ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ИМ. П.Н. ЛЕБЕДЕВА РАН

на правах рукописи

УДК 535-14

Чернега Владимир Николаевич

ВЕРОЯТНОСТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ В КВАНТОВОЙ ФИЗИКЕ

(01.04.02 - теоретическая физика)

АВТОРЕФЕРАТ

**диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук**

Москва - 2013

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Физическом институте им. П.Н. Лебедева РАН.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Манько Владимир Иванович, главный научный сотрудник Федерального государственного бюджетного учреждении науки Физического института им. П.Н. Лебедева РАН

Официальные оппоненты

доктор физико-математических наук Амосов Григорий Геннадьевич, Федеральное государственное бюджетное учреждении науки Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

доктор физико-математических наук Сладь Леонид Максимович, Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д.В. Скобельцына Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова

Ведущая организация

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования Московский физико-технический институт (государственный университет).

Защита состоится 21 октября 2013 г. на заседании Ученого совета Д002.023.02 Федерального государственного бюджетного учреждения науки Физического института им. П.Н. Лебедева РАН

по адресу: 119991 Москва, Ленинский проспект, д. 53.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке института.

Автореферат разослан 2013 г.

Ученый секретарь диссертационного совета Д002.023.02

доктор физико-математических наук Я.Н. Истомин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертация посвящена актуальным проблемам вероятностного представления квантовой механики и решению новых задач, относящихся к связи квантовых и классических подходов в квантовой оптике, теории спиновых систем (кубитов и кудитов), теории квантовых корреляций (неравенства Белла), теории запутанных состояний и соотношениям неопределенностей.

Актуальность проблемы

Актуальность задач, поставленных в диссертационной работе, определяется необходимостью рассмотрения основ квантовой механики в связи с интенсивным развитием квантовых технологий в квантовых коммуникациях, квантовых вычислениях и квантовой криптографии.

В квантовой механике понятие "состояние системы"описывается либо волновой функцией для чистых состояний [1] либо матрицей плотности для смешанных состояний [2, 3]. Эти описания отличаются от используемого в классической статистической механике. В этой связи предпринимались попытки найти такое описание состояний в квантовой механике, которое приближается к вероятностному описанию классических состояний. В работах [4–8] были введены представления матрицы плотности, похожие на классические вероятностные распределения, но ими не являющиеся. Они были названы квазираспределениями.

В работе [9] было введено томографическое вероятностное представление квантовых состояний. В этом представлении вместо волновой функции или матрицы плотности используется стандартное положительное распределение вероятности. Матрица плотности определяется этим распределением, и все физические величины могут быть найдены, если оно задано, аналогичным образом, как они находятся, если задана матрица плотности. Такой подход к квантовым состояниям был назван "вероятностным представлением квантовой механики", и ему посвящены исследования (см., например, [10]) как в квантовой оптике [11], так и в теории спина [12–14]. Различные аспекты вероятностного подхода обсуждались также в работах [15–18].

Согласно [19] существует девять формулировок квантовой механики, включающие в себя матричную механику, фейнмановскую формулировку с интегралом по путям и др. Вероятностное представление квантовой механики дополняет известные формулировки, являющиеся эквивалентными по физическому содержанию, но подчеркивающие разные аспекты математического формализма квантовой механики. Вероятностное представление квантовой механики позволяет описывать квантовые и классические системы на одном языке – языке теории вероятности, при этом состояния квантовой и классической системы задается одним и тем же объектом – томограммой, которая является функцией распределения вероятности, что позволяет исследовать одинаковым образом информационные характеристики классических и квантовых состояний, такие как энтропия Шеннона, вместе с неравенствами для энтропии.

Свойства томограмм в классической и квантовой областях различаются. Квантовые состояния задаются неотрицательными, эрмитовыми операторами, дисперсии и ковариации наблюдаемых величин в квантовых состояниях обязаны удовлетворять соотношениям неопределенностей, а следовательно и томограммы, задающие квантовые состояния, должны удовлетворять определенным условиям, следующим из соотношений неопределенностей и неотрицательности соответствующего томограмме оператора плотности квантового состояния.

В классической области на дисперсии и ковариации наблюдаемых величин не наложены такие ограничения. Поэтому томограммы, допустимые в квантовой области (описывающие физические состояния квантовой системы), могут быть недопустимыми в классической области и наоборот. В связи с этим представляет большой интерес исследование гибридных квантово-классических систем и их эволюции, а также соотношений неопределенностей в томографическом представлении. В томографическом представлении квантовой механики [9] все квантовые постулаты и уравнения для волновой функции и матрицы плотности могут быть выражены через функции распределения вероятности и уравнения на них. В частности, различные соотношения неопределенностей также могут быть записаны в виде неравенств на томограммы, которые могут быть проверены в экспериментах, что позволяет провести дополнительную проверку основных положений квантовой механики. Поэтому представляет интерес подробное исследование в томографическом представлении соотношений неопределенностей.

Соотношения неопределенностей задают границу квантовости физических явлений, которая определяется постоянной Планка. Граница квантовости зависит от различных характеристик состояния (ковариаций, параметра негауссовости, параметра чистоты). Зависимость границы квантовости от параметров состояния в соотношениях неопределенностей может быть формальныо описана введением "эффективной постоянной Планка".

