E}(x, y, z) e^{-i\omega t}, \quad (2)$$

получается уравнение Гельмгольца [24]:

$$(\Delta + k^2) \vec{E} = 0, \quad (3)$$

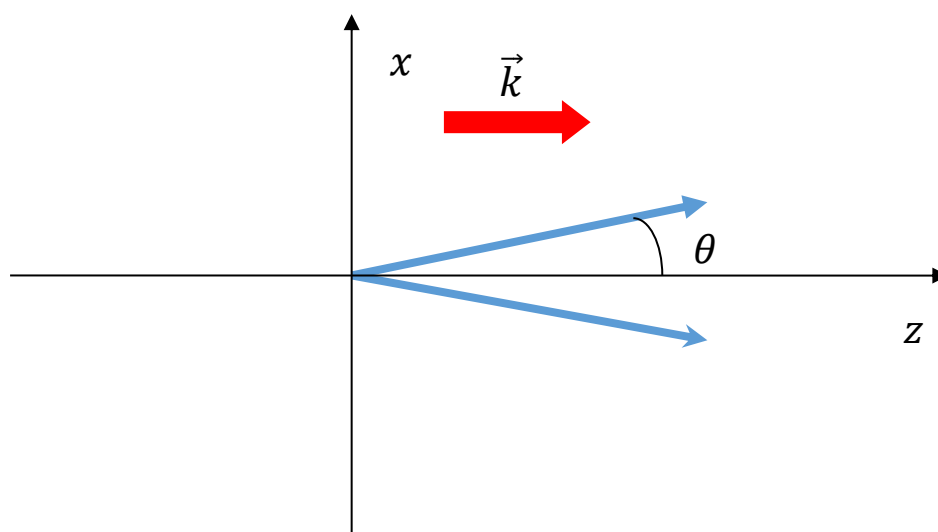
где  $\vec{E} = \vec{E}(x, y, z)$  – амплитуда напряженности электромагнитного поля,  $k$  – волновое число,  $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$ . Если имеется выделенное направление, вдоль которого напряженность поля сильно больше, чем в перпендикулярных к нему направлениях, то применимо скалярное приближение:

$$(\Delta + k^2) E = 0, \quad (4)$$

где  $E \approx |\vec{E}|$  – компонента напряженности электромагнитного поля, вдоль этого направления<sup>7</sup>. Например, скалярное приближение выполнено в слабо расходящихся пучках лазерного излучения (см. рисунок 7).

---

<sup>7</sup> Также скалярное уравнение (4) справедливо, например, для компонент вектора  $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$ .



**Рисунок 7.** Схематичное изображение электромагнитного поля излучения, распространяющегося вдоль оси  $z$  с волновым числом  $|\vec{k}|$  и малым углом отклонения  $\theta$  от оси  $z$ .

Выведем теперь ПВУ и условие его применимости из ур-я (4), для этого представим  $E$  в виде:

$$E(x, y, z) = u(x, y, z)e^{ikz}, \quad (5)$$

где  $u = u(x, y, z)$  – медленное поле излучения.

Запишем лапласиан  $\Delta$  в виде суммы продольной  $\partial_z^2$  и поперечной  $\Delta_{\perp}$  компоненты:

$$\Delta = \Delta_{\perp} + \partial_z^2, \quad \Delta_{\perp} = \partial_x^2 + \partial_y^2 \quad (6)$$

Поскольку справедливы следующие равенства:

$$\Delta_{\perp}[ue^{ikz}] = e^{ikz}\Delta_{\perp}u, \quad (7)$$

$$\partial_z^2[ue^{ikz}] = e^{ikz}[\partial_z^2 + 2ik\partial_z - k^2]u, \quad (8)$$

то подставляя (5) в (4) и учитывая (6) – (8) получим:

$$(\Delta + k^2)E = (\Delta_{\perp} + \partial_z^2 + k^2)[ue^{ikz}] = e^{ikz}(\Delta_{\perp} + \partial_z^2 + 2ik\partial_z)u = 0. \quad (9)$$

Таким образом, уравнение (4) с учетом замены (5) эквивалентно следующему:

$$(\Delta_{\perp} + \partial_z^2 + 2ik\partial_z)u = 0 \quad (10)$$

Если пренебречь в (10) членом  $\partial_z^2 u$ , т.е. считать, что выполняется условие параксиального приближения:

$$|\partial_z^2 u| \ll 2k|\partial_z u|, \quad (11)$$

то получится параболическое волновое уравнение (ПВУ) Фока-Леонтовича [19,20,25,26]:

$$[\Delta_{\perp} + 2ik\partial_z]u = 0 \quad (12)$$

Уравнение (12) при  $\Delta_{\perp} = \partial_x^2 + \partial_y^2$  будем называть 3-х мерным ПВУ, а при  $\Delta_{\perp} = \partial_x^2$  – двумерным.

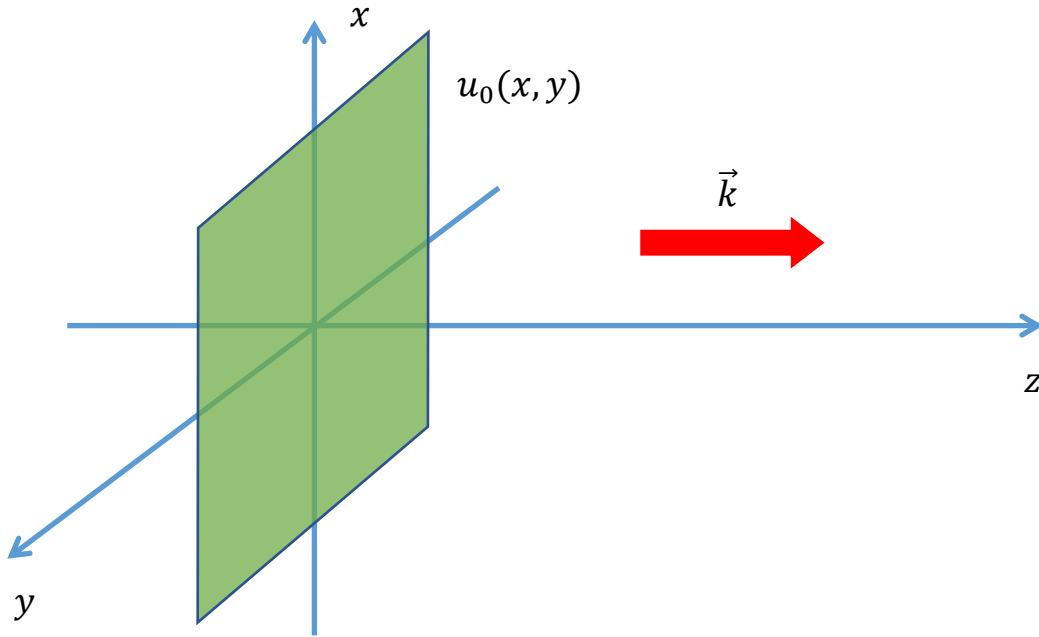
Дальнейшие вычисления будут проводиться в рамках параболического приближения с помощью уравнения (12).

## **1.2. Решение ПВУ с граничным условием, заданным на вертикальной плоскости**

Рассмотрим двумерную задачу в параксиальном приближении: излучение распространяется вдоль оси  $z$ , граничное условие  $u_0(x, y)$  задано в плоскости  $xu$  (см. рисунок 8).

Эта задача описывается следующим дифференциальным уравнением с граничным условием:

$$\begin{cases} (\partial_x^2 + \partial_y^2 + 2ik\partial_z)u(x, y, z) = 0, & z > 0 \\ u(x, y, z)|_{z=0} = u_0(x, y) \end{cases} \quad (13)$$



**Рисунок 8.** Случай ортогонального расположения граничного условия к направлению распространения поля  $\vec{k}$ .

Решим уравнение (13), для этого применим двумерное преобразование Фурье:

$$f(x, y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}\{f\}(p, q) e^{ipx+iqy} dpdq \quad (14)$$

$$\mathcal{F}\{f\}(p, q) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-ipx-iqy} dx dy \quad (15)$$

В результате применения преобразования Фурье по координатам  $x$  и  $y$  к (13) получится следующее ур-е:

$$\begin{cases} (-p^2 - q^2 + 2ik\partial_z)\mathcal{F}\{u\}(p, q, z) = 0, & z > 0 \\ \mathcal{F}\{u\}(p, q, z)|_{z=0} = \mathcal{F}\{u_0\}(p, q) \end{cases} \quad (16)$$

Решением ур-я (16) является:

$$\mathcal{F}\{u\}(p, q, z) = \mathcal{F}\{u_0\}(p, q)e^{-i\frac{p^2+q^2}{2k}z} \quad (17)$$

Чтобы найти  $u(x, y, z)$  достаточно применить к (17) обратное преобразование Фурье (14):

$$u(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}\{u_0\}(p, q)e^{ipx+iqy-i\frac{p^2+q^2}{2k}z} dpdq \quad (18)$$

После подстановки

$$\mathcal{F}\{u_0\}(p, q) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} u_0(x', y')e^{-ipx'-iqy'} dx' dy' \quad (19)$$

в (18), перегруппировки множителей и изменения порядка интегрирования выражение (18) можно привести к виду:

$$u(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{+\infty} u_0(x', y')G_B^{(2)}(x - x', z)G_B^{(2)}(y - y', z)dx' dy', \quad (20)$$

где

$$G_B^{(2)}(v, w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{p^2}{2ik}w+ipv} dp \quad (21)$$

В Приложении 2а) приведено вычисление интеграла (21):

$$G_B^{(2)}(v, w) = \sqrt{\frac{k}{2\pi i w}} e^{\frac{ikv^2}{2w}} \quad (22)$$

В итоге подставляя (22) в (20) окончательно получим:

$$u(x, y, z) = \frac{k}{2\pi i z} \iint_{-\infty}^{+\infty} u_0(x', y') e^{\frac{ik(x-x')^2 + (y-y')^2}{2z}} dx' dy' \quad (23)$$

Последний интеграл называется интегралом Френеля, он позволяет найти поле  $u(x, y, z)$  в полупространстве  $z > 0$  если при  $z = 0$  задано граничное условие для поля  $u_0(x', y')$ .

Амплитуда напряженности поля  $E$  в этом случае согласно (5) и (18) равна:

$$E_1(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}\{E_0\}(p, q) e^{ipx+iqy+ikz-i\frac{p^2+q^2}{2k}z} dpdq, \quad (24)$$

где  $E_0 = u_0$  (так как согласно (5) при  $z = 0$   $E = u$ ).

Для того чтобы получить условие применимости интеграла Френеля (23), полученного как решение параболического ур-я (10), являющегося в свою очередь параксиальным приближением скалярного уравнения Гельмгольца (4), можно сравнить (23) с решением ур-я (4).

Решением скалярного ур-я Гельмгольца (4) с граничным условием на вертикальной плоскости

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)E(x, y, z) = 0, & z > 0 \\ E(x, y, z)|_{z=0} = E_0(x, y) \end{cases} \quad (25)$$

является:

$$E_2(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}\{E_0\}(p, q) e^{ipx+iqy+i\sqrt{k^2-p^2-q^2}z} dpdq, \quad (26)$$

(см., например, [24]).



Сравним теперь выражения (24) и (26). Выражение (26) является монохроматическим волновым пакетом, т.е. объединением плоских волн вида  $e^{i\vec{k}\vec{r}}$ , где  $\vec{k} = (p, q, \sqrt{k^2 - p^2 - q^2})$ ,  $|\vec{k}| = k$ ,  $\vec{r} = (x, y, z)$ . Поскольку  $k \cos \theta = \vec{k}\vec{e}_z = \sqrt{k^2 - p^2 - q^2}$ , где  $\theta$  – угол между вектором  $\vec{k}$  и осью  $z$  (см. рисунок 7), то тогда:

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{k}. \quad (27)$$

Так как в рассматриваемой задаче излучение распространяется вдоль оси  $z$  с небольшими отклонениями, то  $\theta \ll 1$ ,  $\sin \theta \ll 1$  и, с учетом (27)  $\frac{p^2 + q^2}{k^2} \ll 1$ , тогда корень, стоящий в экспоненте формулы (26), можно разложить следующим образом:

$$\sqrt{k^2 - p^2 - q^2} = k - \frac{p^2 + q^2}{2k} - \frac{1}{8} \frac{(p^2 + q^2)^2}{k^3} + \dots \quad (28)$$

Выражения (24) и (26) отличаются лишь показателями экспонент, условием того, что данные показатели отличаются на величину, не сильно влияющую на подынтегральные выражения с учетом (16), является:

$$\frac{1}{8} \frac{(p^2 + q^2)^2}{k^3} z \ll 1 \quad (29)$$

Используя (27), это условие можно переписать в виде:

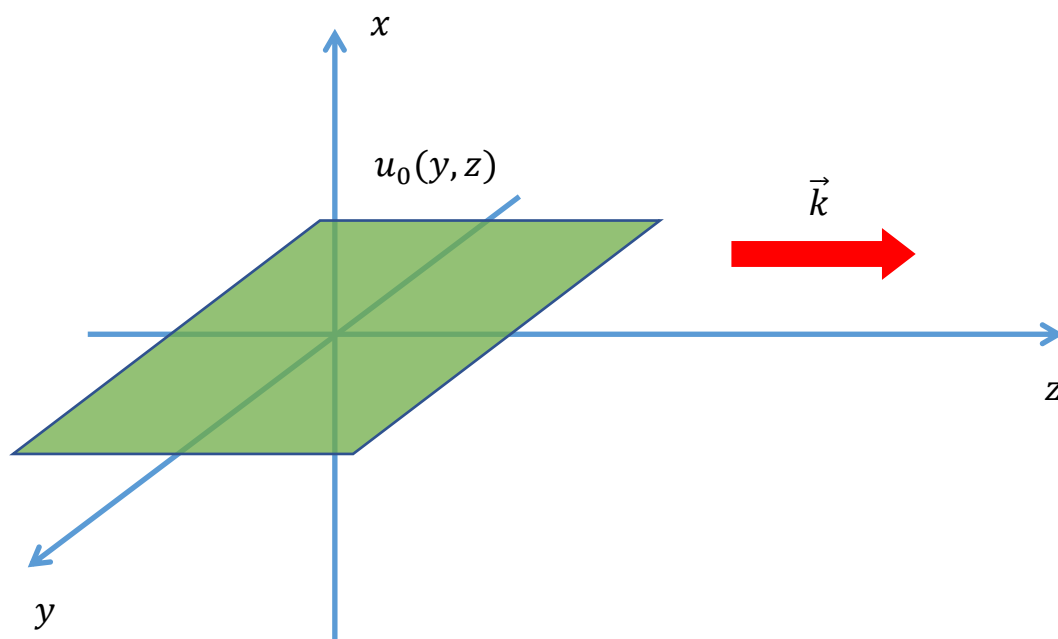
$$z_{max} \ll \frac{4}{\pi} \frac{\lambda}{\sin^4 \theta}, \quad (30)$$

где  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$  – длина волны,  $z_{max}$  – максимальное расстояние вдоль оси  $z$ , при котором применима формула Френеля (23).

По формуле (30) зная угол расходимости излучения  $\theta$  и длину волны  $\lambda$ , можно оценить максимальное расстояние  $z_{max}$  области применимости параболического приближения.

### 1.3. Решение ПВУ с граничным условием, заданным на горизонтальной плоскости

Рассмотрим теперь такую двумерную задачу, тоже в параксиальном приближении: излучение распространяется вдоль оси  $z$ , граничное условие  $u_0(y, z)$  в плоскости  $yz$  (рисунок 9).



**Рисунок 9.** Случай параллельного расположения граничного условия к направлению распространения поля  $\vec{k}$ .

Эта задача описывается следующим дифференциальным уравнением с граничным условием:

$$\begin{cases} (\partial_x^2 + \partial_y^2 + 2ik\partial_z)u(x, y, z) = 0, & x > 0 \\ u(x, y, z)|_{x=0} = u_0(y, z) \end{cases} \quad (31)$$

Решим уравнение (31), для этого применим преобразование Фурье по координатам  $x$  и  $y$ :

$$u(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{+\infty} U(x, p, q) e^{ipy+iqz} dpdq \quad (32)$$

$$U(x, p, q) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} u(x, y, z) e^{-ipy-iqz} dydz \quad (33)$$

Если обозначить  $U(x = 0, p, q) = U_0(p, q)$ , тогда при  $z = 0$  выражение (33) примет вид:

$$U_0(p, q) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} u_0(y, z) e^{-ipy-iqz} dydz \quad (34)$$

В результате применения преобразования Фурье к (31) получится следующее уравнение:

$$\begin{cases} (\partial_x^2 - p^2 - 2qk)U(x, p, q) = 0, & x > 0 \\ U(x, p, q)|_{x=0} = U_0(p, q) \end{cases} \quad (35)$$

Общим решением дифференциального уравнения (35) является:

$$U(x, p, q) = C_1(p, q)e^{\sqrt{p^2+2qk}x} + C_2(p, q)e^{-\sqrt{p^2+2qk}x} \quad (36)$$

Рассмотрим два случая  $-p^2 + 2qk > 0$  и  $p^2 + 2qk < 0$ .

1)  $p^2 + 2qk > 0$ . Если  $C_1(p, q) \neq 0$ , то как видно из (36)  $U(x, p, q) \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow \infty$ , чего не должно быть по физическим причинам в рассматриваемой задаче, поэтому  $C_1(p, q) = 0$  при  $p^2 + 2qk > 0$ .

2)  $p^2 + 2qk < 0$ . В этом случае  $U(x, p, q)$  можно переписать таким образом:

$$U(x, p) = C_1(p)e^{i\sqrt{-(p^2+2qk)}x} + C_2(p)e^{-i\sqrt{-(p^2+2qk)}x}, \quad (37)$$

где первое слагаемое отвечает волне, движущейся по направлению вдоль оси  $x$ , а второе – волне, идущей в противоположном направлении<sup>8</sup>. Поскольку в данной задаче есть только те волны, которые движутся вдоль положительного направления оси  $x$ , то значит  $C_2(p, q) = 0$  при  $p^2 + 2qk < 0$ .

Таким образом:

$$U(x, p, q) = \begin{cases} C_2(p)e^{-\sqrt{p^2+2qk}x}, & p^2 + 2qk > 0 \\ C_1(p)e^{i\sqrt{-(p^2+2qk)}x}, & p^2 + 2qk < 0 \end{cases} \quad (38)$$

Что можно переписать более кратко:

$$U(x, p, q) = C(p, q)e^{i\sqrt{-p^2-2qk}x}, \quad (39)$$

где используется положительная ветвь комплексного корня. Учитывая граничное условие (35):

$$U(x, p, q) = U_0(p, q)e^{i\sqrt{-p^2-2qk}x} \quad (40)$$

Применим к (40) обратное преобразование Фурье (32) и подставим  $U_0(p, q)$  в виде (34), тогда:

$$u(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} u_0(y', z') e^{-ipy' - iqz'} dy' dz' \right\} e^{i\sqrt{-p^2-2qk}x + ipy + iqz} dp dq \quad (41)$$

После перегруппировки множителей и изменения порядка интегрирования выражение (41) можно привести к виду:

$$u(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{+\infty} u_0(y', z') G_r^{(3)}(x, y - y', z - z') dy' dz', \quad \text{где} \quad (42)$$

---

<sup>8</sup> Поскольку при вычислении напряженности электромагнитного поля  $\vec{E}$  в итоге происходит умножения на  $e^{-i\omega t}$  (см. (2) и (5)). Плоская волна  $e^{i(gx - \omega t)}$  движется вдоль оси  $x$  при  $g > 0$  и в обратную сторону если  $g < 0$ .

$$G_{\Gamma}^{(3)}(x, y - y', z - z') = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{ip(y-y') + iq(z-z') + i\sqrt{-p^2 - 2qk}x} dpdq \quad (43)$$

В последнем выражении сделаем замену:

$$q = r - \frac{p^2}{2k} \quad (44)$$

и перейдем от интегрирования по  $p$  и  $q$  к интегрированию по  $p$  и  $r$ :

$$G_{\Gamma}^{(3)} = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{ip(y-y') + i\left(r - \frac{p^2}{2k}\right)(z-z') + i\sqrt{-2kr}x} dpdr. \quad (45)$$

Теперь можно разделить переменные интегрирования:

$$G_{\Gamma}^{(3)}(x, y - y', z - z') = G_{\Gamma}^{(2)}(x, z - z') \cdot G_{\text{B}}^{(2)}(y - y', z - z'), \quad (46)$$

где

$$G_{\text{B}}^{(2)}(v, w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{irw + i\sqrt{-2kr}v} dr, \quad (47)$$

а выражение для  $G_{\text{B}}^{(2)}(v, w)$  определено выше (21-22).

В Приложении 2б) приведено вычисление интеграла (47):

$$G_{\Gamma}^{(2)}(x, z - z') = \begin{cases} \sqrt{\frac{k}{2\pi i}} x \frac{e^{\frac{ik}{2} \frac{x^2}{z-z'}}}{(z - z')^{3/2}}, & z > z' \\ 0, & z < z' \end{cases} \quad (48)$$

В итоге подставляя (48) и (22) в (46) и (42) окончательно получим:

$$u(x, y, z) = \frac{k}{2\pi i} x \int_{-\infty}^{+\infty} dy' \int_{-\infty}^z dz' u_0(y', z') \frac{e^{\frac{ik}{2} \frac{x^2 + (y-y')^2}{z-z'}}}{(z - z')^2} \quad (49)$$

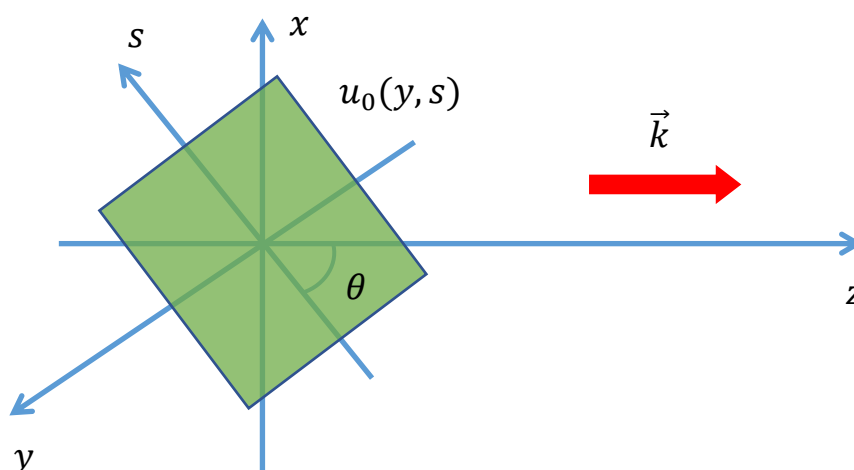
Данный результат можно найти, например, в [27,28], с заменой коэффициента теплопроводности на соответствующую мнимую величину (поскольку именно этим отличается ПВУ от уравнения теплопроводности).

Формула (49) дает возможность найти поле  $u(x, y, z)$  в полупространстве  $x > 0$  (см. рисунок 9) если при  $x = 0$  задано граничное условие для поля  $u_0(y', z')$ . В следующем параграфе с помощью выражения (49) будет получена модификация дифракционного интеграла Френеля, распространяющая теорию оптических преобразований на случай наклонного освещения объектов.

#### 1.4. Решение ПВУ с граничным условием, заданным на наклонной плоскости

Рассмотрим следующую задачу, тоже в параксиальном приближении: излучение распространяется вдоль оси  $z$ , граничное условие  $u_0(s, y)$  задано в плоскости  $sy$ , прямая  $s$  задается уравнением  $x + z \operatorname{tg} \theta = 0$  (рисунок 10). На этой прямой  $x$  и  $z$  связаны с  $s$  таким образом:

$$\begin{cases} x = s \sin \theta \\ z = -s \cos \theta \end{cases} \quad (50)$$



**Рисунок 10.** Случай наклонного расположения граничного условия к направлению распространения поля  $\vec{k}$ .

Данная задача описывается следующим дифференциальным уравнением с граничным условием:

$$\begin{cases} (\partial_x^2 + \partial_y^2 + 2ik\partial_z)u(x, y, z) = 0, & x + z \operatorname{tg} \theta > 0 \\ u(x, y, z)|_{\substack{x=s \sin \theta \\ z=-s \cos \theta}} = u_0(y, s) \end{cases} \quad (51)$$

С помощью следующей замены перейдем от переменных  $x$ ,  $y$  и  $z$  к  $\xi$ ,  $y$  и  $\eta$ :

$$\begin{cases} \xi = x + z \operatorname{tg} \theta \\ \eta = z \end{cases} \quad (52)$$

Тогда частные производные  $\partial_x$  и  $\partial_z$  можно выразить через  $\partial_\xi$  и  $\partial_\eta$  так:

$$\begin{cases} \partial_x = \partial_\xi \\ \partial_z = \operatorname{tg} \theta \partial_\xi + \partial_\eta \end{cases} \quad (53)$$

Осуществим также следующую замену:

$$v(\xi, y, \eta) = u(x(\xi, \eta), y, z(\xi, \eta)), \quad v_0(y, \eta) = u_0(y, s(\eta)) \quad (54)$$

при этом  $x$  и  $z$  связаны с  $\xi$  и  $\eta$  соотношениями (52). Учитывая вторые равенства (50) и (52):

$$s(\eta) = -\frac{z(\eta)}{\cos \theta} = -\frac{\eta}{\cos \theta} \quad (55)$$

Таким образом, подставляя (53) и (54) в (51), получается уравнение:

$$\begin{cases} \left( \partial_\xi^2 + \partial_y^2 + 2ik(\operatorname{tg} \theta \partial_\xi + \partial_\eta) \right) v(\xi, y, \eta) = 0, & \xi > 0 \\ v(\xi, y, \eta)|_{\xi=0} = v_0(y, \eta) \end{cases} \quad (56)$$

После преобразования выражения, стоящего в скобках уравнения (56):

$$\begin{cases} \left( (\partial_\xi + ik \operatorname{tg} \theta)^2 + \partial_y^2 + 2ik \left( \partial_\eta - i \frac{k}{2} \operatorname{tg}^2 \theta \right) \right) v(\xi, y, \eta) = 0 \\ v(\xi, y, \eta)|_{\xi=0} = v_0(y, \eta) \end{cases} \quad (57)$$

Рассмотрим следующую замену:

$$v(\xi, y, \eta) = w(\xi, y, \eta) e^{-ik\xi \operatorname{tg} \theta + i\eta \frac{k}{2} \operatorname{tg}^2 \theta} \quad (58)$$

Подставляя выражение (58) в уравнение (57), приходим к системе, решение которой уже известно из предыдущего параграфа 1.3:

$$\begin{cases} (\partial_\xi^2 + \partial_y^2 + 2ik\partial_\eta)w(\xi, y, \eta) = 0 \\ w(\xi, y, \eta)|_{\xi=0} = w_0(y, \eta) \end{cases}, \quad \text{где} \quad (59)$$

$$w_0(y, \eta) = v_0(y, \eta) e^{-i\eta \frac{k}{2} \operatorname{tg}^2 \theta}, \quad (60)$$

что следует из (58) и второго равенства (57).