Квантовые флуктуации приводят к такому квантовому явлению как туннелирование частицы под потенциальным барьером, эффективность этого процесса зависит от параметров состояния, то-есть формально также может быть описана "эффективной постоянной Планка". Следовательно, представляет интерес исследовать в томографическом представлении влияние различных параметров состояния не только на границу квантовости, но и на эффективность квантового туннелирования.

В классической статистической механике состояние частиц с одной степенью свободы с флуктуирующими координатой q и импульсом p описывается неотрицательной функцией распределения вероятности $f(q, p, t)$. Процесс эволюции системы описывается кинетическими уравнениями, простейшим из которых является уравнение Лиувилля без столкновительного члена (см., например, [20,21]). Учет столкновений приводит к уравнению Больцмана, которое может быть получено методом построения зацепленной системы уравнений, полученных Н.Н. Боголюбовым и называемых цепочкой Боголюбова.

В квантовой статистической механике состояние системы описывается матрицей плотности. Для частицы с одной степенью свободы матрица плотности в координатном представлении связана с помощью интегрального преобразования Фурье с функцией Вигнера $W(q, p, t)$ [4], являющейся некоторым аналогом классической функции распределения вероятности $f(q, p, t)$. Уравнение эволюции для функции Вигнера квантовой системы (уравнение Мойала [22]) до некоторой степени похоже на уравнение Лиувилля и переходит в него в пределе постоянной Планка, стремящейся к нулю. Однако функция Вигнера может принимать отрицательные значения и поэтому не является распределением вероятности, так как вероятность по определению является неотрицательной величиной.

В работе [9] в квантовой механике было введено новое представление, в котором с помощью преобразования Радона [23] функции Вигнера квантовое состояние описывается функцией распределения вероятности, называемой томограммой состояния или томографической функцией распределения. В работе [24] было показано, что аналогичная томограмма может быть введена и для классической частицы с помощью преобразования Радона функции распределения вероятности $f(q, p, t)$ на фазовой плоскости. Преобразование Радона обратимо. Таким образом, информация о состоянии классической частицы на языке функции $f(q, p, t)$ эквивалентна информации, заключенной в томограмме. Это же утверждение справедливо и для квантовой частицы, для которой информация о состоянии, заключенная в функции Вигнера, эквивалентна информации, заключенной в томограмме состояния.

В диссертационной работе рассмотрены кинетические уравнения классической статистической механики (уравнение Лиувилля, цепочка Боголюбова) в томографическом представлении, и обсуждены возможности томографического подхода с помощью преобразования Радона к описанию цепочки Боголюбова в квантовой области. Существуют и другие уравнения, в частности релятивистские уравнения в теории поля [25–31], которые в перспективе можно рассмотреть в томографическом представлении.

Важной статистической характеристикой является корреляция между частицами системы. В квантовой механике состояние частиц со спином описывается спинорами. В работе [12, 32] было показано, что спиноры можно отобразить на томографические распределения вероятности. Эти отображения задаются преобразованием, аналогичным преобразованию Радона. Таким образом в квантовой механике можно формулировать понятие состояния, используя вместо волновых функций (спиноров) или вместо матриц плотности томограммы. В квантовой теории информации аналогом спиновых состояний являются кубиты (спин $s = 1/2$) и кудиты (любые более высокие значения спина s). Важной задачей при этом является изучение свойств состояний систем из нескольких спинов.

Состояния таких составных систем отличаются степенью корреляции между подсистемами. Сильными, чисто квантовыми корреляциями обладают так называемые запутанные состояния. Проблема определения запутанности состояний и меры для характеристики запутанности на сегодняшний день полнлстью не решена. Имеются лишь частичные результаты. Настоящая диссертация посвящена актуальным проблемам вероятностного представления квантовой механики и решению некоторых задач, относящихся к связи квантовых и классических подходов в квантовой оптике, теории спиновых систем (кубитов и кудитов), свойств сепарабельности и запутанности для кубитов и кутритов, теории квантовых корреляций (неравенства Белла [33]), соотношениям неопределенностей (в рамках томографического подхода).

Цель диссертационной работы

Цель работы – исследовать свойства квантовых систем, включая квантовые корреляции, исследовать свойства гибридных квантово-классических систем, явление запутанности, соотношения неопределенностей и неравенства на статистические характеристики квантовых систем (энтропии) в рамках нового томографического вероятностного представления квантовой механики.

Научная новизна работы

Научная новизна полученных в диссертационной работе результатов заключается в том, что рассмотренные в ней формулы, выводы и свойства квантовых и классических систем являются новыми, выведенными в соответствии с вероятностным представлением квантовых состояний, полученным в последнее десятилетие.

Практическая ценность работы

Практическая ценность полученных в диссертации результатов определяется тем, что с их помощью выясняются фундаментальные аспекты квантовой теории, на которых базируется развитие квантовых технологий.

В диссертационной работе из обобщенных соотношений неопределенностей получены новые неравенства для оптических томограмм квантовых состояний, причем в форме удобной для экпериментальной проверки. Кроме того, рассмотрены соотношения неопределенностей, содержащие зависимость от параметра чистоты состояния, в томографическом представлении, то-есть в форме, удобной для экспериментальной проверки, и обсуждена возможность влияния на проницаемость потенциального барьера эффекта декогерентности.