Решением данной системы является (49), в соответствующих обозначениях:

$$w(\xi, y, \eta) = \frac{k}{2\pi i} \xi \int_{-\infty}^{+\infty} dy' \int_{-\infty}^{\eta} d\eta' w_0(y', \eta') \frac{e^{\frac{ik}{2} \frac{\xi^2 + (y-y')^2}{\eta-\eta'}}}{(\eta - \eta')^2} \quad (61)$$

Перейдем обратно от  $w(\xi, \eta)$  и  $w_0(y', \eta')$  к  $v(\xi, \eta)$  и  $v_0(y', \eta')$  с помощью (58) и (60):

$$v(\xi, y, \eta) = \frac{k}{2\pi i} \xi \int_{-\infty}^{+\infty} dy' \int_{-\infty}^{\eta} d\eta' v_0(y', \eta') \frac{e^{\frac{ik}{2} \left[ \frac{\xi^2}{\eta-\eta'} - 2\xi \operatorname{tg} \theta + (\eta-\eta') \operatorname{tg}^2 \theta + \frac{(y-y')^2}{\eta-\eta'} \right]}}{(\eta - \eta')^2} \quad (62)$$

Учитывая, что можно преобразовать выражение в скобках, выделив полный квадрат, выражение (62) примет вид:

$$v(\xi, y, \eta) = \frac{k}{2\pi i} \xi \int_{-\infty}^{+\infty} dy' \int_{-\infty}^{\eta} d\eta' v_0(y', \eta') \frac{e^{\frac{ik}{2} \left[ \xi - (\eta-\eta') \operatorname{tg} \theta \right]^2 + (y-y')^2}}{(\eta - \eta')^2} \quad (63)$$

В итоге после подстановки  $\xi$  и  $\eta$  в виде (52), выражения для  $v_0(y', \eta')$  в виде (54), (55) и  $\eta' = -s \cos \theta$  окончательно получим [18,29-31]:



$$u(x, y, z) = \frac{k}{2\pi i} (x \cos \theta + z \sin \theta) \cdot \quad (64)$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{+\infty} dy' \int_{-\frac{z}{\cos \theta}}^{\infty} u_0(y', s) \frac{e^{\frac{ik[x-s \sin \theta]^2 + (y-y')^2}{z+s \cos \theta}}}{(z + s \cos \theta)^2} ds$$

Этот интеграл представляет собой модификацию дифракционного интеграла Френеля на случай наклонного освещения объектов, и называется АВП-интегралом. Можно отметить, что задачи, рассмотренные в пунктах 1.2 и 1.3, являются частными случаями задачи, изложенной в этом пункте 1.4. Соответственно итоговые формулы двух предыдущих пунктов должны получаться как частные случаи формулы (64). Действительно, при  $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$  формула (64) переходит в (23) (если переобозначить переменную интегрирования  $s$  в выражении (64) на  $x'$ ), а при  $\theta = 0$  формула (64) переходит в (49) (если переобозначить переменную интегрирования  $s$  в выражении (64) на  $-z'$  и заменить  $u_0(y', -z')$  на  $u_0(y', z')$ ).

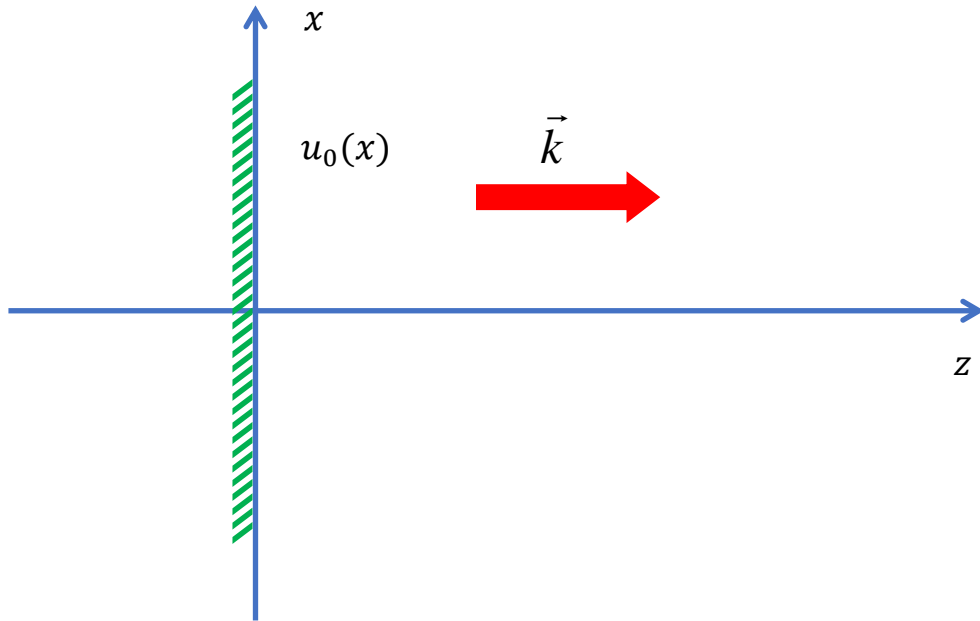
## 1.5. Двумерный случай

Рассмотрим двумерные аналоги пунктов 1.2-1.4.

а) Излучение распространяется вдоль оси  $z$ , граничное условие  $u_0(x)$  задано на оси  $x$  (рисунок 11).

Эта задача описывается следующим дифференциальным уравнением с граничным условием:

$$\begin{cases} (\partial_x^2 + 2ik\partial_z)u(x, z) = 0, & z > 0 \\ u(x, z)|_{z=0} = u_0(x) \end{cases} \quad (65)$$



**Рисунок 11.** Случай ортогонального расположения граничного условия к направлению распространения поля  $\vec{k}$  в двумерной геометрии.

Решение этого дифференциального уравнения можно получить из решения (23) соответствующей трехмерной задачи (13), если считать, что в (23) граничное условие не зависит от переменной  $y$ :  $u_0(x, y) = u_0(x)$ .

Действительно, в этом случае (23) после разделения переменных интегрирования примет вид:

$$u(x, y, z) = \frac{k}{iz} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dy' e^{\frac{ik(y-y')^2}{2z}} \right\} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x') e^{\frac{ik(x-x')^2}{2z}} \quad (66)$$

После замены переменной интегрирования  $p = y' - y$  выражение в фигурных скобках формулы (66) будет, согласно (21), равно  $G_B^{(2)}(v = 0, w = -k^2/z)$ , учитывая (22) выражение (66) примет вид:

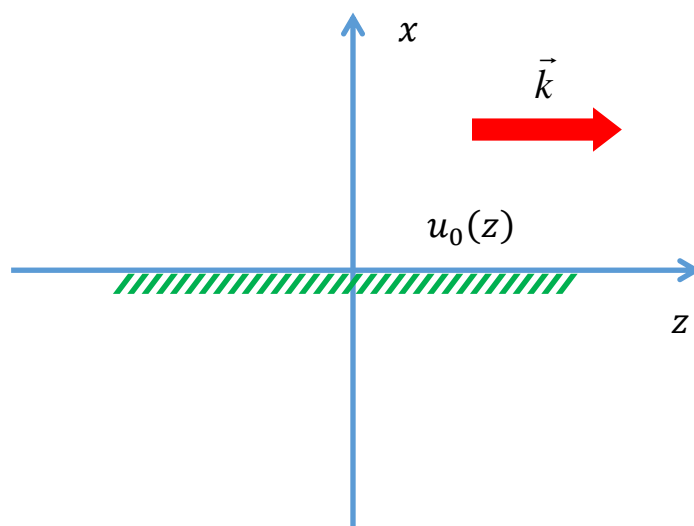
$$u(x, y, z) = \sqrt{\frac{k}{2\pi iz}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x') e^{\frac{ik(x-x')^2}{2z}} dx'. \quad (67)$$

Таким образом, в этом случае и решение не будет зависеть от переменной  $y$ , но тогда уравнение (13) будет иметь вид (65), а значит решением системы (65) будет:

$$u(x, z) = \sqrt{\frac{k}{2\pi iz}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x') e^{\frac{ik(x-x')^2}{2z}} dx'. \quad (68)$$

Эта формула называется двумерным интегралом Френеля. Аналогичным образом можно получить аналоги пунктов 1.3 и 1.4.

б) Излучение распространяется вдоль оси  $z$ , граничное условие  $u_0(z)$  задано на оси  $z$  (рисунок 12).



**Рисунок 12.** Случай параллельного расположения граничного условия к направлению распространения поля  $\vec{k}$  в двумерной геометрии.

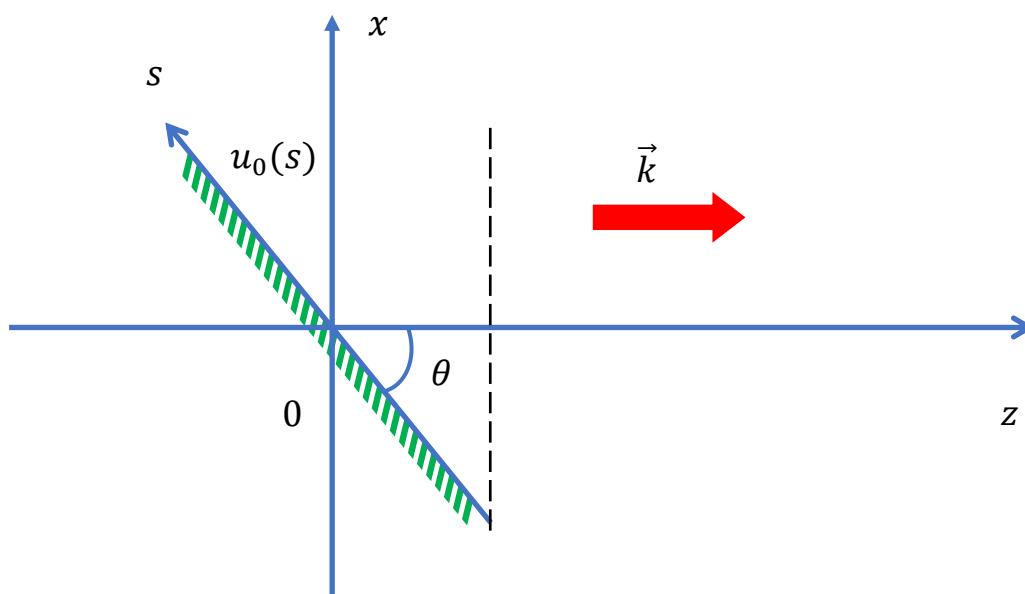
$$\begin{cases} (\partial_x^2 + 2ik\partial_z)u(x, z) = 0, & x > 0 \\ u(x, z)|_{x=0} = u_0(z) \end{cases} \quad (69)$$

Чтобы получить решение этого уравнения, как и в пункте а) нужно проинтегрировать по  $u'$  выражение (49), являющееся решением соответствующей трехмерной задачи (31):

$$u(x, z) = \sqrt{\frac{k}{2\pi i}} x \int_{-\infty}^z dz' u_0(z') \frac{e^{\frac{ik}{2} \frac{x^2}{z-z'}}}{(z-z')^{\frac{3}{2}}}. \quad (70)$$

в) Излучение распространяется вдоль оси  $z$ , граничное условие  $u_0(s)$  задано на прямой  $s$ , описываемой уравнением  $x + z \operatorname{tg} \theta = 0$  (рисунок 13). На этой прямой  $x$  и  $z$  связаны с  $s$  таким образом:

$$\begin{cases} x = s \sin \theta \\ z = -s \cos \theta \end{cases} \quad (71)$$



**Рисунок 13.** Случай наклонного расположения граничного условия к направлению распространения поля  $\vec{k}$  в двумерной геометрии.

Эта задача описывается следующим дифференциальным уравнением с граничным условием:

$$\begin{cases} (\partial_x^2 + 2ik\partial_z)u(x, z) = 0, & x + z \operatorname{tg} \theta > 0 \\ u(x, z)|_{\substack{x=s \sin \theta \\ z=-s \cos \theta}} = u_0(s) \end{cases} \quad (72)$$

Чтобы получить решение этого уравнения, как и в пункте а) нужно проинтегрировать по  $y'$  выражение (64), являющееся решением соответствующей трехмерной задачи (51) [18]:

$$u(x, z) = \sqrt{\frac{k}{2\pi i}} (x \cos \theta + z \sin \theta) \int_{-\frac{z}{\cos \theta}}^{\infty} u_0(s) \frac{e^{\frac{ik[x-s \sin \theta]^2}{2(z+s \cos \theta)}}}{(z+s \cos \theta)^{3/2}} ds. \quad (73)$$

Таким образом, получены двумерные аналоги формул, полученных в предыдущих параграфах<sup>9</sup>.

## 1.6. О расчете интеграла Френеля с помощью быстрого преобразования Фурье (БПФ)

В работе при численных расчетах часто встречается потребность вычисления интеграла Френеля (ИФ). Основная идея заключается в том, чтобы свести интеграл к преобразованию Фурье, для численного расчета которого существует алгоритм ускоренного вычисления – быстрое преобразование Фурье (БПФ) [32,33].

При замене интеграла вида

$$g(x) = \int_A^B f(x, x') dx' \quad (74)$$

его интегральной суммой из  $N$  слагаемых,

$$g(x_j) = \sum_{i=1}^N f(x_j, x'_i) \Delta x'_i \quad (75)$$

---

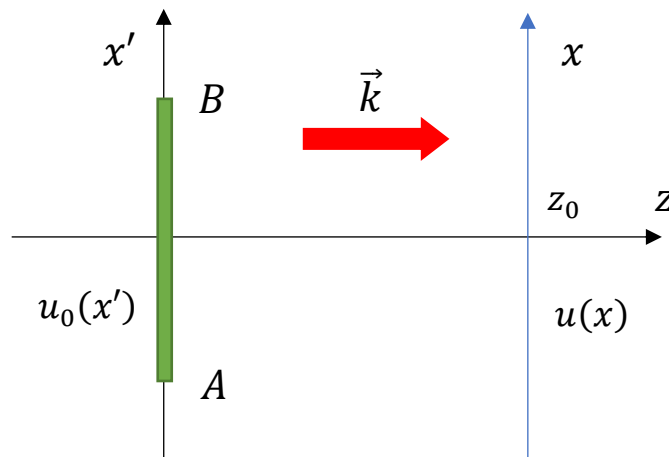
<sup>9</sup> В Приложении 3 приведены соотношения, связывающие двумерные и трехмерные функции Грина.

расчет функции  $g(x)$  в  $N$  точках, т.е. при  $j = \overline{1, N}$ , потребует  $\sim N^2$  вычислений. Если же удастся свести интеграл (74) к преобразованию Фурье, то с помощью БПФ при тех же параметрах дискретизации для вычисления потребуется  $\sim N \log N$  операций, что значительно быстрее, чем прямой расчет (75) [34,35].

Перейдем теперь к применению данного метода для расчета ИФ:

$$u(x, z) = \sqrt{\frac{k}{2\pi iz}} \int_A^B u_0(x') \cdot e^{\frac{ik(x-x')^2}{2z}} dx'. \quad (76)$$

Рассмотрим сначала случай, когда плоскость начального распределения  $x'$  и плоскость  $x$ , на которой рассчитывается поле, параллельны (см. рисунок 14). В этом случае координата  $z$  является константой ( $z = z_0$ ), а выражение (76) можно



**Рисунок 14.** Случай параллельного расположения плоскости граничного распределения  $x'$  и плоскости  $x$ , на которой рассчитывается поле.

представить двумя способами.

Первый способ заключается в том, чтобы перегруппировать множители в (76) следующим образом:

$$u(x) = \sqrt{\frac{k}{2\pi iz_0}} e^{\frac{ikx^2}{2z_0}} \int_A^B \left\{ u_0(x') \cdot e^{\frac{ikx'^2}{2z_0}} \right\} e^{-ik\frac{x}{z_0}x'} dx', \quad (77)$$

т.е. выразить интеграл Френеля через преобразование Фурье:

$$u(x) = C_1 e^{\frac{ikx^2}{2z_0}} \cdot \mathcal{F} \left\{ u_0(x') \cdot e^{\frac{ikx'^2}{2z_0}} \right\}, \quad (78)$$

где  $C_1$  – константа.

Второй способ – заметить, что интеграл Френеля (76) – интеграл типа свертки:

$$f(x) = \int_A^B g(x') \cdot h(x - x') dx'. \quad (79)$$

В этом случае легко показать, что для Фурье – образов соответствующих функций верно равенство:

$$F(p) = 2\pi \cdot G(p) \cdot H(p). \quad (80)$$

Тогда  $f(x)$  будет иметь вид:

$$f(x) = 2\pi \cdot \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}\{g\} \cdot \mathcal{F}\{h\}]. \quad (81)$$

Поскольку справедливо

$$\mathcal{F} \left\{ e^{\frac{ik(x-x')^2}{2z}} \right\} (p) = \sqrt{\frac{iz_0}{2\pi k}} e^{-i\frac{z_0}{2k}p^2}, \quad (82)$$

то, учитывая (76), (81) и (82), получим следующее выражение для ИФ, которое можно вычислить с помощью быстрого преобразования Фурье:

$$u(x) = C_2 \cdot \mathcal{F}^{-1} \left[ \mathcal{F}\{u_0(x')\} \cdot e^{-i\frac{z_0}{2k}p^2} \right], \quad (83)$$

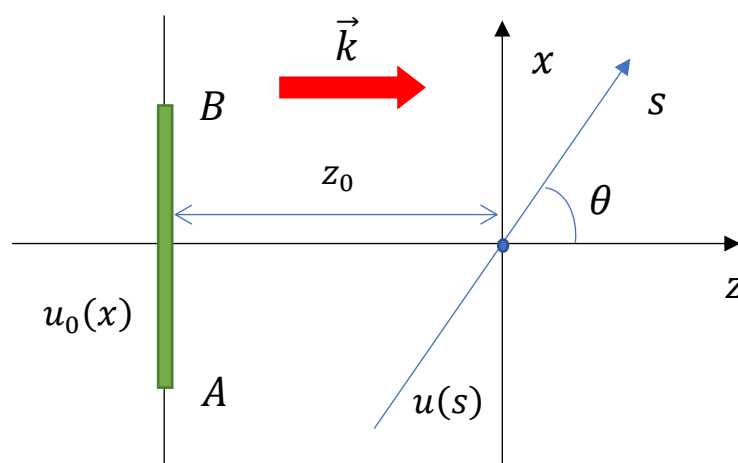
где  $C_2$  – константа.

На практике часто оказывается так, что в формулах (78) и (83) быстро осциллирующими оказываются множители в виде экспонент, а значит, именно они определяют шаг дискретизации (шаг дискретизации должен быть таким, чтобы «более-менее угадывалось» положение между отсчетами). Исходя из этого, видно, что при больших  $z_0$  выгодно, с вычислительной точки зрения, использовать формулу (78), а при малых  $z_0$  – (83). Как показано в работе [36], критическим значением  $z_0$ , в зависимости от которого следует выбирать между формулами (78) и (83), является:

$$z_c = \frac{2 \cdot \Delta x \cdot \delta}{\lambda}, \quad (84)$$

где  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$  – длина волны,  $\Delta x = B - A$  – характерный размер объекта, а  $\delta$  – характерный размер детали начального распределения.

Рассмотрим теперь случай наклонного расположения плоскости  $s$ , на которой рассчитывается поле (см. рисунок 15) [37].



**Рисунок 15.** Случай наклонного расположения плоскости  $s$ , на которой рассчитывается поле по отношению к плоскости начального распределения  $x$ .



Поле  $u_0(x)$  можно представить следующим образом:

$$u_0(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}\{u_0(x')\}(q)e^{iqx} dq, \quad (85)$$

тогда поле справа от граничного распределения будет иметь вид:

$$u(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}\{u_0(x')\}(q)e^{iqx - i\frac{z+z_0}{2k}q^2} dq \quad (86)$$

(поскольку (86) удовлетворяет ПВУ и граничному распределению (85) при  $z = -z_0$ ). В результате получится следующее выражение для искомого поля на прямой  $s$ :

$$u(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}\{u_0(x')\}(q)e^{-i\frac{z_0}{2k}q^2} e^{i\left(q \sin \theta - i\frac{\cos \theta}{2k}q^2\right)s} dq. \quad (87)$$

Далее, чтобы свести (87) к преобразованию Фурье, произведем замену переменной интегрирования:

$$f = q \sin \theta - i\frac{\cos \theta}{2k}q^2. \quad (88)$$

Тогда обратная замена переменной будет иметь вид:

$$q = q(f) = k \operatorname{tg} \theta \pm \sqrt{k^2 \operatorname{tg}^2 \theta - \frac{2k}{\cos \theta} f}, \quad (89)$$

при этом возникает проблема выбора знака, но поскольку во Френелевском приближении (когда справедливо ПВУ)  $q \ll k$ , то нужно в (89) выбирать «-».

После проведения замены (88) выражение (87) примет вид:

$$u(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}\{u_0(x')\}(q(f)) \cdot P(f) e^{ifs} df, \quad (90)$$

где

$$P(f) = \frac{1}{\sin \theta - \frac{\cos \theta}{k} q(f)} e^{-i \frac{z_0}{2k} q^2(f)}. \quad (91)$$

Таким образом, вычисление интеграла в ситуации, изображенной на рисунке 15, вновь сведено к преобразованию Фурье, а значит, к выгодному с точки зрения вычислений виду.

В дополнение можно привести ряд работ, развивающих данный метод численного расчета ПВУ [38-42].

## 1.7. Краткий обзор литературы по рентгеновской оптике

Оптические свойства различных материалов во многом определяются показателем преломления, который имеет вид:

$$n = 1 - \delta + i\beta, \quad (92)$$

где  $\delta$  и  $\beta$  в рентгеновском диапазоне длин волн обычно  $0 < \delta, \beta \ll 1$  [43]. Поскольку действительная часть  $n$  получается меньше единицы, то в отличие от видимого диапазона, где бывает полное внутреннее отражение, в рентгеновской области спектра возможно наблюдать полное внешнее отражение. Также в этом диапазоне длин волн важное значение имеет поглощение, за исключением жесткого рентгена, где поглощение вновь становится небольшим.

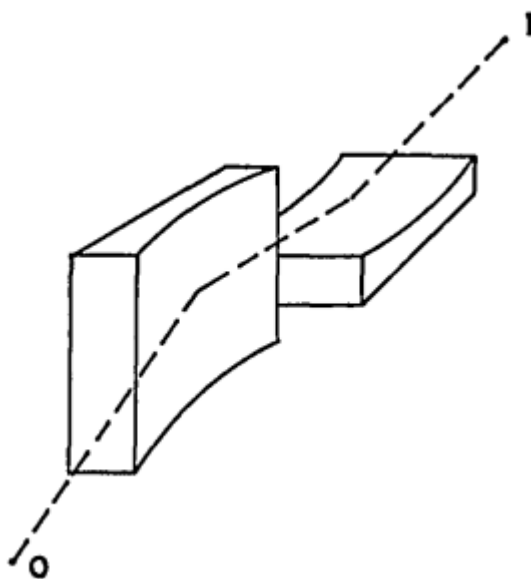
Поскольку в данной области спектра отражательная способность

$$R_{\perp} = \frac{\delta^2 + \beta^2}{4} \quad (93)$$

оказывается крайне малой, то для получения большого коэффициента отражения угол скольжения не должен превышать критический угол полного внешнего отражения, который задается следующим выражением:

$$\theta_c = \sqrt{2\delta}. \quad (94)$$

Одним из видов отражательной рентгеновской оптики являются зеркала. Основные характеристиками этих зеркал является их форма и качество шлифования поверхности. В одной из первых работ, посвященной формированию рентгеновских изображений [44], оптическая система состояла из двух эллиптических зеркал (см. рисунок 16).



**Рисунок 16.** Оптическая схема формирования рентгеновского изображения осуществленная Киркпатриком и Баезом. Рисунок взят из статьи [44].

Многослойные зеркала представляют собой чередующиеся слои двух материалов с различной диэлектрической проницаемостью с фиксированным периодом  $d$  (см. рисунок 17). Основная идея данного элемента отражательной рентгеновской оптики состоит в том, что выходящее от поверхности излучение,

отраженное от разных слоев зеркала, усиливается за счет интерференции. За счет чего удастся существенно увеличить коэффициент отражения, по сравнению с обычным зеркалом. Для того чтобы интерференция приводила к максимальному коэффициенту отражения должно быть выполнено условие Брэгга:

$$m\lambda = d \sin \theta. \quad (95)$$

Помимо этого, используют такую пару материалов, чтобы контраст диэлектрических проницаемостей был как можно больше, что увеличивает коэффициент отражения от каждого слоя. Поскольку диэлектрическая проницаемость связана с плотностью электронов, то, как правило, один из материалов выбирают с большим  $Z$  (зарядом ядра), а другой, наоборот, с маленьким. На сегодняшний день в ЭУФ диапазоне максимальный коэффициент отражения при нормальном падении достигнут для Mo/Si при  $\lambda = 13.5$  нм и составляет 70% [45-47].

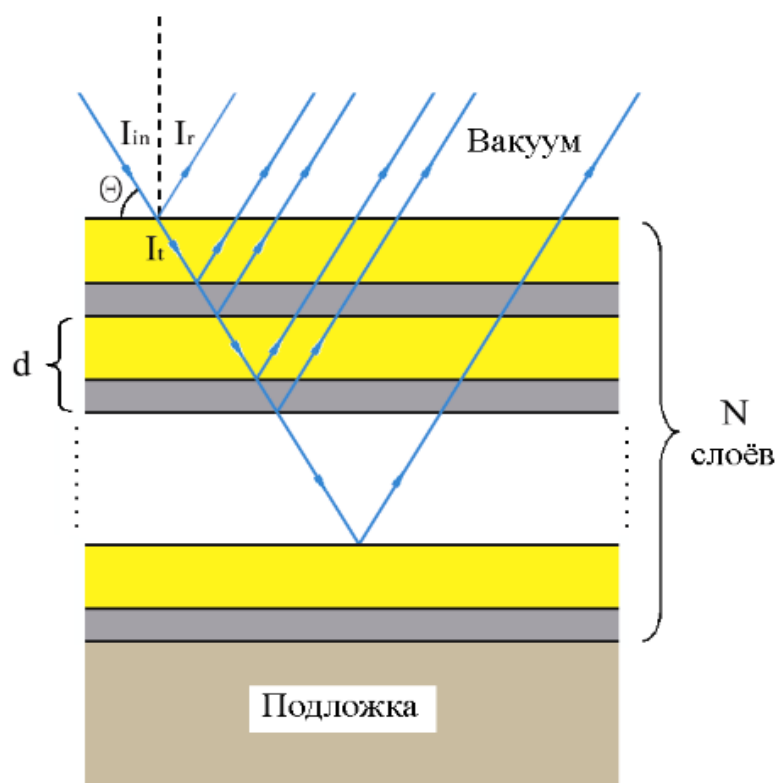


Рисунок 17. Многослойное зеркало. Изображение взято с сайта [xray-optics.ru](http://xray-optics.ru).