Метод кубитного портрета кудитных состояний, примененный в диссертации для анализа перепутанности двухмодового состояния электромагнитного поля, может быть полезен для развития математического аппарата, используемого в квантовых вычислениях.

Исследованное в диссертации отображение оптической томограммы двухмодового состояния на аналог спиновой томограммы двух кубитов и утверждение, что нарушение неравенств Белла для полученного аналога спиновой томограммы является достаточным условием перепутанности изучаемого двухмодового состояния, может быть использовано для развития квантовых технологий.

Личный вклад автора

Все теоретические результаты, представленные в диссертации, получены автором самостоятельно. Постановка большей части задач выполнена научным руководителем. Обсуждение результатов работ проводилось совместно с соавторами.

Положения, выносимые на защиту

- Кинетическое уравнение Лиувилля, включая релятивистское, получено в томографическом представлении.
- Введен метод кубитного портрета кудитных состояний для изучения запутанности состояний составных систем кудитов с помощью нарушения неравенства Белла.
- Построение квантово-подобной схемы с использованием волновой функции для описания состояния классического осциллятора. Рассмотрение в томографическом вероятностном представлении комбинированной системы с классической и квантовой подсистемами.
- Получение формул для соотношений неопределенностей в томографическом представлении, удобном для экспериментальной проверки, и рассмотрение их связи с задачей о проницаемости потенциального барьера.
- Нахождение критерия гауссовости квантовых состояний в форме томографического кумулянта. Получение новых неравенств для матрицы плотности кутрита и для ортогональных полиномов, встречающихся при вычислении вероятностей квантовых переходов.

Апробация работы

Основные результаты диссертационной работы были доложены диссертантом и обсуждены на следующих конференциях и семинарах:

- The 18th Central European Workshop on Quantum Optics (Мадрид, Испания, 30/05– 3/06, 2011) [*Phys. Scr.*, **147**, 010101 (2012)]
  http://iopscience.iop.org/1402-4896/2012/T147/010101/pdf/1402-4896_2012_T147_010101.pdf
- International Conference on Foundations of Probability and Physics, FPP6 (Вакшо, Швеция, 13–16 июня 2011)
- International Workshop "Advances in Foundations of Quantum Mechanics and Quantum Information with Atoms and Photons" (Турин, Италия, 20–26 мая 2012)
  http:www.inrim.it/ brida/Quantum_2012/doc/poster/Chernega.pdf
- Восьмой семинар Д.Н. Клышко (Москва, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Корпус нелинейной оптики им. Р.В. Хохлова, 20–22 мая 2013 г.)
  http://qopt.org/static/seminardnk/program_ru.pdf
- Аспирантский семинар Физического института им. П.Н. Лебедева РАН (Конференц-зал ФИАН, 21 марта 2013 г.)

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из введения, семи глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации 152 страницы. Библиография включает 110 наименований на 10 страницах.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении сформулированы актуальность и практическая значимость работы, а также ее цели и задачи. Реферативно изложено содержание работы.

В первой главе с помощью преобразования Радона в классической статистической механике введен формализм квантовой механики (волновой функции, матрицы плотности). Приведен краткий обзор томографического представления и преобразования Радона, а также обсуждены свойства симплектических томограмм. Рассмотрена связь волновой функции и функции распределения вероятности классического гармонического осциллятора. Введены волновые функции основного и возбужденного состояниий классического гармонического осциллятора. Получено уравнение эволюции для волновой функции классического гармонического осциллятора, аналогичное уравнению Шредингера. Обсуждены гауссовские решения уравнения, аналогичного уравнению Шредингера для классического осциллятора. Исследовано, какие томограммы описывают физически допустимые состояния в классической и квантовой областях. Рассмотрен параметрический классический осциллятор и обсуждены интегралы движения параметрического классического осциллятора и их свойства. Приведен краткий обзор отображения Вейля–Вигнера–Мойала, которое было использовано для преобразования функции распределения вероятности f(q,p) в "матрицу плотности" $\rho(x, x')$ в случае классического параметрического осциллятора. Обсуждены томограммы состояний классического параметрического осциллятора, аналогичные фоковским состояниям, и пропагатор в томографическом представлении. Например, томограмма $w(X, \mu, \nu)$ некоторого состояния классического осциллятора с гауссовым распределением по координате и импульсу имеет вид

$$w(X, \mu, \nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi(\mu^2 + \nu^2)a}} \exp\left(-\frac{X^2}{(\mu^2 + \nu^2)a}\right),$$

где $a > 0$ и допустимо нарушение соотношений неопределенностей, а координата $X = \mu q + \nu p$ содержит произвольные действительные параметры μ и ν.