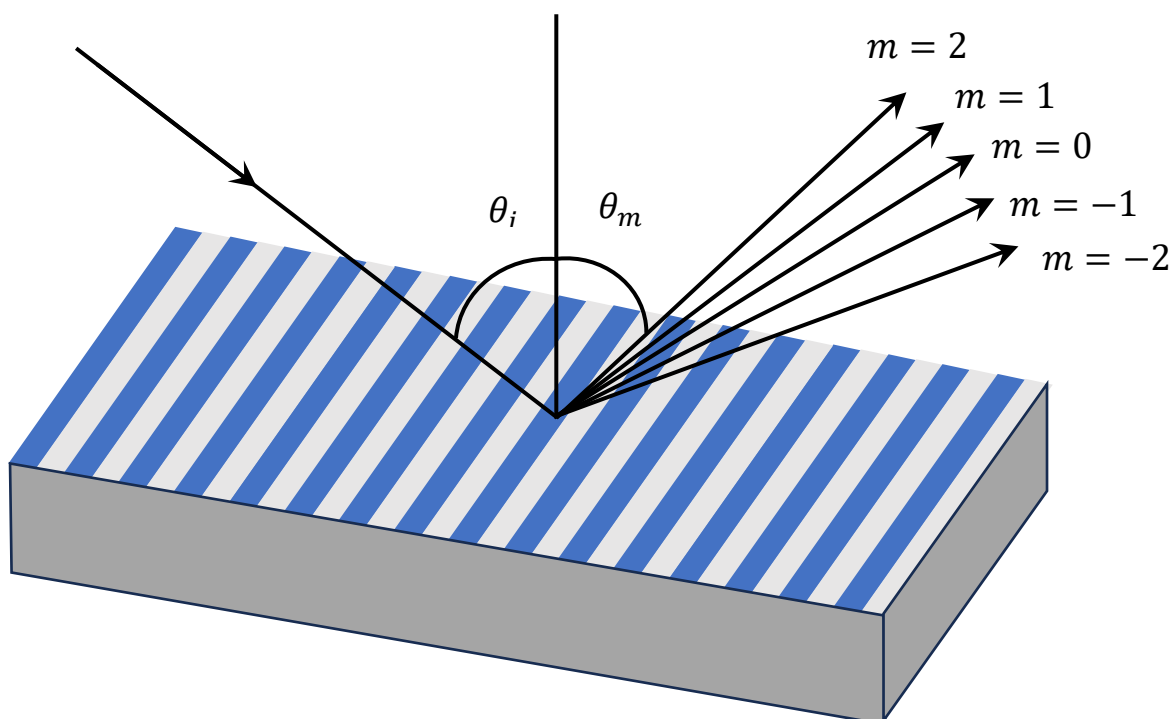
В работе [48] было найдено наилучшее соотношение между периодом  $d$  и толщиной одного из материалов.

Многослойные зеркала для длин волн ЭУФ и рентгеновского излучения были успешно изготовлены с использованием методов испарения [49], напыления [50-56], эпитаксиального роста [57,58] и лазерно-плазменного осаждения [59].

Область работы многослойных зеркал была расширена до очень высоких энергий фотонов, то есть очень жесткого рентгеновского излучения, даже выше 100 кэВ [60-63].

Еще одним элементом рентгеновской оптики является дифракционная решетка. Решетки бывают как на пропускание, так и на отражение (см. рисунок 18).

Отражающие решетки имеют как отражающие, так и дифракционные эффекты. Отражающие решетки обычно используются при скользющем падении в рентгеновских и ЭУФ монохроматорах и спектрометрах.



**Рисунок 18.** Отражающая дифракционная решетка.

Эти решетки разделяют различные длины волн в соответствии с уравнением решетки [13,64]:

$$m\lambda = d(\sin \theta_m - \sin \theta_i), \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3), \quad (96)$$

где  $\theta_i$  - угол падения, измеренный от нормали к поверхности,  $\theta_m$  — угол  $m$ -го отраженного порядка, измеренный от нормали,  $\lambda$  — длина волны,  $d$  — период решетки,  $m$  — порядок дифракции.

В случае если интенсивность падающего излучения перенаправляется преимущественно в один из порядков, то такая решетка называется решеткой с блеском [65].

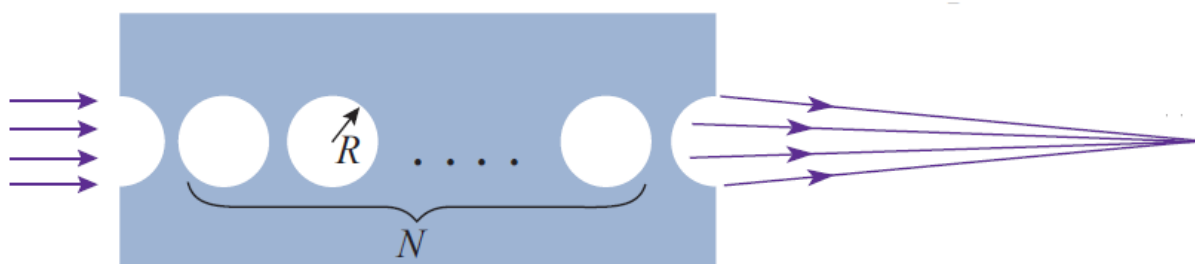
Зонная пластинка — плоскопараллельная пластинка с выгравированными концентрическими окружностями, радиус которых совпадает с радиусами зон Френеля (см. рисунок 19). Зонная пластинка не пропускает чётные либо нечётные зоны Френеля, чем исключает взаимное погашение при интерференции от соседних зон, что приводит к увеличению освещённости точки наблюдения. Таким образом, зонная пластинка действует как собирающая линза.



**Рисунок 19.** Схематическое изображение зонной пластинки.

В областях мягкого и жесткого рентгеновского излучения, простирающихся от 4 нм (300 эВ) до 0,2 °А (60 кэВ), зонные пластинки Френеля представляют большой интерес из-за их способности формировать изображения с высоким пространственным разрешением [66-72], приближающимся к дифракционному пределу.

Наконец существуют составные преломляющие линзы (см. рисунок 20) [73-79].

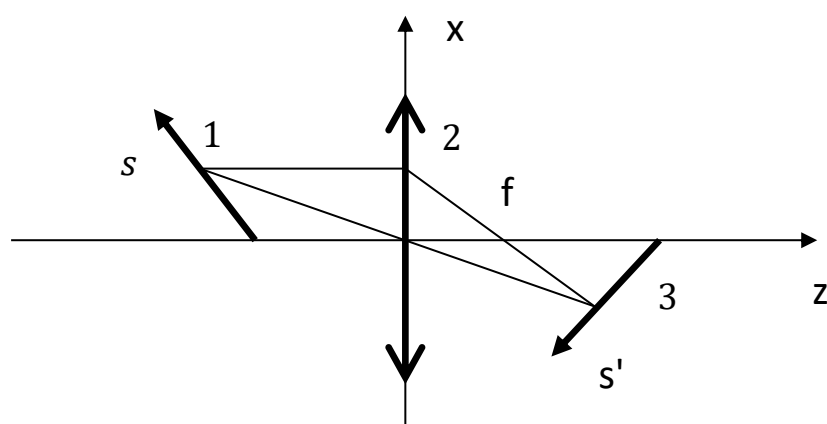


**Рисунок 20.** Схематическое изображение составной преломляющей линзы. Рисунок взят из статьи [73].

Показатель преломления слабо отличается от единицы, но использование «серии» линз все-таки позволяет добиться фокусировки рентгеновского излучения.

## Глава 2. Вывод формул геометрической оптики методами волновой в параксиальном приближении

Рассмотрим следующую оптическую систему, изображенную на рисунке 21.



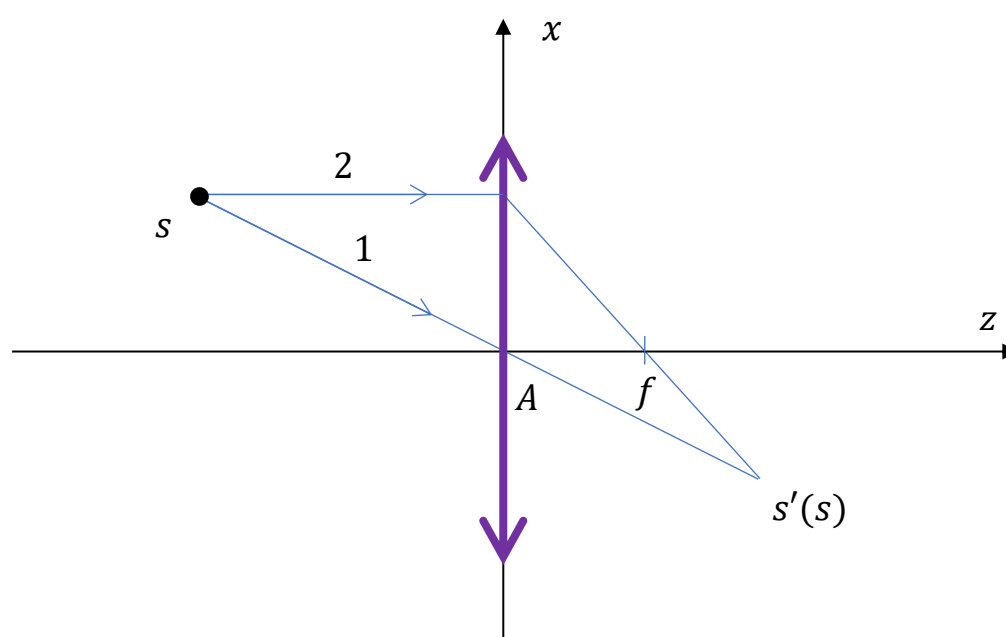
**Рисунок 21.** Оптическая схема с наклонным расположением объекта и детектора: 1 – плоскость объекта, 2 – линза, 3 – плоскость изображения

В геометрической оптике изображение наклонного объекта 1 находится на оптически сопряженной плоскости 3. Однако, геометрическая оптика не рассматривает вопрос распределения интенсивности в плоскости изображения и его связи с распределением интенсивности объекта. В данной главе методами волновой оптики находится плоскость, на которой изображение будет наиболее подобным объекту, а также выводится распределение интенсивности на этой плоскости в зависимости от распределения интенсивности на объекте. В дальнейшем понадобится понятие сопряженной прямой.



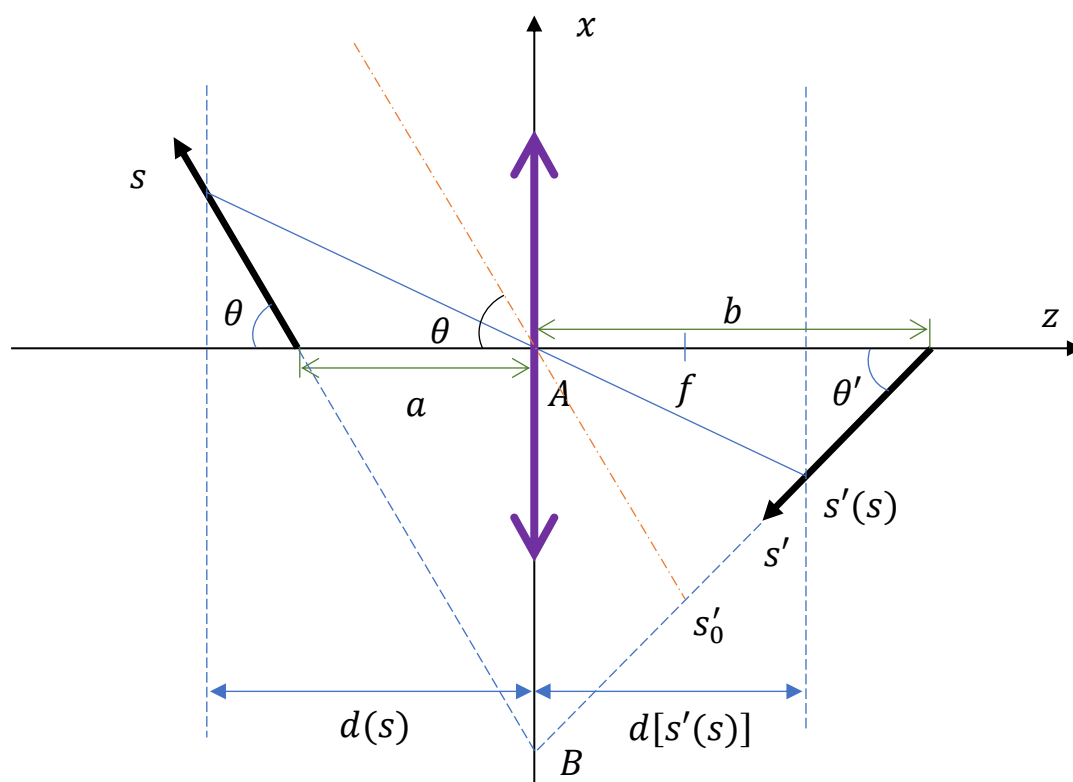
## 2.1. Оптически сопряженная прямая

Согласно правилам геометрической оптики изображение точечного источника (см. рисунок 22) можно построить, например по двум лучам – 1 и 2: луч 1 проходит через центральную точку оптической системы – точку  $A$ , не преломляясь, луч 2 идет параллельно главной оптической оси, а за линзой преломляется и проходит через фокус. Тогда изображением точки  $s$  является точка  $s'(s)$ , лежащая на пересечении этих двух лучей.



**Рисунок 22.** Построение изображения точки  $s$  с помощью двух лучей по правилам геометрической оптики.

Нетрудно показать, что изображением прямой в линзе будет прямая, эта прямая называется *оптически сопряженной прямой* (к исходной) [80]. На рисунке 23 прямая  $s'$  является сопряженной к прямой  $s$ . Можно отметить, что прямая и оптически сопряженная к ней пересекаются в плоскости линзы (на рисунке 23 точка  $B$ ), если, конечно, исходная прямая не была параллельна плоскости линзы (в этом случае оптически сопряженная прямая также параллельна плоскости линзы).



**Рисунок 23.** Построение оптически сопряженной прямой  $s'$  относительно линзы к прямой  $s$ .

После соответствующих вычислений можно найти явный вид для  $s'(s)$ :

$$s'(s) = \frac{b^2 f s \cos \theta}{a(a f + b s \cos \theta) \cos \theta'} \quad , \text{ где} \quad (1)$$

$b$  связано с  $a$  и  $f$  следующим образом:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}, \quad (2)$$

т.е. с помощью формулы плоской линзы, а  $\theta$  и  $\theta'$  связаны соотношением:

$$\operatorname{tg} \theta' = \frac{a}{b} \operatorname{tg} \theta. \quad (3)$$

Последнее выражение можно получить, записав длину отрезка  $AB$  двумя способами  $a \operatorname{tg} \theta = AB = b \operatorname{tg} \theta'$ .

Приведем здесь также обратную к (1) функцию:

$$s(s') = \frac{a^2 f s' \cos \theta'}{b(bf - a s' \cos \theta')} \quad {}^{10} \quad (4)$$

Введем полезные в дальнейшем величины:

$$d(s) = a + s \cos \theta, \quad d[s'(s)] = b - s'(s) \cos \theta', \quad (5)$$

где  $d(s)$  и  $d[s'(s)]$  – расстояния от соответствующей точки до линзы (см. рисунок 23). Эти величины, в чем можно убедиться прямым вычислением, также связаны «формулой плоской линзы»:

$$\frac{1}{d(s)} + \frac{1}{d[s'(s)]} = \frac{1}{f} \quad (6)$$

В завершении этого пункта заметим, что изображением положительной полупрямой  $s$  является отрезок от 0 до  $s'_0$  (см. рисунок 23):

$$s'_0 = \frac{bf}{a \cos \theta'}. \quad (7)$$

В этом параграфе были приведены понятие оптически сопряженной прямой и ряд соотношений, которые понадобятся при дальнейшем изложении.

---

<sup>10</sup> В дальнейшем, чтобы избежать путаницы, функция  $s(s')$  будет обозначаться как  $s^*(s')$  или просто  $s^*$ .

## 2.2. Вертикальный объект

Рассмотрим случай, когда объект расположен вертикально, и убедимся, что с помощью волновой оптики можно получить формулу тонкой линзы. Перед этим опишем действие идеальной линзы.

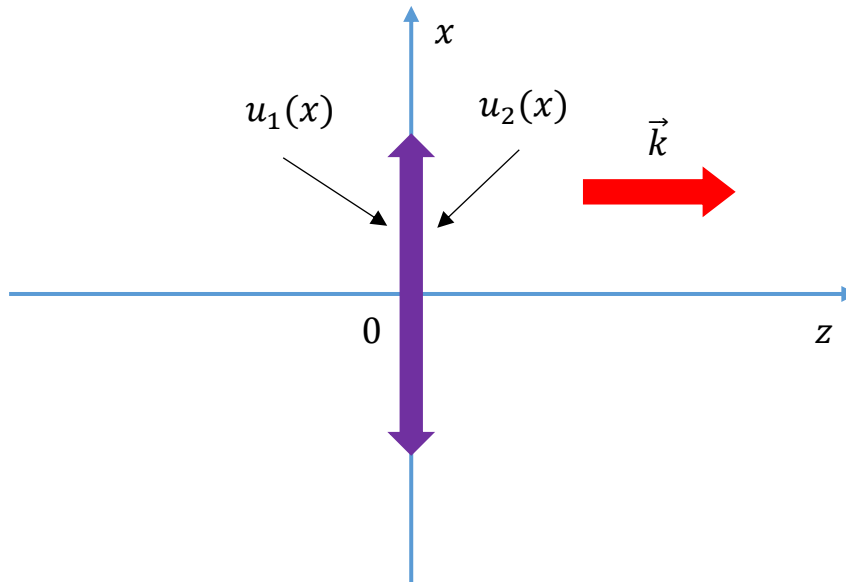
На рисунке 24 изображена идеальная линза, она совершает преобразование  $T(x)$  [81-83]:

$$u_2(x) = u_1(x)T(x), \quad (8)$$

где  $u_1(x)$ - поле на левой границе линзы,  $u_2(x)$ - на правой, причем:

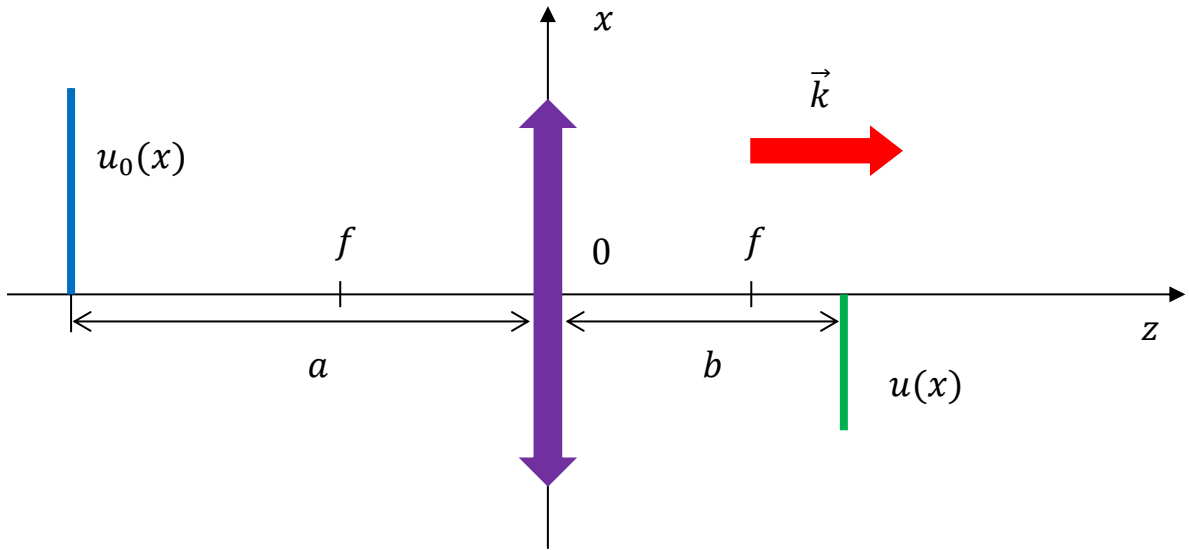
$$T(x) = e^{-\frac{ikx^2}{2f}}, \quad (9)$$

где  $f$  – фокусное расстояние.



**Рисунок 24.** Действие плоской линзы: на левой стороне линзы поле равно  $u_1(x)$ , после прохождения через линзу поле на ее правой стороне равно  $u_2(x)$ .

Пусть начальное распределение поля  $u_0(x)$  задано на вертикальной прямой, расположенной на расстоянии  $a$  слева от линзы (см. рисунок 25).



**Рисунок 25.** Случай нормально (перпендикулярно к оптической оси  $z$ ) расположенного объекта.

Тогда можно найти поле справа от линзы следующим образом: сначала с помощью интеграла Френеля (1.68) найти поле на оси  $x$  (поле на левой стороне линзы), затем результат умножить на преобразование линзы (9) (получится поле на правой стороне линзы), после чего, вновь применяя интеграл Френеля, получим искомое поле за линзой:

$$u(x, z) = \frac{k}{i\sqrt{za}} e^{\frac{ikx^2}{2z}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' u_0(x') e^{\frac{ikx'^2}{2a}} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{\frac{ik}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{z} - \frac{1}{f} \right) t^2 - ik \left( \frac{x+x'}{z+a} \right) t} \right\}. \quad (10)$$

Если теперь выбрать в качестве положения приемника прямую  $z = b$ , причем  $b$  связано с  $a$  и  $f$  следующим образом:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}, \quad (11)$$

то тогда выражение в фигурных скобках (10) превращается в дельта функцию и в итоге поле на прямой  $z = b$  будет иметь вид:

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{M_0}} u_0 \left( -\frac{x}{M_0} \right) e^{\frac{ikx^2}{2fM_0} - i\frac{\pi}{2}}, \quad M_0 = \frac{b}{a}, \quad (12)$$

Тогда интенсивности  $I(x) = |u(x)|^2$  предмета и изображения связаны таким образом:

$$I(x) = \frac{1}{M_0} I_0 \left( -\frac{x}{M_0} \right) \quad (13)$$

В итоге можно сказать, что в вертикальном случае изображение получается в плоскости, соответствующей формуле тонкой линзы (11), а из выражения (13) видно, что изображение подобно перевернутому предмету (из-за знака «-»), с коэффициентом увеличения  $M_0$ . Значит константа  $M_0$  в формуле (12) имеет смысл увеличения.

В заключении приведем аналог формулы (13) в трехмерном случае. Преобразование линзы имеет следующий вид:

а

$$T(x, y) = e^{-ik\frac{x^2+y^2}{2f}}, \quad (14)$$

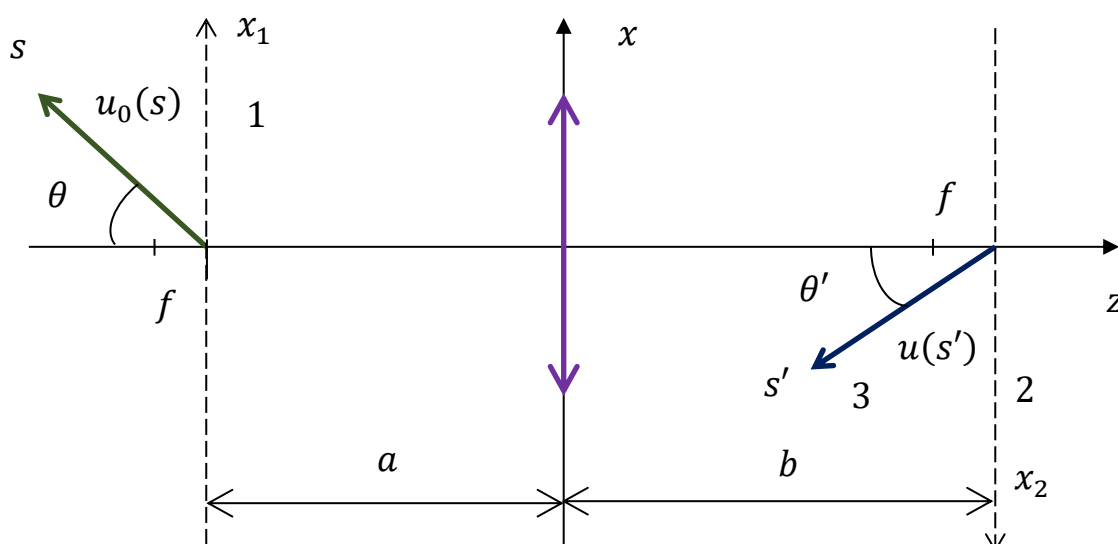
интенсивности  $I(x, y) = |u(x, y)|^2$  предмета и изображения связаны таким соотношением:

$$I(x, y) = \frac{1}{M_0^2} I_0 \left( -\frac{x}{M_0}, -\frac{y}{M_0} \right). \quad (15)$$

### 2.3. Наклонный объект

Рассмотрим теперь случай наклонного объекта.

На рисунке 26 изображена исследуемая оптическая схема, положение прямой  $s'$  – неизвестно и его требуется найти из соображений наибольшего подобия  $u(s')$  и  $u_0(s)$ , но сначала просто выразим  $u(s')$  через  $u_0(s)$ , для этого разобьем данную задачу на 3 этапа: 1 – найти поле на теневой плоскости (вертикальной плоскости, расположенной сразу после наклонного объекта), 2 – на оптически сопряженной к теневой плоскости относительно линзы, 3 – на прямой  $s'$ .