Во второй главе рассмотрены кинетические уравнения классической статистической механики (уравнение Лиувилля, цепочка Боголюбова) в томографическом представлении, и обсуждены возможности томографического подхода, с помощью преобразования Радона, к цепочке Боголюбова в квантовой области. При помощи преобразования Радона получено релятивистское кинетическое уравнение для свободной частицы в томографическом представлении. Эволюция свободной релятивистской частицы описывается кинетическим уравнением

$$\frac{\partial f(q,p,t)}{\partial t} + \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \frac{\partial f(q,p,t)}{\partial q} = 0.$$

В томографическом представлении кинетическое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial w(X,\mu,\nu,t)}{\partial t} - \left[1 + \left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^{-2} \left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)^{2}\right]^{-1/2} \mu \frac{\partial w(X,\mu,\nu,t)}{\partial \nu} = 0.$$

В третьей главе обсуждены в вероятностном представлении квантовой механики статистические характеристики состояний, такие как средние значения, дисперсии и моменты высших порядков наблюдаемых величин. Обсуждены эрмитовы матрицы, их собственные вектора и собстввенные значения на примере состояния частицы со спином 1/2. Средние значения наблюдаемых величин выражены через собственые вектора и собственные значения эрмитовой матрицы. Например, пусть наблюдаемая величина задается эрмитовой матрицей $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$. Можно показать, что

$$A_{11} = |u_{11}|^2 A_1 + |u_{12}|^2 A_2 \quad \text{и} \quad A_{22} = |u_{21}|^2 A_1 + |u_{22}|^2 A_2,$$

где A_1 и A_2 – собственные значения матрицы A, а $\begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{pmatrix}$ – соответствующие собственные вектора матрицы A. Таким образом вероятности исходов A_1 и A_2 заданы для среднего значения A_{11} величинами $|u_{11}|^2$ и $|u_{12}|^2$, а для среднего значения A_{22} величинами $|u_{21}|^2$ и $|u_{22}|^2$. Построенные функции распределения вероятности выражаются через компоненты собственных векторов наблюдаемой величины. Анализ, проведенный для состояния частицы со спином 1/2, расширен на любую квантовую систему. Показано, что высшие моменты наблюдаемых величин для кубита, кудита и таких систем, как гармонический осциллятор, могут определяться стандартными формулами классической теории вероятности.

В стандартной формулировке квантовой механики все статистические характеристики наблюдаемой величины вычисляются взятием следа от произведения матрицы наблюдаемой величины и матрицы плотности. Показано, что статистические характеристики наблюдаемых величин как в классической области, так и в квантовой области могут быть вычислены при помощи стандартных формул классической теории вероятности.

В четвертой главе рассмотрены спиновые состояния и сложение спинов в вероятностном представлении квантовой механики, обсуждено линейное отображение томограммы кудита на томограмму кубита, названное кубитным портретом, и рассмотрено его использование для описания состояния кудита. При помощи метода кубитного портрета исследованы неравенства Белла и обсуждено их нарушение или ненарушение в зависимости от структуры совместной функции распределения вероятности двух спинов (томограммы). Проблема исследования сепарабельности состояния кубита–кутрита сведена к проблеме исследования условий нарушения неравенств Белла для двух кубитов, и в вероятностном представлении квантовой механики приведено доказательство необходимого условия сепарабельности квантовых состояний, основанное на использовании отображения кудита на кубит. Обсуждена томограмма спинового состояния и неравенства Белла в вероятностном представлении квантовой механики и продемонстрировано, что нарушения неравенства Белла в квантовой механике для случая двух частиц со спинами $1/2$ могут быть получены из анализа совместной функции распределения вероятностей, задающей квантовое состояние этих двух спинов. Рассмотрены различные типы совместных функций распределения вероятностей и обсуждено, какие из них не приводят к нарушению неравенства Белла, а какие приводят. Продемонстрировано в вероятностном представлении, что нарушение неравенства Белла формально является математической характеристикой определенных различий обычных совместных функций распределения вероятностей. Кроме того, в вероятностном представлении квантовой механики продемонстрирована связь между нарушением неравенства Белла и явлением перепутанности состояний системы и введена характеристическая функция состояния двух спинов, при этом рассмотрено сложение спинов. Например, рассмотрим состояние со спином j и проекцией на ось z равной m, полученное для двух частиц со спинами j_1, j_2 и их проекциями m_1', m_2' на ось z. Можно показать, что оно задается томограммой следующего вида:

$$w_{jm}(m_1,\vec{n}_1,m_2,\vec{n}_2) =$$
$$\left|\sum_{m_1'=-j_1}^{j_1}\sum_{m_2'=-j_2}^{j_2}(j_1j_2m_1'm_2'|jm)D^{(j_1)}_{m_1'm_1}(\vec{n}_1)D^{(j_2)}_{m_2'm_2}(\vec{n}_2)\right|^2,$$

где $(j_1m_1j_2m_2|jm)$ – коэффициенты Клебши–Жордана, D – функции Вигнера, являющиеся матричными элементами преобразования волновой функци частицы со спином j при повороте системы отсчета на углы Эйлера, m_1, m_2 – проекции спина на ось z, $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ – единичные векторы, задающие точку на сфере. Обсуждены свойства стохастических матриц, связанных с квантовыми спиновыми состояниями. Обсуждены два кубита, введена стохастическая матрица, определяемая состоянием двух кубитов, стохастические матрицы, определяемые как сепарабельными, так и перепутанными состояниями двух кубитов. Рассмотрен пример чистого запутанного состояния двух кубитов, приведена томограмма этого состояния, показано, что полученная матрица нарушает неравенство Белла, и левая часть неравенства Белла принимает при некоторых значениях углов максимально возможное значение. Рассмотрены два конкретных примера перепутанных состояний: кубит–кутрит и два кутрита. Дан рецепт исследования сепарабельности состояния системы из двух частей. Первым шагом в данном исследовании является получение томограммы состояния. Затем вычисляется редуцированная томограмма. На следующем шаге проверяется выполнение неравенства Белла для полученной редуцированной томограммы. Если неравенство Белла нарушено, то начальное состояние является запутанным.

В пятой главе обсуждены некоторые неравенства для томограмм, введен связанный с томографической функцией распределения фотона томографический кумулянт, и с его помощью исследована негауссовость состояния, а именно введена функция $C(t,\Theta)$

$$\begin{aligned} C(t,\Theta) &= \ln\int w(X,\Theta)\exp(tX)dX - t\int Xw(X,\Theta)dX \\ &-\frac{t^2}{2}\left[\int X^2w(X,\Theta)dX - \left(\int Xw(X,\Theta)dX\right)^2\right], \end{aligned}$$

где $w(X, \Theta)$ – оптическая томограммма. Для гауссовых фотонных состояний введенная функция должна быть равна нулю. Отклонение от нуля введенной функции параметра t и фазы локального осциллятора Θ дает информацию о степени негауссовости квантового состояния. Эти характеристики могут быть получены из экспериментальных данных. Рассмотрены другие неравенства, которые записаны в терминах вектора вероятности и применены к исследованию состояний фотонов и кудитов, заданных томографическими функциями распределения. Кроме того, простейшие неравенства, которые можно записать в терминах вектора вероятности, использованы для получения неравенств на спиновую томографическую функцию распределения вероятности. Вектора вероятности могут быть преобразованы в другие вектора вероятности. Наиболее интересным является семейство линейных преобразований функций распределения вероятности. Линейные преобразования функций распределения вероятности описываются матрицами, поэтому в данной главе обсужден специфический набор матриц, которые имеют один единичный элемент в столбце, а все остальные элементы в столбце у них равны нулю. Произведение таких матриц является матрицей того же типа. Показано, что все вектора вероятности, полученные в результате таких линейных преобразований, удовлетворяют специфическим неравенствам на энтропии, связанные с преобразованными векторами вероятности. Кроме того, в данной главе обсуждены энтропии Шеннона, Реньи и Цаллиса, рассмотрена относительная энтропия. Изучены энтропийные неравенства для квантовых томограмм состояний спиновых систем. Кроме того, обсуждены некоторые энтропийные неравенства, проиллюстрированные неравенствами для неотрицательных чисел. Обсуждены энтропийные неравенства, связанные с функцией распределения по числу фотонов в гауссовом состоянии. Из положительности относительной энтропии для физического состояния получено новое неравенство на полиномы Эрмита двух переменных в области статистических параметров, удовлетворяющих соотношениям неопределенностей.

В шестой главе соотношения неопределенностей, зависящие от двух состояний, записаны на языке томограмм, причем в форме удобной для экпериментальной проверки. Описанный в четвертой главе метод кубитного портрета кудитных состояний использован для анализа перепутанности двухмодового состояния электромагнитного поля.

В первой части шестой главы рассмотрены новые соотношения неопределенности, зависящие от нескольких состояний, введенные Трифоновым. Эти соотношения неопределенностей записаны в терминах оптической томограммы, которая может быть измерена в схемах по гомодинному детектированию состояния фотона. Соотношения неопределенности записаны в томографической форме, как в случае чистых, так и в случае смешанных состояний. Для двух состояний фотона, заданных оптическими томограммами $w_1(X,\Theta)$ и $w_2(X,\Theta)$, получено следующее выражение для соотношения неопределенностей в терминах оптической томограммы

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left[\int w_1(X,\Theta)X^2\,dX-\left(\int w_1(X,\Theta)X\,dX\right)^2\right]\\
&\times\left[\int w_2(X,\Theta+\pi/2)X^2\,dX-\left(\int w_2(X,\Theta+\pi/2)X\,dX\right)^2\right]\\
&+\frac{1}{2}\left[\int w_2(X,\Theta)X^2\,dX-\left(\int w_2(X,\Theta)X\,dX\right)^2\right]\\
&\times\left[\int w_1(X,\Theta+\pi/2)X^2\,dX-\left(\int w_1(X,\Theta+\pi/2)X\,dX\right)^2\right]\geq\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Показано, что зависящие от состояний соотношения неопределенности для координаты и импульса справедливы для любого угла Θ.