**Рисунок 26.** Случай наклонно (по отношению к оптической оси  $z$ ) расположенного объекта.

1) Поле на теневой плоскости 1 можно найти, положив  $z = 0$  в формуле для АВП – интеграла (1.73):

$$u_1(x_1) = \begin{cases} \sqrt{\frac{k}{2\pi i c \cos \theta}} x_1 \int_0^{s_0} u_0(s) \frac{e^{\frac{ik[x_1 - s \sin \theta]^2}{2 s \cos \theta}}}{s^{\frac{3}{2}}} ds, & x_1 \geq 0 \\ 0, & x_1 < 0 \end{cases} \quad (16)$$

2) Поле на плоскости 2 можно найти, применяя формулу (5), где в качестве граничного распределения будет  $u_1(x)$ :

$$u_2(x_2) = \frac{1}{\sqrt{M_0}} u_1\left(-\frac{x_2}{M_0}\right) e^{\frac{ik x_2^2}{2fM_0} - i\frac{\pi}{2}}, \quad \text{где} \quad (17)$$

$$M_0 = \frac{b}{a}, \quad (18)$$

причем  $a$  и  $b$  связаны соотношением (2), после подстановки и упрощения, выражение (17) примет вид:

$$u_2(x_2) = \begin{cases} -\sqrt{\frac{ik}{2\pi M_0 \cos \theta}} \frac{x_2}{M_0} e^{\frac{ik x_2^2}{2fM_0}} \int_0^{s_0} u_0(s) \frac{e^{\frac{ik\left[\frac{x_2}{M_0} + s \sin \theta\right]^2}{2 s \cos \theta}}}{s^{\frac{3}{2}}} ds, & x_2 \leq 0. \\ 0, & x_2 > 0 \end{cases} \quad (19)$$

3) Поле за линзой можно найти с помощью интеграла Френеля (68), где в качестве граничного условия будет  $u_2(x_2)$ :

$$u(x, z) = \sqrt{\frac{k}{2\pi i z}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_2(x_2) e^{\frac{ik(x-x_2)^2}{2z}} dx_2. \quad (20)$$

После подстановки (19) и упрощения (20) можно переписать следующим образом:

$$u(x, z) = -\frac{ke^{\frac{ikx^2}{2z}}}{2\pi M_0 \sqrt{M_0 z \cos \theta}} \int_0^{s_0} u_0(s) \frac{e^{\frac{ik \sin^2 \theta}{2s \cos \theta}}}{s^{\frac{3}{2}}} \left\{ \int_{-\infty}^0 x_2 e^{\frac{ik}{2}(Ax_2^2 - 2Bx_2)} dx_2 \right\} ds, \quad (21)$$



$$\text{где } A = \frac{1}{M_0^2 s \cos \theta} + \frac{1}{f M_0} + \frac{1}{z}, \quad B = \frac{x}{z} - \frac{1}{M_0} \operatorname{tg} \theta \quad (22)$$

Интеграл в фигурных скобках в выражении (20) после регуляризации (т.е. в данном случае замены  $k$  на  $k' = k + i\gamma$ ) вычисляется и равен:

$$\int_{-\infty}^0 x_2 e^{\frac{ik'}{2}(Ax_2^2 - 2Bx_2)} dx_2 = \frac{1}{iAk'} + \frac{B}{A} \sqrt{\frac{\pi}{2ik'A}} e^{\frac{ik'B^2}{2A}} \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( -\sqrt{\frac{k'}{2iA}} B \right) \right], \quad (23)$$

$$\text{где } \operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-x^2} dx \quad - \text{ функция ошибок}$$

Видно, что при  $B = 0$  выражения (23) и (21) существенно упрощаются, условие  $B = 0$  задает положение детектора на сопряженной плоскости  $z = x \operatorname{tg} \theta'$ , где

$$\operatorname{tg} \theta' = \frac{1}{M_0} \operatorname{tg} \theta. \quad (24)$$

Тогда выражение (21) примет следующий вид:

$$u(x, z) = \frac{k e^{\frac{ikx^2}{2z}}}{2\pi M \sqrt{Mz \cos \theta}} \int_0^{s_0} u_0(s) \frac{e^{\frac{ik s \sin^2 \theta}{2s \cos \theta}}}{(ik - \gamma) A s^{\frac{3}{2}}} ds. \quad (25)$$

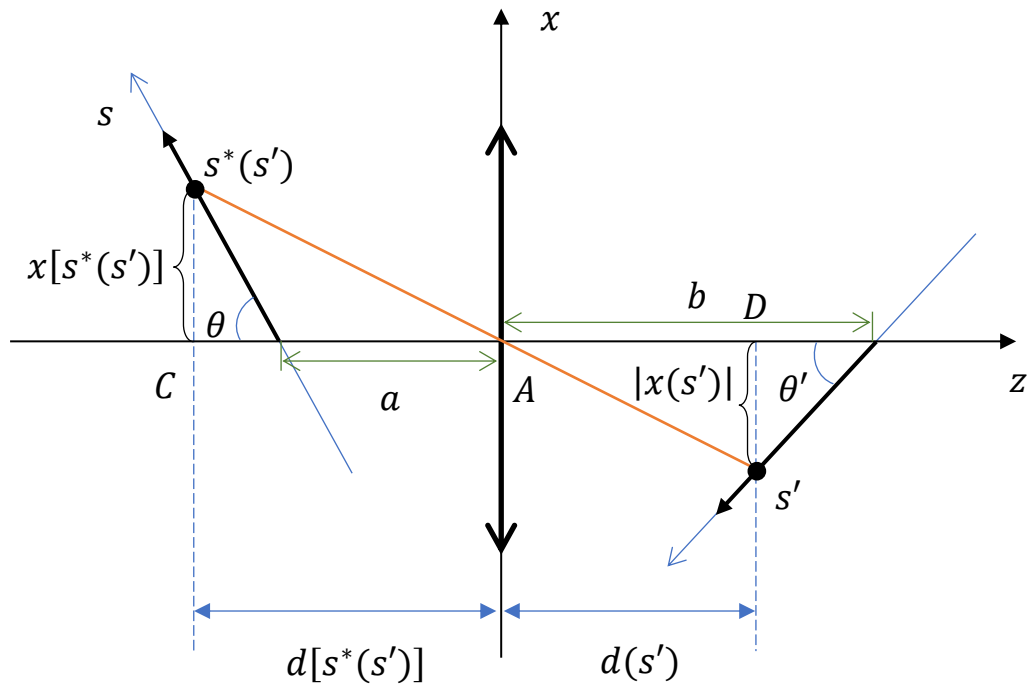
На прямой  $s'$  (см рисунок 26):

$$\begin{cases} z = -s' \cos \theta' \\ x = -s' \sin \theta'. \end{cases}$$

Таким образом, поле на детекторе  $u(s') = u(x = -s' \sin \theta', z = -s' \cos \theta')$  будет иметь следующий вид:

$$u(s') = -\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{s^* \sin\theta}{s' \sin\theta'}} e^{\frac{ik}{2} \left( s^* \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} - s' \frac{\sin^2\theta'}{\cos\theta'} \right)} \int_0^{s_0} ds \frac{u_0(s)}{s - s^* - i\gamma} \sqrt{\frac{s^*}{s}} e^{\frac{iks \sin^2\theta}{2 \cos\theta} (s - s^*)}, \quad (26)$$

где  $s^*(s')$  - прообраз точки  $s'$ , построенный по правилам геометрической оптики (см. рисунок 27), определяется формулой (4) (см. также примечание к ней).



**Рисунок 27.** Оптическая схема с оптически сопряженными плоскостями объекта и детектора.

Можно переписать выражение (26) в более простом для анализа виде. Как следует из рисунка 27,

$$|x(s')| = s' \sin\theta', \quad x[s^*(s')] = s^*(s') \sin\theta, \quad (27)$$

где  $x(s')$  и  $x[s^*(s')]$  – координаты соответствующих точек на оси  $x$ .

Учитывая (27) и подобие треугольников  $ACs^*$  и  $ADs'$  получаем следующие соотношения для подкоренного выражения (26):

$$\frac{s^* \sin\theta}{s' \sin\theta'} = \frac{x(s^*)}{|x(s')|} = \frac{d(s^*)}{d(s')} = \frac{1}{M(s')} \quad (28)$$

где  $M(s')$  – коэффициент увеличения, действительно, как показано на рисунке 28, вертикально расположенный объект имеет, согласно формуле (28), именно такое увеличение.

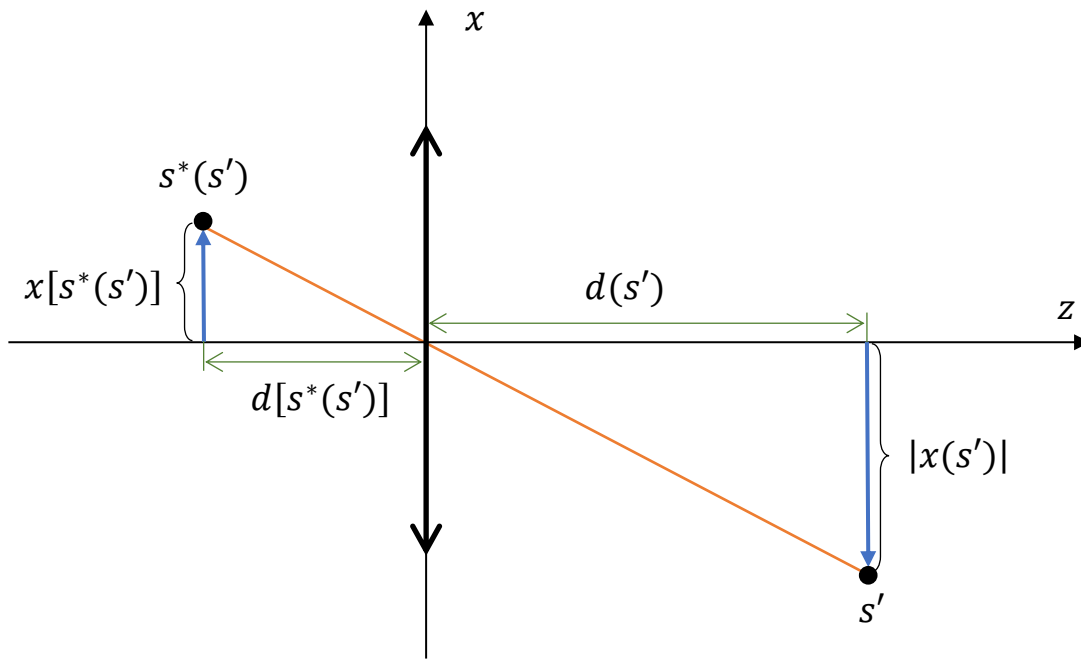


Рисунок 28. Увеличенный фрагмент рисунка 27.

Для  $M(s')$  с помощью формул (28), (1) и (4) и (18) можно получить следующие выражения:

$$M(s') = \frac{s' \sin\theta'}{s^* \sin\theta} = M_0 - \frac{s'}{f} \cos\theta' = \frac{M_0}{1 + \frac{s^*(s')}{f} M_0 \cos\theta} \quad (29)$$

Также можно переписать выражение в скобках в показателе экспоненты (26):

$$s^* \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} - s' \frac{\sin^2 \theta'}{\cos \theta'} = -\frac{x(s')x(s^*)}{f} \quad (30)$$

В итоге формула (26) примет вид:

$$u(s') = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{M(s')}} e^{-\frac{ikx(s')x(s^*)}{2f}} \int_0^{s_0} ds \frac{u_0(s)}{s-s^*-i\gamma} \sqrt{\frac{s^*}{s}} e^{it(s-s^*)}, \quad (31)$$

где

$$t = \frac{k \sin^2 \theta}{2 \cos \theta} \quad (32)$$

Теперь воспользуемся известной формулой [13]:

$$\frac{1}{x-i\varepsilon} = P\left(\frac{1}{x}\right) + i\pi\delta(x) \quad (33)$$

С помощью этой формулы  $u(s')$  можно записать в виде двух слагаемых [A4]:

$$u(s') = u_1(s') + u_2(s'), \quad (34)$$

где

$$u_1(s') = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{M(s')}} e^{-\frac{ikx(s')x(s^*)}{2f}} P \left[ \int_0^{s_0} ds \frac{u_0(s)}{s-s^*} \sqrt{\frac{s^*}{s}} e^{it(s-s^*)} \right], \quad (35)$$

$$u_2(s') = -\frac{i}{2} \frac{1}{\sqrt{M(s')}} e^{-\frac{ikx(s')x(s^*)}{2f}} u_0(s^*) \quad (36)$$

Рассмотрим интенсивность  $u_2(s')$ :

$$I_2(s') = \frac{1}{4} \frac{1}{|M(s')|} I_0(s^*) \quad (37)$$

Видно, что интенсивность  $u_2(s')$  (36) с точностью до умножения на некоторую функцию равна композиции функций  $s^*(s')$  и начального распределения  $I_0(s)$ . Таким образом, итоговое распределение поля на детекторе (31) можно представить как сумму (19) двух слагаемых: подобного граничному распределению (с точностью до фазового множителя)  $u_2(s')$  (36) и, вообще говоря, неподобного граничному распределению  $u_1(s')$  (35).

Формула (31), которая связывает между собой поле предмета и поле его изображения на оптически сопряженной прямой, содержит не только информацию об интенсивности полученного изображения но и его фазу, что важно, например, для задач птихографии [84-88].

### *Предельные случаи*

В заключении рассмотрим случай  $t \rightarrow \infty$ . Ситуация, при которой  $t \rightarrow \infty$  происходит тогда, когда либо  $k \rightarrow \infty$  ( $\lambda \rightarrow 0$ ), либо  $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ . Учитывая известную формулу -

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{itx}}{x - iy} = 2\pi i \delta(x), \quad (38)$$

ф-ла (31) примет вид:

$$u(s') = -i \frac{1}{\sqrt{M(s')}} e^{-\frac{ikx(s')x(s^*)}{2f}} u_0(s^*). \quad (39)$$

А для интенсивности получится следующее выражение:

$$I(s') = \frac{1}{|M(s')|} I_0(s^*). \quad (40)$$

Таким образом, в предельном случае при  $t \rightarrow \infty$ , учитывая (34), (36) и (39), можно сказать, что  $u_1(s') \rightarrow u_2(s')$  и  $u(s') \rightarrow 2u_1(s')$ .

Полученный результат хорошо согласуется с предыдущим параграфом.

Действительно при  $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ ,  $s^*(s') = -\frac{s'}{M_0}$  и формула (40) совпадает с тем, что получается в вертикальном случае, т.е. при  $\theta = \frac{\pi}{2}$  (13).

### Глава 3. Оптическая схема с уменьшением (литография) на отражении при скользящих углах падения

В этой главе предложен новый метод рентгеновской литографии [89-91] с отражающей маской, а также приведены результаты численного моделирования. В расчетах мы ограничимся применением когерентных источников с длиной волны  $\sim 13$  нм. Этот диапазон в настоящее время освоен как лабораторными рентгеновскими лазерами [92], так и генераторами гармоник ИК-лазеров [93], в связи с чем можно говорить об экспериментальной апробации предлагаемого метода.

#### 3.1. Двумерный случай

В предыдущей главе в параграфе 2.3 было получено выражение для распределения поля изображения, получающегося на оптически сопряженной плоскости – (2.34) - (2.36) и была найдена интенсивность этого распределения поля в предельном случае при  $k \rightarrow \infty$  ( $\lambda \rightarrow 0$ ) – (2.40):

$$I(s') = \frac{1}{|M(s')|} I_0[s^*(s')], \quad (1)$$

где для  $M(s')$ , согласно (2.29), справедливо выражение:

$$M(s') = \frac{M_0}{1 + \frac{s^*(s')}{f} M_0 \cos \theta}, \quad (2)$$

а для выражения  $s^*(s')$ , согласно (2.4), верна формула:

$$s^*(s') = \frac{a^2 f s' \cos \theta'}{b(bf - as' \cos \theta') \cos \theta} . \quad (3)$$

Именно формула (1) и будет использоваться для дальнейшего качественного анализа, поскольку выражение для распределения интенсивности изображения в общем случае (не при  $k \rightarrow \infty$ ) громоздкое и трудное для качественного анализа. А уже при численном моделировании будет проведен расчет для интенсивности поля, с помощью интеграла Френеля и АВП-интеграла.

С помощью первого равенства (2.29) можно получить следующее полезное выражение:

$$s^*(s') = \frac{s'}{M(s') \frac{\sin \theta}{\sin \theta'}} . \quad (4)$$

Пусть распределение объекта  $I_0(s)$  задано вблизи оптической оси в интервале  $s \in (-s_0, s_0)$ , при этом имеет смысл рассматривать такие  $s'$ , чтобы  $s^*(s') \in (-s_0, s_0)$  (см. рисунок 29). Тогда при выполнении условия:

$$\frac{s_0}{f} M_0 \ll 1, \quad (5)$$

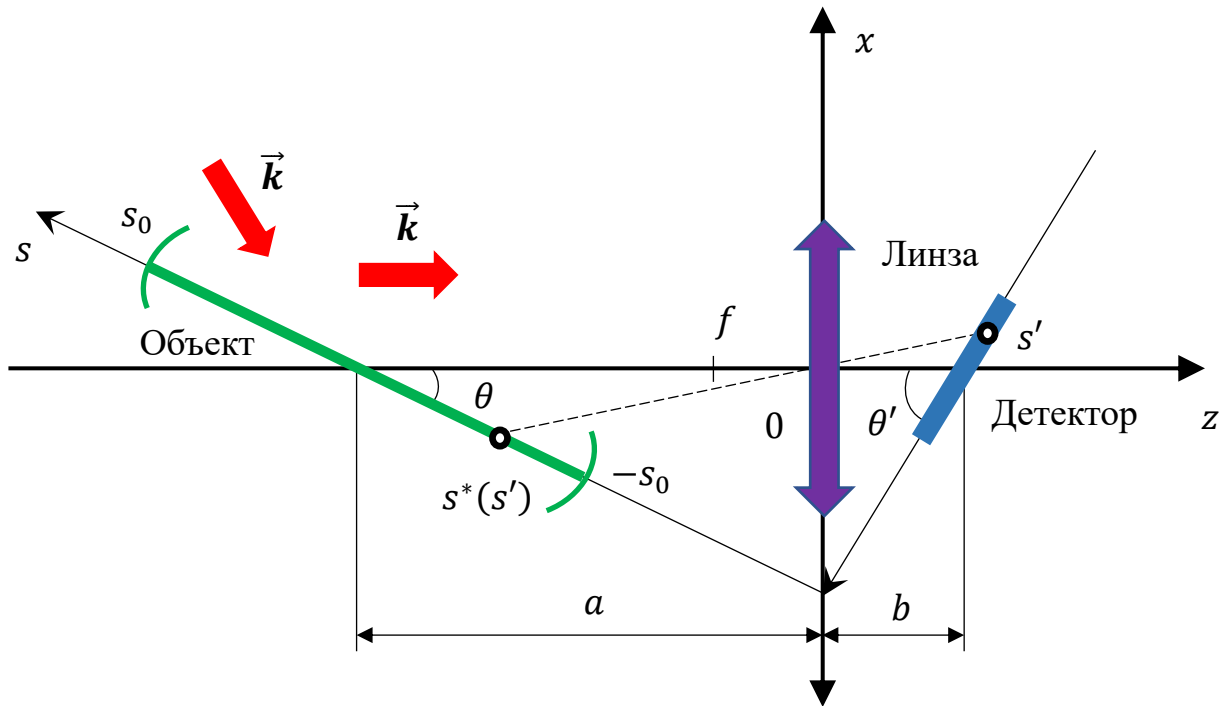
учитывая равенство (2) и формулу (4), имеем оценки:

$$M(s') \approx M_0, \quad s^*(s') \approx \frac{s'}{M_0 \frac{\sin \theta}{\sin \theta'}} . \quad (6)$$

В этом случае можно записать (1) в виде:

$$I(s') = \frac{1}{M_0} I_0 \left[ \frac{s'}{M(\theta)} \right], \quad (7)$$





**Рисунок 29.** Оптическая схема для получения уменьшенных изображений.

где коэффициент увеличения  $M(\theta)$  равен:

$$M(\theta) = M_0 \sqrt{1 + (M_0^2 - 1) \cos^2 \theta}, \quad (8)$$

поскольку, как легко получить, используя соотношение (2.24):

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta'} = \sqrt{1 + (M_0^2 - 1) \cos^2 \theta}, \quad (9)$$

Как видно из формулы (7), изображение получается в этом случае подобным объекту.

### 3.2. Трехмерный случай

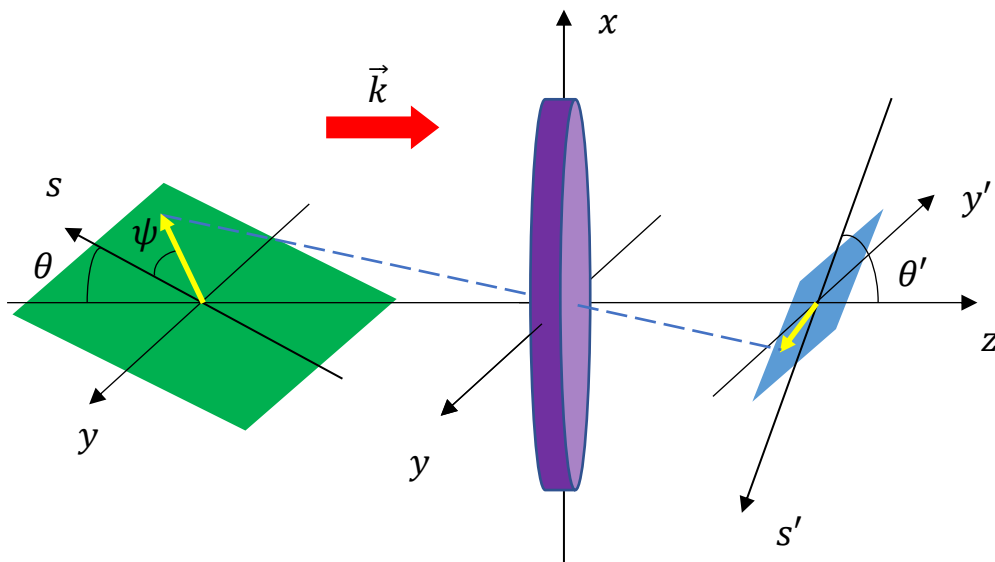
Можно убедиться, что в 3D-геометрии (см. рисунок 30) соответствующие выражения имеют вид:

$$I(s', y') = \frac{1}{M^2(s')} I_0 \left[ s^*(s'), \frac{y'}{M(s')} \right], \quad (10)$$

В формуле (10) распределения  $I(s', y')$  и  $I_0(s, y)$  соответствуют интенсивностям в плоскостях объекта и изображения, величины  $M(s')$  и  $s^*(s')$  совпадают с (2) и (3) соответственно. Вывод приближенной формулы (10) приведен в Приложении 4.

Если распределение объекта  $I_0(s, y)$  задано вблизи оптической оси в интервале  $s \in (-s_0, s_0)$ , тогда при выполнении условия (5) справедливо (6) и можно записать в этом случае (10) в виде:

$$I(s', y') = \frac{1}{M_0^2} I_0 \left[ \frac{s'}{M(\theta)}, \frac{y'}{M_0} \right], \quad (11)$$



**Рисунок 30.** Оптическая схема для получения уменьшенных изображений в трехмерном случае.

где  $M(\theta)$  задано в (8). Таким образом, по оси  $s'$  увеличение равно  $M(\theta)$ , а по оси  $y'$  -  $M_0$ . Приведем также формулу для  $M(\theta, \psi)$  – увеличения вдоль направления, заданного в плоскости объекта углом  $\psi$  (см. рисунок 30):

$$M(\theta, \psi) = M_0 \sqrt{1 + (M_0^2 - 1) \cos^2 \theta \cos^2 \psi}. \quad (12)$$

Формулы (11) и (12) обобщают результаты (7) и (8) на трехмерный случай.

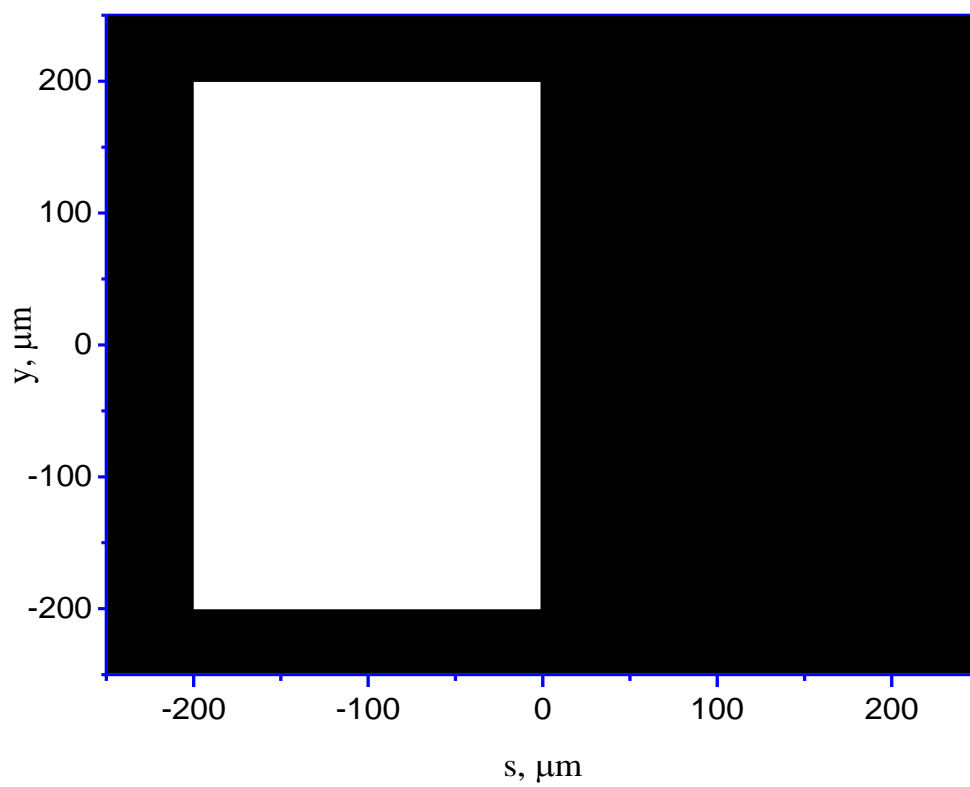
### 3.3. Получение уменьшенных изображений

Рассмотрим ситуацию, при которой  $M_0 \ll 1$  т.е.  $b \ll a$ . Качественно этот случай изображен на рисунке 29.

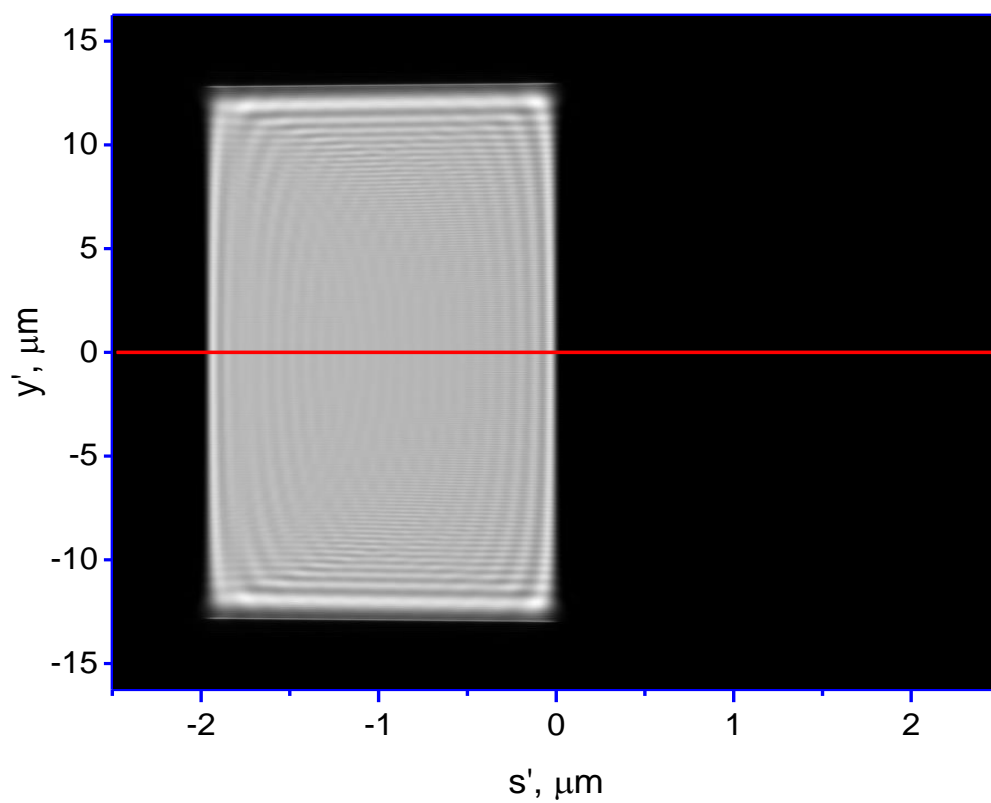
Приведем результаты расчета оптической схемы, обеспечивающей эффективное отражение излучения 13.9 нм на шаблон и в тоже время близкое к нормальному падение излучения на детектор, обеспечивающее эффективное поглощение, а также найдем ее разрешение.