Метод кубитного портрета кудитных состояний применен для анализа перепутанности двухмодового состояния электромагнитного поля. Метод кубитного портрета расспространен на получение портрета матрицы плотности, и этим методом для энтропии фон Неймана получено новое неравенство, которое аналогично условию субаддитивности на матрицу плотности двухчастичной системы, состоящей, например, из двух кубитов. Рассмотрим состояние кутрита с матрицей плотности

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33} \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Tr}\rho = 1, \quad \rho^\dagger = \rho.$$

Выведено новое неравенство

$$-\mathrm{Tr}\left\{\begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33} \end{pmatrix} \ln \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33} \end{pmatrix}\right\}$$
$$\leq -\mathrm{Tr}\left\{\begin{pmatrix} \rho_{11}+\rho_{22} & \rho_{13} \\ \rho_{31} & \rho_{33} \end{pmatrix} \ln \begin{pmatrix} \rho_{11}+\rho_{22} & \rho_{13} \\ \rho_{31} & \rho_{33} \end{pmatrix}\right\}$$
$$-\mathrm{Tr}\left\{\begin{pmatrix} \rho_{11}+\rho_{33} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} \ln \begin{pmatrix} \rho_{11}+\rho_{33} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix}\right\},$$

которое означает, что энтропия Шеннона в любом состоянии кутрита меньше суммы энтропий Шеннона в двух портретах состояний кубитов.

Во второй части шестой главы рассмотрены соотношения неопределенностей, содержащие зависимость от параметра чистоты состояния, и обсуждена возможность влияния на прозрачность потенциального барьера эффекта декогерентности. Исследован пример состояния термодинамического равновесия, в котором параметр чистоты является функцией температуры. Соотношение неопределенности координата–импульс, введенное Гейзенбергом задает границу квантовости физических явлений, которая определяется постоянной Планка. Граница квантовости сдвигается в сторону увеличения при росте корреляции между координатой и импульсом. Следовательно, с ростом ковариации одновременно возрастают флуктуации координаты и импульса. Квантовые флуктуации приводят к такому квантовому явлению как туннелирование частицы. В данном разделе исследовано влияние эффектов декогерентности на зависимость соотношений неопределенности от параметра чистоты и обсуждена возможность зависимости эффекта туннелирования от эффективной постоянной Планка, являющейся функцией параметра чистоты (или температуры в случае состояния термодинамического равновесия).

В седьмой главе введено модельное уравнение эволюции для совместной функции распределения вероятности состояния гибридной системы (классическая и квантовая частицы), которое согласуется с уравнением Лиувилля в классической области и с кинетическим уравнением фон Неймана в квантовой области. Сложность создания единой механики для квантовых и классических состояний возникает из-за различия языков, на котором описываются состояния в квантовой и классической областях. Функция Вигнера, задающая квантовое состояние, близка по своим свойствам к классической функции распределения вероятности, но она может принимать отрицательные значения. В данной главе состояние как квантовой, так и классической частицы задается при помощи томографической функции распределения вероятности. Введена совместная томографическая функция распределения вероятности, зависящая от случайной классической координаты и случайной квантовой координаты, для описания состояния гибридной системы, состоящей из квантовой и классической подсистем. Рассмотрены корреляции случайных величин, найденные при помощи совместной томографической функции распределения (совместной оптической томограммы). Выписаны неравенства, которым должны удовлетворять томограммы в случае, когда они задают состояние системы двух классических частиц, в случае, когда они описывают состояния двух квантовых частиц, и в случае, когда они соответствуют состоянию гибридной квантово–классической системы. Обсуждена корреляция квантовых и классических переменных в гибридной системе. Предложено модельное уравнение эволюции для томограммы $w(X_1, X_2, \mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2, t)$ гибридной системы следующего вида:

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t} - \nu_1\frac{\partial}{\partial \mu_1} - \nu_2\frac{\partial}{\partial \mu_2} - \frac{1}{i}\left[U_1\left\{q_1 \rightarrow \left(-\frac{\partial}{\partial \mu_1}\left(\frac{\partial}{\partial X_1}\right)^{-1}\right.\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+\ \frac{i}{2}\nu_1\frac{\partial}{\partial X_1}\right)\right\} - \text{c.c.}\right] - \left[\frac{\partial U_2}{\partial q_2}\left\{q_2 \rightarrow -\frac{\partial}{\partial \mu_2}\left(\frac{\partial}{\partial X_2}\right)^{-1}\right\}\right]\nu_2\frac{\partial}{\partial X_2}\right\}$$
$$\times w(X_1, X_2, \mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2, t) = 0,$$

где $U_1(q_1)$ и $U_2(q_2)$ потенциальные энергии квантовой и классической частицы соответственно.

В заключении сформулированы основные результаты, полученные в диссертационной работе, и приведены положения, выносимые на защиту.

По итогам работы достигнуты следующие результаты:

1. Построено томографическое представление состояний классической частицы с флуктуациями координаты и импульса.

2. Получено кинетическое уравнение Лиувилля в томографическом представлении для многих частиц и выполнена процедура редукции этого уравнения, аналогичная построению цепочки Боголюбова. Рассмотрен простейший пример релятивистского кинетического уравнения для свободной частицы в томографическом представлении.
3. Изучены свойства сепарабельности и запутанности квантовых состояний частиц со спином и их корреляционных свойств с использованием томограмм спиновых состояний.
4. Сформулирован критерий, позволяющий в некоторых случаях определить для двух кутритов, является ли их состояние запутанным.
5. Записаны зависящие от состояний соотношения неопределенностей для двух состояний фотона в форме неравенств, которые могут быть проверены экспериментально.
6. Получено несколько новых неравенств для энтропии состояний, заданных спиновыми томограммами, в том числе в случае двухчастичной системы и в случае олной частицы со спином.
7. Введен томографический кумулянт, являющийся характеристикой степени негауссовости состояния, который может быть измерен в экспериментах по гомодинному детектированию фотонов.
8. Получены новые неравенства для полиномов Эрмита двух переменных.
9. Предложено описывать состояние гибридной системы, состоящей из классической и квантовой подсистем совместной томографической функцией распределения вероятностей, изучены свойства таких томограмм. Предложено модельное уравнение эволюции для томограммы состояний гибридной системы.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Основу диссертации составляют результаты, опубликованные в 13 научных статьях в реферируемых журналах и 2 статьях в сборниках трудов конференций.