Параметры были подобраны следующим образом: угол падения на шаблон (угол отражения от шаблона такой же)  $\theta = 0.14$  рад, фокусное расстояние линзы  $f = 1$  мм, расстояние от центра шаблона до линзы  $a = 16.3$  мм, расстояние от линзы до центра изображения  $b = 1.07$  мм, увеличение в направлении  $s$   $M(\theta) = 0.01$ , увеличение в направлении  $y$   $M_0 = 0.065$ , угол падения на детектор  $\theta' = 1.14$  рад, размеры шаблона в виде прямоугольника (см. рисунок 31)  $200 \times 400$  мкм<sup>2</sup> ( $s_0 = 250$  мкм). Поле внутри прямоугольника равно 1, вне его 0.

В результате численного моделирования было получено изображение (рисунок 32), которое не содержит различимых искажений формы и распределения интенсивности объекта.

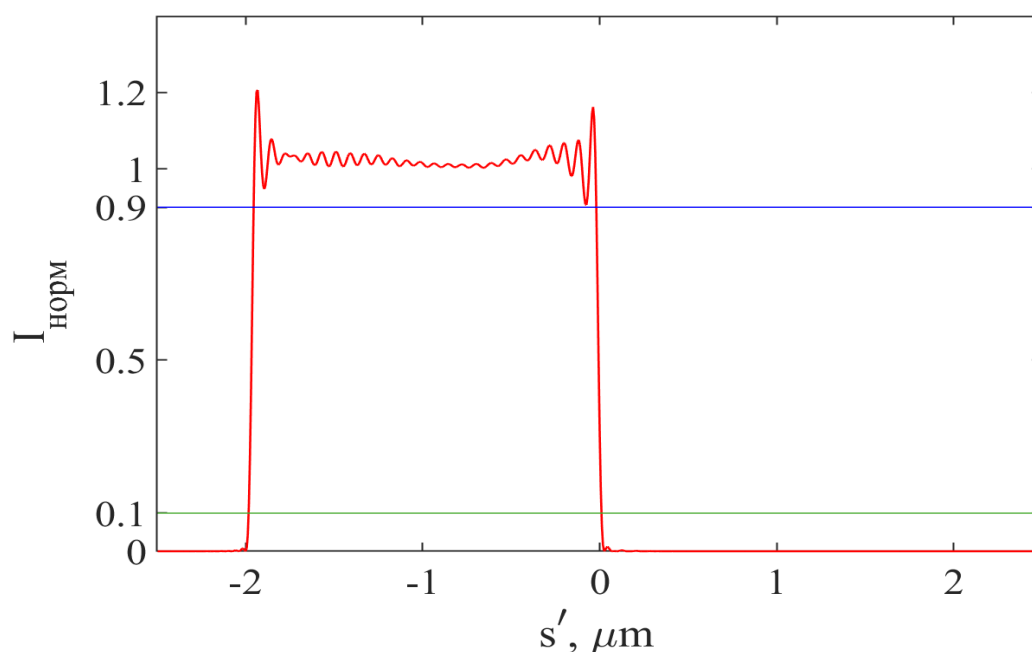


**Рисунок 31.** Распределение интенсивности тестового объекта – прямоугольника.



**Рисунок 32.** Распределение интенсивности на детекторе после прохождения излучения через оптическую схему.

Данный объект в виде прямоугольника специально был выбран, чтобы с помощью него найти разрешение этой оптической системы. Для количественной оценки разрешения был применен метод 10% - 90% [13]. Распределение интенсивности на рисунке 33 отвечает горизонтальной линии на рисунке 32. Также на рисунке 33 проведены два уровня – 10% и 90%. Получается по две точки пересечения линии интенсивности с каждым из этих 2-х уровней, обозначим координаты  $s$  этих точек как  $s_{i,10\%}$  и  $s_{i,90\%}$ ,  $i = 1,2$ . После чего прямоугольник сдвигался по оси  $s$ , и аналогичным образом находились координаты  $s_{i,10\%}$  и  $s_{i,90\%}$  точек пересечения графика интенсивности с линиями уровня уже для  $i = 3,4$ . Всего прямоугольник сдвигался вдоль оси  $s$  10 раз на одно и то же расстояние, так, что левая граница прямоугольника в конечном положении имела координату  $s = 0$  (см. рисунок 31). Далее был построен график  $\Delta$  от  $s$  по 20 точкам (рисунок 34 (а)), соответствующим «сторонам изображения прямоугольника» (2 «стороны» у каждого из 10 изображений прямоугольников), где  $\Delta_i = |s_{i,10\%} - s_{i,90\%}|$ , а  $s_i = (s_{i,10\%} + s_{i,90\%})/2$ .



**Рисунок 33.** Нормированное распределение интенсивности, соответствующее горизонтальной линии на рисунке 32.

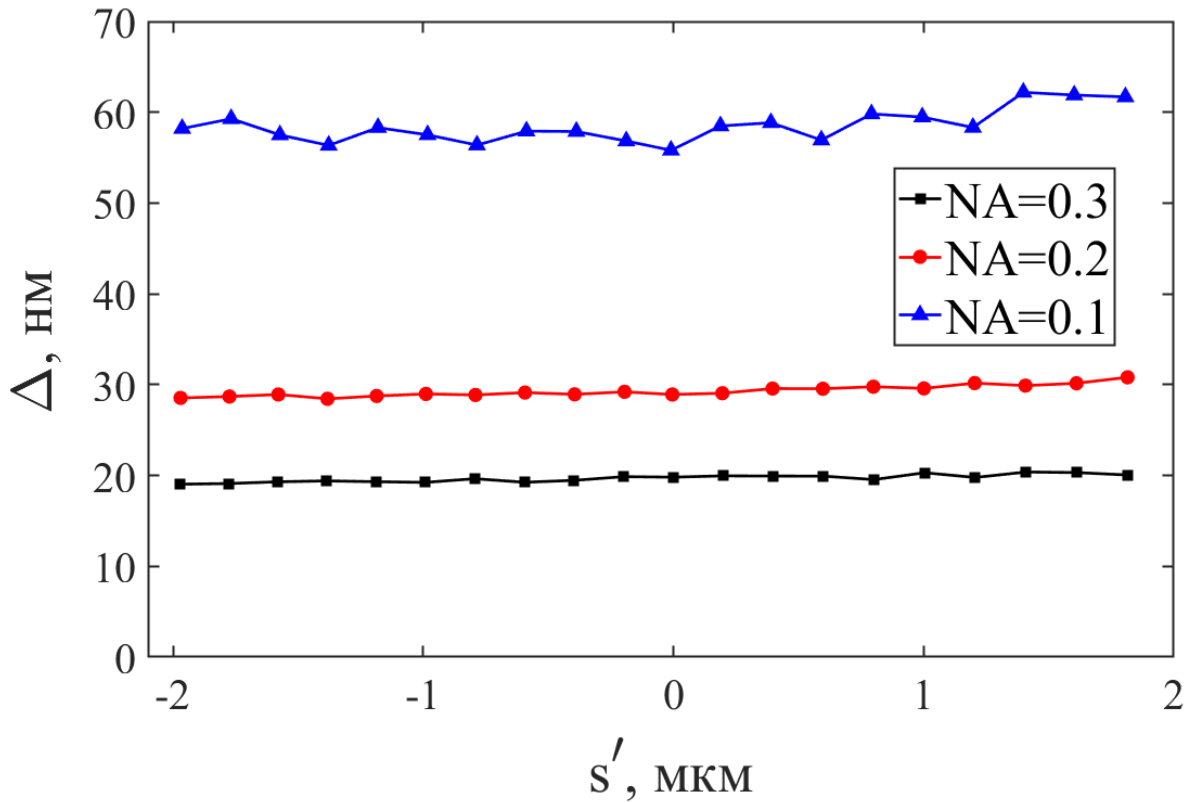


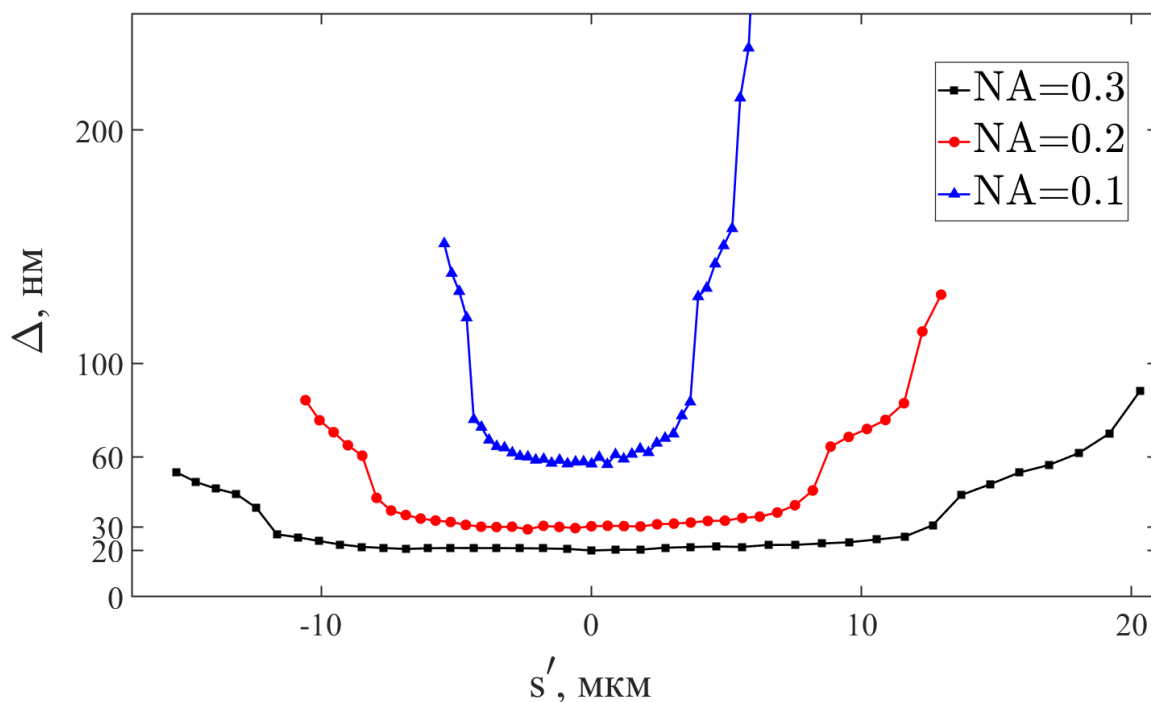
Рисунок 34 (а). Определение разрешения по оси  $s$  методом 10% - 90%.

$\Delta$  как раз и принимается в данном методе как разрешение. Таким образом, для оси  $s$  при значении апертуры  $NA=0.3$   $\Delta \approx 20$  нм, при  $NA=0.2$   $\Delta \approx 30$  нм, а для  $NA=0.1$   $\Delta \approx 60$  нм, что хорошо согласуется с известным законом  $\Delta \sim 1/NA$  (поскольку во всех трех случаях  $\Delta NA \approx 6$ ).

Таблица 2. Зависимость разрешения  $\Delta$  от числовой апертуры  $NA$ .

NA	$\Delta$ , нм
0.1	60
0.2	30
0.3	20

Сдвигая прямоугольник, изображенный на рисунке 31, в большем диапазоне значений координаты  $s$ , можно получить график, на котором была бы видна граница поля зрения такой оптической системы (см. рисунок 34 (б), таблицу 3).



**Рисунок 34 (б).** Определение разрешения по оси  $s$  методом 10% - 90%.

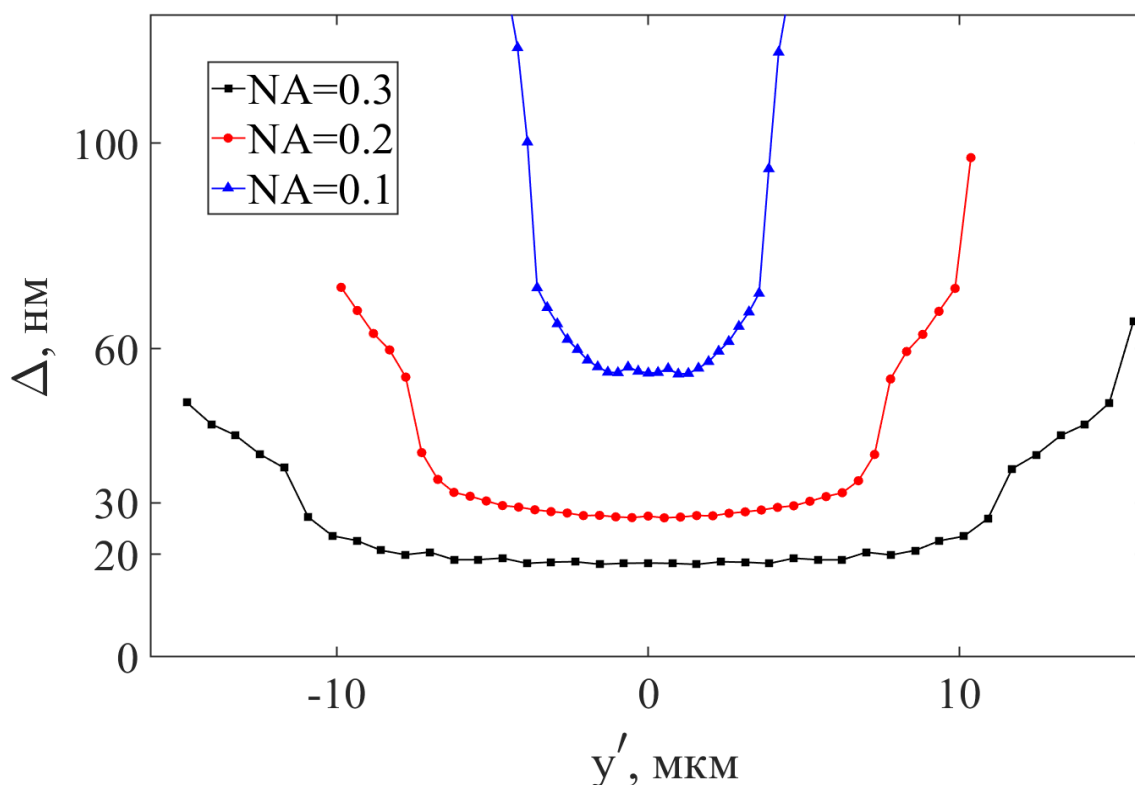
**Таблица 3.** Размер поля зрения в зависимости от числовой апертуры  $NA$ .

$NA$	$d$ , мкм
0.1	8
0.2	16
0.3	25

Аналогичным образом была рассчитана разрешающая способность схемы по оси  $y$  (см. рисунок 35).

Для оси  $y$  при значении апертуры  $NA = 0.3$   $\Delta \approx 20$  нм, при  $NA = 0.2$   $\Delta \approx 30$  нм, а для  $NA = 0.1$   $\Delta \approx 60$  нм, что хорошо коррелирует с известным законом  $\Delta \sim 1/NA$ .

Искажения, вносимые линзой с конечной апертурой, можно разделить на 2 вида: во-первых, это равномерное размытие изображения, полученного идеальной линзой, и во-вторых, геометрическая тень конечной апертуры. На рисунке 34 (а) присутствует только равномерное размытие, тогда как на рисунке 34 (б) показаны оба этих вида искажений. Проведенный анализ показал, что использование



**Рисунок 35.** Определение разрешения по оси  $y$  методом 10% - 90%.

когерентного излучения на длине волны 13.9 нм позволяет получать уменьшенные изображения при освещении масок под скользящими углами. При этом возможно получение наноструктур с деталями размером  $20 \div 30$  нм. Дифракция и наклон объекта никаких видимых искажений в подобие маски и ее изображения не вносит.

### 3.4. Обсуждение результатов и выводы по главе

Таким образом, предложен новый метод литографии с отражающей маской. Он допускает наклонное освещение шаблона когерентным пучком под углом меньше критического. Достоинством метода является возможность применения наклонных масок в широком диапазоне длин волн, в частности, вне досягаемости многослойной рентгеновской оптикой нормального падения. Например, при использовании лазеров на свободных электронах в диапазоне длин волн 4-0.1 нм [94].

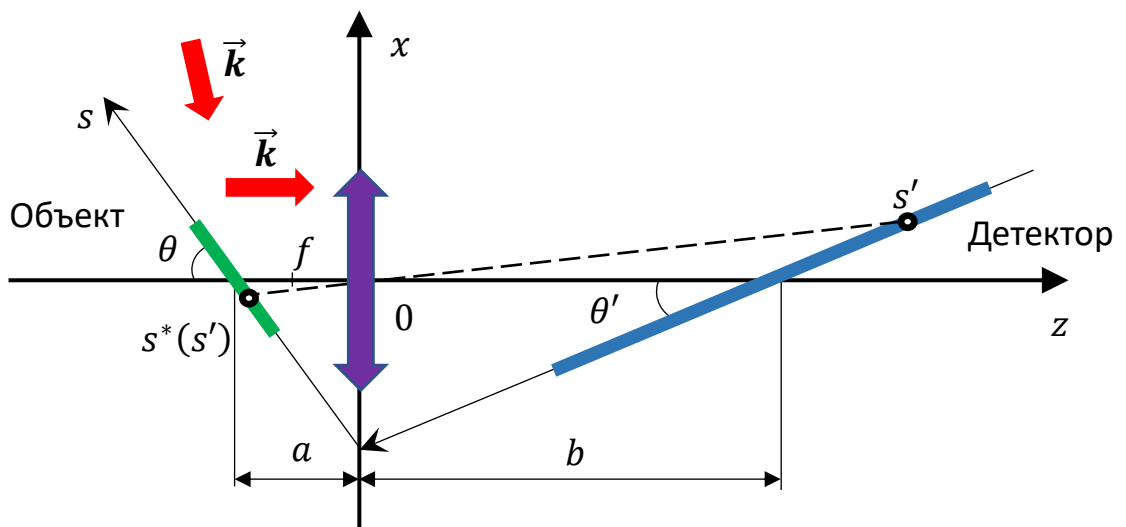


## Глава 4. Оптическая схема с увеличением (микроскопия) на отражении при скользящих углах падения

В этой главе представлена оптическая схема рентгеновского микроскопа, работающего на отражении от объекта под скользящими углами. С помощью численного моделирования выполнены оценки пространственного разрешения и поля зрения.

Все содержание параграфов 3.1 и 3.2 справедливо как для получения уменьшенных изображений ( $M(\theta) < 1$ ), что можно использовать, например, для литографии, так и для получения увеличенных ( $M(\theta) > 1$ ) изображений (микроскопии). Существенное различие между ними заключается в угле скольжения пучка по отношению к записывающей среде. В литографии он увеличивается  $\theta' > \theta$ , а в микроскопии уменьшается  $\theta' < \theta$ .

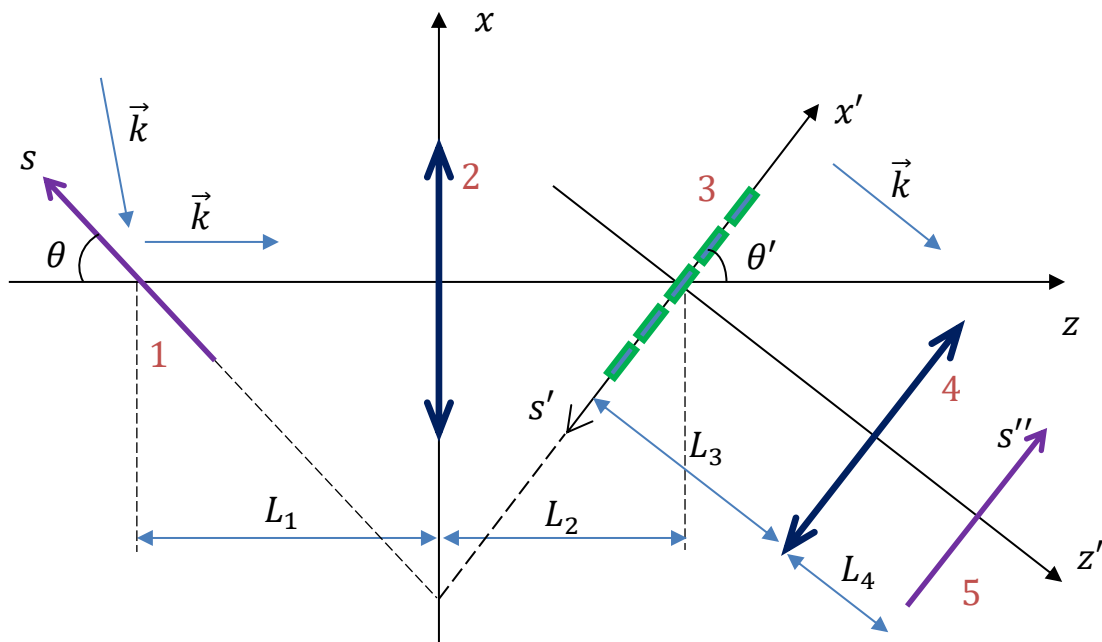
Как отмечалось выше, это создает дополнительную проблему. Действительно, излучение падает на детектор под углами, меньшими, чем на объект и, следовательно, будет отражаться вместо того, чтобы поглощаться (качественно эта ситуация представлена на рисунке 36). Эта проблема требует специального рассмотрения.



**Рисунок 36.** Оптическая схема для получения увеличенных изображений.

### 4.1. 2D – геометрия

Схема предлагаемого микроскопа изображена на рисунке 37. Излучение отражается от поверхности наклонного образца 1 и проходит через линзу 2. При этом формируемое линзой промежуточное изображение в приближении геометрической оптики получается на плоскости, оптически сопряженной с плоскостью объекта. Другими словами, объект и изображение лежат на луче, проходящем через линзу (см. рисунок 37). Как было показано в [А4], в параксиальной оптике это приближенно остается справедливым и для когерентных изображений.



**Рисунок 37.** Оптическая схема микроскопа (двумерный случай): 1 – объект; 2 и 4 – линзы; 3 – дифракционная решетка (фазовый экран); 5 – изображение (детектор). Плоскости объекта и дифракционной решетки являются оптически сопряженными относительно линзы 2, а плоскости решетки и изображения – оптически сопряженными относительно линзы 4.

Если поместить детектор в плоскости изображения, то угол скольжения  $\theta'$  по отношению к нему равен (2.24):

$$\operatorname{tg}\theta' = \frac{1}{M_0} \operatorname{tg}\theta \quad (1)$$

где  $M_0 = L_2/L_1$  – увеличение вертикально расположенного объекта. Увеличение  $M(\theta)$  наклонного объекта определяется формулой (3.8):

$$M^2(\theta) = M_0^2 \sin^2 \theta + M_0^4 \cos^2 \theta \quad (2)$$

которая, как показано в [A2], может быть получена путем преобразования амплитуды поля когерентного пучка.

Нетрудно проверить, что при больших значениях увеличения  $M(\theta)$ :

$$M_0 \approx \sqrt{\frac{M(\theta)}{\cos \theta}}, \quad (3)$$

т.е. по меньшей мере  $M_0 > 1$ . Отсюда с учетом (1) следует, что  $\theta' < \theta$ . То есть плоскость изображения располагается под углом еще меньшим, чем образец. Это обстоятельство крайне нежелательно из-за полного внешнего отражения не только от образца, но и от детектора.

Избежать этого можно, поместив в плоскость  $s'$  дифракционную решетку 3, направляющую пучок в перпендикулярном (к решетке) направлении (рисунок 37). Наконец, линза 4 переносит промежуточное изображение при нормальном падении на детектор 5.

Промежуточное изображение, его увеличение и положение определяется соотношениями из параграфа 3.1:

$$I(s') = \frac{1}{M_0} I_0 \left[ \frac{s'}{M(\theta)} \right], \text{ где} \quad (4)$$

$$M(\theta) = M_0 \frac{\sin \theta}{\sin \theta'}, \quad (5)$$

$$\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} = \frac{1}{f_1}, \quad \operatorname{tg}\theta' = \frac{1}{M_0} \operatorname{tg}\theta, \quad M_0 = \frac{L_2}{L_1}, \quad (6)$$

$M(\theta)$  - увеличение,  $f_1$  - фокусное расстояние линзы 2,  $I(s')$  и  $I_0(s)$  - интенсивности промежуточного изображения и объекта.

Таким образом, схема предлагаемого микроскопа состоит из двух частей, разделённых дифракционной решёткой. Выбор длины волны и геометрия каждой из них определяется конкретной задачей и имеющимися оптическими элементами. Задача первой части схемы, состоящей из объекта 1, линзы 2 и решетки 3, в том, чтобы развернуть излучение так, чтобы его можно было далее уже легко увеличить и записать. При этом значение увеличения  $M(\theta)$  на данной части оптической схемы принципиальной роли не играет. После решетки 3 излучение проходит через линзу 4 и падает нормально на детектор 5. Детектор находится на сопряженной с плоскостью решетки относительно линзы 4 плоскости. Это вторая часть оптической схемы. Она, собственно, окончательно и формирует увеличенное изображение [A3]. В видимом диапазоне длин волн похожие оптические схемы применяются в голографии [95-99].

#### 4.2. 3D – геометрия

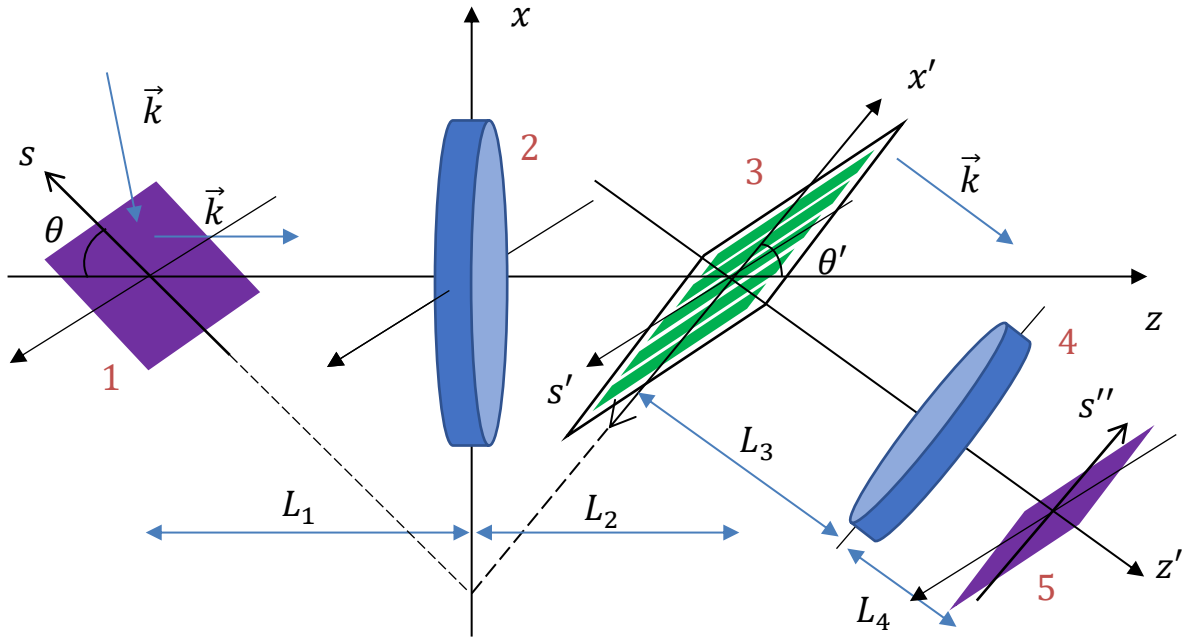
Приведем соответствующие выражения для трехмерного случая. Распределение интенсивности промежуточного изображения (см. рисунок 38) определяется выражением [A2]:

$$I(s', y') = \frac{1}{M_0^2} I_0 \left[ \frac{s'}{M(\theta)}, \frac{y'}{M_0} \right], \quad (7)$$

где  $M(\theta)$ ,  $M_0$  и соотношения между углами  $\theta$  и  $\theta'$  определяются так же, как и в двумерной геометрии формулами (5) и (6).