I. V. N. Chernega and V. I. Man'ko, "Qubit portrait of qudit states and Bell inequalities," *J. Russ. Laser Res.*, **28**, 103–123 (2007).

II. V. N. Chernega and V. I. Man'ko, "Wave function of the harmonic oscillator in classical statistical mechanics," *J. Russ. Laser Res.*, **28**, 535–547 (2007).

III. В. И. Манько, О. В. Манько, Н. В. Чернега, "Неравенства Белла и запутанные состояния спиновых систем" в сборнике: "Физика Атомного Ядра и Элементарных Частиц", Материалы XXXIX и XL Зимней Школы, Из-во ИПЯФ РАН, Санкт-Петербург (2007), стр. 261–284.

IV. V. N. Chernega and V. I. Man'ko, "Relativistic quantum and classical kinetic equations in the tomographic-probability representation," *J. Russ. Laser Res.*, **29**, 43–48 (2008).

V. V. N. Chernega and V. I. Man'ko, "The wave function of the classical parametric oscillator and the tomographic probability of the oscillator state," *J. Russ. Laser Res.*, **29**, 347–356 (2008).

VI. V. N. Chernega and V. I. Man'ko, "Entropy and information characteristics of qubit states," *J. Russ. Laser Res.*, **29**, 505–519 (2008).

VII. V. N. Chernega and V. I. Man'ko, "Bistohastic matrices and statistical characteristics of quantum observables," *J. Russ. Laser Res.*, **30**, 359–367 (2009).

VIII. V. N. Chernega, V. I. Man'ko, and B. I. Sadovnikov, "Radon transform and kinetic equations in the tomographic representation," *J. Russ. Laser Res.*, **30**, 570–577 (2009) [arXiv:0911.0147].

IX. Vladimir N. Chernega, "How can we check uncertainty relation?" *Phys. Scr.*, **T147**, 014006 (2012) [arXiv:1201.6628].

X. О. В. Манько, В. Н. Чернега, "Квантовые корреляции и томографическое представление", *Письма ЖЭТФ*, **79**, N 9, 642–648 (2013).

XI. V. N. Chernega and V. I. Man'ko, "System with classical and quantum subsystems in the tomographic probability representation," *AIP Conference Proceedings*, **1424** (2012), p. 33–39 [arXiv:1204.3854].

XII. V. N.Chernega and V. I. Man'ko, "State extended uncertainty relations and tomographic inequalities as quantum system state characteristics," *Int. J. Quantum Inform.*, **10**, 1241017 (2012) [arXiv:1210.0464].

XIII. В. И. Манько, Б. И. Садовников, В. Н. Чернега, "Томографическое представление кинетических уравнений в классической статистической механике", *Вестник Московского университета, серия 3: Физика. Астрономия*, No. 5, 26–31 (2010).

XIV. V. N. Chernega, "Purity dependent uncertainty relations and a possible enhancement of the quantum tunneling phenomenon," *J. Russ. Las. Res.*, **34**, 168–174 (2013) [arXiv:1303.5238].

XV. V. N. Chernega and V. I. Man'ko, "Probability representation and state-extended uncertainty relations," *J. Russ. Laser Res.*, **32**, 125–129 (2011) [arXiv:1102.1948].

Список литературы

[1] E. Schrödinger, "Quantisierung als Eigenwertproblem", *Ann. Phys* (Leipzig), **79**, 489 (1926).

[2] L. D. Landau, "Проблема затухания в волновой механике", *Z. Physik*, **45**, 430 (1927).

[3] J. von Neumann, "Wahrscheinlichkeitstheoretischer Aufbau der Quantenmechanik", *Nach. Ges. Wiss. Göttingen*, **11**, 245 (1927); *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Springer, Berlin (1932).

[4] E. Wigner, "On the quantum correction for thermodynamic equilibrium," *Phys. Rev.*, **40**, 749 (1932).

[5] D. I. Blokhintsev, "The Gibbs quantum ensemble and its connection with the classical ensemble," *J. Phys.*, **2**, 71 (1940).

[6] K. Husimi, "Some formal properties of the density matrix," *Proc. Phys. Math. Soc. Jpn*, **23**, 264 (1940).

[7] R. J. Glauber, "Coherent and incoherent states of the radiation field," *Phys. Rev.*, **131**, 2766 (1963).

[8] E. C. G. Sudarshan, "Equivalence of semiclassical and quantum mechanical descriptions of statistical light beams," *Phys. Rev. Lett.*, **10**, 277 (1963).

[9] S. Mancini, V. I. Man'ko, and P. Tombesi, "Symplectic tomography as classical approach to quantum systems," *Phys. Lett. A*, **213**, 1 (1996).