Таким образом, по оси  $s'$  увеличение равно  $M(\theta)$ , а по оси  $y'$  -  $M_0$ . Приведем также формулу для  $M(\theta, \psi)$  – увеличения вдоль направления заданного в плоскости объекта углом  $\psi$  (см. рисунок 38):

$$M(\theta, \psi) = M_0 \sqrt{1 + (M_0^2 - 1) \cos^2 \theta \cos^2 \psi} \quad (8)$$



**Рисунок 38.** Оптическая схема микроскопа (трехмерная геометрия): 1 – объект; 2 и 4 – линзы; 3 – дифракционная решетка (фазовый экран); 5 – изображение (детектор). Плоскости объекта и дифракционной решетки являются оптически сопряженными относительно линзы 2, а плоскости решетки и изображения – оптически сопряженными относительно линзы 4.

Формулы (7) и (8) обобщают результаты (4) и (5) на трехмерный случай.

### 4.3. Численное моделирование

Для оценки пространственного разрешения было проведено численное моделирование схемы на рисунке 37 для трехмерного случая (см. рисунок 38). С этой целью в плоскости объекта 1 задавалось тестовое распределение поля. Исходя из него, двигаясь вдоль оптической оси последовательно, рассчитывались поля в

плоскостях оптических элементов 2-4 с учетом преобразования поля этими элементами. После чего результирующее поле вычислялось в плоскости детектора 5.

Для расчета поля на левой поверхности линзы 2, создаваемого тестовым распределением в плоскости объекта 1, использовался аналог интеграла Френеля для наклонного расположения объекта (АВП - интеграл) [18] в 3-х мерном случае (1.64):

$$u(x, y, z) = \frac{k(x + ztg\theta)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dy' \int_{-\infty}^z \frac{u_0(y', z') dz'}{(z - z')^2} \times \exp \left\{ ik \frac{(y - y')^2 + (x + z'tg\theta)^2}{2(z - z')} \right\}, \quad x > -z \cos \theta. \quad (9)$$

Поле на правой стороне линзы получалось как произведение поля на левой стороне линзы и множителя, описывающего преобразование линзы:

$$T(x, y) = e^{-ik \frac{x^2 + y^2}{2f_1}}, \quad (10)$$

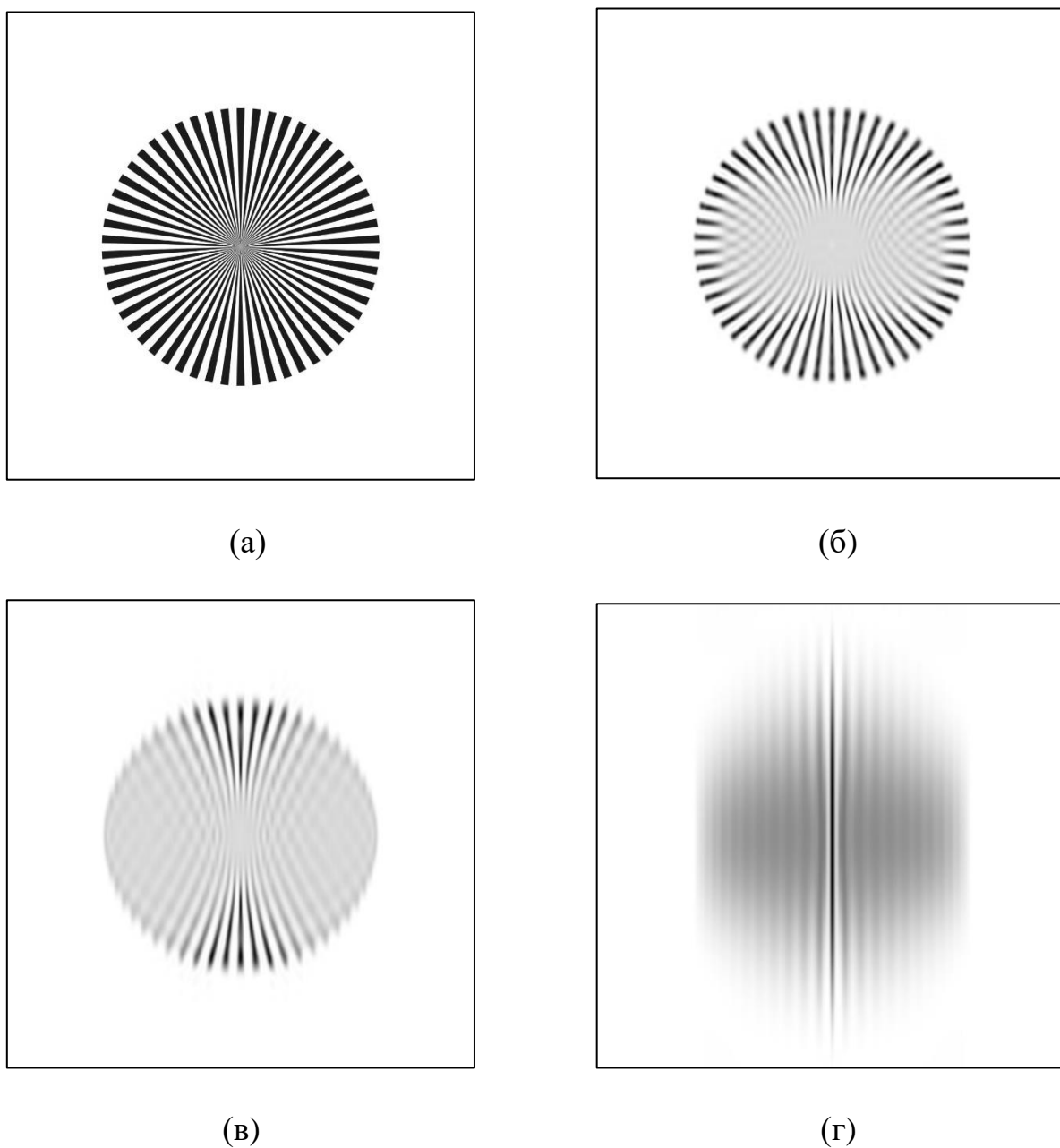
где  $f_1$  – фокусное расстояние линзы 2.

Затем для расчетов поля в плоскости промежуточного изображения 3 применялся обычный интеграл Френеля (1.23). Дифракционная решетка 3, не меняя амплитуды медленного поля  $u$ , поворачивает направление распространения на угол  $\frac{\pi}{2} - \theta'$ , т.е. после прохождения поля через решетку 3 излучение распространяется перпендикулярно ей.

Далее поле на линзе 4 рассчитывалось с помощью обычного интеграла Френеля. Линза 4 действует так же, как и линза 2 – по формуле (10), только с фокусным расстоянием  $f_2$ . После чего также с помощью интеграла Френеля получалось поле на детекторе. Расчеты поля наклонного объекта (9), так же, как и интеграл Френеля, выполнялись методом быстрого преобразования Фурье [42].

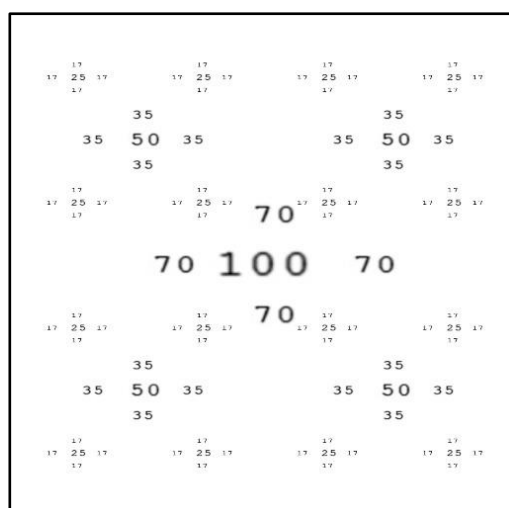
На рисунке 39 представлены результаты расчетов, из которых можно оценить

влияние угла наклона  $\theta$  на разрешение оптической системы (рисунок 37). Расчет проводился для следующих параметров:  $\lambda=13.9\text{нм}$ ,  $NA_1=0.025$ ,  $f_1=1\text{мм}$ ,  $NA_2=0.025$ ,  $f_2=1\text{мм}$ ,  $L_1=L_2=2f_1$ ,  $L_3=1.0127\text{мм}$ ,  $L_4=80\text{мм}$ . Объект наклонен под углом  $22.5^\circ$  (б),  $10^\circ$  (в) и  $1^\circ$  (г) к оптической оси. Размеры составляли:  $100\times 100\text{ мкм}^2$ . Для проверки слева на рис. 39(а) показаны результаты моделирования изображения вертикального объекта. Они мало отличаются от исходного поля в предметной плоскости.

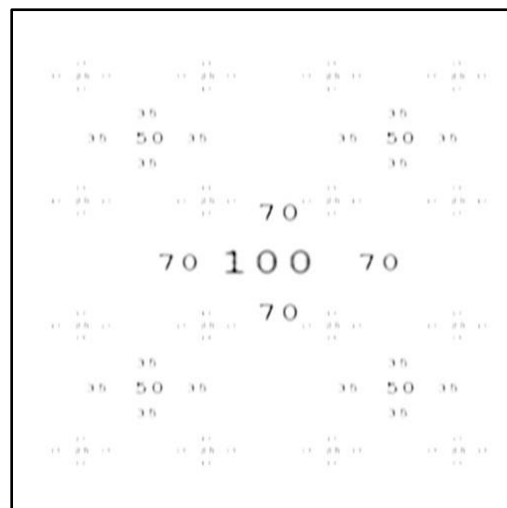


**Рисунок 39.** Тестовый объект в виде звезды (а) и результаты численного моделирования изображения объекта для различных углов скольжения пучка:  $\theta = 22.5$  (б),  $10$  (в) и  $1^\circ$  (г).

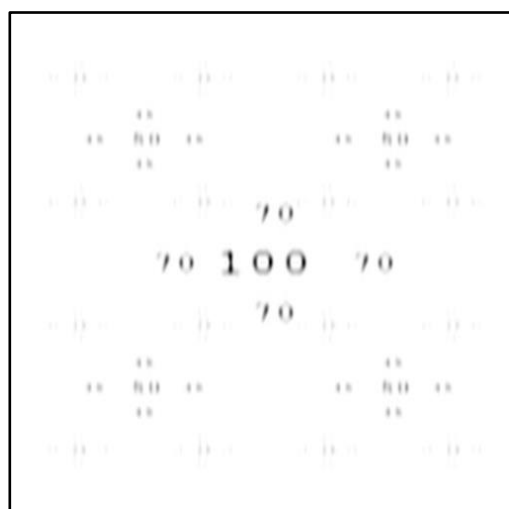
Рассмотрим теперь влияние апертуры второй линзы. Расчет проводился для следующих параметров:  $\lambda=13.9\text{нм}$ ,  $\theta=22.50^\circ$ ,  $NA_1=0.025$ ,  $f_1=1\text{мм}$ ,  $f_2=1\text{мм}$ ,  $L_1=L_2=2f_1$ ,  $L_3=1.0127\text{мм}$ ,  $L_4=80\text{мм}$ , при этом для апертуры второй линзы  $NA_2$  были выбраны значения 0.025, 0.05 и 0.01. Размеры объекта:  $100\times 100\text{ мкм}^2$ . Сравнение приведено на рисунке 40. Из него видно, что, как и следовало ожидать, уменьшение апертуры приводит к постепенному размытию изображений.



(а)



(б)



(в)



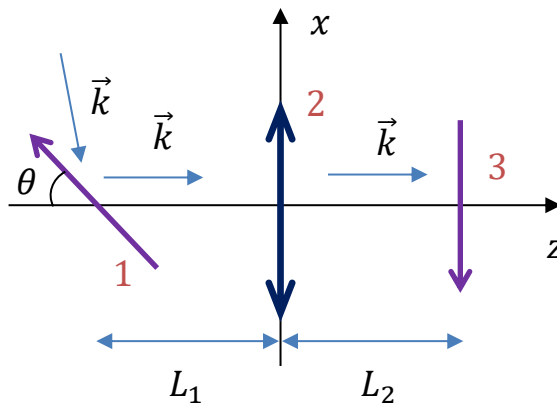
(г)

**Рисунок 40.** Тестовый объект в виде цифр различного размера, расположенных на разных расстояниях от оптической оси (а) и результаты численных расчетов изображения объекта для апертур второй линзы  $NA_2 = 0.05$  (б), 0.025 (в) и 0.01 (г).



Далее на рисунке 42 представлены результаты расчетов, с помощью которых можно сравнить схему на рисунке 37 и схему на рисунке 41, описанную в статье [2].

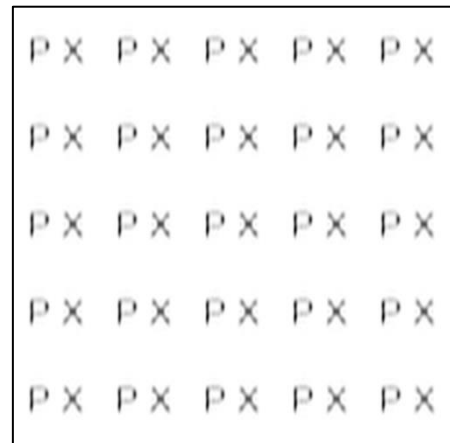
Тестовый объект (рисунок 42 (а)) был рассчитан для схемы на рисунке 37 при следующих параметрах  $\lambda=13.9\text{нм}$ ,  $NA_1=0.025$ ,  $f_1=1\text{мм}$ ,  $NA_2=0.025$ ,  $f_2=1\text{мм}$ ,  $L_1=L_2=2f_1$ ,  $L_3=1.01\text{мм}$ ,  $L_4=80\text{мм}$ ,  $\theta=22.50^\circ$  для рисунка 42 (б) и  $\theta=10^\circ$  для рисунка 42 (в). На рисунке 42 (г) показан результат расчета схемы на рисунке 41 при следующих параметрах:  $\lambda=13.9\text{нм}$ ,  $NA=0.025$ ,  $f=1\text{мм}$ ,  $L=80\text{мм}$ ,  $L_0=1.01\text{мм}$ ,  $\theta=22.50^\circ$ .



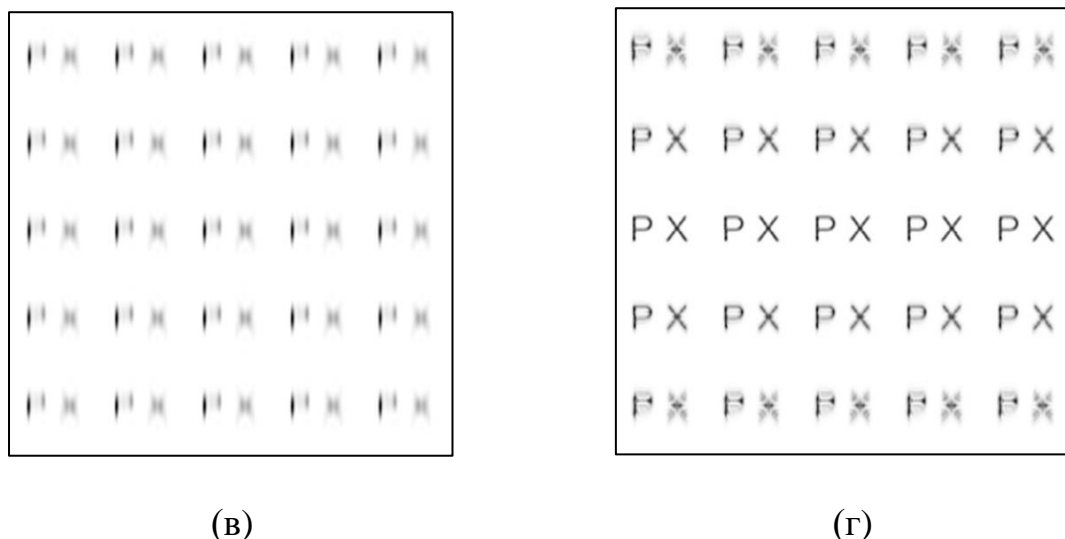
**Рисунок 41.** Упрощенная оптическая схема эксперимента, описанного в [2]: 1 – образец; 2 – линза (зонная пластинка Френеля); 3 – детектор.



(a)



(б)



**Рисунок 42.** Тестовый объект (а) и результаты численных расчетов для оптических схем, представленных на рисунке 37 (б) и (в) и рисунке 41 (г).

#### 4.4. Обсуждение результатов и выводы по главе

Отметим, что оптические элементы – линзы и дифракционная решетка, которые присутствуют в данной схеме и для которых проводилось численное моделирование, считались идеальными и характеризовались фазовыми экранами. В случае реальной решетки, естественно, ее изображение частично наложится на изображение объекта. Можно сказать, что решетка освещается промежуточным изображением. Искажение результирующего изображения в плоскости  $s''$  будет невелико, если характерный размер деталей промежуточного изображения больше, чем период решетки. Поэтому если на характерный размер элемента промежуточного изображения  $\delta$ , которое получается на входной поверхности решетки, приходится много периодов, т.е.  $\delta > d$ , то итоговое изображение несильно исказится рельефом или структурой решетки. Однако, если этот элемент изображения сравним по длине с периодом решетки, то появятся существенные искажения. Что же касается периода решетки  $d$ , то согласно основной формуле для дифракционной решетки:

$$d = \frac{n\lambda}{\cos \theta'}. \quad (11)$$

Отсюда, появляется дополнительное ограничение на размер  $\delta$  элемента изображения на решетке:  $\delta \geq \lambda$ .

Таким образом, в настоящей работе предложена оптическая схема отражательного рентгеновского микроскопа, работающего при скользких углах падения излучения на объект. Тем самым, снимаются ограничения, связанные с низкой отражательной способностью исследуемых образцов. Оптическая схема включает два фокусирующих элемента и дифракционную решетку, обеспечивающую нормальное падение пучка на детектор. Предложенный микроскоп обладает значительно большим полем зрения по сравнению с простейшей схемой, основанной на одном оптическом элементе (зонной пластинке в случае [2]). Модельные расчеты и сравнение с экспериментом выполнены для длины волны  $\lambda=13.9$  нм лабораторных рентгеновских лазеров.

Результаты работы могут представлять интерес для исследования поверхностей на наноуровне<sup>11</sup>, а также субмикронной диагностики электронных пучков по переходному излучению в ВУФ диапазоне.

---

<sup>11</sup> В этом случае подобный микроскоп может быть сопряжен с другими рентгеновскими методами исследований образцов при скользком падении.

## Заключение

1. С помощью полученного ранее Артюковым, Виноградовым и Поповым дифракционного интеграла, найдено оптическое преобразование, определяющее ориентацию, амплитуду и фазу изображений плоских наклонных объектов. Данное оптическое преобразование позволяет моделировать получение изображения фазовых объектов.
2. Методами волновой оптики аналитически и численно показано, что наилучшее качество изображения наклонного объекта достигается на наклонной плоскости, оптически сопряженной с плоскостью расположения объекта, и получена формула, связывающая амплитуду и, что особенно важно, фазу полей на объекте и детекторе в двумерном и трехмерном случаях.
3. В рамках предложенного теоретического подхода рассмотрена практически важная для освоения новых диапазонов рентгеновских волн схема оптической литографии с наклонной отражающей маской и освещением шаблона рентгеновским когерентным пучком под скользящими углами меньше критического угла ( $0.1 - 20^\circ$ ). Достоинством схемы является возможность применения наклонных отражающих масок в диапазоне длин волн  $0.1 - 50$  нм, в том числе, за пределами рабочего спектрального диапазона многослойной рентгеновской оптики нормального падения.
4. Проведён анализ оптической схемы построения отражательного рентгеновского микроскопа, работающего при скользящих углах падения излучения на плоский объект. Показано, что в такой оптической схеме снимаются ограничения, связанные с низкой отражательной способностью исследуемых образцов в диапазоне длин волн короче  $20$  нм. Рассмотренная схема обладает равномерной четкостью по всему полю зрения в отличие от схемы, основанной на нормальном падении.

5. Численное моделирование рассмотренных схем на рабочей длине волны излучения 13.9 нм подтвердило возможность получения качественных изображений наклонных плоских объектов. Разработанная методика позволила определить пространственное разрешение и поле зрения с наклонным объектом и детектором.

## **Благодарности**

Автор выражает огромную благодарность научному руководителю А. В. Виноградову за научное руководство. Также выражаю признательность сотрудникам Лаборатории рентгеновской оптики И. А. Артюкову, Р. М. Фещенко и Н. Л. Попову за полученные благодаря им знания и умения, а также за всестороннюю помощь в работе, невероятное терпение. Автор выражает благодарность А. Н. Путилину за ценные замечания в его рецензии и И. Н. Компанцу за обсуждение формулировок в диссертации.

## Список публикаций по теме диссертации

### **А. Публикации в рецензируемых научных изданиях, индексируемых в международной базе данных Web of Science**

A1. Бусаров А. С., Виноградов А. В., Попов Н. Л. 2D-моделирование когерентных изображений наклонных объектов //Краткие сообщения по физике Физического института им. ПН Лебедева Российской Академии Наук. – 2016. – Т. 43. – №. 4. – С. 3-11.

A2. Артюков И. А., Бусаров А. С., Виноградов А. В., Попов Н. Л. О получении уменьшенных рентгеновских изображений при отражении излучения от шаблона под критическими углами //Квантовая электроника. – 2016. – Т. 46. – №. 9. – С. 839-844.

A3. Артюков И. А., Бусаров А. С., Виноградов А. В., Попов Н. Л. О лазерной отражательной рентгеновской микроскопии наклонных объектов //Квантовая электроника. – 2018. – Т. 48. – №. 7. – С. 662-666.

A4. I. A. Artyukov, A. S. Busarov, N. L. Popov, A. V. Vinogradov, "Optical Transforms Related to Coherent Imaging of Inclined Objects," in X-Ray Lasers 2012 (Springer International Publishing, 2014), pp. 19-27.

A5. I. A. Artyukov, A. S. Busarov, N. L. Popov, A. V. Vinogradov The approach to reflection x-ray microscopy below the critical angles //X-ray Lasers and Coherent X-ray Sources: Development and Applications. – Proceedings of SPIE, 2017. – Т. 10243. – С. 132-136.

A6. I. A. Artyukov, A. S. Busarov, N. L. Popov, A. V. Vinogradov X-Ray Reflection Imaging of Inclined and Obliquely Illuminated Objects //X-Ray Lasers 2016: Proceedings of the 15th International Conference on X-Ray Lasers 15. – Springer International Publishing, 2018. – С. 243-250.

## **В. Тезисы докладов в сборниках трудов конференций**

- В1. И.А. Артюков, А.С.Бусаров, А.В.Виноградов, Н.Л. Попов, «Когерентная рентгеновская отражательная микроскопия при освещении объекта под скользящими углами», VII Международная Конференция по Фотонике и Информационной Оптике, МИФИ, Москва, 2018, С.234-235.
- В2. И.А. Артюков, А.С.Бусаров, А.В.Виноградов, Н.Л. Попов, «Рентгеновская литография и микроскопия при наклонном расположении масок и объектов», VI Международная Конференция по Фотонике и Информационной Оптике, МИФИ, Москва, 2017, С. 231-232.
- В3. А.С.Бусаров, А.В.Виноградов, Н.Л. Попов, «Когерентная рентгеновская микроскопия при наклонном освещении отражающих объектов», V Международная Конференция по Фотонике и Информационной Оптике, МИФИ, Москва, 2016, С. 175.
- В4. А.С.Бусаров, А.В.Виноградов, Н.Л. Попов, «Получение и перенос изображений наклонных объектов когерентными рентгеновскими пучками», IV Международная Конференция по Фотонике и Информационной Оптике, МИФИ, Москва, 2015, С. 149-150.
- В5. А.С. Бусаров, А.В. Виноградов, Н.Л. Попов, «Проблемы получения рентгеновских изображений при когерентном освещении объектов», Сборник материалов Седьмого международного научного семинара и Пятой международной молодежной научной школы-семинара "Современные методы анализа дифракционных данных и актуальные проблемы рентгеновской оптики", В. Новгород, 2015, С. 43.
- В6. А.С. Бусаров, «Получение изображений и литография в рентгеновском диапазоне при отражении когерентного излучения от образца под малым углом скольжения», XXVII Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов», МГУ, 10 - 27 ноября 2020 (ISBN 978-5-317-06417-4), [https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov\\_2020/data/section\\_34\\_19489.htm](https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2020/data/section_34_19489.htm).

## Список литературы

- [1] Fenter P., Park C., Zhang Z., Wang S. Observation of subnanometre-high surface topography with X-ray reflection phase-contrast microscopy //Nature Physics. – 2006. – Т. 2. – №. 10. – С. 700-704.
- [2] Baba M., Nishikino M., Hasegawa N., Tomita T. et al. Submicron scale image observation with a grazing incidence reflection-type single-shot soft X-ray microscope //Japanese Journal of Applied Physics. – 2014. – Т. 53. – №. 8. – С. 080302.
- [3] Laanait N., Callagon E.B.R., Zhang Z., Sturchio N.C. et al. X-ray-driven reaction front dynamics at calcite-water interfaces //Science. – 2015. – Т. 349. – №. 6254. – С. 1330-1334.
- [4] Jacobsen C. X-ray Microscopy. – Cambridge University Press, 2019.
- [5] Wachulak P. W., Capeluto M. G., Marconi M. C., Menoni C. S., Rocca J. J. Patterning of nano-scale arrays by table-top extreme ultraviolet laser interferometric lithography //Optics Express. – 2007. – Т. 15. – №. 6. – С. 3465-3469.
- [6] Li W., Marconi M. C. Extreme ultraviolet Talbot interference lithography //Optics Express. – 2015. – Т. 23. – №. 20. – С. 25532-25538.
- [7] Pirati A., Peeters R., Smith D., Lok S. et al. Performance overview and outlook of EUV lithography systems //Extreme Ultraviolet (EUV) Lithography VI. – SPIE, 2015. – Т. 9422. – С. 554-571.
- [8] Otsuka T., Li B., O'Gorman C., Cummins T. et al. A 6.7-nm beyond EUV source as a future lithography source //Extreme Ultraviolet (EUV) Lithography III. – SPIE, 2012. – Т. 8322. – С. 342-351.