[10] A. Ibort, V. I. Man'ko, G. Marmo, A. Simoni, and F. Ventriglia, "An introduction to the tomographic picture of quantum mechanics," *Phys. Scr.*, **79**, 065013 (2009).

[11] M. Bellini, A. S. Coelho, S. N. Filippov, V. I. Man'ko, and A. Zavatta, "Towards higher precision and operational use of optical homodyne tomograms," *Phys. Rev. A*, **85**, 052129 (2012).

[12] В. И. Манько, О. В. Манько, "Томография спиновых состояний", *ЖЭТФ*, **112**, 796(1997).

[13] В. А. Андреев, В. И. Манько, О. В. Манько и Е. В. Щукин, "Томография спиновых состояний, критерий перепутанности и неравенства Белла", *ТМФ*, **146**, 140 (2006); V. A. Andreev, O. V. Man'ko, V. I. Man'ko, and S. S. Safonov, "Spin states and probability distribution functions," *J. Russ. Laser Res.*, **19**, 340 (1998); В. А. Андреев, В. И. Манько, "Томография двухчастичных спиновых состояний", *ЖЭТФ*, **114**, 437 (1998).

[14] V. N. Chernega, O. V. Man'ko, V. I. Man'ko, O. V. Pilyavets, and V. G. Zborovskii, "Tomographic characteristics of spin states," *J. Russ. Laser Res.*, **27**, 132 (2006).

[15] С. Н. Филиппов, "Квантовые состояния и динамика спиновых систем и электромагнитного поля в представлении томографической вероятности", диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, Москва (2012), 172 с.

[16] О. В. Пилявец, "Некоторые вопросы применения вероятностного представления в квантовой механике и теории бозонных квантовых каналов с памятью", диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, Москва (2009), 149 с.

[17] Г. Г. Амосов, "Вероятностные и когомологичесеские характеристики квантовых динамических систем", диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, Москва (2008), 212 с.

[18] Я. А. Коренной, "Вероятностное представление квантовой механики и неклассических состояний поля излучения,"диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, Москва (2011), 141 с.

[19] D. F. Styer, M. S. Balkin, M. M. Becker, M. R. Burns, C. E. Dudley, S. T. Forth, J. S. Gaumer, M. A. Kramer, D. C. Oertel, L. H. Park, M. T. Rinkoski, C. T. Smith, and T. D. Wotherspoon, "Nine formulations of quantum mechanics," *Am. J. Phys.*, **70**, 288 (2002).

[20] Н. Н. Боголюбов, *Избранные статьи* (в трех томах), *Наукова Думка*, Киев (1966); Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, *Введение в теорию квантованных полей*, Наука, Москва (1957); Ю. М. Белоусов, В. И. Манько, *Матрица плотности. Представления и применения в статистической механике.* Учебное пособие для студентов высших учебных заведений по направлению "Прикладная математика и физика", Москва, МФТИ (2004), Часть I, 176 с. и часть II, 163 с.

[21] Н. Н. Боголюбов (мл.), Б. И. Садовников, *Некоторые вопросы статистической механики*, Москва, Высшая школа (1975).

[22] J. E. Moyal, "Quantum mechanics as a statistical theory," *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **45**, 99 (1949).

[23] J. Radon, "Uber die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte langs gewisser Mannigfaltigkeiten," *Ber. Sachs. Akad. Wiss.*, Leipzig, **69**, 262 (1917).

[24] O. V. Man'ko and V. I. Man'ko, "Quantum state in the probability representation and tomography," *J. Russ. Laser Res.*, **18**, 407 (1997).

[25] В. Л. Гинзбург, И. Е. Тамм, "К теории спина", *ЖЭТФ*, **17**, 227 (1947).

[26] V. L. Ginzburg, "On relativistic wave equations with a mass spectrum," *Acta Phys. Pol.*, **15**, 163 (1956); V. L. Ginzburg, V. I. Man'ko, "Relativistic oscillator models of elementary particles," *Nucl. Phys.*, **74**, 577 (1965).

[27] M. A. Марков, "К теории динамически деформируемого формфактора", *ДАН СССР*, **101**, 51 (1955).

[28] M. A. Markov, "On dynamically deformable form factors in the theory of elementary particles," *Nuovo Cim.*, Ser. X, **3**, No 4 Suppl., 760(1956).

[29] И. М. Гельфанд, Я. Н. Яглом, "Общие релятивистски инвариантные уравнения и бесконечномерные представления группы Лоренца", *ЖЭТФ*, **18**, 703; 1094; 1105 (1948).

[30] Л. М. Сладь, "К теории бесконечнокомпонентных полей с двойной симметрией. Свободные поля", *ТМФ*, **129**, 68 (2001).

[31] Л. М. Сладь, "К теории бесконечнокомпонентных полей с двойной симметрией. Взаимодействие полей", *ТМФ*, **133**, 54 (2002).

[32] V. V. Dodonov and V. I. Man'ko, "Positive distribution description for spin states," *Phys. Lett. A*, **239**, 335 (1997).

[33] J. S. Bell, "Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics," *Physics* (Long Island, New York, USA), **1**, 195 (1964).