- [9] Hector S., Mangat P. Review of progress in extreme ultraviolet lithography masks //Journal of Vacuum Science & Technology B: Microelectronics and Nanometer Structures Processing, Measurement, and Phenomena. – 2001. – T. 19. – №. 6. – C. 2612-2616.
- [10] Andreev S.S., Bibishkin M.S., Chkhalo N.I., Kluev E.B. et al. Short-period multilayer X-ray mirrors //Journal of Synchrotron Radiation. – 2003. – T. 10. – №. 5. – C. 358-360.
- [11] Grandsaert Jr T. J. Synchrotrons as a Source for Soft X-Ray Lithography. – 2021.
- [12] Nishikino M., Hasegawa N., Kawachi T., Yamatani H. et al. Characterization of a high-brilliance soft x-ray laser at 13.9 nm by use of an oscillator-amplifier configuration //Applied Optics. – 2008. – T. 47. – №. 8. – C. 1129-1134.
- [13] Attwood, D. and Sakdinawat, A., X-rays and Extreme Ultraviolet Radiation, Cambridge University Press, second edition (2017).
- [14] Schelokov I. A., Basov Y. A. Zone plates for X-ray optics at grazing incidence angles //Journal of Physics D: Applied Physics. – 1996. – T. 29. – №. 1. – C. 129.
- [15] Zhang H., Liu J., Zhai M., Zhou Y. et al. Theoretical analysis and experimental validation of sampling volume in tilted imaging system //IEEE Photonics Journal. – 2015. – T. 7. – №. 6. – C. 1-12.
- [16] Onural L. Exact solution for scalar diffraction between tilted and translated planes using impulse functions over a surface //JOSA A. – 2011. – T. 28. – №. 3. – C. 290-295.
- [17] Matsushima K., Schimmel H., Wyrowski F. Fast calculation method for optical diffraction on tilted planes by use of the angular spectrum of plane waves //JOSA A. – 2003. – T. 20. – №. 9. – C. 1755-1762.

- [18] Artyukov I. A., Popov A. V., Vinogradov A. V. Wave field transformation at coherent imaging of a tilted reflection mask //Soft X-Ray Lasers and Applications VIII. – SPIE, 2009. – Т. 7451. – С. 248-250.
- [19] Леонтович М. А., Фок В. А., Решение задачи о распространении электромагнитных волн вдоль поверхности земли по методу параболического уравнения. ЖЭТФ, 1946, т. 16, № 7, стр. 557.
- [20] Власов С. Н., Таланов В. И. Параболическое уравнение в теории распространения волн (к 50-ти летию первой публикации) //Известия ВУЗов. Радиофизика. – 1995. – Т. 38. – №. 1-2. – С. 3-19.
- [21] Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П. Теория волн. – М.: URSS, 2019.
- [22] Ландсберг Г. С., Оптика, М.: Физматлит, 2017.
- [23] С. А. Ахманов, С. Ю., Никитин, Физическая оптика, М.: Наука, 2004.
- [24] Борн М., Вольф Э. Основы оптики: Пер. с англ. – Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1973.
- [25] Levy M.F. Parabolic equation method for electromagnetic wave propagation. London. IEE. 2000.
- [26] Киселев А. П. Локализованные световые волны: параксиальные и точные решения волнового уравнения (обзор) //Оптика и спектроскопия. – 2007. – Т. 102. – №. 4. – С. 661-681.
- [27] Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел, М.: Наука, 1964.
- [28] Полянин А. Д., Справочник по линейным уравнениям математической физики, М.: Физматлит, 2001.

- [29] Artyukov I.A., Mitrofanov A.N., Popov A.V., Popov N.L. et al. Theory and computation towards coherent reflection imaging of tilted objects //X-Ray Lasers 2010. – Springer, Dordrecht, 2011. – С. 329-340.
- [30] Artyukov I. A., Feshchenko R.M., Popov N.L., Vinogradov A.V. Coherent scattering from tilted objects //Journal of Optics. – 2014. – Т. 16. – №. 3. – С. 035703.
- [31] Артюков И.А., Виноградов А.В., Попов Н.Л., Селезнев В.Н. О моделировании задач когерентной оптики скользящего падения //Квантовая электроника. – 2012. – Т. 42. – №. 2. – С. 140-142.
- [32] Kelly D. P. Numerical calculation of the Fresnel transform //JOSA A. – 2014. – Т. 31. – №. 4. – С. 755-764.
- [33] Bracewell R., The Fourier transform and its applications // McGraw Hill, 2000.
- [34] Cooley J. W., Tukey J. W. An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series //Mathematics of computation. – 1965. – Т. 19. – №. 90. – С. 297-301.
- [35] Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. – Рипол Классик, 1978.
- [36] Mendlovic D., Zalevsky Z., Konforti N. Computation considerations and fast algorithms for calculating the diffraction integral //Journal of Modern Optics. – 1997. – Т. 44. – №. 2. – С. 407-414.
- [37] Modregger P, Lübbert D., Schäfer P., Köhler R. et al. Fresnel diffraction in the case of an inclined image plane //Optics express. – 2008. – Т. 16. – №. 7. – С. 5141-5149.

- [38] Mas D., Perez J., Hernández C., Vázquez C. et al. Fast numerical calculation of Fresnel patterns in convergent systems //Optics communications. – 2003. – Т. 227. – №. 4-6. – С. 245-258.
- [39] Sziklas E. A., Siegman A. E. Diffraction calculations using fast Fourier transform methods //Proceedings of the IEEE. – 1974. – Т. 62. – №. 3. – С. 410-412.
- [40] Mas D., Garcia J., Ferreira C., Bernardo L.M. et al. Fast algorithms for free-space diffraction patterns calculation //Optics communications. – 1999. – Т. 164. – №. 4-6. – С. 233-245.
- [41] Епатко И.В., Малютин А.А., Серов Р.В., Соловьев Д.А. и др. Новый алгоритм численного моделирования распространения лазерного излучения //Квантовая электроника. – 1998. – Т. 25. – №. 8. – С. 717-722.
- [42] Delen N., Hooker B. Free-space beam propagation between arbitrarily oriented planes based on full diffraction theory: a fast Fourier transform approach //JOSA A. – 1998. – Т. 15. – №. 4. – С. 857-867.
- [43] Мишетт А. Г. Оптика мягкого рентгеновского излучения. – Мир, 1989.
- [44] Kirkpatrick P., Baez A. V. Formation of optical images by X-rays //JOSA. – 1948. – Т. 38. – №. 9. – С. 766-774.
- [45] Bajt S., Stearns D. G., Kearney P. A. Investigation of the amorphous-to-crystalline transition in Mo/Si multilayers //Journal of Applied Physics. – 2001. – Т. 90. – №. 2. – С. 1017-1025.
- [46] Bajt S., Alameda J.B., Barbee Jr T.W., Clift W.M. et al. Improved reflectance and stability of Mo/Si multilayers //Optical engineering. – 2002. – Т. 41. – №. 8. – С. 1797-1804.
- [47] Виноградов А.В., Брытов И.А., Грудский А.Я. и др. Зеркальная рентгеновская оптика. – Машиностроение, Ленингр. отд-ние, 1989.

- [48] Vinogradov A. V., Zeldovich B. Y. X-ray and far uv multilayer mirrors: principles and possibilities //Applied optics. – 1977. – T. 16. – №. 1. – C. 89-93.
- [49] Spiller E. 14. Reflecting Optics: Multilayers //Experimental Methods in the Physical Sciences. – Academic Press, 1998. – T. 31. – C. 271-288.
- [50] Barbee Jr T. W., Keith D. L. Synthesis of metastable materials by sputter deposition techniques //Synthesis and Properties of Metastable Phases. – 1980. – C. 93-113.
- [51] Underwood J. H., Barbee Jr T. W., Keith D. C. Layered synthetic microstructures: properties and applications in x-ray astronomy //Space Optics Imaging X-Ray Optics Workshop. – SPIE, 1979. – T. 184. – C. 123-130.
- [52] Folta J.A., Bajt S., Barbee Jr T.W., Grabner R.F. et al. Advances in multilayer reflective coatings for extreme ultraviolet lithography //Emerging Lithographic Technologies III. – SPIE, 1999. – T. 3676. – C. 702-709.
- [53] Stearns D. G., Rosen R. S., Vernon S. P. Multilayer mirror technology for soft-x-ray projection lithography //Applied Optics. – 1993. – T. 32. – №. 34. – C. 6952-6960.
- [54] Kearney P. A., Moore C.E., Tan S.I., Vernon S.P. et al. Mask blanks for extreme ultraviolet lithography: ion beam sputter deposition of low defect density Mo/Si multilayers //Journal of Vacuum Science & Technology B. – 1997. – T. 15. – №. 6. – C. 2452-2454.
- [55] Windt D. L., Waskiewicz W. K. Multilayer facilities required for extreme-ultraviolet lithography //Journal of Vacuum Science & Technology B, Measurement, and Phenomena. – 1994. – T. 12. – №. 6. – C. 3826-3832.

- [56] Kortright J. B., Gullikson E. M., Denham P. E. Masked deposition techniques for achieving multilayer period variations required for short-wavelength (68-Å) soft-x-ray imaging optics //Applied optics. – 1993. – T. 32. – №. 34. – C. 6961-6968.
- [57] Falco C. M., Slaughter J. M. Characterization of metallic multilayers for X-ray optics //Journal of magnetism and magnetic materials. – 1993. – T. 126. – №. 1-3. – C. 3-7.
- [58] Ruffner J.A., Slaughter J.M., Eickmann J., Falco C.M. Epitaxial growth and surface structure of (0001) Be on (111) Si //Applied physics letters. – 1994. – T. 64. – №. 1. – C. 31-33.
- [59] Gaponov S.V., Gusev S. A., Luskin B. M., Salashchenko N. N. et al. Long-wave X-ray radiation mirrors //Optics communications. – 1981. – T. 38. – №. 1. – C. 7-9.
- [60] Windt D.L., Donguy S., Hailey C.J., Koglin J. et al. W/SiC x-ray multilayers optimized for use above 100 keV //Applied optics. – 2003. – T. 42. – №. 13. – C. 2415-2421.
- [61] Harrison F.A., Craig W.W., Christensen F.E., Hailey C.J. et al. The nuclear spectroscopic telescope array (NuSTAR) high-energy X-ray mission //The Astrophysical Journal. – 2013. – T. 770. – №. 2. – C. 103.
- [62] Fernández-Perea M., Descalle M.-A., Soufli R., Ziock K.P. et al. Physics of reflective optics for the soft gamma-ray photon energy range //Physical review letters. – 2013. – T. 111. – №. 2. – C. 027404.
- [63] Brejnholt N.F., Soufli R., Descalle M.A., Fernández-Perea M. et al. Demonstration of multilayer reflective optics at photon energies above 0.6 MeV //Optics express. – 2014. – T. 22. – №. 13. – C. 15364-15369.
- [64] Loewen E. G., Popov E., Diffraction gratings and applications. – CRC Press, 2018.

- [65] Voronov D.L., Park S., Gullikson E.M., Salmassi F. et al. 6000 lines/mm blazed grating for a high-resolution x-ray spectrometer //Optics express. – 2022. – T. 30. – №. 16. – C. 28783-28794.
- [66] Morrison G.R., "Diffractive X-Ray Optics," Chapter 8 in X-Ray Science and Technology.
- [67] Rayleigh L., "Wave Theory," p. 429 in Encyclopaedia Britannica, Ninth Edition, Vol. 24, (1988).
- [68] Baez A.V. A study in diffraction microscopy with special reference to x-rays //JOSA. – 1952. – T. 42. – №. 10. – C. 756-762.
- [69] Ojeda-Castañeda S. J., Gómez-Reino C., Editors, Selected Papers on Zone Plates (SPIE,Bellingham, WA, 1996).
- [70] Schmahl G., Rudolph D., Guttman P., Christ O. Zone plates for x-ray microscopy //X-Ray Microscopy: Proceedings of the International Symposium, Göttingen, Fed. Rep. of Germany, September 14–16, 1983. – Springer Berlin Heidelberg, 1984. – C. 63-74.
- [71] Schmahl G., Rudolph D., Niemann B. Status Of The Zone Plate Microscope //High Resolution Soft X-Ray Optics. – SPIE, 1982. – T. 316. – C. 100-102.
- [72] Kirz J. Phase zone plates for x rays and the extreme uv //JOSA. – 1974. – T. 64. – №. 3. – C. 301-309.
- [73] Snigirev A., Kohn V., Snigireva I., Lengeler B. A compound refractive lens for focusing high-energy X-rays //Nature. – 1996. – T. 384. – №. 6604. – C. 49-51.
- [74] Snigirev A., Kohn V., Snigireva I., Souvorov A. Focusing high-energy x rays by compound refractive lenses //Applied optics. – 1998. – T. 37. – №. 4. – C. 653-662.

- [75] Lengeler, B., Tümmler J., Snigirev A., Snigireva I. et al. Transmission and gain of singly and doubly focusing refractive x-ray lenses //Journal of Applied Physics. – 1998. – Т. 84. – №. 11. – С. 5855-5861.
- [76] Lengeler B., Schroer C.G., Benner B., Günzler T.F. et al. Parabolic refractive X-ray lenses: a breakthrough in X-ray optics //Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A. – 2001. – Т. 467. – С. 944-950.
- [77] Lengeler B., Schroer C.G., Kuhlmann M., Benner B. et al. Refractive x-ray lenses //Journal of Physics D: Applied Physics. – 2005. – Т. 38. – №. 10A. – С. A218.
- [78] Snigirev A., Snigireva I., Grigoriev M., Yunkin V. et al. High energy X-ray nanofocusing by silicon planar lenses //Journal of Physics: Conference Series. – IOP Publishing, 2009. – Т. 186. – №. 1. – С. 012072.
- [79] Chollet M., Alonso-Mori R., Cammarata M., Damiani D. et al. The x-ray pump-probe instrument at the linac coherent light source //Journal of synchrotron radiation. – 2015. – Т. 22. – №. 3. – С. 503-507.
- [80] Д. В. Сивухин. Общий курс физики. Т. 4. Оптика., М.:Физматлит, 2005.
- [81] Сойфер В. А. Оптические преобразования //Самара:[Изд-во СГАУ]. – 2007.
- [82] Дж. Гудмен, Введение в Фурье-оптику, М.: МИР, 1970.
- [83] Стюард И. Г., Введение в Фурье-оптику, М.: Мир, 1985.
- [84] Rodenburg J. M. Ptychography and related diffractive imaging methods //Advances in imaging and electron physics. – 2008. – Т. 150. – С. 87-184.
- [85] Maiden A.M., Humphry M.J., Zhang F., Rodenburg J.M. Superresolution imaging via ptychography //JOSA A. – 2011. – Т. 28. – №. 4. – С. 604-612.
- [86] Попов Н. Л. и др. Волновой пакет в фазовой проблеме оптики и птихографии //Успехи физических наук. – 2020. – Т. 190. – №. 8. – С. 820-828.



- [87] Rodenburg J., Maiden A. Ptychography //Springer Handbook of Microscopy. – 2019. – С. 819-904.
- [88] Artyukov I. A., Popov N. L., Vinogradov A. V. Lensless Reflection Imaging of Obliquely Illuminated Objects I: Choosing a Domain for Phase Retrieval and Ptychography //Symmetry. – 2021. – Т. 13. – №. 8. – С. 1439.
- [89] Levinson H. J. Principles of lithography. – SPIE press, 2005. – Т. 146.
- [90] Bakshi V., EUV lithography. Bellingham, WA: SPIE Press, 2009.
- [91] Артюков И. А. Оптическая и рентгеновская микролитография на рубеже веков //Квантовая электроника. – 2022. – Т. 52. – №. 12. – С. 1094-1101.
- [92] Reagan B.A., Berrill M., Wernsing K.A., Baumgarten C. et al. High-average-power, 100-Hz-repetition-rate, tabletop soft-x-ray lasers at sub-15-nm wavelengths //Physical Review A. – 2014. – Т. 89. – №. 5. – С. 053820.
- [93] Hädrich S., Klenke A., Rothhardt J., Krebs M. et al. High photon flux table-top coherent extreme-ultraviolet source //Nature Photonics. – 2014. – Т. 8. – №. 10. – С. 779-783.
- [94] Ribic P. R., Margaritondo G. Status and prospects of x-ray free-electron lasers (X-FELs): a simple presentation //Journal of Physics D: Applied Physics. – 2012. – Т. 45. – №. 21. – С. 213001.
- [95] Юу, Ф. Т. (1979). С. Введение в теорию дифракции, обработку информации и голографию. М.: Советское радио–1979.–304 с.
- [96] Putilin A. N., Morozov V. N., Huang Q., & Caulfield H. J. et al. Waveguide holograms with white light illumination //Optical engineering. – 1991. – Т. 30. – №. 10. – С. 1615-1619.

- [97] Shin B., Kim S., Druzhin V., Malinina P. et al. Compact augmented-reality glasses using holographic optical element combiner //Practical Holography XXXIII: Displays, Materials, and Applications. – SPIE, 2019. – Т. 10944. – С. 93-99.
- [98] Toal V. Introduction to holography. – CRC press, 2022.
- [99] Howells M. R., Jacobsen C. Possibilities for projection x-ray lithography using holographic optical elements //Applied optics. – 1991. – Т. 30. – №. 13. – С. 1580-1582.
- [100] Градштейн И. С., Рыжик И. М., Таблица интегралов, сумм, рядов и произведений, М.: Наука, 1971.

## Приложение 1. Таблица коэффициента отражения для многослойных зеркал

Таблица 4.

Материалы	d, нм	$\gamma$	N	$\theta$ , °	$\lambda$ , нм	R, %
Mo/Si	6.89	0.34	50	85	12.75	70.9
Mo/Be	5.74	.42	70	85	11.34	70.2
Mo/Si	6.89	0.34	50	85	13.45	70.0
Mo/Si	6.885	0.35	60	88.5	13.42	69.7
Mo/Si	6.97	0.38	60	85	13.5	69.6
Mo/Si	6.65	0.4	50	88.5	13.0	69.5
Mo/Si	6.89	0.38	60	88.5	13.45	68.8
Mo/Si	6.85	0.41	60	85	13.4	68.7
Mo/Si	6.82	0.39	60	88.5	13.39	68.7
Mo/Si	6.5	0.4	50	88.5	12.75	68.6
Mo/Be	5.8	0.40	70	85	11.4	68
Mo/Si	7.29	0.36	50	88.5	14.1	67.5
Mo/Si	6.85	0.41	40	85	13.4	67.5
Mo <sub>2</sub> C/Si	6.51	0.4	60	88.5	12.8	66.8
Mo/Si	6.75	0.45	50	88.5	13.27	66.3
Mo <sub>2</sub> C/Si	6.8	0.4	50	85	13.3	66
Mo/Si	6.8	0.41	40	89	13.2	66
Mo/Si	6,7	2,7	50	88,5	13,1	64,5
Mo/Si	6.7	0.40	40	85	13.4	63
Ru/Be	5.8	0.40	70	85	11.4	63
Mo/Si	7	0.37	40	85	14	63
Mo/Si	6.8	0.4	40	85	13.25	63.0
Mo/Si	7	0.44	45	85	13.4	61
Mo/Si	6.7	0.45	40	89	13	60
Zr/Al	9.08	0.4	40	85	17.6	59.3
Ru/Si	6.8	0.41	40	89	13.1	58
Ru/Si	7	0.37	40	85	14	55
Sc/Si	19.1	0.5	10	89	36.5	54
Rh/Be	6.4	0.41	40	85	12.2	50
Mo/Sr	5.36	0.36	120	86.4	10.5	48.3
Mo/Y	5.93	0.41	100	85	11.43	46.1
SiC/Mg	15.4	0.34	40	88	29.7	41
Mo/Sr	4.83	0.37	120	86.4	9.4	40.8
Mo/Y	4.78	0.425	100	87	9.482	38.4
Ru/C	6	0.40	100	85	12	35
Mo/Y	4.95	0.51	100	85	9.71	34.7
Mo/Si	12.5	0.30	15	89	23.6	33

Mo/Si	11	0.40	40	89	21	30
Rh/Si	6.8	0.41	40	89	13.4	29
Zr/Al	13	0.40	20	85	25.8	28
B4C/Si	6.8	0.50	70	85	13.1	27.5
Pd/C	5	0.38	30	85	10.6	27
Материалы	d, нм	$\gamma$	N	$\theta, ^\circ$	$\lambda, \text{нм}$	R, %
C/Si	16.8	.32	30	86	30.4	25
Mo/Sr	4.47	0.41	50	86.4	8.8	23
Mo/Y	4	0.42	100	85	7.87	21.3
Os/Si	21.33	0.30	8	90	38	20
Ru/B4C	3.4	0.41	150	85	6.8	20
Ru/B4C	3.6	0.39	150	89	7.2	20
Ru/C	5	0.36	30	85	10.6	19
Cr/C	3.25	0.4	150	88	6.42	18.9
FeCrNi/B4C	3.4	0.35	100	89	6.8	16
Cr/Sc	1.56	0.4	400	85	3.11	15.0
Cr/Sc	1.56	0.4	400	88.5	3.12	14.8
Co/C	2.29	0.5	200	85	4.56	14.8
Cr/Sc	1.57	0.47	600	87.5	3.116	14.6
Ru/C	4.3	0.40	100	85	8.6	14
Co/C	5.1	0.37	42	85	10.2	12.5
Ru/C	3.4	0.41	150	85	6.8	12
Co/C	4	0.38	80	85	7.8	12
Pd/B4C	5.8	0.47	50	85	8.5	12
Cr/C	2.25	0.4	150	85	4.47	11.5
ReW/C	10	0.30	7	89	20	10
Mo/B4C	3.4	0.38	150	89	6.7	10
Mo/B	3.4	0.41	100	85	6.7	9.4
Co/C	3.2	0.41	75	89	6.4	8.5
W/C	2.6	0.3	75	87	5.2	7.9
Cr/C	2.4	0.42	150	85	4.8	7
Cr/C	2.3	0.32	100	85	4.6	6
NiCr/C	2.3	0.32	50	85	4.6	6
W/C	2.3	0.3	75	87	4.5	5.9
Cr/C	3.25	0.333	50	85	6.46	5.9
Ge/C	2.3	0.36	200	89	4.6	5
FeCrNi/C	2.3	0.32	50	85	4.6	5
Ru/C	2.3	0.39	150	85	4.6	4.5
Co2C3/C	2.3	0.32	100	85	4.6	4
W/B4C	2.2	0.32	250	89	4.2	2.8
Ni/V	1.22	0.45	500	88	2.43	2.7
Co/C	2.4	0.37	80	85	4.8	2.5
W/B4C	1.7	0.41	200	85	3.4	1.9

Здесь  $d$  – толщина слоя,  $\gamma$  – отношение толщины первого (из двух) компонента в слое к толщине слоя  $d$ ,  $N$  – число слоев,  $\theta$  – угол скольжения (отсчитывается от поверхности),  $\lambda$  – длина волны,  $R$  – коэффициент отражения.

Данные, приведенные в таблице, получены с помощью сайта <https://www.cxro.lbl.gov/>. А именно, в разделе посвященном многослойным зеркалам <https://henke.lbl.gov/multilayer/survey.html>, были заданы следующие параметры: угол скольжения  $\theta$  может меняться в пределах от  $85^\circ$  до  $90^\circ$ , длина волны соответствует энергиям кванта от 10 эВ до 100 кэВ, материалы из которых состоит зеркало – произвольные.<sup>12</sup>

---

<sup>12</sup> Помимо представленных в приложении данных таблицы на указанном сайте можно найти ссылки на литературу по данным зеркалам, а также имеются сведения в какой организации есть образец данного многослойного зеркала.

## Приложение 2а (Функция Грина для вертикального случая)

Возьмем интеграл (1.21)<sup>13</sup>:

$$G_B^{(2)}(v, w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\frac{p^2}{2k}w + ipv} dp \quad (1)$$

Сначала заметим, что при  $w = 0$

$$G_B^{(2)}(v, w = 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipv} dp = \delta(v), \quad (2)$$

где  $\delta(v)$  – дельта-функция. Теперь найдем чему равно  $G_B^{(2)}(v, w)$  при  $w \neq 0$ , для этого сначала преобразуем выражение, стоящее в показателе экспоненты, выделив полный квадрат по переменной  $p$ :

$$\frac{p^2}{2ik}w + ipv = - \left[ \sqrt{\frac{iw}{2k}} \left( p - k \frac{v}{w} \right) \right]^2 + \frac{ik}{2} \frac{v^2}{w} \quad (3)$$

Тогда функция  $G_B^{(2)}(v, w)$  (1) будет иметь вид:

$$G_B^{(2)}(v, w) = \frac{1}{2\pi} e^{\frac{ikv^2}{2} \frac{1}{w}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{- \left[ \sqrt{\frac{iw}{2k}} \left( p - k \frac{v}{w} \right) \right]^2} dp \quad (4)$$

Сделав замену

$$q = \sqrt{\frac{iw}{2k}} \left( p - k \frac{v}{w} \right) \quad (5)$$

в (4) получим следующее выражение для функции Грина:

<sup>13</sup> Данный интеграл также можно вычислить с помощью справочника [100].

$$G_{\text{B}}^{(2)}(v, w) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{k}{2iw}} e^{\frac{ikv^2}{2w}} \cdot I(w); \quad I(w) = \int_{\alpha_{\pm}}^{\beta_{\pm}} e^{-q^2} dq, \quad \text{где} \quad (6)$$

$$\begin{cases} \beta_+ = e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot \infty \\ \alpha_+ = e^{i\frac{5\pi}{4}} \cdot \infty \end{cases}, \text{ при } w > 0 \quad \begin{cases} \beta_- = e^{i\frac{3\pi}{4}} \cdot \infty \\ \alpha_- = e^{i\frac{7\pi}{4}} \cdot \infty \end{cases}, \text{ при } w < 0$$

Интеграл  $I(w > 0)$  по контуру  $\Gamma_1$  (рисунок 43) можно заменить интегралом по контуру  $\Gamma_4 + \Gamma_2 + \Gamma_3$  :

$$I(w > 0) = \int_{\Gamma_1} e^{-q^2} dq = \int_{\Gamma_4 + \Gamma_2 + \Gamma_3} e^{-q^2} dq \quad (7)$$

А интеграл  $I(w < 0)$  по контуру  $\Gamma_5$  (рисунок 43) можно заменить интегралом по контуру  $\Gamma_6 - \Gamma_2 + \Gamma_7$  :

$$I(w < 0) = \int_{\Gamma_5} e^{-q^2} dq = \int_{\Gamma_6 - \Gamma_2 + \Gamma_7} e^{-q^2} dq \quad (8)$$

Интеграл от функции  $e^{-q^2}$  вдоль дуг бесконечно большого радиуса  $\Gamma_3$ ,  $\Gamma_4$ ,  $\Gamma_6$  и  $\Gamma_7$  равен 0 (на рисунке 43 серым цветом обозначены сектора, внутри которых действительная часть показателя подынтегральной экспоненты отрицательна ( $\text{Re}(-q^2) < 0$ )).

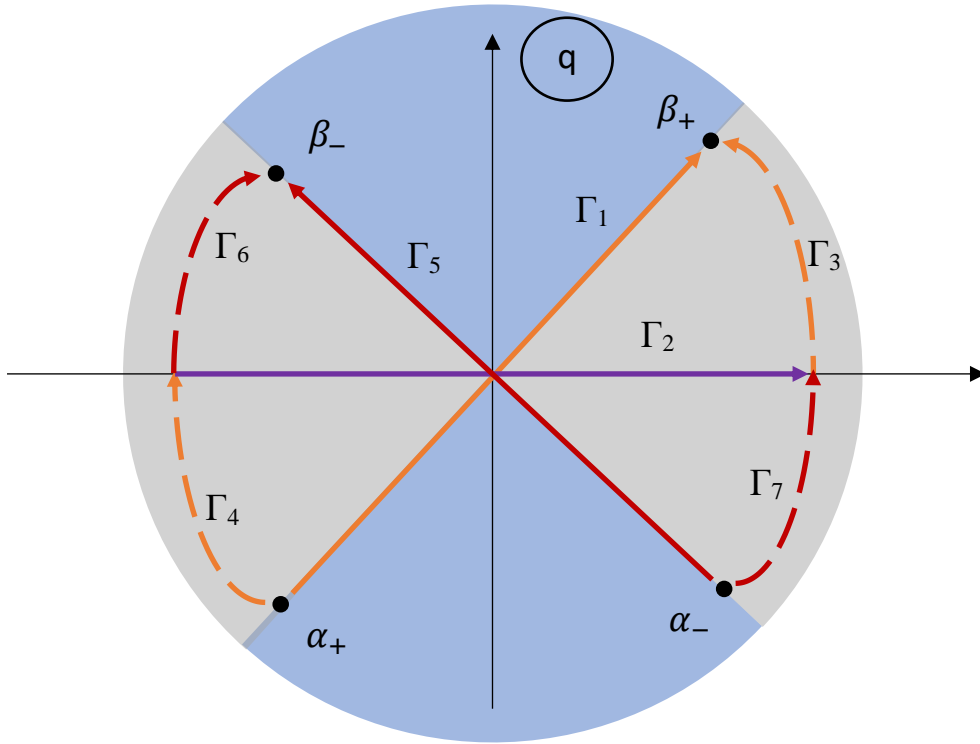


Рисунок 43. Комплексная плоскость переменной  $q$ .

Таким образом интеграл (7) равен:

$$I(w > 0) = \int_{\Gamma_2} e^{-q^2} dq = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-q^2} dq = \sqrt{\pi}, \quad (9)$$

а интеграл (8) равен:

$$I(w < 0) = \int_{-\Gamma_2} e^{-q^2} dq = \int_{+\infty}^{-\infty} e^{-q^2} dq = \sqrt{\pi} \quad (10)$$

Подставляя полученные результаты (9) и (10) в (6), окончательно получим:

$$G_B^{(2)}(v, w) = \begin{cases} \sqrt{\frac{k}{2\pi i w}} e^{\frac{ikv^2}{2w}}, & \text{при } w \neq 0. \\ \delta(v), & \text{при } w = 0 \end{cases} \quad (11)$$



## Приложение 2б (Функция Грина для горизонтального случая)

Вычислим интеграл (1.47):

$$G_{\Gamma}^{(2)}(v, w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipw + i\sqrt{-2kp}v} dp. \quad (1)$$

Сначала заметим, что при  $v = 0$

$$G_{\Gamma}^{(2)}(v, w = 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipw} dp = \delta(w), \quad (2)$$

где  $\delta(w)$  – дельта-функция. Теперь найдем чему равно  $G_{\Gamma}^{(2)}(v, w)$  при  $v > 0$  и  $w \neq 0$ . Для этого сначала произведем замену  $p = -t^2$ :

$$G_{\Gamma}^{(2)}(v, w) = \frac{1}{\pi} \int_{\infty \cdot i}^{\infty} t e^{-it^2w + i\sqrt{2k}tv} dt \quad (3)$$

Далее представим функцию Грина как производную от вспомогательной функции  $J$ :

$$G_{\Gamma}^{(2)}(v, w) = \frac{1}{\pi i \sqrt{2k}} \frac{\partial}{\partial v} J(v, w), \quad \text{где} \quad (4)$$

$$J(v, w) = \int_{\infty \cdot i}^{\infty} e^{-it^2w + i\sqrt{2k}tv} dt \quad (5)$$

После выделения полного квадрата в показателе экспоненты выражение (5) примет такой вид:

$$J(v, w) = e^{\frac{ikv^2}{2w}} \int_{\infty \cdot i}^{\infty} e^{-\left[\sqrt{iwt} - \sqrt{\frac{ki}{2}} \frac{v}{\sqrt{w}}\right]^2} dt. \quad (6)$$

После замены  $\tau = \sqrt{i\omega t} - \sqrt{\frac{ki}{2}} \frac{v}{\sqrt{w}}$  выражение для функции  $J$

будет следующим:

$$J(v, w) = \frac{e^{\frac{ikv^2}{2w}}}{\sqrt{iw}} \cdot I(w), \quad I(w) = \int_{\alpha_{\pm}}^{\beta_{\pm}} e^{-\tau^2} d\tau, \text{ где} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \beta_+ = e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot \infty \\ \alpha_+ = e^{i\frac{3\pi}{4}} \cdot \infty \end{cases}, \text{ при } w > 0 \quad \begin{cases} \beta_- = e^{i\frac{3\pi}{4}} \cdot \infty \\ \alpha_- = e^{i\frac{5\pi}{4}} \cdot \infty \end{cases}, \text{ при } w < 0$$

На рисунке 44 серым цветом обозначены сектора, внутри которых действительная часть показателя подынтегральной экспоненты отрицательна ( $Re(-\tau^2) < 0$ ), поэтому

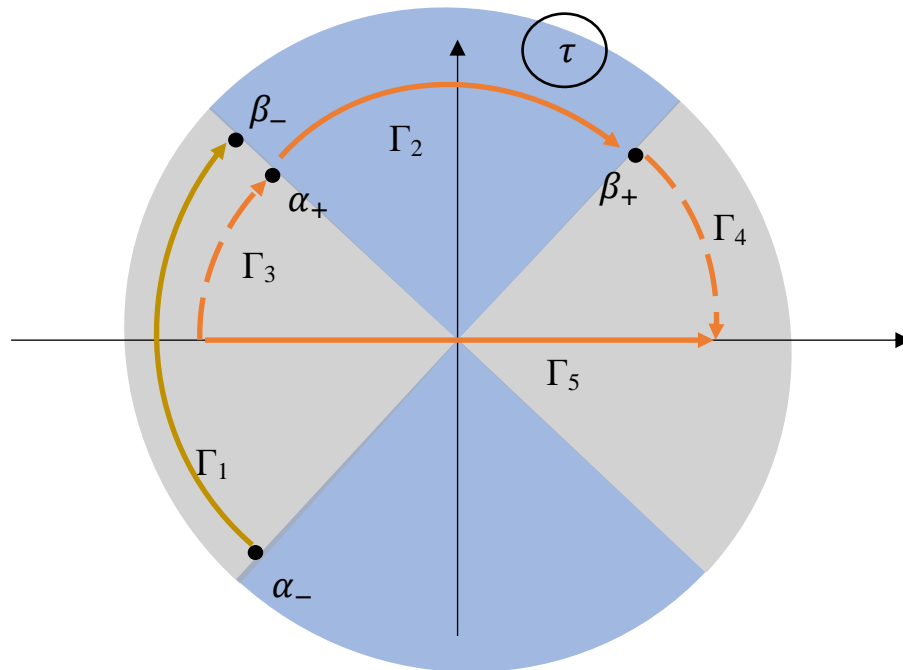


Рисунок 44. Комплексная плоскость переменной  $\tau$ .

$$\int_{\Gamma_1} e^{-\tau^2} d\tau = \int_{\Gamma_3} e^{-\tau^2} d\tau = \int_{\Gamma_4} e^{-\tau^2} d\tau = 0 \quad (8)$$

Поскольку интеграл  $I(w)$  (7) в пределах от  $\alpha_-$  до  $\beta_-$  это интеграл от  $e^{-\tau^2}$  вдоль  $\Gamma_1$  (рисунок 44), то согласно (8):

$$I(w) = 0, \quad \text{при } w < 0. \quad (9)$$

Интеграл  $I(w)$  в пределах от  $\alpha_+$  до  $\beta_+$  это интеграл от  $e^{-\tau^2}$  вдоль  $\Gamma_2$ . Контур интегрирования  $\Gamma_2$  можно заменить на  $\Gamma_3 + \Gamma_2 + \Gamma_4$ , что, учитывая (8), не повлияет на результат. Интегрирование же вдоль контура  $\Gamma_3 + \Gamma_2 + \Gamma_4$  в свою очередь эквивалентно интегралу от той же функции по контуру  $\Gamma_5$  (поскольку у функции  $e^{-\tau^2}$  нет полюсов), значит:

$$I(w) = \int_{\Gamma_5} e^{-\tau^2} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau = \sqrt{\pi}, \quad \text{при } w > 0 \quad (10)$$

Суммируя полученные результаты (9) и (10), получаем:

$$I(w) = \begin{cases} \sqrt{\pi}, & w > 0 \\ 0, & w < 0 \end{cases} \quad (11)$$

Таким же образом можно показать, что

$$G_B^{(2)}(v > 0, w = 0) = 0 \quad (12)$$

Подставляя (11) в (7) и (4) и, учитывая (2) и (12), окончательно получим:

$$G_T^{(2)}(v, w) = \begin{cases} \sqrt{\frac{k}{2\pi i}} v \frac{e^{\frac{ikv^2}{2w}}}{w^{\frac{3}{2}}}, & \text{при } w > 0, \quad v > 0 \\ 0, & \text{при } w \leq 0, \quad v > 0 \\ \delta(w), & \text{при } v = 0 \end{cases} \quad (13)$$

### Приложение 3. Соотношения между функциями Грина

Рассмотрим для примера уравнение (1.51):

$$\begin{cases} (\partial_x^2 + 2ik\partial_z)u(x, z) = 0, & z > 0 \\ u(x, z)|_{z=0} = u_0(x) \end{cases} \quad (1)$$

Чтобы найти  $u(x, z)$  достаточно найти функцию Грина  $G(x, x', z)$  для этой задачи:

$$\begin{cases} (\partial_x^2 + 2ik\partial_z)G(x, x', z) = 0, & z > 0 \\ G(x, x', z)|_{z=0} = \delta(x - x'), \end{cases} \quad (2)$$

тогда  $u(x, z)$  можно найти следующим образом:

$$u(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x')G(x, x', z)dx'dy' \quad (3)$$

Действительно, если умножить уравнение и граничное условие (2) на  $u_0(x')$ , а затем проинтегрировать по  $x'$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ , то получится, учитывая (3), уравнение с граничным условием (1).

Если, наоборот, известно решение ур-я (1) (этим решением является формула (1.68)), то функцию Грина можно найти, выбрав в качестве граничного условия  $u_0(x) = \delta(x - x')$ . Производя соответствующие вычисления, получим выражение для функции Грина задачи (1):

$$G(x, x', z) = \sqrt{\frac{k}{2\pi iz}} e^{\frac{ik(x-x')^2}{2z}} = G_B^{(2)}(x - x', z), \quad (4)$$

где  $G_B^{(2)}(v, w)$  введенное ранее обозначение (1.21) - (1.22).

Аналогично можно убедиться в том, что для уравнения (1.69) функцией Грина является:

$$G_{\Gamma}^{(2)}(x, z - z') = \begin{cases} \sqrt{\frac{k}{2\pi i}} x \frac{e^{\frac{ik}{2} \frac{x^2}{z-z'}}}{(z - z')^{3/2}}, & z > z', \\ 0, & z < z' \end{cases} \quad (5)$$

где  $G_{\Gamma}^{(2)}(v, w)$  также ранее введенное обозначение (1.47) – (1.48). А для уравнения (1.72) функция Грина будет иметь следующий вид:

$$G_{\text{H}}^{(2)}(x, z, s', \theta) = \begin{cases} \sqrt{\frac{k}{2\pi i}} (x \cos \theta + z \sin \theta) \frac{e^{\frac{ik}{2} \frac{[x-s' \sin \theta]^2}{z+s' \cos \theta}}}{(z + s' \cos \theta)^{3/2}}, & z + s' \cos \theta > 0, \\ 0, & z + s' \cos \theta < 0 \end{cases} \quad (6)$$

Выбрав в формуле (1.23) в качестве граничного условия  $u_0(x, y) = \delta(x - x') \cdot \delta(y - y')$  можно найти вид функции Грина для задачи (1.16):

$$G_{\text{B}}^{(3)}(x - x', y - y', z) = G_{\text{B}}^{(2)}(x - x', z) \cdot G_{\text{B}}^{(2)}(y - y', z). \quad (7)$$

Аналогичным образом можно с помощью формулы (1.49) найти функцию Грина для задачи (1.31), с учетом (4), (5):

$$G_{\Gamma}^{(3)}(x, y - y', z - z') = G_{\Gamma}^{(2)}(x, z - z') \cdot G_{\text{B}}^{(2)}(y - y', z - z') \quad (8)$$

Наконец, как следует из (1.64) функцией Грина для ур-я (1.51) является:

$$G_{\text{H}}^{(3)}(x, y - y', z, s', \theta) = \begin{cases} \frac{k}{2\pi i} (x \cos \theta + z \sin \theta) \frac{e^{\frac{ik}{2} \frac{[x-s' \sin \theta]^2 + (y-y')^2}{z+s' \cos \theta}}}{(z + s' \cos \theta)^2}, & z + s' \cos \theta > 0, \\ 0, & z + s' \cos \theta < 0 \end{cases} \quad (9)$$

Сравнивая формулы (4), (6) и (9) заметим, что:

$$G_{\text{H}}^{(3)}(x, y - y', z, s') = G_{\text{H}}^{(2)}(x, z, s') \cdot G_{\text{B}}^{(2)}(y - y', z + s' \cos \theta). \quad (10)$$

Обозначения для функций Грина были выбраны следующим образом: цифра в скобках сверху обозначает размерность задачи (2 или 3), а буква снизу ('в', 'г' или 'н') – соответственно расположение плоскости / прямой на которой задано граничное условие (вертикальное, горизонтальное или наклонное).

Таким образом, функции Грина для двумерных задач определяются формулами (4-6), а для трехмерных задач выражаются через двумерные с помощью соотношений (7, 8 и 10).

## Приложение 4. Вывод преобразования полей в оптической системе для прямых и наклонных объектов

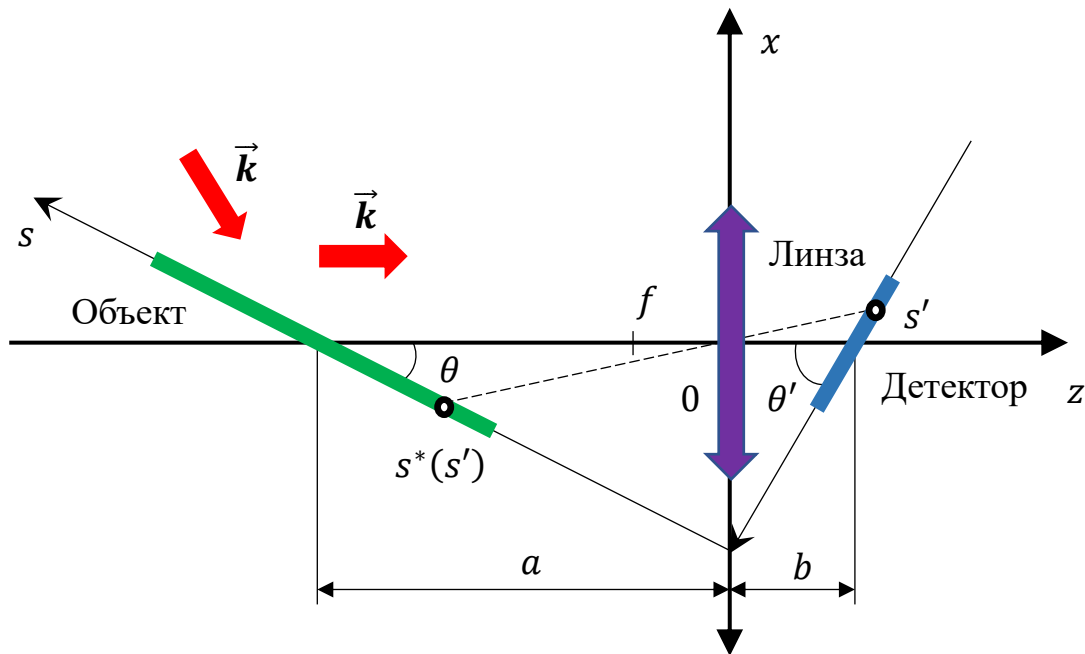
### Двумерный случай

Рассмотрим пространственную гармонику  $e^{iqs}$  в плоскости объекта (см. рисунок 45):

$$\begin{cases} x = s \sin \theta \\ z = -a - s \cos \theta \end{cases}, \quad (1)$$

и определим поле, создаваемое ею за линзой, используя параболическое волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 u(x, z)}{\partial x^2} + 2ik \frac{\partial u(x, z)}{\partial z} = 0. \quad (2)$$



**Рисунок 45.** Оптическая система для наклонных объектов.

Его решением  $u_1(x, z)$  с граничным условием, заданным на наклонном объекте:

$$u_1(x = s \sin \theta, z = -a - s \cos \theta) = e^{iqs} \quad (3)$$

будет:

$$u_1(x, z) = \exp\left(i\alpha(q)x - i\frac{\alpha^2(q)}{2k}(z + a)\right), \quad (4)$$

где  $\alpha(q)$  определяется уравнением:

$$\alpha(q) \sin \theta + \frac{\alpha^2(q)}{2k} \cos \theta = q. \quad (5)$$

Идеальная линза действует, как фазовый множитель  $T(x) = \exp\left(-\frac{ikx^2}{2f}\right)$ , где  $f$  - фокусное расстояние, так что на правой её стороне поле имеет вид:

$$u_2(x, z = 0) = u_1(x, z = 0) \cdot T(x) \quad (6)$$

Поле справа от линзы, оставаясь в рамках параксиального приближения, можно найти с помощью интеграла Френеля:

$$u_2(x, z) = \sqrt{\frac{k}{2\pi iz}} \int_{-\infty}^{\infty} dx' u_2(x', z = 0) \exp\left(\frac{ik(x - x')^2}{2z}\right) \quad (7)$$

Подставляя (4) в (6), а затем результат в (7), вычисляя интеграл и проводя элементарные преобразования, получим:

$$u_2(x, z) = \frac{1}{i\sqrt{\frac{z}{f} - 1}} \exp\left\{i\frac{kx^2}{2f\left(\frac{z}{f} - 1\right)}\right\} \times \quad (8)$$



$$\times \exp \left\{ \frac{i}{\frac{z}{f} - 1} \left[ -\alpha(q)x - \frac{\alpha^2(q)}{2k} a \left( \frac{1}{f} - \frac{1}{a} \right) \left( z - \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{a}} \right) \right] \right\}$$

Перепишем (5) в следующем виде:

$$\alpha(q) = \frac{q}{\sin \theta} - \frac{\alpha^2(q)}{2k} \frac{1}{\operatorname{tg} \theta}. \quad (9)$$

Подставим (9) в (8):

$$u_2(x, z) = \frac{\exp \left\{ i \frac{kx^2}{2f \left( \frac{z}{f} - 1 \right)} \right\}}{i \sqrt{\frac{z}{f} - 1}} \times \exp \left\{ \frac{i}{\frac{z}{f} - 1} \left[ -\frac{qx}{\sin \theta} + \frac{\alpha^2(q)}{2k \operatorname{tg} \theta} \left( x - a \left( \frac{1}{f} - \frac{1}{a} \right) \operatorname{tg} \theta \left( z - \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{a}} \right) \right) \right] \right\} \quad (10)$$

Полученное выражение (10) определяет поле за линзой в форме, удобной для дальнейшего рассмотрения.

Найдем теперь искомое изображение, т.е. поле на плоскости оптически сопряженной плоскости объекта. Как отмечено во 2 главе, в 2D-геометрии – это луч  $s'$  на рисунке 23. Уравнение его за линзой имеет следующий вид:

$$x - (z - b) \operatorname{tg} \theta' = 0, \quad \text{где} \quad (11)$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}, \quad \operatorname{tg} \theta' = \frac{1}{M_0} \operatorname{tg} \theta, \quad M_0 = \frac{b}{a}. \quad (12)$$

Уравнение для плоскости (11) можно переписать в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x(s') = -s' \sin \theta' \\ z(s') = b - s' \cos \theta' \end{cases} \quad (13)$$

Подставим параметрическое уравнение (13) в (10), при этом коэффициент при  $\alpha^2(q)$  в показателе экспоненты (10) окажется, учитывая соотношения (12), равным нулю и в итоге получится:

$$u(s') = u_2(x(s'), z(s')) = \frac{\exp \left\{ i \frac{kx^2(s')}{2f \left( \frac{z(s')}{f} - 1 \right)} \right\}}{i \sqrt{\frac{z(s')}{f} - 1}} \exp \left[ \frac{iqs'}{\left( \frac{z(s')}{f} - 1 \right) \frac{\sin \theta}{\sin \theta'}} \right] \quad (14)$$

Таким образом, поле объекта, заданного виде гармоники  $e^{iqs}$ , переходит в (14). Следовательно, поле произвольного объекта:

$$u_0(s) = \int_{-\infty}^{\infty} dq U_0(q) e^{iqs} \quad (15)$$

переходит в плоскости изображения в поле вида:

$$u(s') = \frac{\exp \left\{ i \frac{kx^2(s')}{2fM(s')} \right\}}{i \sqrt{M(s')}} u_0[s^*(s')], \quad (16)$$

$$\text{где } s^*(s') = \frac{s'}{M(s') \frac{\sin \theta}{\sin \theta'}}, \quad M(s') = \frac{z(s')}{f} - 1. \quad (17)$$

Формула (16) – главный результат данного раздела – показывает, что наклонный объект и его изображение располагаются на одном луче, проходящем

через оптическую систему. Она является прямым следствием выражения для поля за линзой (10).

Интенсивность в плоскости изображения  $I(s') = |u_0(s')|^2$  будет иметь вид [A1,A2]:

$$I(s') = \frac{1}{|M(s')|} I_0[s^*(s')], \quad (18)$$

Что совпадает с формулой (3.1).

### *Трехмерный случай*

Действуя аналогично 2-х мерному случаю, рассмотрим 3-х мерный случай, зададим в виде произведения гармоник  $u_0(s, y) = \exp(iqs + ipy)$  поле в плоскости объекта (см. рисунок 30):

$$\begin{cases} x = s \sin \theta \\ z = -a - s \cos \theta \end{cases} \quad (19)$$

и определим поле, создаваемое ею за линзой, используя параболическое волновое уравнение, в 3-х мерном случае параболическое волновое уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \quad (20)$$

Легко убедиться, что решением уравнения (20) с граничным условием:

$$u(x = s \sin \theta, y, z = -a - s \cos \theta) = \exp(iqs + ipy) \quad (21)$$

заданным на наклонном объекте, является:

$$u_1(x, y, z) = \exp \left\{ i\alpha x + i\beta y - i \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2k} (z + a) \right\}, \quad (22)$$

где величины  $\beta$  и  $\alpha = \alpha(q, p)$  определяются уравнениями:

$$\beta = p, \quad \alpha(q, p) \sin \theta + \frac{\alpha^2(q, p) + p^2}{2k} \cos \theta = q. \quad (23)$$

Идеальная линза в 3-х мерном случае действует, как фазовый множитель  $T(x, y) = \exp\{-ik(x^2 + y^2)/(2f)\}$ , где  $f$  - фокусное расстояние, так что на правой её стороне поле имеет вид:

$$u_2(x, y, z = 0) = u_1(x, y, z = 0) \cdot T(x, y) \quad (24)$$

Поле справа от линзы, оставаясь в рамках параксиального приближения, можно найти с помощью интеграла Френеля:

$$u_2(x, y, z) = \frac{k}{2\pi iz} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx' dy' u_{20}(x', y') \exp \left( ik \frac{(x - x')^2 + (y - y')^2}{2z} \right) \quad (25)$$

Подставляя (22) в (24), а затем результат в (25) и проводя соответствующие вычисления и преобразования, получим:

$$u_2(x, y, z) = -\frac{1}{\frac{z}{f} - 1} \exp \left\{ i \frac{k(x^2 + y^2)}{2f \left( \frac{z}{f} - 1 \right)} \right\} \times \quad (26)$$

$$\times \exp \left\{ \frac{i}{\frac{z}{f} - 1} \left[ -\alpha(q, p)x - py - \frac{\alpha^2(q, p) + p^2}{2k} a \left( \frac{1}{f} - \frac{1}{a} \right) \left( z - \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{a}} \right) \right] \right\}$$

Перепишем (23) в следующем виде:

$$\alpha(q, p) = \frac{q}{\sin \theta} - \frac{\alpha^2(q, p) + p^2}{2k} \frac{1}{\operatorname{tg} \theta}. \quad (27)$$

Подставим (27) в (26):

$$u_2(x, y, z) = -\frac{1}{\frac{z}{f} - 1} \exp \left\{ i \frac{k(x^2 + y^2)}{2f \left( \frac{z}{f} - 1 \right)} \right\} \times \quad (28)$$

$$\times \exp \left\{ \frac{i}{\frac{z}{f} - 1} \left[ -\frac{qx}{\sin \theta} - py + \frac{\alpha^2(q, p) + p^2}{2k \operatorname{tg} \theta} \left( -x - a \left( \frac{1}{f} - \frac{1}{a} \right) \left( z - \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{a}} \right) \right) \right] \right\}$$

Полученное выражение (28) определяет поле за линзой в форме, удобной для дальнейшего рассмотрения. Найдем теперь искомое изображение, т.е. поле на плоскости, оптически сопряженной плоскости объекта. Уравнение этой плоскости имеет следующий вид:

$$x - (z - b) \operatorname{tg} \theta' = 0, \quad \text{где} \quad (29)$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}, \quad \operatorname{tg} \theta' = \frac{1}{M_0} \operatorname{tg} \theta, \quad M_0 = \frac{b}{a}. \quad (30)$$

Уравнение для плоскости (29) можно переписать в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x(s') = -s' \sin \theta' \\ y(y') = -y' \\ z(s') = b - s' \cos \theta' \end{cases} \quad (31)$$

Подставим параметрическое уравнение (31) в (28), при этом коэффициент при  $\alpha^2(q, p) + p^2$  в показателе экспоненты (28) окажется, учитывая соотношения (30), равным нулю и в итоге получится:

$$u(s', y') = u_2(x(s'), y(y'), z(s')) = \quad (32)$$

$$= - \frac{\exp \left\{ i \frac{k(x^2(s') + y'^2)}{2f \left( \frac{z(s')}{f} - 1 \right)} \right\}}{\frac{z(s')}{f} - 1} \exp \left\{ \frac{iqs'}{\frac{\sin \theta}{\sin \theta'} \left( \frac{z(s')}{f} - 1 \right)} + \frac{ipy'}{\frac{z(s')}{f} - 1} \right\}.$$

Таким образом, поле объекта, заданного виде гармоники  $e^{iqs+ipy}$ , переходит в (32). Тогда поле объекта произвольного вида:

$$u_0(s, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dqdp U_0(q, p) e^{iqs+ipy} \quad (33)$$

переходит в плоскости изображения в поле вида:

$$u(s', y') = - \frac{\exp \left\{ i \frac{k(x^2(s') + y'^2)}{2f \left( \frac{z(s')}{f} - 1 \right)} \right\}}{\frac{z(s')}{f} - 1} u_0 \left[ \frac{s'}{\frac{\sin \theta}{\sin \theta'} \left( \frac{z(s')}{f} - 1 \right)}, \frac{y'}{\frac{z(s')}{f} - 1} \right] \quad (34)$$

Отсюда сразу следует интенсивность поля изображения  $I(s') = |u(s')|^2$  в виде:

$$I(s', y') = \frac{1}{M^2(s')} I_0 \left[ s^*(s'), \frac{y'}{M(s')} \right], \quad (35)$$

где  $s^*(s')$  и  $M(s')$  – определены в (17).